

## **Análise das questões sobre probabilidade no Exame Nacional do Ensino Médio no Brasil de 2013 a 2019**

**Cileda de Queiroz e Silva Coutinho**

[cileda@pucsp.br](mailto:cileda@pucsp.br)

<https://orcid.org/0000-0002-5625-1517>

*Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)*

São Paulo, Brasil.

**Auriluci de Carvalho Figueiredo**

[aurilucy@uol.com.br](mailto:aurilucy@uol.com.br)

<https://orcid.org/0000-0002-2856-0064>

*Universidade Metropolitana de Santos (UNIMES)*

Santos, Brasil.

**Recibido:** 25/09/2020 **Aceptado:** 15/02/2021

### **Resumo**

Neste artigo discutimos o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que avalia o desempenho escolar ao final da educação básica brasileira, frente a conteúdos probabilísticos que foram avaliados nas versões aplicadas de 2013 a 2019. A pesquisa qualitativa documental analisou documentos oficiais que regem a educação básica brasileira, com o objetivo de identificar quais conhecimentos probabilísticos são requeridos nessa fase do ensino. Entre os resultados identificados, destacamos que as organizações praxiológicas permitem reconhecer alguns dos elementos cognitivos do modelo de letramento probabilístico, assim como foi possível estabelecer um crescente na complexidade dos contextos e formulações dos enunciados. As praxiologias identificadas também permitem observar a complexificação das tarefas ao longo do intervalo de tempo analisado, assim como perceber as mudanças advindas da implementação da Base Nacional Comum Curricular que rege o currículo brasileiro atualmente.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Exame Nacional do Ensino Médio. Organização Praxiológica

### **Resumen**

En este artículo discutimos el Examen Nacional de Secundaria (ENEM), una prueba que tiene como objetivo evaluar el desempeño escolar de los estudiantes brasileños al finalizar la educación básica, y comparamos el contenido probabilístico que fue evaluado en las versiones aplicadas de 2013 y 2019. La investigación documental cualitativa analizó documentos oficiales que rigen la educación básica brasileña, para identificar qué conocimientos probabilísticos se requieren en esta fase de la enseñanza. Entre los resultados, identificamos que las organizaciones praxiológicas permiten reconocer algunos de los elementos cognitivos del modelo probabilístico de alfabetización, así como fue posible establecer una creciente complejidad de contextos y formulaciones de enunciados. Las praxiologías identificadas también permiten observar la complejidad de las tareas en el intervalo de tiempo analizado, así como percibir los cambios derivados de la implementación de la Base Curricular Nacional Común que rige actualmente el currículo brasileño.

**Palabras clave:** Probabilidad. Examen nacional de secundaria. Organización Praxiológica

### **Abstract**

In this paper, we discuss the National High School Examination (ENEM), an assessment test that evaluates the students' school performance at the end of basic education, and compare the probabilistic content evaluated in the versions applied from 2013 to 2019. The qualitative documentary research analyses the official documents that govern the Brazilian basic education, to identify which probabilistic knowledge is required in this teaching level. Among the results, we identified the praxiological organizations that allow recognizing some of the cognitive elements of the probabilistic literacy model; it was also possible to establish an increasing complexity of contexts and formulations of statements. The praxiologies identified also help observing the complexity of the tasks over the analysed time interval, as well as perceiving the changes arising from the implementation of the Common National Curricular Base that currently governs the Brazilian curriculum.

**Keywords:** Probability. National High School Exam. Praxiological Organization

### **Introdução**

Conhecimentos sobre probabilidade vêm sendo cobrados em provas oficiais da educação básica no Brasil, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), a Prova Brasil e o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Ministério da Educação e do Desporto, 1997, 1998, 2000, 2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (Ministério da Educação e do Desporto, 2006) quanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Ministério da Educação e do Desporto, 2018a), que regem a educação básica no país, explicitam que ao estudar probabilidade o aluno deve perceber que em seu cotidiano há muitos eventos de natureza aleatória e deve conseguir identificar possíveis resultados destes.

Para cada uma dessas avaliações externas que são a nível Nacional, como o ENEM, também há as próprias orientações que são as matrizes de referência do ENEM, que listam as competências requeridas na matemática e, em particular, no campo da probabilidade, que é o foco desta pesquisa.

O ENEM foi instituído em 1998 como procedimento de avaliação do desempenho do aluno, ocorre anualmente e visa:

(...) conferir ao cidadão parâmetro para autoavaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho; criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio; fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior e constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio. (Ministério da Educação e do Desporto, 1998, p. 1)

Pesquisadores como Goulart (2015), Hollas e Bernardi (2020), Serra (2015), Pontes e Nuñez (2019), Viali e Silva (2010), se debruçam para analisarem as questões do ENEM que envolvem estatística e probabilidade, sempre com maior ênfase na primeira, analisando as quantidades de questões, os conceitos mobilizados, a linguagem utilizada, entre outros.

Em este trabalho, analisaremos questões do ENEM de 2013 a 2019 que envolveram conhecimentos de probabilidade, de modo a identificarmos que conhecimentos de probabilidade estão sendo mobilizados para a resolução de suas questões. Nossa análise se guiará pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), particularmente sob o olhar da organização praxiológica, visando verificar sob quais condições didáticas as praxiologias identificadas requerem a mobilização dos conhecimentos elementares do letramento probabilístico explicitados nos documentos oficiais, nos termos de Gal (2005), do aluno que termina a educação básica. O Quadro 1 identifica os elementos cognitivos desse modelo.

Analisaremos também em que contextos ocorrem os enunciados de suas questões, e para tal tomamos como referência as quatro categorias de contexto do exame presentes no relatório da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OECD (2019): pessoal, ocupacional, de sociedade e científico, que são usados para classificar os itens de avaliação desenvolvidos para o exame do PISA 2018. Discorreremos com mais detalhes sobre nosso marco teórico ao longo das análises, à medida que os conceitos pertinentes forem mobilizados.

#### Quadro 1.

##### Elementos do modelo de letramento probabilístico proposto por Gal (2005)

<b>1. Grandes tópicos</b>	Abordagem com tópicos fundamentais: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza
<b>2. Cálculos probabilísticos</b>	Maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos
<b>3. Linguagem</b>	Termos e métodos usados para comunicar sobre probabilidade.
<b>4. Contexto</b>	Compreender o papel e as implicações das questões probabilísticas nas mensagens em vários contextos, incluindo os cotidianos.
<b>5. Questões críticas</b>	Questões para refletir quando se lida com probabilidade.

Fonte: adaptado de Gal, 2005, p. 46

Apresentaremos os resultados de uma pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica documental. Serão analisadas as provas e documentos técnicos sobre conhecimento

probabilístico que são requeridos aos alunos ENEM, isto é, o objetivo desta pesquisa aqui apresentada é identificar e analisar as questões propostas nesse exame relativas ao tema probabilidade no período de 2013 a 2019.

### **Documentos oficiais que regem a educação básica**

Os documentos oficiais que regiam a educação básica brasileira até 2018 - período em que foram aplicadas as provas analisadas - e a formação do aluno da educação básica eram os PCN do Ensino Fundamental (1997, 1998), o PCN do ensino médio (ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, PCN+ (ciências da natureza, matemática e suas tecnologias), e as orientações curriculares para o ensino médio. De acordo com os PCN do Ensino Fundamental II, que compreende do 6º ao 9º ano desse segmento, os objetivos são:

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (Ministério da Educação e do Desporto, 1998, p.52)

O documento também indica que se deve aliar problemas de contagem, com o objetivo de levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e a compreensão do princípio multiplicativo, para sua aplicação no cálculo de probabilidades. Vale ressaltar que abordamos, neste texto, os documentos do ensino fundamental para que possamos compreender uma sequência de orientações quanto ao ensino de probabilidades, desde os anos iniciais da escola básica brasileira até o seu final, no 3º ano do ensino médio.

Os objetivos da probabilidade que constam nos PCN em relação aos anos finais do ensino fundamental estão explícitos no Quadro 2. Os PCN também sugerem para estes dois ciclos alguns dos contextos que podem ser trabalhados que indicam que alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos como moedas, dados, cartas, roletas com área desiguais para números. Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana. Aparentemente, as indicações de contextos da vida cotidiana ficaram somente nos jogos, o que limita a situações de equiprobabilidade.

Quadro 2.

Objetivos da Probabilidade nos PCN – Ensino Fundamental II

<b>Ciclos</b>	<b>Objetivos</b>
<b>3º Ciclo (equivale a 6º e 7º anos do ensino fundamental)</b>	Resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.
<b>4º Ciclo (equivale a 8º e 9º ano do ensino fundamental)</b>	Construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

Fonte: adaptado dos PCN – (Ministério da Educação e do Desporto, 1998)

Os parâmetros também enfatizam que o estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Sugerem também que o trabalho com probabilidade é fundamental que os alunos compreendam

(...) o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore. Desse modo, será possível indicar o sucesso de um evento utilizando-se de uma razão. (Ministério da Educação e do Desporto 1998, p. 137-138)

Os conteúdos do bloco análise de dados e probabilidade (Ministério da Educação e do Desporto 2000, 2002, 2006) têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista “reside na importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social” (Ministério da Educação e do Desporto 2000, p.78). Em relação aos tópicos de probabilidade, os alunos devem desenvolver estratégias para a resolução das seguintes tarefas:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. (Ministério da Educação e do Desporto, 2002, p. 127-128)

Para as orientações curriculares para o ensino médio (Ministério da Educação e do Desporto, 2006) o estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois neles consta que os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem estreita inter-relação entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. O documento aponta para contextos de jogos, como o de extrair aleatoriamente três bolas de uma urna que contém quatro bolas em seu interior, e com isso gera quatro possibilidades. As orientações enfatizam a utilização do diagrama de árvores, pois consideram que é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, já que permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Como nos PCN do Ensino Fundamental, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio admitem que ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia, mas não indicam quais são e nem como tratar esses contextos em sala de aula em cada um dos anos da educação básica. Sugerem as orientações que os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado. Nota-se ainda a prevalência da limitação a situações de equiprobabilidade, o que, em pesquisas da área tais como a de Lecoutre (1985), não é indicada, pois induz a um obstáculo epistemológico à construção do conceito de probabilidade: “o obstáculo da equiprobabilidade existe quando o sujeito fornece sua resposta de equiprobabilidade se apoiando sobre um “princípio de equiprobabilidade segundo o qual os eventos de caráter aleatório seriam, por natureza, equiprováveis”” (Lecoutre 1985, p.196)

O documento atual que está regendo o ensino médio em nível nacional é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que especifica o quê de cada ano da escolaridade básica deve contemplar em relação à probabilidade, tornando explícitos tanto os conteúdos a serem desenvolvidos, como as competências a serem adquiridas pela educação básica. Não detalharemos aqui esse documento por não ter entrado em vigor nas provas analisadas do ENEM em sua totalidade, pois ainda não temos alunos formados sob a égide desse

documento, que começou a ser implementado em 2018 para o ensino fundamental e em 2019 para o ensino médio.

### **A importância do ENEM e algumas considerações**

O ENEM é aplicado em dois dias. Os participantes fazem provas de *linguagens, códigos e suas tecnologias* e *ciências humanas e suas tecnologias* no primeiro dia da prova; no segundo dia a prova versa sobre ciências da natureza e suas tecnologias e a matemática e suas tecnologias, que somam 180 questões, 90 questões para cada dia para as quais o aluno dispõe de um tempo de cinco horas para resolver, o que resulta em aproximadamente três minutos por questão.

A política de acessibilidade e inclusão é levada em conta e garante atendimento especializado e tratamento pelo nome social, além de diversos recursos de acessibilidade. No segundo dia, que envolve entre as questões conhecimentos da educação básica, das 90 questões, 45 são de matemática; as demais são de física, química e biologia, que devem ser todas respondidas dentro das cinco horas de duração da prova.

Dada a importância que esta prova tem no Brasil, em 2014, o Programa Universidade para Todos (ProUni) começou a usar a nota do ENEM para concessão de bolsas de estudos integrais e parciais a estudantes que buscavam ingressar na educação superior no sistema particular de ensino. Quando o exame completou uma década de criação, trouxe novidades. O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e o Ministério da Educação (MEC) anunciaram que o ENEM se tornaria o processo nacional de seleção para ingresso na educação superior e certificação do ensino médio. Neste ano, mais de 70% dos 4.018.050 inscritos afirmaram que fizeram o ENEM para entrar na faculdade ou conseguir pontos para o vestibular. Além disso, as matrizes de referência são reformuladas com base nas matrizes de referência do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA).

Em 2013, pela primeira vez, quase todas as instituições federais adotam o ENEM como critério de seleção. A nota do exame é utilizada na concessão de bolsas de estudos do programa Ciências sem Fronteiras e passa a ser divulgada por escola, com estratificação nos níveis socioeconômicos. As universidades de Coimbra e Algarve, em Portugal, passaram a aceitar o ENEM, marcando o início das parcerias com instituições de ensino superior de Portugal, autorizadas a utilizar estas notas em seus processos seletivos.

Devido à grande importância no país, são muitos os matriculados que procuram realizá-lo, quer seja para ingresso nas universidades públicas ou privadas no Brasil e

Portugal ou para obtenção da certificação do ensino médio. O número de matriculados entre os anos de 2013 a 2020 são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1.

Evolução dos matriculados e presentes no ENEM de 2014 a 2020

<b>Alunos</b>	<b>Presentes nos dois dias</b>	<b>Matriculados</b>
<b>2013</b>	5.507.319	7.834.024
<b>2014</b>	5.818.446	8.722.248
<b>2015</b>	5.604.905	7.746.427
<b>2016</b>	5.818.446	8.627.367
<b>2017</b>	4.426.755	6.731.341
<b>2018</b>	3.893.743	5.513.747
<b>2019</b>	3.702.008	5.095.270
<b>2020</b>	—	6.121.363

Fonte: dados INEP

Nessa avaliação é possível observar aspectos do letramento probabilístico que são cobrados de estudantes que estão terminando o ensino médio. A matriz de referência do ENEM lista como competências requeridas no campo da probabilidade a “Competência de Área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística” (Ministério da Educação e do Desporto, 2009, p. 6-7).

As habilidades correspondentes são as de calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos, resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade, utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação e avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade (Ministério da Educação e do Desporto, 2009).

Observa-se que entre as competências esperadas para a probabilidade, as habilidades referem-se mais à estatística, embora esteja explícito estatística e probabilidade. Tal fato pode explicar o baixo número de questões, proporcionalmente aos outros temas da área de matemática, dedicadas aos problemas de probabilidade, que justifique por que, quando dizem avaliar questões de estatística, os pesquisadores aliam a probabilidade a essas análises buscando ter maior quantidade de questões de análise, ou por acreditarem que ambas devam

estar juntas. De 2013 a 2019, as questões sobre probabilidade no ENEM variaram de uma a quatro, apontados na Tabela 2.

Tabela 2.

Quantidade de Questões de probabilidade no ENEM

Ano	Quantidade
2013	4
2014	2
2015	3
2016	2
2017	3
2018	4
2019	2
<b>Total</b>	<b>16</b>

Fonte: elaborado pelos autores.

A parte relativa à matemática consta de 45 questões, e vale aqui ressaltar a manutenção da proporção de questões de probabilidade, destacando sua pouca presença nos exames, tal como apontam Pereira e Souza (2016).

### Revisão bibliográfica

Outros pesquisadores analisaram questões do ENEM desde a sua implementação, e sempre aliaram estatística e probabilidade em suas buscas. Viali e Silva (2010) tiveram por objetivo verificar os conceitos envolvidos nas questões do ENEM que incluem probabilidade. Buscaram estabelecer comparação com as orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, estudando se grau de dificuldade estaria adequado a alunos desse nível de escolaridade. Tomaram para as suas análises as questões que envolvem probabilidade na prova aplicada em 2009, ano esse que o ENEM passou por uma reformulação e apresentou uma nova matriz de referência do ENEM, já mencionada anteriormente, que são as vigentes até esse momento.

Esses pesquisadores procuram levantar quais conteúdos de probabilidade são necessários mobilizar para a resolução de quatro itens dessa prova, e estabelecem relação entre elas e as orientações contidas nos PCN+. Indicam que há questões que envolvem o conceito clássico de probabilidades com leitura direta dos dados no gráfico, outra que envolve propriedades do conceito de probabilidade, conceito de dependência/independência entre eventos, teorema da multiplicação e análise combinatória em uma mesma questão.

Apontam que a formulação dos enunciados pode provocar erros de interpretação por parte dos estudantes e acreditam que tal fato dificultou o entendimento de conceitos como independência de eventos. Os autores comentaram sobre a probabilidade expressa como porcentagem, uso comum nos itens dessa prova de 2009, e advogam que:

“(…) isso não deve ser incentivado, especialmente com alunos desse nível de ensino. Assim, além do exercício apresentar a probabilidade como um percentual, as respostas colocam algumas operações que não são definidas para percentuais.” (p.6).

Goulart (2015) em sua pesquisa, teve por objetivo determinar as relações que podem ser estabelecidas entre o ensino de estatística na educação básica e o ensino de estatística nos cursos de licenciatura em matemática, visando potencializar a formação de professores para o letramento estatístico. Utilizou como base teórica a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e sua perspectiva ecológica, além de análises em documentos que regem a Educação Básica brasileira. Comparou questões de probabilidade e estatística do ENEM com outras provas de larga escala no Brasil, e livros didáticos, para estabelecer relação entre os diversos níveis educacionais que estas provas requerem em relação à educação básica, superior e a formação de professores. Observou descompassos entre os documentos encontrados e as questões que são apresentadas nas provas em relação à probabilidade e estatística. Parte da pesquisa de Goulart analisou as provas do ENEM, até o ano de 2012, estudando as questões que envolvem conhecimento de estatística e de probabilidade. Goulart (2015) identificou as tarefas nas provas do ENEM de 2009 a 2012, descritas no Quadro 3.

Quadro 3.

Tarefas identificadas na análise das questões sobre probabilidade no ENEM de 2009 a 2012

<b>Tarefa</b>	<b>Descrição da tarefa</b>
1	Determinar a probabilidade de um evento
2	Determinar a probabilidade de um evento complementar
3	Determinar a probabilidade da união de dois eventos
4	Determinar a probabilidade da intersecção de dois eventos
5	Determinar a probabilidade da união de três ou mais eventos
6	Determinar a probabilidade da intersecção de três ou mais eventos
7	Determinar a probabilidade de um evento em contexto geométrico
8	Comparar a probabilidade de dois ou mais eventos

Goulart (2015, p. 86)

Nossa proposta envolve continuar essa análise até 2019 limitando-nos às questões sobre probabilidade, de forma a termos um percurso mais completo a partir da pesquisa de Goulart (2015) e utilizando o mesmo referencial teórico utilizado pelo autor.

Serra (2015) analisou as questões das provas do ENEM do período de 2009 a 2014 que apresentam para a sua resolução conhecimentos de probabilidade, estatística e representação gráfica com base nos princípios teóricos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval. Fundamentou-se também, para a análise de gráficos, nos níveis de interpretação segundo Curcio. Para a análise da leitura e interpretação de tabelas fundamentou-se na categorização de Wainer. Suas conclusões apontam que

“as questões que utilizam gráficos para expor os seus dados trazem, em sua quase totalidade, gráficos simples e com poucas informações implícitas, quase nenhuma com gráficos mais elaborados (p.111).

Em relação às tabelas, o autor aponta para o mesmo tipo de limitação, ou seja, para questões que expõe tabelas apenas para organizar os dados e não para a sua interpretação. Além dessas análises em relação às questões do ENEM que mobilizam tais conhecimentos, Serra (2015) comparou as principais competências e habilidades envolvidas na matriz de referência do ENEM com as envolvidas nas questões do exame. Apontou que os conteúdos selecionados necessitavam de revisão e melhor adequação às competências e habilidades previstas da matriz de referência curricular do ENEM. Esse autor identificou “uma intenção de apresentação das questões de forma contextualizada, mas em alguns casos um tanto forçada” (p.139). O problema de contextualização será discutido mais adiante neste texto, uma vez que é um dos itens de nossas análises.

Pereira e Souza (2016) tiveram por objetivo de mostrar como foi avaliado no ENEM o ensino de estatística no período de 2009 a 2015 sob a perspectiva da construção do pensamento e letramento estatístico e probabilístico. Constataram que das 81 questões analisadas, 20 continham conteúdos de probabilidade e 61 de estatística. Para analisarem tais questões, os pesquisadores tomaram como referencial teórico o modelo de letramento estatístico de Gal (2005) e, em suas análises, não distinguem questões que envolvem conhecimento estatístico daquelas que envolvem conhecimentos probabilísticos. Apontam que as análises efetuadas oferecem indícios para afirmar que as questões não contribuem de forma plena para a construção do desenvolvimento do letramento estatístico segundo o modelo proposto por Gal (2005), pois consideram importante frisar que ser letrado estatisticamente significa gozar da interpretação e avaliação crítica da informação estatística, discutindo e se comunicando acerca de suas ideias a respeito dessas informações.

Nos estudos de Pereira e Souza (2016), assim como nos de Serra (2015), foram identificadas que algumas das habilidades que constam na matriz de referência do ENEM não foram contempladas nessas provas, tais como as habilidades que favorecem o desenvolvimento do letramento estatístico a - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação e Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade (Ministério da Educação e do Desporto, 2009). Identificamos na pesquisa de Pereira e Souza (2016) que as análises realizadas tratam sempre de forma conjunta os conceitos estatísticos com os probabilísticos, e fazemos a hipótese de que possa ser provocado pela própria matriz de referência que aponta as habilidades aparecem sempre descritas na mesma referência. Em relação à análise de questão que envolve probabilidade, esses pesquisadores apontam para um tratamento de contexto que apenas atua como “pretexto” para a obtenção dos dados para os cálculos.

Pontes e Nuñez (2019) estudaram as questões do ENEM de estatística e probabilidade e apresentaram a identificação e caracterização dos erros e das dificuldades de aprendizagem dos seus conteúdos que foram mais assinalados por estudantes egressos do ensino médio, relacionados aos distratores das questões da prova de 2013 a 2016. Esses pesquisadores iniciaram suas análises tomando as competências e habilidades presentes na matriz de referência do ENEM, segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (Ministério da Educação e do Desporto, 2009) e os identificando nas questões que mobilizam conhecimento estatístico ou probabilísticos. Para as análises quantitativas do desempenho dos estudantes, foram organizados os percentuais e as quantidades (absolutas) para cada opção de resposta (o gabarito e os quatro distratores). Segundo o INEP, distratores são as alternativas das questões que não correspondem à resposta correta.

Em relação aos distratores, Pontes e Nuñez (2019) procuraram caracterizar não apenas os erros, mas também as dificuldades de aprendizagem que podem estar associadas nas questões de estatística e probabilidade que tiveram o mais baixo desempenho na prova do ENEM. Em relação à probabilidade, um dos erros encontrados pelos pesquisadores foi na transformação da linguagem comum para linguagem simbólica e vice-versa, assim como distinção das hipóteses em probabilidades condicionadas. Em relação à probabilidade condicional, apontam o trabalho de Falk (1986), que fez um estudo sobre essa temática, e está relacionada ao fato de os estudantes não distinguirem entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, ou seja, entre as duas probabilidades  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$ .

Hollas e Bernardi (2020) apresentaram uma discussão de como as questões de estatística e as de probabilidade propostas nas provas do ENEM podem contribuir para o desenvolvimento de uma educação estatística crítica no ensino médio brasileiro. Os pesquisadores indicaram que o estudo permitiu inferir que nos parâmetros em que está organizado o ENEM, não pode ser seu elemento mobilizador, pois carece de elementos críticos, reflexivos, problematizações e contextualizações, impulsionando uma formação acrítica. Apontaram que a interpretação de gráficos e/ou tabelas exige a utilização de poucos ou nenhum cálculo estatístico, sendo insuficiente quanto ao raciocínio, pensamento e letramento estatístico. Os autores consideraram que a probabilidade faz parte de dados estatísticos como números que expressam um contexto real, podendo envolver ideias de probabilidade e, que a prova organizada de maneira objetiva pode oferecer alguns obstáculos para o desenvolvimento de questões que contemplem uma educação estatística crítica, pois limitam as alternativas na formulação das questões.

### **Referencial teórico e metodológico**

A pesquisa aqui relatada é de cunho qualitativo, de tipo estudo documental, nos termos de Fiorentini e Lorenzato (2009). Os dados coletados visam atingir o objetivo da pesquisa, de identificar as praxiologias presentes nas questões relativas à probabilidade formuladas nas provas do ENEM de 2013 e 2019, analisando a presença de contextos de acordo com o PISA (OECD, 2019).

Analisamos documentos oficiais para mapear os conhecimentos probabilísticos que se espera do aluno que tenha concluído a educação básica, e que deva ser desenvolvido durante os anos de escolaridade. Além desses documentos, analisamos também as questões que abordaram a probabilidade nas provas do ENEM. Buscamos identificar os objetivos de tais questões, o problema a ser resolvido e as formas de resolvê-lo, com suas respectivas justificativas (organização matemática), assim como os contextos apresentados nos enunciados, segundo as categorias propostas pela OECD (2019).

Nossa escolha do ano de início das análises foi pautada na pesquisa de Goulart (2015), que analisou as provas do ENEM até a realizada em 2012, em relação ao letramento probabilístico requerido para resolvê-las, e o referencial teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Portanto, em relação à busca das praxiologias, daremos continuidade quanto a essas provas.

Para analisar as questões do ENEM, tomamos também como referencial teórico a TAD (Chevallard, 1999), que “situa a atividade matemática e, em consequência, a atividade

do estudo de Matemática, dentro do conjunto das atividades humanas e das instituições sociais” (Chevallard, 1999, p. 221). Almouloud (2007) ressalta a importância dessa teoria para a didática da matemática, por ser

uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza os estudos das organizações praxiológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas (p. 111).

A premissa básica da TAD (Chevallard, 1999) é que toda atividade humana realizada regularmente pode ser descrita por um mesmo modelo, que o autor resume na palavra ‘praxiologia.’ No âmbito dessa teoria, Gascón (2003) elucida que uma organização matemática surge sempre como resposta a uma questão ou a um conjunto delas, e tal organização tem quatro componentes principais: tipos de problema, técnicas, teorias e tecnologias. Expõe que se contemplarmos as:

[...] relações dinâmicas que são estabelecidas entre esses componentes, a fim de realizar a atividade matemática necessária para responder as questões matemáticas iniciais, [...] aparecem duas faces inseparáveis: a prática matemática o “práxis”,  $\{T/\tau\}$ , formada pelas tarefas,  $T$ , e as técnicas matemáticas,  $\tau$ ; e o “logos”,  $\{\theta, \Theta\}$ , constituído pelo discurso matemático que justifica e interpreta esta prática e que estruturamos em dois níveis: a tecnologia,  $\theta$ , que faz referência direta com a prática, e a teoria,  $\Theta$ , que consiste em um segundo e último nível de justificação da prática (ou tecnologia da tecnologia). Ao unir as duas faces da atividade da matemática, práxis e logos, se obtém a noção de praxiologia matemática. (Gascón, 2003, p. 16).

Analisamos as questões do ENEM para identificar qual organização matemática estaria presente no estudo do objeto matemático ‘probabilidade’, traçando um esboço praxiológico das atividades matemáticas ao descrevê-las por meio dos quatro componentes citados. Em síntese, podemos dizer que em torno de um conjunto de tarefas  $T$  encontra-se um trio formado por uma técnica capaz de executar esse conjunto de tarefas, uma tecnologia relativa a essa técnica e uma teoria relativa a esta tecnologia. O conjunto (sistema) assim formado é denominado praxiologia ou organização praxiológica relativa ao conjunto de tarefas  $T$ .

Nestas condições, buscamos identificar quais as tarefas estão presentes nos exercícios propostos nas provas do ENEM, visando compreender quais conhecimentos são requeridos do aluno para que este desenvolva uma estratégia segundo as técnicas associadas a cada uma dessas tarefas. O discurso tecnológico-teórico nos permitirá identificar qual campo da probabilidade espera-se que o aluno mobilize.

Em relação aos contextos, para fins da estrutura matemática do PISA 2018 (OECD, 2019), quatro categorias de contexto foram definidas e são usadas para classificar os itens de avaliação desenvolvidos para o exame do PISA, apontadas no Quadro 4.

Quadro 4.

Categorias de Contexto

<b>Contexto</b>	<b>Descrição</b>
<b>Pessoal</b>	Se concentram nas atividades pessoais, de sua família ou de um grupo de pares. Os tipos de contextos que podem ser considerados pessoais incluem (mas não estão limitados a) aqueles que envolvem preparação de alimentos, compras, jogos, saúde pessoal, transporte pessoal, esportes, viagens, agendamento pessoal e finanças pessoais.
<b>Ocupacional</b>	São centrados no mundo do trabalho. Os itens categorizados como ocupacionais podem envolver (mas não estão limitados a) medição, cálculo de custos e pedidos de materiais para construção, folha de pagamento / contabilidade, controle de qualidade, programação / estoque, design / arquitetura e tomada de decisão relacionada ao trabalho. Os contextos ocupacionais podem estar relacionados a qualquer nível da força de trabalho, desde o trabalho não qualificado até os níveis mais elevados de trabalho profissional, embora os itens da avaliação do PISA devam ser acessíveis a alunos de 15 anos de idade.
<b>Social</b>	enfocam a comunidade (seja local, nacional ou global). Eles podem envolver (mas não estão limitados a) exemplos como sistemas de votação, transporte público, governo, políticas públicas, demografia, publicidade, estatísticas nacionais e economia. Embora os indivíduos estejam envolvidos em todas essas coisas de uma maneira pessoal, na categoria de contexto social o foco dos problemas está na perspectiva da comunidade.
<b>Científico</b>	referem-se à aplicação da matemática ao mundo natural e a questões e tópicos relacionados à ciência e tecnologia. Contextos específicos podem incluir (mas não estão limitados a) áreas como tempo ou clima, ecologia, medicina, ciências espaciais, genética, medição e o próprio mundo da matemática. Itens que são intramatemáticos, onde todos os elementos envolvidos pertencem ao mundo da matemática, se enquadram no contexto científico

Fonte: adaptado do OECD (2019, p.88).

### **Análise e discussão dos dados**

Apresentamos, na sequência, uma síntese dos conteúdos envolvidos em cada uma das questões no período de 2013 a 2019, identificando o tipo de contexto, segundo as categorias da OECD (2019). Separamos as análises em dois blocos: em primeiro lugar, analisamos as questões referentes à probabilidade de 2013 a 2016 para as que apresentamos somente uma síntese da organização praxiológicas identificadas e os contextos envolvidos. Em seguida, fazemos uma análise mais detalhada das questões de 2017 a 2019, que constituem

o Novo ENEM, por serem as provas mais atuais e por apresentarem enunciados mais complexos. Nosso objetivo nesta análise é identificar esses conteúdos e relacioná-los com o proposto nos documentos oficiais, assim como observar a evolução de tais conteúdos ao longo do tempo.

### ***Análise das questões de 2013 a 2016***

O Quadro A1, em anexo, contém algumas das características dessas questões propostas em 2013 a 2016. Algumas questões propostas no período de 2013 a 2016 não coadunam com as tarefas propostas por Goulart (2015), resumidas no Quadro 3, pois em sua complexificação elas admitem que as tarefas sejam relacionadas a técnicas construídas por subtarefas, como mostraremos mais adiante no texto. Observamos também que, para esse autor, as técnicas não consideram a identificação da experiência aleatória, o que supomos estar implícito na identificação da tarefa.

### ***Análise das questões de 2017 a 2019***

Na sequência são analisadas as provas de 2017 a 2019. Para cada ano se inclui um quadro-resumo e se analisa com detalhes a organização praxiológica de algumas das tarefas propostas em cada ano. O Quadro A2, em anexo, ilustra as questões relativas ao exame de 2017, explicitando o enunciado, os conteúdos probabilísticos envolvidos e o contexto identificado nesses enunciados, nos termos da OECD (2019).

Com o objetivo de identificar as primeiras mudanças constatadas, no tipo de contexto trazido nas questões propostas, em relação ao período anterior, discutimos na sequência uma delas, já mostrando a organização praxeológica identificada nas etapas da estratégia para resolver o problema.

**Questão 171 – ENEM 2017.** Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de  $\frac{2}{3}$  e a de acusar a cor vermelha é de  $\frac{1}{3}$ . Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

- a)  $\frac{10 \times 2}{3^3}$       b)  $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$       c)  $\frac{2^{10}}{3^{100}}$       d)  $\frac{2^{90}}{3^{100}}$       e)  $\frac{2}{3^{10}}$

Observa-se que o contexto do problema apresentado é um contexto social (OECD, 2019), e ocorre mudança em relação ao período anterior do exame, que é a introdução da Distribuição Binomial de probabilidades, o que não identificamos nos exames anteriores que considerassem esse tipo de contexto. Privilegiava-se o contexto de jogos ou contextos que envolvessem diretamente um sorteio aleatório em um conjunto de objetos ou pessoas. A organização praxiológica desse problema é apresentada no Quadro 5, e nela é possível perceber a não complexidade da tarefa e da técnica associada, mas sim, identificar que se trata de uma binomial. Nesse caso, constitui o discurso tecnológico teórico e pode-se mobilizar o conhecimento da fórmula da probabilidade binomial, que é suficiente para a resolução do problema. O contexto no qual o problema é proposto é o pessoal, mas observa-se que não é um contexto real, mas sim realístico.

Quadro 5.

Organização praxiológica da questão 171 proposta no ENEM, 2017

<b>Tarefa (t)</b>	Determinar a probabilidade de uma pessoa observar exatamente um sinal na cor verde entre os 10 semáforos existentes em uma avenida.
<b>Técnica</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Identificar a experiência aleatória de uma pessoa observar a cor do sinal verde em uma avenida de 10 semáforos. Seja <math>x</math> é o número de semáforos identificados de cor verde.</li> <li>2. Identificar os dados fornecidos pelo enunciado do problema. <math>P(\text{Verde}) = 2/3</math>    <math>P(\text{Vermelha}) = 1/3</math></li> <li>3. Calcular a probabilidade de exatamente de um, entre os dez semáforos, ser identificado por uma pessoa. <math display="block">P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3^9}\right) = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}</math></li> </ol> <p>Resposta correta: Item a</p>
<b>Tecnologia [θ]</b>	Distribuição binomial de probabilidades
<b>Teoria [Θ]</b>	Teoria de probabilidades

Fonte: elaborado pelas autoras

O Quadro A3, em anexo, ilustra as questões propostas no exame de 2018, identificando o enunciado, os conteúdos envolvidos e o contexto, nos termos da OECD (2019). Observa-se que os contextos são sempre ligados, ainda que de forma fictícia, ao cotidiano dos alunos. Para no ano de 2018, apesar dos conteúdos serem os mesmos abordados em outros exames, a complexidade da praxiologia aumenta, conforme exemplo apresentado no Quadro 6.

Elegemos duas das cinco questões do ENEM de 2018 para o detalhamento das organizações praxiológicas por apresentarem enunciados de maior complexidade em relação

aos anos anteriores. Para responder às questões, há necessidade de técnicas mais elaboradas, decompostas em um número maior de etapas e de subtarefas. A seguir apresentamos a questão e a sua análise praxiológica no Quadro 6.

**Questão 176 – ENEM 2018** Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
  - Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
  - Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
  - Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
  - Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.
- Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção
- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4      e) 5

Considerando que o aluno tem apenas 3 minutos para resolver cada uma das questões da prova inteira (contando as duas áreas contempladas), tal técnica se torna bastante complexa, pois a construção das cinco árvores de possibilidade exige tempo do aluno. Dessa forma observamos que não é o contexto que é complexo (contexto pessoal, nos termos da OECD (2019)) ou a técnica que resolve a tarefa.

A repetição necessária da técnica cinco vezes é o que torna o enunciado bastante elaborado. O contexto de jogos também é sugerido nos documentos oficiais que regem a educação básica, e pesquisadores como Rodrigues (2018) também apontam que este contexto de interesse dos alunos é mais facilmente identificado como proveniente de uma experiência aleatória.

Quadro 6.

Organização prexiológica da questão 176 proposta no ENEM 2018

<b>Tarefa (t)</b>	Determinar a opção com a maior probabilidade de obter 2 bolas pretas entre cinco urnas e os experimentos aleatórios em cada uma delas.
<b>Técnica</b>	<p>Analisar cada uma das opções a partir da identificação da experiência aleatória em cada caso e da identificação da tarefa. Para as cinco opções, temos a mesma tarefa: “determinar a probabilidade de obter duas bolas pretas no sorteio em uma urna X dada”. O que diferencia cada uma das opções é a experiência aleatória em jogo, na qual podemos definir dois tipos: “retirar aleatoriamente duas bolas da urna X e verificar a cor” e “retirar aleatoriamente uma bola da urna X e passar para a urna Y, depois retirar aleatoriamente duas bolas da urna Y e verificar a cor”.</p> <p><i>Subtarefa 1: opção 1</i> - Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A e verificar a cor. Composição da urna A: 3 bolas brancas (B), 2 bolas pretas (P) e uma bola verde (V)</p> <p>Subtarefa 2: opção 2 - Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B e verificar a cor; Composição da urna B: 6P, 3B, 1V</p> <p>Subtarefa 3: opção 3 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A e verificar a cor</p> <p>Composição da urna C: 2P e 2V</p> <p>Composição da urna A: depende da bola que é passada de C para A.</p> <p>Se a bola passada é P: 3B, 3P e 1V; Se a bola passada é V: 3B, 2P e 2V</p> <p>Subtarefa 4: opção 4 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C e verificar a cor.</p> <p>Composição da urna D: 3B, 3P</p> <p>Composição da urna C: depende da bola que é passada de D para C.</p> <p>Se a bola passada é B: 1B, 2P, 2V; Se a bola passada é P: 3P, 2V</p> <p>Subtarefa 5: opção 5 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D e verificar a cor.</p> <p>Composição da urna C: 2P, 2V</p> <p>Composição da urna D: depende da bola que é passada de C para D.</p> <p>Se a bola passada é P: 3B, 4P; Se a bola passada é V: 3B, 3P, 1V</p> <p>Para cada uma das subtarefas podemos identificar uma técnica que resolva a tarefa, que é a construção da árvore de probabilidades, que em si não é uma técnica complexa, mas demanda do aluno um tempo para entender a composição de cada urna a ser utilizada e qual opção tomar para obter as duas bolas pretas. Além da árvore de probabilidades, uma técnica acessível para esse nível de escolaridade é a da combinatória, na qual os alunos determinam os valores buscados por meio de técnicas de contagem ligadas à Análise Combinatória.</p>
<b>Tecnologia [0]</b>	Probabilidade condicional; árvore de probabilidade; técnicas de contagem.
<b>Teoria [0]</b>	Teoria das probabilidades e análise combinatória

Fonte: elaborado pelas autoras

O exame de 2016 também contemplou uma questão que envolve sorteio aleatório, com reposição, do primeiro para o segundo, que apresentamos a seguir.

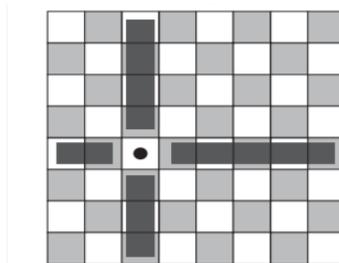
**Questão 180 – 2016.** Uma caixa contém uma cédula de R\$ 5,00, uma de R\$ 20,00 e duas de R\$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior. A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R\$ 55,00 é:

- a)  $\frac{1}{2}$       b)  $\frac{1}{4}$       c)  $\frac{3}{4}$       d)  $\frac{2}{9}$       e)  $\frac{5}{9}$ .

O experimento aleatório, neste caso, consiste em escolher duas notas consecutivas, com reposição da primeira na caixa, e a partir daí a técnica disponível é a enumeração para a identificação da quantidade de elementos do evento e do espaço amostral. Tal enumeração pode ser realizada com auxílio da árvore de probabilidades. A partir disso, o cálculo de probabilidade envolve o enfoque clássico, com a mobilização de conhecimentos sobre independência de eventos, já que é sorteio com reposição. Dessa forma, temos uma tarefa simples (determinar a probabilidade de ter soma maior ou igual a R\$55,00 após dois sorteios com reposição), que é resolvida por uma técnica que consistem em enumerar os eventos do espaço amostral e calcular as probabilidades dos eventos que compõem o evento em questão (é um evento composto, o que se pode observar ao construir a árvore de probabilidades). Observe-se a diferença para a questão 176 – 2018, em que se deve repetir cinco vezes a mesma técnica para que se possa resolver a tarefa proposta.

A próxima questão a ser analisada, também referente ao ano de 2018, dentro do contexto de jogos, requer, além de conhecimentos probabilísticos, uma representação algébrica entre as suas técnicas mobilizadas para a sua resolução. A seguir, apresentamos o enunciado e o Quadro 7 de análises.

**Questão 180 – ENEM 2018.** Um designer de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão  $n \times n$ , com  $n \geq 2$ , no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão  $8 \times 8$ .



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a  $1/5$ .

A dimensão mínima que o designer deve adotar para esse tabuleiro é: a)  $4 \times 4$ . b)  $6 \times 6$ . c)  $9 \times 9$ . d)  $10 \times 10$ . e)  $11 \times 11$ .

Quadro 7.

Análise praxiológica da questão 180 proposta no ENEM 2018

<b>Tarefa</b>	Calcular a dimensão mínima de um tabuleiro de modo que a probabilidade de se posicionar a segunda peça em um jogo seja inferior a $1/5$ .
<b>Técnica</b>	<p>1. Identificar o número de elementos do espaço amostral e do evento, através de uma generalização. Em um tabuleiro existe <math>n^2</math> casa. Como uma já foi usada restam <math>n^2 - 1</math> número de casas disponíveis para a segunda jogada, portanto número de elementos do espaço. Como já foi colocada uma peça em uma casa qualquer, sobram <math>2n - 2</math> em zona de combate, portanto número de elementos do evento.</p> <p>2. Representar a expressão do cálculo da probabilidade clássica, através de uma generalização algébrica: número de elementos do evento sob o número de elementos do espaço <math>\frac{2n-2}{n^2-1}</math>.</p> <p>3. Representar a desigualdade da probabilidade de se posicionar a segunda peça em um jogo seja inferior a <math>1/5</math>: <math>\frac{2n-2}{n^2-1} &lt; \frac{1}{5}</math>.</p> <p>4. Resolver a inequação <math>\frac{2n-2}{n^2-1} &lt; \frac{1}{5}</math>. Então temos que <math>n &lt; 1</math> ou <math>n &gt; 9</math>, como <math>n \geq 2</math>, logo <math>n &gt; 9</math>.</p> <p>5. Identificar dentre as alternativas a dimensão mínima que satisfaz <math>n &gt; 9</math>. A alternativa que corresponde é a letra d) com <math>n = 10</math>, portanto as dimensões do tabuleiro que satisfaz a probabilidade procurada é <math>10 \times 10</math>.</p>
<b>Tecnologia [0]</b>	Probabilidade clássica; generalização algébrica; resolução de inequações do 2º grau.
<b>Teoria [0]</b>	Teoria de probabilidade; álgebra; inequação.

Fonte: elaborado pelas autoras

Observa-se que para as OM identificadas na prova de 2018, temos tarefas em contextos não tão simples para a identificação dos elementos referentes aos experimentos

aleatórios, assim como técnicas diversas relacionadas às tarefas oriundas de cada uma delas. Algumas resolvendo-se pela árvore de probabilidade, generalização algébricas, conceitos de mediana e moda. Ou seja, temos nessa questão a presença de articulações intramatemáticas. Supomos que os estudantes, ao resolverem essas questões, possam procurar eliminar opções de resposta, mas todas se reportam a um mesmo conjunto de definições e propriedades probabilísticas, particularmente referentes à probabilidade condicional e probabilidade clássica, assim como mobilizar outros conhecimentos matemáticos que possam ser necessários para a resolução do problema.

Em anexo apresentamos o Quadro A4 de questões de probabilidade do ENEM (2019), identificando o enunciado, os conteúdos envolvidos e o contexto, nos termos da OECD (2019) e algumas questões para realizar a análise praxiológica (Quadro 8).

**Questão 154 – ENEM 2019.** O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é  $1/2$ . Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber pelo menos uma das placas instaladas fosse superior a  $99/100$ .

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é

- a) 99      b) 51      c) 50      d) 6      e) 1

Tal constatação nos permite delimitar de forma bastante precisa os conteúdos probabilísticos avaliados na prova do ENEM 2019, dentro daqueles indicados nos documentos oficiais. No entanto, as articulações intramatemáticas aliadas a contextos apresentados em formulações de enunciado mais complexas podem ser fonte de dificuldade para que os alunos identifiquem quais conteúdos probabilísticos mobilizar. Pesquisadores como Serra (2015) consideram que, em probabilidade, aparecem muitos contextos não naturais, “forçados”, nas questões. Para Pontes e Nuñez (2019), os alunos podem ter dificuldade de converter o enunciado das questões em uma linguagem simbólica. Retomamos aqui o problema da formulação do enunciado, que juntamente a contextos algumas vezes não familiares ao aluno, podem aumentar o grau de dificuldade da questão. Nesse caso, a publicidade é um contexto familiar, mas a formulação traz dificuldades para a identificação dos conteúdos probabilísticos a serem mobilizados.

Quadro 8.

Análise praxiológica da questão 154 proposta no ENEM 2019

<b>Tarefa</b>	Calcular a quantidade de novas placas de propaganda a serem instaladas ao longo de uma rodovia, de modo que a probabilidade de que um motorista perceba uma das placas seja maior que 99/100.
<b>Técnica</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Identificar a experiência aleatória de o motorista perceber placas de propaganda de um restaurante ao longo de uma determinada rodovia.</li> <li>2. Identificar no enunciado do problema as informações sobre os eventos e respectivas probabilidades simples declaradas. Evento A – um motorista perceber uma placa já existente e <math>P(A) = 1/2</math>.</li> <li>3. Identificar o evento complementar de que o motorista não perceba nenhuma placa. <math>P(A^c) = 1 - P(A)</math>, logo <math>P(A^c) = 1/2</math></li> <li>4. Buscar uma representação para uma generalização da probabilidade de n placas em um evento B – não ver nenhuma placa, logo <math>P(B) = (1/2)^n</math>. Seu complementar será <math>P(B^c) = 1 - (1/2)^n</math>, o que significa pelo menos o motorista perceber pelo menos uma das placas.</li> <li>5. Relacionar esta probabilidade com a desigualdade apresentada no enunciado da questão. <math>P(B^c) = 1 - (1/2)^n &gt; 99/100</math>, e que, <math>1 - 99/100 &gt; (1/2)^n</math>, logo <math>1/100 &gt; (1/2)^n</math></li> <li>6. Resolver a inequação exponencial por aproximação: <math>2^7 = 128</math> e <math>2^6 = 64</math>, logo, como <math>1/100 &gt; (1/2)^n</math>, podemos dizer que <math>1/100 &gt; 1/128</math>. E o número de placas devem ser <math>n=7</math>.</li> <li>7. Identificar que já existe uma placa na rodovia, então deve incluir somente 6 delas para completar a quantidade necessária para responder a tarefa solicitada. A resposta é a letra c</li> </ol>
<b>Tecnologia [Θ]</b>	Evento complementar, Generalização de repetidos eventos, Probabilidade conjunta, resolução de inequação exponencial.
<b>Teoria [Θ]</b>	teoria das probabilidades e resolução de equação exponencial.

Fonte: elaborado pelas autoras.

Quanto às categorias de contexto propostas pela OECD, observamos que as duas questões propostas no ENEM 2019 dizem respeito ao contexto social, seja a propaganda, seja o imposto de renda. Vale ressaltar que embora a propaganda esteja presente no cotidiano do aluno, o mesmo não acontece com o imposto de renda, que estará no cotidiano dos parentes mas não no do indivíduo na faixa etária dos alunos que fazem esse exame.

### Considerações finais

Este texto teve como objetivo analisar as questões relativas aos conteúdos de probabilidade nos exames do ENEM no período de 2013 a 2019. Pudemos constatar mudanças nesse período, não quanto aos conteúdos contemplados, que são aqueles apontados pelos documentos oficiais como adequados ao nível de escolaridade, mas

principalmente quanto aos contextos apresentados pelas questões e quanto à formulação dos enunciados.

Identificamos como fator principal nas mudanças observadas, quando da implementação do Novo ENEM, a complexidade de contextos e não de tarefas. Tal fato se deve, entre outros, pelo exíguo tempo disponível: o aluno precisa de tempo para compreender o enunciado e identificar a tarefa, tudo no espaço dos três minutos e mudando de tema matemático a cada questão. Como as questões de mesmo tema não aparecem agrupadas, isso demanda esforço do aluno para mobilizar os diversos conhecimentos exigidos. Quanto às formulações, concordamos com Viali e Silva (2010), e identificamos nas provas analisadas aspectos da formulação de questões que podem dificultar a compreensão do conceito a ser mobilizado, de uma forma geral considerando os conteúdos estatísticos avaliados no exame.

Observamos que as organizações praxiológicas identificadas mantêm o grau de dificuldade das tarefas presentes mas, pela formulação da questão, a identificação da experiência aleatória em jogo se torna menos acessível. As técnicas associadas às tarefas identificadas sofrem uma mudança importante, na medida em que passam a ser compostas por subtarefas, indicando o aumento desse grau de dificuldade. O discurso tecnológico-teórico é mantido ao longo do período analisado.

Identificamos a presença de organizações praxiológicas que trazem tarefas relativamente simples, mas que demandam técnicas complexas que envolvem a mobilização de subtarefas, nos exames a partir de 2017. Observa-se assim uma mudança significativa em relação aos anos anteriores. Tal mudança favorece a presença de elementos do letramento probabilístico, nos termos de Gal (2005), tais como a postura crítica, não apenas para a análise dos próprios resultados em relação ao problema proposto, como também em relação ao conhecimento do contexto, necessário para a elaboração da técnica associada à tarefa solicitada. Não encontramos elementos que permitam identificar a avaliação no que se refere às grandes ideias. Os demais elementos desse modelo de letramento (cálculos probabilísticos, linguagem e contexto) podem ser identificados como presente na avaliação, ou seja, o ENEM permite, a partir de 2017, avaliar o letramento probabilístico do aluno, embora não tenhamos esse aspecto citado nos documentos técnicos relativos aos exames.

No cenário atual da educação estatística, a análise de questões relativas à probabilidade que estão presentes no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) nos permite perceber as demandas a serem consideradas nos currículos escolares quanto à sua abordagem, de forma a que os alunos possam construir seu conhecimento probabilístico. Um

trabalho didático sobre tais questões em sala de aula permitirá também o desenvolvimento do letramento probabilístico nos termos anunciados por Gal (2005), uma vez que as questões abrangem uma gama de conteúdos referentes aos cinco componentes cognitivos desse letramento, conforme apresentado no quadro 1 deste texto.

As organizações praxiológicas identificadas permitem constatar também possíveis lacunas a serem consideradas nos currículos, uma vez que retratam estratégias avaliadas no exame. Dessa forma, o presente estudo pode contribuir para a reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade na escola básica, particularmente no ensino médio brasileiro.

## Referências

- Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2009). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos* (3.<sup>a</sup> ed.). Campinas: Editores Associados.
- Falk, H. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In: *International Conference on Teaching Statistics*, 2, 1986, Victoria. Proceedings of ICOTS2 Victoria: University of Victoria, 292-297.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.
- Gascón, J. (2003). La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas., 5(2), 11-37).
- Goulart, A. (2015). *Um estudo sobre a abordagem dos conteúdos estatísticos em cursos de licenciatura em matemática: uma proposta sob a ótica da ecologia do didático*. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Hollas, J., & Bernardi, L. T. M. S. O. (2019). Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e as competências para uma educação estatística crítica. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação* 28(106),110-134. <https://doi.org/10.1590/s0104-40362019002701489>.
- Lecoutre M-P. (1985). Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 6(2-3), 193-213.
- Ministério da Educação e do Desporto (1997). *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto.
- Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto.
- Ministério da Educação e do Desporto (2000). *Parâmetros curriculares nacionais, ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto.

- Ministério da Educação e do Desporto (2002). *Parâmetros curriculares nacionais, ensino médio +: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto.
- Ministério da Educação e do Desporto (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto.
- Ministério da Educação e do Desporto (2009). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Portaria INEP n. 109 de 27/05/2009: Estabelece a sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009.
- Ministério da Educação e do Desporto (2018a). *Base nacional comum curricular: BNCC*. Brasília: MEC.
- Ministério da Educação e do Desporto (2018b). *Relatório-síntese de área matemática 2017 (bacharelado/licenciatura)*. Brasília: Ministério da Educação.
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. PISA, Paris: OECD <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>.
- Pontes, J. C. & Nuñez, I. B. (2019). Questões de estatística e probabilidade nas provas do ENEM: uma aproximação a erros e dificuldades de aprendizagem. *Educação Matemática Debate*. v. 3(7), 87-110. <https://doi.org/10.24116/emd.v3n7a05>.
- Pereira, F.A., & Souza, F.S.S. (2016). O Exame nacional do ensino médio e a construção do letramento e pensamento estatístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1319-1343.
- Rodrigues, M. R. (2018). *Estudo sobre as concepções de professores do ensino básico em relação à aleatoriedade e probabilidade*. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Serra, D. S. (2015). *A contribuição da prova de matemática do ENEM para o Ensino de Probabilidade e Estatística*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Viali, L., & Silva, M. M. (2010). O ensino de estatística e probabilidade nos cursos de licenciatura em matemática. *Anais do XVIII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística* (pp. 1-7). São Pedro: Sinape. Sociedade Brasileira de Estatística.

**Anexo. Questões de probabilidade identificadas no ENEM, quanto ao enunciado, conteúdos e contextos**

Quadro A1.

Questões de probabilidade identificadas no ENEM no período 2013 a 2016 quanto aos enunciados, conteúdos e contextos

<b>Ano e questão</b>	<b>Tema presente no enunciado</b>	<b>Conteúdos</b>	<b>Contexto</b>
<b>2013/141</b>	A partir de um gráfico de colunas identificar o número de elementos do espaço e o número de elementos do evento.	Probabilidade clássica e Probabilidade conjunta	Ocupacional (compradores e produtos)
<b>2013/155</b>	A partir de elementos de conjuntos de alunos e identificar os eventos, a interseção e complementar deles.	Teoria dos conjuntos, evento complementar, probabilidade clássica e condicional.	Social (alunos de línguas estrangeiras)
<b>2013/175</b>	A partir da necessidade do controle de qualidade de duas máquinas de parafusos com ocorrências de defeitos em cada máquina.	Probabilidade clássica e probabilidade conjunta.	Ocupacional (controle de qualidade)
<b>2013/176</b>	A partir do jogo de apostas com cartelas, quadros com dados numéricos de valor em dinheiro de apostas.	Probabilidade Clássica e distribuição binomial	Pessoal (jogos)
<b>2014/152</b>	A partir de um teste de aptidão com questões de verdadeiro ou falso, dada a probabilidade de erro de cada questão.	Probabilidade conjunta e distribuição binomial	Científico (testes psicológicos)
<b>2014/162</b>	A partir do desempenho de um método de diagnóstico de sadios e doentes, testes positivos e negativos, dados em tabela de dupla entrada.	Probabilidade condicional	Científico (testes de diagnósticos)
<b>2015/142</b>	A partir da meteorologia que determina dias chuvosos ou não chuvosos e as probabilidades dessas ocorrências.	Eventos complementares e probabilidade conjunta	Científico (meteorologia)
<b>2015/175</b>	A partir da necessidade de encontrar a melhor opção de coleta de dados entre equipes esportivas e atletas para identificação de substâncias proibidas.	Distribuição binomial	Científico (testes diagnósticos)
<b>2015/180</b>	A partir de senhas distribuídas em central de atendimento de pessoas identificar números em um intervalo.	Probabilidade conjunta	Pessoal (sorteio de senhas)
<b>2016/176</b>	A partir de um plano de previdência privada, porcentagens em função de idade de longevidade de homens e mulheres.	Probabilidade clássica e probabilidade conjunta.	Social (previdência privada)
<b>2016/180</b>	A partir de cédulas que envolvem dinheiro e suas quantidades.	Enumeração, probabilidade clássica	Pessoal (cédulas e valor total)

Fonte: elaborado pelas autoras

Quadro A2.

Questões de Probabilidade identificadas no ENEM 2017, quanto ao enunciado, conteúdos e contextos

Ano e questão	Tema presente no enunciado	Conteúdos	Contexto
2017/142	A partir de dados de meteorologia de dias chuvosos ou não e dados com porcentagem.	Probabilidade clássica e probabilidade condicional	Científico (meteorologia)
2017/155	A partir de um jogo de computador ou smartphone, campo minado e informações em uma print de tela de dados para julgar as probabilidades.	Probabilidade clássica	Pessoal (jogo com tecnologia)
2017/171	A partir de uma pane no sistema de semáforos de uma avenida, emite cores verde e vermelho de forma independente, com probabilidades diferentes.	Probabilidade binomial	Social (panes de semáforos)

Fonte: elaborado pelas autoras

Quadro A3.

Questões de Probabilidade identificadas no ENEM 2018 quanto ao enunciado, conteúdos e contextos

Ano e questão	Tema presente no enunciado	Conteúdos	Contexto
2018/140	A partir da coleta de dados de horas exatas de em que um ônibus passa em um determinado ponto de espera em um determinado mês, dias de ocorrência em determinada hora e mediana do conjunto de dados.	Medida de tendência central: mediana e probabilidade clássica	Social (transporte público)
2018/163	A partir de níveis de dificuldade de questões em uma avaliação dada por uma empresa pelo setor de recursos humanos com graus de dificuldade em porcentagem das fáceis e difíceis.	Generalização algébrica e probabilidade clássica	Ocupacional (teste em empresa)
2018/173	A partir do esporte salto ornamental de atletas e seus scores e probabilidades, tabelas de informações atletas, saltos, score, tipo de salto e probabilidades.	Análise de tabelas e probabilidade clássica	Ocupacional (score de atletas)
2018/176	A partir de uma sequência de 5 urnas com bolas de cores diferentes, e algumas jogadas de transferência de bolas nas urnas.	Probabilidade clássica, probabilidade condicional	Pessoal (bolas e urnas)
2018/180	A partir de um jogo de tabuleiro ( $n \times n$ ) e possibilidades de jogadas com menos casas ( $n$ ) ou mais.	Generalização algébrica inequações do 2º grau. Probabilidade clássica	Pessoal (jogos de tabuleiro)

Fonte: elaborado pelas autoras

Quadro A4.

Questões de probabilidade identificadas no ENEM 2019 quanto ao enunciado, conteúdos e contextos

Ano e questão	Enunciado	Conteúdos	Contexto
2019/140	A partir de maior divulgação de propaganda de um restaurante em determinado local e as possíveis placas de anúncio que se pode disponibilizar para atrair mais clientes, dados de probabilidade de percepção de placas de anúncio.	Probabilidade complementar, probabilidade conjunta, inequação	Social (propaganda)
2019/163	A partir da análise de imposto de renda de declarações fraudulentas ou não, e outras categorias, dados em porcentagens de ocorrências em algumas das categorias.	Probabilidade complementar, probabilidade condicional	Social (imposto de renda)

Fonte: elaborado pelas autoras

**Autoras**

**Cileda de Queiroz e Silva Coutinho**

Professora de Didática da Matemática e Estatística (PUC-SP). Mestre em Educação Matemática (PUC-SP). Doutora em Didática da Matemática (Université Joseph Fourier – Grenoble I). Assistente Doutor no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática (PUC-SP). Membro do grupo de pesquisa PEA-MAT. Membro do Grupo de Trabalho GT12 – Educação Estatística da Sociedade brasileira de Educação Matemática. Linha de investigação: Matemática na estrutura curricular e formação de professores. E-mail: [cileda@pucsp.br](mailto:cileda@pucsp.br).

**Auriluci de Carvalho Figueiredo.**

Professora de Matemática e Estatística (UNIMES). Mestre em Educação Matemática (PUC-SP). Doutora em Educação Matemática (PUC-SP). Acadêmica do Núcleo de Educação à Distância e presencial da Universidade Metropolitana de Santos. Estágio de pós doutoramento pela PUC-SP em andamento. Membro do Grupo de Trabalho GT12 – Educação Estatística da Sociedade brasileira de Educação Matemática. Membro do grupo de pesquisa PEA-MAT. Linha de Investigação: Didática da Matemática e Estatística; formação de professores. E-mail: [aurilucy@uol.com.br](mailto:aurilucy@uol.com.br).