

# COMPARAR EL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES Y EL MÉTODO TRADICIONAL PARA COMPRENDER EL CONCEPTO DE VARIABILIDAD ESTADÍSTICA

**Ailton Paulo de Oliveira Júnior**

[ailton.junior@ufabc.edu.br](mailto:ailton.junior@ufabc.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-2721-7192>

*Universidade Federal do ABC (UFABC)*

Santo André, Brasil.

**Flávia Helena Pereira**

[fh\\_pereira18@yahoo.com.br](mailto:fh_pereira18@yahoo.com.br)

<https://orcid.org/0000-0002-6438-6972>

*Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)*

Uberaba, Brasil.

**Diego Marques de Carvalho**

[diego.marques@ufabc.edu.br](mailto:diego.marques@ufabc.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-5842-4653>

*Universidade Federal do ABC (UFABC)*

Santo André, Brasil.

**Jaqueline de Oliveira Costa**

[jaqueline.costa@ufabc.edu.br](mailto:jaqueline.costa@ufabc.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-0051-113X>

*Universidade Federal do ABC (UFABC)*

Santo André, Brasil.

**Recibido:** 30/09/2022 **Aceptado:** 10/03/2022

## Resumen

Creemos que se debe considerar que el alumno comprende el proceso estadístico a través de elementos básicos para el procesamiento de datos, como la importancia de analizar, cuantificar y explicar la variabilidad de estos datos. Así, este trabajo tuvo como objetivo evaluar la comprensión de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y del Postgrado en Educación sobre el concepto de variabilidad estadística a través de la representación gráfica de distribuciones de frecuencia y los conceptos de tendencia central y medidas de dispersión. Utilizamos dos metodologías de enseñanza ("papel y lápiz gráfico" y "software R") en secuencia didáctica para presentar conceptos básicos y medidas estadísticas necesarias para una mejor comprensión de la distribución de frecuencias de los datos. Se encontró que los participantes aceptaron el uso del software, pero consideraron que el uso de papel y lápiz es importante en la construcción de los gráficos. Al comparar conjuntos de datos y examinar sus gráficos a la misma escala, fue posible especular cómo esta variación explica el comportamiento de los datos. El grado de comprensión de los participantes sobre la variabilidad convergió con la forma en que perciben la distribución de los datos.

**Palabras clave:** Enseñanza de la estadística. Variabilidad. Tecnología digital. Educación superior y estudios de posgrado.

## **COMPARAR O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS E O MÉTODO TRADICIONAL PARA ENTENDER O CONCEITO DE VARIABILIDADE ESTATÍSTICA**

### **Resumo**

Acreditamos que deve ser considerado que o aluno compreende o processo estatístico através de elementos básicos para o tratamento de dados, como a importância de analisar, quantificar e explicar a variabilidade desses dados. Assim, este trabalho teve como objetivo avaliar a compreensão dos alunos do Bacharelado em Matemática e da Pós-Graduação em Educação sobre o conceito de variabilidade estatística por meio da representação gráfica de distribuições de frequência e os conceitos de tendência central e medidas de dispersão. Utilizamos duas metodologias de ensino ("lápiz e papel gráfico" e "software R") em uma sequência didática para apresentar conceitos básicos e medidas estatísticas necessárias para um melhor entendimento da distribuição de frequência dos dados. Constatou-se que os participantes aceitaram o uso do software, mas consideraram que o uso de papel e lápis é importante na construção dos gráficos. Ao comparar conjuntos de dados e examinar seus gráficos na mesma escala, foi possível especular como essa variação explica o comportamento dos dados. O grau de compreensão da variabilidade dos participantes convergiu com a forma como eles perceberam a distribuição dos dados.

**Palavras chave:** Ensino de estatística. Variabilidade. Tecnologia digital. Ensino superior e pós-graduação.

## **COMPARING THE USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES AND THE TRADITIONAL METHOD IN THE APPREHENSION OF THE CONCEPT OF STATISTICAL VARIABILITY**

### **Abstract**

We believe that it should be considered that the student understands the statistical process through basic elements for data processing, such as the importance of analyzing, quantifying and explaining the variability of these data. Thus, this work aimed to evaluate the understanding of students of the Licentiate Degree in Mathematics and the Postgraduate Course in Education on the concept of statistical variability through the graphical representation of frequency distributions and the concepts of central tendency and dispersion measures. We use two teaching methodologies ("paper and graph pencil" and "R software") in didactic sequence to present basic concepts and statistical measures necessary for a better understanding of the frequency distribution of the data. It was found that the participants accepted the use of the software but considered the use of paper and pencil to be important in the construction of graphics. By comparing data sets and examining their graphs at the same scale, it was possible to speculate how this variation explains the behavior of the data. The participants' degree of understanding about the variability converged with the way they perceive the data distribution.

**Keywords:** Teaching statistics. Variability. Digital technology. Higher education and postgraduate studies.

## **Introducción**

El aprendizaje de la Estadística implica la comprensión de varios conceptos, sin embargo, en este estudio se abordará, en particular, el concepto de variabilidad, ya que es uno de sus conceptos esenciales. Watson y Kelly (2002) dicen que es el corazón de la estadística, ya que está no sería necesaria si los datos no variaran.

En el documento norteamericano GAISE II Pre - K12 (BARGAGLIOTTI et al., 2020) se destaca que el pensamiento estadístico trabaja en conjunto con la ubicuidad de la variabilidad en los datos, evidenciando su influencia en la resolución de problemas estadísticos y en la toma de decisiones, ya que existe una dependencia del escenario.

Garfield y Ben-Zvi (2005) están de acuerdo con la centralidad de la variabilidad en el estudio estadístico, ya que permite tomar decisiones en tiempos de incertidumbre (basados en la interpretación, modelado y predicción de datos); describieron siete componentes (desarrollar ideas intuitivas de variabilidad; describir y representar la variabilidad; usar la variabilidad para hacer comparaciones; reconocer la variabilidad en tipos especiales de distribuciones; identificar patrones de variabilidad en modelos de ajuste; usar la variabilidad para predecir muestras o resultados aleatorios; y considerar la variabilidad como parte del pensamiento estadístico) de un estudio integral del modelo epistemológico que, según los autores, son la base para una comprensión profunda (comprensión conceptual) de la variabilidad.

Además, entre los siete componentes para estudiar la variabilidad de los datos según Garfield y Ben-Zvi (2005), exploraremos los tres primeros, a saber: desarrollar ideas intuitivas de variabilidad; describirlo y representarlo; y utilícelo para hacer comparaciones.

Según Garfield y Ben-Zvi (2005), presentamos una breve descripción de las tres categorías que serán consideradas en este texto, las cuales son: (1) Desarrollar ideas intuitivas de variabilidad - Ésta es una característica general o global de un conjunto de datos, envolviendo considerar los datos como una entrada, y no como puntos individuales o como una combinación de valores centrales y extremos; (2) Describir y representar la variabilidad - Diferentes gráficos pueden revelar diferentes aspectos de la variabilidad en un conjunto de datos, por lo que es importante estudiar más de un gráfico de un conjunto de datos; (3) Usar la variabilidad para hacer comparaciones - Al hacer comparaciones de dos o más conjuntos de datos, examinar sus gráficos en la misma escala nos permite comparar la variabilidad y especular sobre por qué existen diferencias en los conjuntos de datos.

Además de estas habilidades, Kader y Perry (2007) distinguen la variabilidad de los datos categóricos y la variabilidad de los datos cuantitativos. La primera es más intuitiva y natural que la segunda, ya que se centra en la frecuencia con la que una observación difiere de la otra y no en la cuantificación de esta diferencia. Este último está directamente relacionado con el concepto de promedio, principalmente porque utiliza el concepto de desviación estándar como una medida de variación.

Según Garfield y Ben-Zvi (2005) para lograr una comprensión profunda del concepto de variabilidad, se necesitan diferentes actividades que motiven a los estudiantes a describir e interpretar datos y a razonar sobre comportamiento de los datos.

### **Utilización de diferentes recursos para la enseñanza de la Estadística**

Tomando la Base Curricular Nacional Común en Brasil (BRASIL, 2018) se destaca que la incertidumbre y el tratamiento de los datos deben estudiarse en la unidad temática Probabilidad y Estadística. Propone el enfoque de conceptos, hechos y procedimientos presentes en muchas situaciones problemáticas en la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología. Se indica además que todos los ciudadanos necesitan desarrollar habilidades para recopilar, organizar, representar, interpretar y analizar datos en una variedad de contextos, a fin de tomar decisiones apropiadas.

En Brasil (2018) se destaca el uso de tecnologías, por ejemplo, calculadoras para evaluar y comparar resultados y hojas de cálculo electrónicas, que ayudan en la construcción de gráficos y en el cálculo de medidas de tendencia central.

En el campo de la educación formal, representada por la escuela, son indispensables para la enseñanza los materiales como papel, lápiz, pizarra, etc., ya son reconocidos como fundamentales para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Seguimos considerando que la alfabetización se está convirtiendo cada vez más en un proceso que cuenta con el apoyo de la tecnología en el aula, con papel y lápiz compartiendo poco a poco espacio con computadoras, pizarras electrónicas y muchos otros materiales multimedia.

Según Lima et al. (2019) la educación formal se lleva a cabo en un lugar específico y sistematizado con análisis de contenido, en otras palabras, está regulada por las leyes y las

normas de la institución educativa. Siendo formal, espera resultados y analiza los datos obtenidos de los planes previamente realizados.

Traemos el concepto del modelo de enseñanza tradicional de Ramírez-Montes y Navarro-Vargas (2015) que indican que el alumno es un mero receptor pasivo, es decir, sus opiniones, deseos e intereses no se consideran en la definición de los planes de estudio. El conocimiento es externo e impreso por la escuela. El profesor es responsable de la transmisión del conocimiento, a través de conferencias. Dicha información debe ser memorizada, acumulada, reproducida por repetición, en la que la reflexión no está presente.

Además de estos aspectos, Silva (2014) señala que, incluso con el uso educativo gradual de las tecnologías, todavía no son reconocidas y utilizadas en sus potenciales didácticas/pedagógicas reales. A menudo se utilizan nuevas herramientas para repetir fórmulas antiguas que refuerzan la educación tradicional. En este proceso, no es la escuela la que se adapta a las nuevas herramientas, son las nuevas herramientas las que se adaptan a la escuela. Por lo tanto, debe considerarse que, a través de la tecnología, este proceso puede facilitarse, ya que muchas herramientas computacionales aportan importantes ganancias para el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística.

Si le pregunta a una persona que ha tomado un curso de Estadística sobre su impresión de la materia, posiblemente escuche que fue desarrollado utilizando una serie de fórmulas que tuvieron que memorizar y cálculos tediosos para llegar a un resultado. Sin embargo, en este trabajo y tiempo para manipular los cálculos podrían haberse minimizado con la ayuda de software u hojas de cálculo.

Considerando que los computadores pueden ofrecer a los alumnos una variedad de herramientas, Borovcnik y Kapadia (2009) defienden la simulación como una estrategia de enseñanza y afirman que, cuando se asocia con el uso de la tecnología, ayuda a reducir los cálculos técnicos, al tiempo que permite que el alumno preste atención a los conceptos en discusión.

Existe un consenso entre los educadores de que las disciplinas estadísticas deben ir acompañadas de algún tipo de tecnología para disminuir el rendimiento de los cálculos manuales y permitir a los estudiantes el acceso a conjuntos de datos de casos prácticos y situaciones reales (SCHUYTEN; THAS, 2007; VERZANI, 2008; GOULD, 2010).

Sin embargo, lo que aún carece de consenso es sobre el software estadístico apropiado para este propósito (VERZANI, 2008). Por lo tanto, una posibilidad es el uso de software accesible y gratuito, como R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2011).

El software R consta de un lenguaje y, al mismo tiempo, un entorno computacional que permite cálculos, simulaciones y el desarrollo de modelos estadísticos en los que es posible realizar una amplia variedad de operaciones matemáticas, además de la creación de gráficos.

Según Correa (2003), la estadística ayuda en los métodos de recolección, organización, descripción, análisis e interpretación de los datos, permitiendo su uso en la toma de decisiones.

Teniendo en cuenta este aspecto, señalamos que, según Jelihovschi (2014), el aumento de la potencia de procesamiento y la memoria de la computadora favorece el análisis estadístico, como el lenguaje R (software R) que es una de las herramientas más utilizadas en la actualidad. y que explota el poder computacional en un entorno de programación.

### **Procedimientos metodológicos**

En vista del tema, el objetivo de este trabajo fue evaluar el aprendizaje del concepto de variabilidad estadística utilizando la representación gráfica de las distribuciones de frecuencia y las medidas de tendencia central y dispersión a través de un problema de variable categórica.

Para este propósito, se utilizaron dos metodologías de enseñanza (“usar papel cuadriculado y lápices” y “usar software R”) en una secuencia didáctica para presentar los conceptos básicos introductorios de las medidas para una mejor comprensión de la variabilidad.

### **Participantes**

Las actividades se desarrollaron en dos reuniones de cuatro horas con 16 participantes, a saber: becarios PET (Programa de Educación Tutorial), becarios PIBID (Programa Institucional para Becas de Iniciación Docente) y estudiantes de maestría de un Programa de Posgrado en Educación, de una universidad federal en el estado de Minas Gerais, Brasil.

### **Instrumento**

Se desarrollaron y aplicaron los siguientes instrumentos: (1) Actividades usando la construcción gráfica manual de una distribución de frecuencia y las fórmulas respectivas de las medidas de tendencia central y dispersión (usando papel cuadriculado y lápiz) y el software R

para mostrar la representación gráfica de las distribuciones de frecuencia y la generación de medidas de tendencia central y dispersión para comprender el concepto de variabilidad; (2) Cuestionario para evaluar la actividad con respecto a las actividades desarrolladas.

Consideramos la definición de secuencia didáctica de Oliveira (2013) al indicar que es un procedimiento simple, que comprende un conjunto de actividades conectadas entre sí, sin planificar la delimitación de cada etapa y / o actividad para trabajar los contenidos disciplinarios de manera integrada para una mejor dinámica en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

### **Recolección de datos**

Las actividades se desarrollaron y los datos se recopilaron en uno de los laboratorios de computación de una universidad federal brasileña, y antes del comienzo de las actividades se presentó el objetivo del estudio, así como la voluntariedad y el anonimato en relación con la participación en la investigación. Se explicó a los participantes de la investigación que usarían dos metodologías de enseñanza: (1) usar papel cuadriculado y lápiz para resolver un problema estadístico; (2) usar el software R para desarrollar otro problema.

Los que aceptaron participar recibieron instrucciones de no identificar el material y firmar el formulario de consentimiento informado. Está contemplado con el Comité de Ética de Investigación (CEP) de la Universidade Federal do Triângulo Mineiro bajo el Certificado de Presentación de Apreciación Ética - CAAE, n. 38076114.9.0000.5154.

### **Método**

Se pretendía la comprensión de la variabilidad de los participantes a partir del desarrollo de actividades, teniendo en cuenta las secuencias didácticas que abordaban la construcción gráfica de una distribución de frecuencias y los conceptos de tendencia central y de dispersión.

Para evaluar y presentar los resultados obtenidos en las secuencias didácticas, nos basamos en Garfield y Ben-Zvi (2005), quienes proponen un marco de siete categorías o "componentes de un modelo epistemológico" que organiza el conjunto de ideas y acciones necesarias para una comprensión de la variabilidad completa. Hemos identificado nuevamente las categorías en las que usaremos para analizar el nivel cognitivo del concepto de variabilidad: (1) Desarrollar ideas intuitivas de variabilidad, que se refieren a ella como una característica omnipresente en los fenómenos y en los datos que se obtienen de ellos, considerando que hay

fenómenos y conjuntos de datos que tienen más variabilidad que otros y, finalmente, que es una característica de un conjunto de datos y no elementos aislados; (2) Describir y representar la variabilidad, es decir, cuando se restringe a un conjunto de datos, la variabilidad es la diseminación de datos que se pueden representar gráficamente para mostrar sus aspectos, que se pueden medir de diferentes formas y expresar mediante un número (amplitud, media o desviación estándar); (3) Utilizar la variabilidad para realizar comparaciones, donde las medidas de tendencia central y dispersión permitan la interpretación de los datos y la toma de decisiones.

Para el estudio de las preguntas del cuestionario de evaluación de actividades, en cuanto al enfoque, se pretendía reflexionar sobre los datos, en un intento de explicar el contexto. Para el estudio en cuestión, en cuanto al propósito, se considera como una investigación básica o fundamental con el objetivo de adquirir conocimiento sobre cómo los participantes se relacionan con el concepto de variabilidad de datos. Por su naturaleza, lo consideramos como una investigación experimental en la que uno puede participar activamente en la conducción del proceso, al poder seleccionar las variables estudiadas, definir la forma de control sobre ellas y observar los efectos sobre el objeto de estudio, bajo condiciones pre establecidas.

## Procedimientos

Fueron construidos gráficos (histograma y polígono de frecuencia) usando papel cuadriculado y lápiz en un problema propuesto (secuencia didáctica) y usando el software "R".

Con la generación de los gráficos, tenemos la intención de estudiar la variabilidad de los datos, teniendo en cuenta la distribución de datos y apoyados por medidas de tendencia central y dispersión. En el software R, el histograma y el polígono de frecuencia se pueden trazar utilizando la función de densidad (Figura 1).

**Figura 1** - Uso de la función *densidad* para generar el polígono por densidad de frecuencia

```
##histograma por densidad de frecuencia  
hist(P,freq=FALSO)  
h1=densidad(P) ##obteniendo la densidad de datos  
líneas(h1) ##agregar un gráfico de líneas
```

**Fuente:** Datos de la investigación

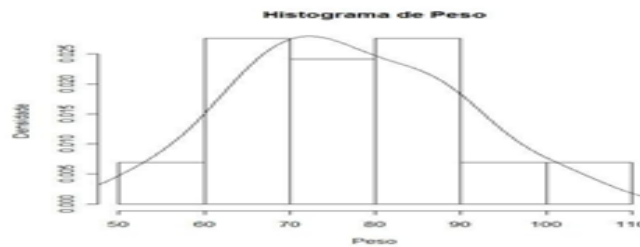
La representación gráfica de los datos en un histograma con clases de ancho desigual requiere la transformación de los valores de frecuencia absoluta en densidad de frecuencia que consideramos importante, ya que garantiza que el área de los rectángulos sea proporcional a la frecuencia de la clase, dada por la expresión: *densidad de frecuencia* =



$$\frac{\text{frecuencia absoluta de la clase}}{\text{tamaño o ancho de la clase}}$$

Esto significa que la altura de las barras (los valores en la escala del eje vertical) no representan la frecuencia de la clase, sino la densidad de frecuencia. Para calcular la frecuencia de la clase, debemos multiplicar la densidad de frecuencia (indicada en el eje vertical) por el ancho o el tamaño de la clase respectiva. La figura 2 muestra un ejemplo de un resultado gráfico (histograma y polígono de frecuencia) utilizando el software R.

**Figura 2** - Polígono por la densidad de frecuencia generada por el software R



**Fuente:** Datos de la investigación

Al estudiar la distribución de frecuencia de una variable aquí categórica (nominal), ya sea en un solo grupo o al comparar varios grupos, podemos verificar básicamente tres características: tendencia central, variabilidad y forma.

La tendencia central de la distribución de frecuencia de una variable se caracteriza por el valor (o rango de valores) típico de la variable. Una de las formas de representar lo que es típico es a través del valor más frecuente de la variable, llamada "moda". O, en el caso de la tabla de frecuencias, la clase con la frecuencia más alta, llamada clase modal. En el histograma, esta clase corresponde a la que tiene la barra más alta ("pico").

Para describir adecuadamente la distribución de frecuencia de la variable categórica (nominal), aquí en estudio, además de la información sobre el valor representativo de la variable (tendencia central), también es necesario decir cuánto varían estos valores, es decir, qué tan dispersos están. De hecho, solo la información sobre la tendencia central de un conjunto de datos no puede representarlo correctamente.

La distribución de frecuencia de una variable puede tomar muchas formas, pero hay tres formas básicas (simétrica, asimétrica a la izquierda y asimétrica a la derecha); pueden visualizarse mediante la construcción de histogramas y el respectivo polígono de frecuencia. Por lo tanto, al definir la asimetría de una distribución, uno puede referirse al lado donde se concentran los datos o al lado donde faltan datos.

En algunos casos, el simple hecho de conocer la forma de la distribución de frecuencias de una variable ya nos proporciona buena información sobre el comportamiento de esa variable como indican Snell y Peterson (1992) cuando identificaron tres áreas principales en las que la tecnología puede ser útil para la enseñanza de la estadística: (1) reduce los cálculos manuales; (2) facilita el análisis gráfico de datos; (3) ilustra los conceptos mediante simulación.

### **Desarrollo de actividades**

Comenzamos la secuencia didáctica proponiendo una actividad que se entregó a los participantes para que pudieran resolver un problema con la participación de los investigadores. La actividad, Figura 3, presenta el problema propuesto que trae un tema actual y contextualizado, considerando que los Juegos Olímpicos de Verano se llevarán a cabo en Tokio, Japón, del 24 de julio al 9 de agosto de 2020.

**Figura 3 - Problema "hoja de ruta" para el desarrollo de la actividad**

Alrededor de 2500 a. C., los griegos celebraron festivales deportivos en honor a Zeus, en el santuario de Olimpia, que originó el término Juegos Olímpicos. Los Juegos Olímpicos tienen lugar cada cuatro años, donde los atletas de cientos de países se reúnen en un país anfitrión para competir en una variedad de deportes. La propia bandera olímpica representa esta unión de pueblos y razas, ya que está formada por cinco anillos entrelazados, que representan los cinco continentes y sus colores. La paz, la amistad y las buenas relaciones entre los pueblos son los principios de los Juegos Olímpicos que se originaron en la antigua Grecia. Las primeras Olimpiadas tuvieron lugar en el estadio Panatenaico de Atenas en 1896, en el momento de la era moderna en Atenas, con la participación de 14 países. La Tabla enumera los países con el mayor número de medallas en la historia de los Juegos Olímpicos.

Tabla. Lista de países con el mayor número de medallas en la historia de los Juegos Olímpicos

Países	Medallas	Países	Medallas	Países	Medallas
Estados Unidos	2522	Canadá	405	Equipo alemán unido	137
Unión Soviética*	1210	Japón	397	Equipo unificado*	135
Gran Bretaña	802	Países Bajos	332	España	133
Francia	730	Suiza	308	Grecia	110
Alemania	719	Rumania	293	Brasil	108
Italia	628	Austria	287	Ucrania	101
Suecia	604	Polonia	275	Yugoslavia*	94
Alemania del este*	519	Corea del Sur	260	Nueva Zelanda	87
China	518	Alemania occidental*	243	Bielorrusia	75
Rusia	496	Bulgaria	218	Kenia	75
Australia	477	Cuba	208	Sudáfrica	70
Hungría	464	Dinamarca	171	Argentina	70
Finlandia	455	Checoslovaquia*	168	Jamaica	67
Noruega	447	Bélgica	144	Mexico	62

\* Países extintos

Fuente: Adaptado [https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadro\\_de\\_medalhas\\_dos\\_Jogos\\_Ol%C3%ADmpicos#Quadro\\_de\\_medalhas](https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadro_de_medalhas_dos_Jogos_Ol%C3%ADmpicos#Quadro_de_medalhas)  
1. Construya una distribución de frecuencia usando el método tradicional.  
2. Dibuje el histograma de frecuencia y el polígono de frecuencia utilizando el método tradicional e interprete su comportamiento.  
3. Interpretar las medidas de posición, dispersión de datos, asimetría y curtosis e interpretar su comportamiento.

**Fuente:** Datos de la investigación

Se observa que la variable en estudio puede calificarse como cualitativa nominal (nombre de los países) asociada con la frecuencia de medallas obtenidas en la historia de los Juegos Olímpicos de Verano desde su creación hasta los Juegos de Río de Janeiro, en 2016.

Consideramos que las variables cualitativas (o categóricas) son características que no tienen valores cuantitativos, sino que, por el contrario, están definidas por varias categorías, es decir, representan una clasificación de individuos. Pueden ser nominales sin ordenar entre las categorías (sexo, color de ojos, fumador/no fumador, enfermo/saludable), u ordinales, con un orden entre las categorías (educación - 1er, 2do, 3er grado; etapa de la enfermedad - inicial, intermedia, terminal; mes de observación - enero, febrero, ..., diciembre).

Al destacar la variable nominal, Souza y Peñaloza (2005) dicen que se caracterizan por un conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  categorías o modalidades. Para una población de  $n$  individuos, ya sea  $n_1, n_2, \dots, n_m$  las frecuencias absolutas para las categorías  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , respectivamente, y  $f_i = \frac{n_i}{n}$  la frecuencia relativa asociada con la categoría  $x_i = 1, 2, \dots, m$ . La lista de modalidades  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  será denotado por  $x$ . Si  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  es el vector de frecuencias relativas, entonces escribiremos:  $(x, f) = \{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_m, f_m)\}$ .

Si queremos explicar las frecuencias absolutas, entonces, se debe recordar que  $f_i = \frac{n_i}{n}$ , o, equivalentemente,  $n_i = nf_i$ , se escribe como:  $(x, nf) = \{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_m, n_m)\}$ .

Además, consideramos la variabilidad como el término que designa la mayor o menor posibilidad de que la variable asuma un amplio rango de valores en su escala de expresión.

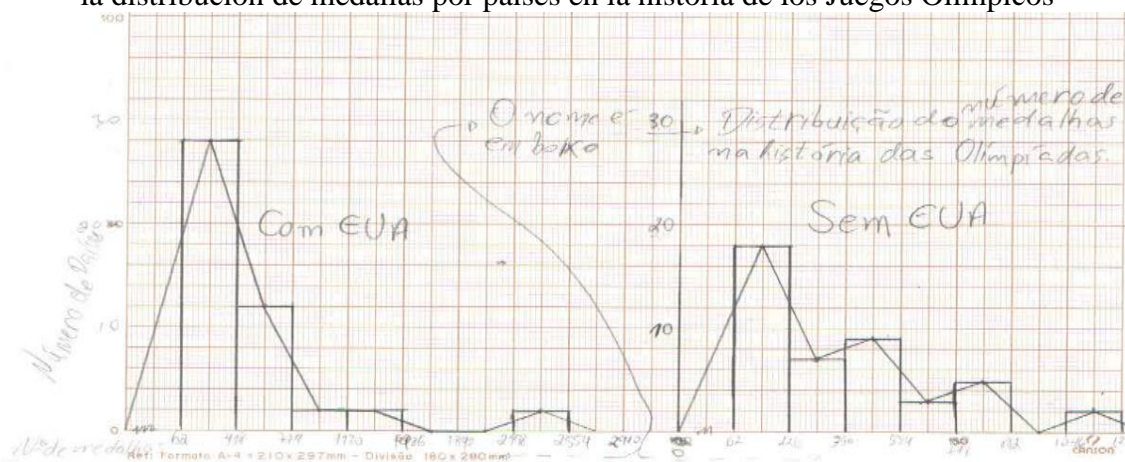
Así, a partir de la serie estadística  $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_m, f_m)\}$  en su representación por frecuencias relativas, es fácil intuir que cuando tienes  $f_1 = f_2 = \dots = f_m = \frac{1}{m}$ , es decir, si las frecuencias relativas son iguales, la variabilidad existente entre las categorías es máxima y, por el contrario, esta variabilidad será mínima cuando ocurra una frecuencia relativa unitaria  $f_j = 1$  para cualquier modalidad  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), con las otras frecuencias obviamente nulas.

En la secuencia, se construyeron el histograma (datos agrupados) y el polígono de frecuencia de los datos; así como los valores de la media y otras medidas de posición, varianza y desviación estándar, se calcularon las medidas de separación y los coeficientes de variación,

asimetría y curtosis. Luego discutimos los resultados obtenidos de las medidas estadísticas y representaciones gráficas con el objetivo de que los participantes trabajaran con los conceptos que provienen de estas medidas y representaciones gráficas.

La Figura 4 presenta la solución de un participante que se utilizó el papel cuadriculado para construir las distribuciones de frecuencia con todos los datos presentados y con la eliminación del número de medallas ganadas en los Juegos Olímpicos por los Estados Unidos.

**Figura 4** - Gráficos generados a partir de la distribución de frecuencias en relación con la distribución de medallas por países en la historia de los Juegos Olímpicos



Fuente: Datos de la investigación

El objetivo era que en la construcción de la escala en los gráficos el papel cuadriculado sería una estrategia facilitadora en la construcción gráfica, incluso cuando los valores a representar no correspondieran a una unidad del papel cuadriculado, es decir, los valores de la escala podrían usarse de manera aproximada. En esta actividad, los estudiantes pudieron observar la diferencia entre las distribuciones de datos y la forma del polígono de frecuencia cuando usamos todos los datos y cuando eliminamos el número de medallas para los EE. UU.

Shaughnessy (2019) considera que nuestros alumnos deben aprender conceptos estadísticos y que ellos, como futuros ciudadanos, deben ser competentes para utilizarlos en situaciones cotidianas. Enfatiza que deben crearse situaciones que permitan a nuestros estudiantes y ciudadanos entender que la toma de decisiones se basa en muestras de datos y que pocas veces tenemos acceso a información completa sobre una población. Complementa estas ideas al indicar que la distribución de datos y las inferencias que se pueden hacer son aspectos importantes para la enseñanza de la estadística, es decir, son el corazón y el alma para la toma de decisiones basadas en el tratamiento de datos estadísticos.

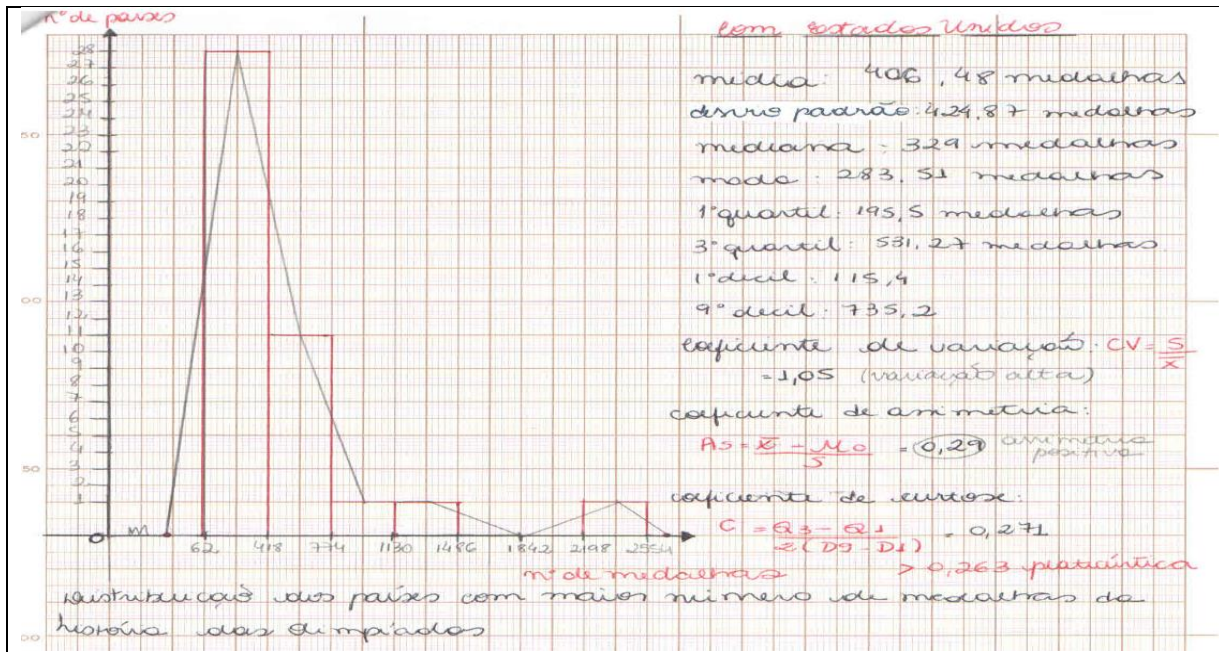
Basado en recomendaciones curriculares a lo largo de la historia e investigaciones recientes que respaldan la afirmación de que la distribución de datos y la realización de inferencias son realmente las dos ideas más importantes en la educación estadística, Shaughnessy (2019) presenta conceptos como expectativa y variación, que son componentes de ideas más amplias como distribución y inferencia. El término expectativa abarca la investigación sobre medidas de tendencia central, como la media, la mediana y la moda, así como consideraciones sobre la agrupación de datos.

Con respecto a las concepciones de variabilidad de los estudiantes, Shaughnessy (2007) describió ocho tipos de concepciones de variabilidad que fueron identificadas por la investigación: (1) variabilidad en valores específicos en un conjunto de datos; (2) variabilidad como un cambio en el tiempo; (3) variabilidad como el rango completo de un conjunto de datos; (4) variabilidad como el rango probable de una muestra; (5) variabilidad como distancia desde un punto fijo; (6) variabilidad como suma de residuos; (7) variabilidad como covariación o asociación; (8) variabilidad como distribución.

Los primeros cuatro tipos de variabilidad involucran una perspectiva exploratoria de análisis de datos, mientras que los últimos cuatro tipos se refieren principalmente a formas de medir la variabilidad. En este estudio nos basamos en los primeros cuatro tipos de variabilidad.

Por lo tanto, se propuso calcular las siguientes medidas descriptivas: media, mediana, moda, cuartiles, deciles, percentiles, varianza y desviación estándar. A partir de los valores de estas medidas, se calcularon los coeficientes de variación, asimetría y curtosis (Figura 5).

**Figura 5** - Generación de distribución de datos y medidas estadísticas que apoyan su comprensión



Fuente: Datos de la investigación

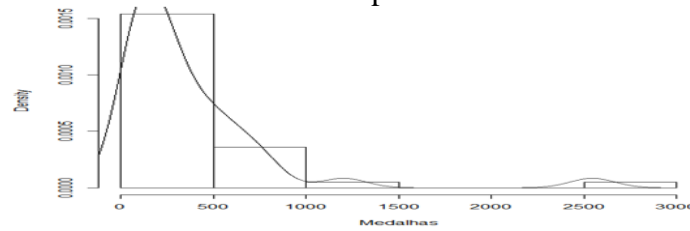
El desarrollo de esta actividad permitió a los participantes, a través de la generación de medidas de tendencia central, medidas separativas, medidas de dispersión, así como trazar gráficos que presenten la distribución de los datos, apropiarse de la comprensión del concepto de variabilidad, dándose cuenta de que el tratamiento de los datos es sumamente importante para la apropiación de este conocimiento. Después de este momento, comenzamos el proceso de desarrollar actividades con el software R, con la misma actividad.

Consideramos aquí que, con el análisis gráfico de los datos, la tecnología puede ayudar a través de una variedad de gráficos que permiten a los estudiantes investigar conceptos clave a través de la visualización. Es posible construir histogramas, diagramas de caja, diagramas de dispersión, polígonos de frecuencia, distribuciones de probabilidad, distribuciones de muestreo, etc. También es posible manipular los datos para observar cambios en las representaciones gráficas, logrando así eliminar el carácter abstracto de muchos conceptos.

Por lo tanto, los participantes recibieron un guión con un paso a paso para usar el software R para resolver la actividad propuesta. Los participantes también recibieron instrucciones de descargarlo en la computadora y recibieron orientación sobre cómo usarlo.

Con el uso del software R, inicialmente se generaron gráficos (histograma y polígono de frecuencia), Figura 6, considerando las medallas de todos los países enumerados en la tabla que se muestra en la Figura 3.

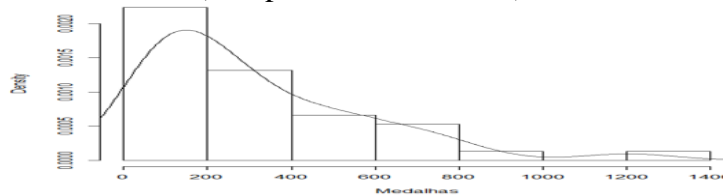
**Figura 6** - Gráfico de actividad con medallas de países en la historia de los Juegos Olímpicos



**Fuente:** Elaboración propia a partir de la salida del software R

Se puede observar que existe una asimetría en el comportamiento de los datos y se observa que existe una gran dispersión de los datos en torno a las medidas de tendencia central. Por esta razón, se eliminó el número de medallas para los EE. UU. (Figura 7). Así, se pudo analizar cómo el polígono, a partir del histograma, muestra el comportamiento de los datos, indicando que hay menor dispersión. Lo que motivó la continuidad de la actividad, con el retiro de las observaciones que eran visualmente discrepantes, fue creer intuitivamente que presentaría una menor dispersión de los datos.

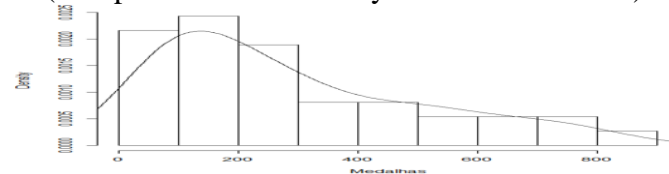
**Figura 7** - Gráfico de actividad con medallas de países en la historia de los Juegos Olímpicos (excepto Estados Unidos)



**Fuente:** Elaboración propia a partir de la salida del software R

También se propuso eliminar el número de medallas de la extinta Unión Soviética (Figura 8).

**Figura 8** - Gráfico de actividad con medallas de países en la historia de los Juegos Olímpicos (excepto Estados Unidos y la Unión Soviética)



**Fuente:** Elaboración propia a partir de la salida del software R

La continuidad de la actividad demuestra ser útil en la medida en que se observa que los datos son menos asimétricos, lo que indica una apariencia cercana a la curva de la distribución normal o simétrica, donde los valores de la media, la mediana y la moda son iguales.

Creemos que con esta actividad es posible examinar la variabilidad dentro de un grupo (observando cómo los datos varían dentro de uno o más conjuntos de datos) y la variabilidad entre grupos (la variabilidad de las medidas utilizadas para resumir y comparar conjuntos de datos), y con ello, distinguir entre estos dos tipos de variabilidad. Además, podemos enumerar los siguientes aspectos para respaldar la importancia de esta actividad: (1) A través del gráfico, fue posible verificar la variabilidad de los datos y revelar patrones para ayudar a descubrir el comportamiento de su distribución e identificar aspectos que pueden causar problemas para su identificación; (2) Los diferentes gráficos pueden revelar diferentes aspectos de la variabilidad de un conjunto de datos, por lo que es importante estudiar más de un sólo tipo de gráfico de un conjunto de datos.

Creemos que es esencial pedirles a los participantes que dibujen gráficos (histograma y polígono de frecuencias) para el mismo conjunto de datos y/o diferentes conjuntos de datos, ya que con este procedimiento, es posible visualizar la variabilidad de los datos.

Después de trabajar con histogramas y polígonos de frecuencia, se puede ver que la distribución de datos puede tomar muchas formas. Y en algunas distribuciones tienden a agrupar datos más para una parte de la distribución que para la otra (asimetría).

Es posible analizar las distribuciones de datos para obtener medidas numéricas o estadísticas, que pueden ayudarnos a analizar las características de los datos. Estos recursos son de particular importancia para la toma de decisiones: la tendencia central y la dispersión.

Por lo tanto, en el software R, también se pueden obtener medidas de tendencia central y dispersión mediante el uso de las funciones *sumario* y *cuantil* (Figura 9) y que apoyan el estudio del concepto de variabilidad.

**Figura 9** - Funciones *summary* y *quantile* para generar medidas de tendencia central y dispersión en software R

```
> numSumario (EX4 [, "X802"], estadísticas = c ("media", "sd", "IQR", "cuantiles"), + cuantiles = c (0, .25, .5, .75,1) )  
> cuantil (EX4 [, "X802"], seq (.1, .9, .1))
```

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 1 presenta las medidas de tendencia central y dispersión de los datos presentados en la Figura 3 y que se generaron a partir del software R con las funciones que se muestran en la Figura 9.



**Tabla 1** - Medidas estadísticas (tendencia central y dispersión) generadas por el software R para el problema del número de medallas

Medidas estadísticas	Todos los datos	Excepto Estados Unidos	Excepto Estados Unidos y la Unión Soviética
n	42	41	40
Media	372,48	319,41	297,30
Desviación	424,87	252,63	211,88
Mínimo	62,00	62,00	62,00
Percentil 10	71,50	71,00	70,50
1 cuartil	109,50	109,00	108,50
Mediana	267,50	260,00	251,50
3 cuartil	481,75	470,50	461,75
Percentil 90	726,70	700,80	625,60
Máxima	2548,00	1204,00	802,00
Rango intercuartil - IQR	186,13	180,75	176,63

**Fuente:** Datos organizados por los autores a partir de la salida del software R

A diferencia de las medidas de tendencia central que miden la representación en un solo punto, las medidas de dispersión miden el grado de separación que tiene una variable estadística alrededor de una medida de posición o tendencia central. Las medidas de dispersión o variación se entienden como el grado en que los datos numéricos tienden a distribuirse alrededor de un valor central o tendencia central.

Por lo tanto, Tabla 1, al eliminar el número de medallas de los Estados Unidos (EUA) y, posteriormente, el número de medallas de la antigua Unión Soviética (URSS), se observa que:

- 1) Hay una disminución en el valor promedio de medalla por país: ( $\bar{x}_{total} = 372,48$  medallas;  $\bar{x}_{(total-EUA)} = 319,41$  medallas;  $\bar{x}_{(total-EUA-URSS)} = 297,30$  medallas);
- 2) Hay una disminución en la desviación estándar del número de medallas, es decir, la variación de los datos observados alrededor del valor promedio: ( $S_{total} = 424,87$  medallas;  $S_{total-EUA} = 252,63$  medallas;  $S_{total-EUA-URSS} = 211,88$  medallas);
- 3) Otra medida importante en el estudio de la variabilidad es el valor máximo observado, donde también se puede observar que hay un valor más bajo: ( $P_{100\%(total)} = 2548$  medallas;  $P_{100\%(total-EUA)} = 1204$  medallas;  $P_{100\%(total-EUA-URSS)} = 802$  medallas);
- 4) Hay una disminución en el valor observado del rango intercuartílico (IQR). Así, partiendo de la concepción de que esta medida indica la variabilidad de los datos, teniendo la propiedad de ser no negativa y ser tanto mayor como la variabilidad presente en los datos, se puede decir que el comportamiento de las distribuciones en estudio indica que hay menos variabilidad.

Por lo tanto, el valor de las medidas estadísticas indica que con el retiro sucesivo del número de medallas de los Estados Unidos y la Unión Soviética, los datos son más homogéneos,

lo que indica que el número de medallas de estos dos países altera el comportamiento de la distribución de datos.

Destacamos que con el uso de herramientas computacionales contribuyeron a apalancar el análisis estadístico y contribuir al desarrollo conceptual de los estudiantes. Se refiere a la movilización de recursos, tales como diferentes objetos estadísticos mediante representaciones numéricas (medidas de tendencia central y dispersión), tabulares (representación resumida de datos), gráficos (fotografía del comportamiento de los datos) y simbólicos.

Lo que a su vez puede generar entornos favorables para las experiencias de aprendizaje variadas a través de un enfoque concreto y visual, lo que permite, intuitivamente, iniciar el contacto con los conceptos y el descubrimiento de relaciones complejas entre estos objetos.

Luego del desarrollo de las actividades, se aplicó un instrumento para evaluar la aceptación, o no, de las metodologías de enseñanza sugeridas en este estudio, es decir, qué método se prefirió, utilizar papel y lápiz o tecnología en su desarrollo y solicitud a los participantes que presentaran otras formas de aplicar los conceptos en situaciones cotidianas.

Se pidió a los participantes que calificaran cinco preguntas del 1 al 5 (puntuando 1 para la pregunta con la menor aceptación y así sucesivamente, hasta 5 para la mayor aceptación). Además, les preguntamos qué método preferían (enseñanza tradicional o el método que usa tecnología de software) y la justificación de su respuesta. La Tabla 2 presenta los resultados al evaluar la actividad y los contenidos abordados por los participantes de la investigación, considerando que un valor más cercano a 5 indica mejor aceptación de las actividades y, en consecuencia, valores más cercanos a 1, menor aceptación.

**Tabla 2** - Resultado de la evaluación de aceptación de actividades por parte de los alumnos

<b>Preguntas</b>	<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
¿Te gustó realizar las actividades?	0 (0,00%)	0 (0,00%)	2 (16,67%)	2 (16,67%)	8 (66,68%)
Después de realizar las actividades, ¿entendió los conceptos de dispersión de datos?	0 (0,00%)	0 (0,00%)	1 (8,33%)	2 (16,67%)	9 (75,00%)
Después de realizar las actividades, ¿entendió los conceptos de asimetría de datos?	0 (0,00%)	0 (0,00%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	9 (75,00%)
Después de realizar las actividades, ¿entendió los conceptos de curtosis de datos?	1 (8,33%)	0 (0,00%)	4 (33,33%)	1 (8,33%)	6 (50,00%)
Si los conceptos matemáticos se trabajaran de manera divertida, específicamente con juegos, ¿aumentaría su interés?	0 (0,00%)	1 (8,33%)	1 (8,33%)	2 (16,67%)	8 (66,68%)

**Fuente:** Elaboración propia

Por lo tanto, considerando los datos expresados en la Tabla 2, presentamos el siguiente resumen con algunas justificaciones: (1) La mayoría de los participantes declararon que les gustaba llevar a cabo las actividades; (2) La mayoría de los participantes declararon que, después de realizar las actividades, entendieron los conceptos de dispersión de datos y los conceptos de asimetría de datos; (3) Solo uno de los participantes declaró que no entendía el concepto de curtosis de datos y justificó que el concepto no era claro; (4) Solo uno de los participantes declaró que si los conceptos matemáticos se resolvieran de manera divertida, su interés no aumentaría; (5) Todos los participantes prefirieron el método en el que se utilizó el software R para resolver los problemas.

Complementando esta evaluación, en relación con la indicación de qué método se prefería (“usar papel cuadriculado y lápiz” o “usar tecnología”) en el desarrollo de la actividad, traemos breves reflexiones sobre las justificaciones de su opción.

La mitad de los participantes en las actividades que respondieron al instrumento de investigación consideraron que el uso de la tecnología, es decir, el uso del software "R" para resolver los problemas propuestos contribuye efectivamente al desarrollo de la comprensión del concepto de variabilidad. Estos testimonios se presentan en la Tabla 3.

**Tabla 3** - Presentación de las características de los alumnos y su testimonio en relación con el uso de la tecnología como preferencia en el desarrollo de actividades

Edad (años)	Programa de entrenamiento inicial	Testimonio
19	PIBID	Es visualmente más comprensible.
19	PIBID	Debido a que al usar la tecnología, la resolución es más clara y la visualización es mejor.
20	PIBID	Preferí el método usando la tecnología, porque los resultados son más precisos y el gráfico es visualmente mejor de entender.
21	PET	El uso de la función de software R es una clase diferente, en otro entorno. Esta locomoción atrae la curiosidad del alumno, en mi caso, facilita la construcción del gráfico a partir de los datos encontrados. Otro factor interesante se relacionó con el final de la actividad en la que se calculó el ejercicio utilizando la "R" y luego pudimos dibujar el gráfico en la hoja, utilizando los datos encontrados en el software.
21	PET	Por la velocidad con la que puede obtener el gráfico y la información necesaria para calcular los coeficientes, también por la precisión con la que obtiene el gráfico. Creo que también sería interesante calcular los coeficientes en el software y mostrar la ubicación del promedio, la moda, en el gráfico.

**Fuente:** Elaboración propia

También, vale la pena considerar que la edad promedio de este grupo es de 20.5 años, con una desviación estándar de 1.5 años, es decir, de acuerdo con el coeficiente de variación, la dispersión de edad se considera baja (7.3%). Se observa que el grupo, en promedio, es joven. Observamos que la mitad de los estudiantes son hombres y la otra mitad son mujeres.

Otro factor es la composición de este grupo, con cuatro participantes del Programa Institucional para Becas de Iniciación Docente - PIBID/Matemáticas y dos del Programa de Educación Tutorial - PET/Matemáticas, es decir, estudiantes en capacitación inicial.

El PIBID es un programa de becas de iniciación de enseñanza institucional promovido por la Coordinación para el Mejoramiento del Personal de Educación Superior - CAPES en Brasil, que ofrece becas para estudiantes de cursos de grado completo, para ejercer actividades pedagógicas en escuelas primarias públicas, mejorando su capacitación y contribuyendo a mejorar la calidad de estas escuelas.

Creado e implementado en 1979 por CAPES, PET es un programa académico dirigido a estudiantes matriculados regularmente en cursos de pregrado que se organizan en grupos, reciben orientación académica de maestros tutores, buscan involucrarlos en un proceso de capacitación integral, proporcionándoles una comprensión integral y profunda de su área.

Por lo tanto, creemos que a través del testimonio de los participantes, están en línea con lo que dice Levy (2008), que las tecnologías de información actualmente establecen una nueva forma de pensar sobre el mundo que ha estado reemplazando principios, valores y procesos. productos e instrumentos que miden la acción del hombre con el medio ambiente.

Además, los estudios de Ben-Zvi (2011) y Castro, Gutiérrez y Hugues (2014), afirman que la utilización de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la variabilidad contribuye al desarrollo del razonamiento de estos conceptos por parte de los estudiantes.

Creemos que, en la sociedad actual, ya no es posible negar que las nuevas tecnologías están presentes en las experiencias diarias de los individuos y que la escuela no puede permanecer fuera de las experiencias de estos estudiantes.

Hay muchos cambios y transformaciones que han ocurrido en las últimas décadas en la sociedad brasileña y estos se están reflejando en la escuela, donde los maestros ya no pueden permanecer indiferentes a estos cambios, redirecciones y reconstrucciones.

También se observa que la otra mitad de los participantes declaró que el uso de la tecnología, en este caso, el software R, contribuye positivamente al desarrollo de la comprensión

de los contenidos cubiertos, pero también enfatizan que es importante trabajar los conceptos con papel cuadriculado y lápiz. Estos testimonios se presentan en la Tabla 4.

La edad promedio de este grupo es de 29.3 años, con una desviación estándar de 6.5 años, es decir, de acuerdo con el coeficiente de variación, la dispersión de la edad se considera moderada (22.2%). La mayoría son mujeres (66,67%). Destacamos que la diferencia de edad promedio entre los grupos es  $(29.3 - 20.5) = 8.8$  años. Por lo tanto, está claro que el grupo que considera la asociación de las dos metodologías de enseñanza es 8.8 años mayor.

Otro factor es que la composición de este grupo está compuesta por tres estudiantes del Máster en Educación, un estudiante de PIBID (36 años) y dos estudiantes de PET, es decir, participantes en la educación inicial y continua.

Estamos de acuerdo con Tornaghi et al. (2010) al afirmar que la tecnología no es solo el socio que nos permite hacer las mismas cosas de una forma más divertida o eficiente. Aporta nuevos conocimientos y nuevas necesidades a la escuela y, naturalmente ligadas a tantas novedades, son posibilidades que aparecen como formas insólitas de grabación, lectura y trabajo colaborativo.

**Tabla 4** - Presentación de las características de los estudiantes y su testimonio en relación con el uso de la tecnología junto con "papel y lápiz".

Edad (años)	Programa de entrenamiento inicial o de posgrado	Testimonio
22	PET	Creo que ambos métodos son importantes para comprender todos los procesos para calcular los datos, pero el uso de la tecnología hace que el cálculo de estos valores sea mucho más fácil, porque muchas veces, al hacer lo mismo, podemos calcular erróneamente, comprometiendo así el resultado completo. .
25	PET	La visualización es más fácil, los datos se calculan más rápidamente, pero la explicación de los conceptos se puede hacer con papel cuadriculado y lápiz. En conclusión, es interesante trabajar los dos métodos juntos.
25	Master en Educación	El método que utiliza la tecnología es bastante eficiente, sin embargo, creo que la unión de los métodos traería un mejor resultado.
30	Master en Educación	Es más rápido y nos enseña a tener dominio del software, pero para saber cómo interpretar los datos es necesario tener dominio usando papel cuadriculado y lápiz.
36	PIBID	El uso del software lo hizo muy fácil, ya que calcula todos los valores y genera el gráfico, incluso si tiene que hacer el gráfico manualmente, la comprensión de la pregunta ya está más clara. Incluso para aquellos que aún no han tomado el curso, se facilitó la comprensión con el uso del software.
38	Master en Educación	Porque la tecnología ayudó a acelerar la resolución de los ejercicios e hizo posible materializar conceptos estadísticos que son muy abstractos.

**Fuente:** Elaboración propia.

Además, los resultados del estudio son respaldados por Godino, Batanero y Flores (2001) y Cobo (2003) cuando indican que es necesario ir más allá del uso de papel y lápiz para realizar cálculos y dibujar gráficos y tablas, siendo deseable el uso de nuevas tecnologías en situaciones de enseñanza, incluido un software específico que se considera una herramienta pedagógica frecuentemente recomendada.

Por lo tanto, el testimonio de estos estudiantes nos lleva a pensar en la existencia de la relación entre la enseñanza tradicional (usando papel cuadriculado y lápiz) y la enseñanza con soporte tecnológico. No podemos llevarlo a extremos, donde, por ejemplo, todos tienen computadoras para usar en el aula. Es necesario considerar una combinación entre un método tradicional de enseñanza y avances tecnológicos, como el uso de software.

Deberíamos considerar la enseñanza utilizando diferentes medios como ideales, es decir, en los que todos los medios deberían tener la oportunidad, desde los más modestos hasta los más elaborados, desde el uso de pizarrones y mapas geográficos, etc. En el proceso de enseñanza y aprendizaje, deben estar presentes desde palabras habladas y escritas hasta imágenes y sonidos, pasando por lenguajes matemáticos, gestuales y simbólicos (SANCHO, 2001).

Creemos que debemos aplicar un diferencial tecnológico en el aula, sin dejar de ser educativo, manteniendo así al estudiante interesado y al maestro en control, no solo del aula, sino también de las herramientas disponibles para aportar conocimiento.

Además, la percepción de variabilidad comienza con una reflexión sobre el problema propuesto y cómo encontrar su solución, o incluso más claramente, en la observación de su comportamiento de los datos. Se puede dar un mayor nivel de especificidad para organizar los datos o dibujar gráficos, para dar paso gradualmente a una concepción más formal y así cuantificar la variabilidad, describirla y finalmente explicarla.

### **Consideraciones finales**

Analizando los datos expresados en este trabajo, consideramos que los conocimientos de los participantes sobre la variabilidad convergieron con la forma en que percibieron la distribución de datos; sin embargo, el problema propuesto también fue importante para comprender el comportamiento de los datos.

Después de realizar la investigación y analizar los resultados, se descubrió que los participantes aceptaban el uso del software. Sin embargo, no debemos considerar la posibilidad de descartar el uso del método tradicional (usando papel cuadriculado y lápiz) en el aula, ya que es posible combinar las dos metodologías para la presentación de conceptos.

Sabemos que la tecnología nos brinda varias herramientas y opciones para diversificar la forma de enseñar los conceptos de la variabilidad, en el caso de esta investigación, por ejemplo, la dispersión de datos, la asimetría de datos y la curtosis.

Creemos, por lo tanto, que las tecnologías de la información están presentes, y el educador tiene la oportunidad de llevarlas al aula y proporcionar a sus estudiantes una educación actualizada y de calidad, sin embargo, antes que nada, es necesario saber qué hacer, la razón del uso, si tiene una base y se usará para el contenido con el que se trabajará, porque es inútil usar estos medios solo porque está de moda o porque es la orientación de la institución.

Tampoco podemos usar un medio de aprendizaje, debemos tener un equilibrio y siempre saber cuándo usarlos, diversificando las formas de enseñar y realizar actividades.

Este trabajo confirma que el mundo contemporáneo está marcado por los avances en comunicación, tecnología de la información y otras transformaciones tecnológicas y científicas. Estas transformaciones intervienen en las diversas esferas de la vida social, causando cambios económicos, sociales, políticos y culturales, que también afectan a las escuelas y al ejercicio profesional de la enseñanza.

Esto se refleja en los tipos de actividades propuestas en el aula, donde la educación se enfrenta al doble desafío: adaptarse a los avances tecnológicos y guiar el camino de todos hacia el dominio y la apropiación crítica de estos nuevos medios.

La actividad puede mostrar la ayuda de la informática en la enseñanza de la estadística, su apoyo en la reducción de cálculos para enseñar de una manera tradicional, y por otro lado, la visualización de conceptos. La posibilidad de simulaciones resultó ser vital en la generación de situaciones de enseñanza que dificultarían realizarlas en el aula por otros métodos.

Los participantes concluyeron que no deberían realizar todas las actividades utilizando la tecnología. Además, creen que debe usarse de manera equilibrada con otras técnicas de enseñanza, como papel cuadriculado y lápiz.

## **Referencias**

- BARGAGLIOTTI, A.; FRANKLIN, C.; ARNOLD, P.; JOHNSON, S.; PEREZ, L.; SPANGLER, D. A. **Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)**. Endorsed by the American Statistical Association in 2020. Alexandria (VA, USA), 2020. Disponível em: <https://www.amstat.org/asa/education/Guidelines-for-Assessment-and-Instruction-in-Statistics-Education-Reports.aspx>. Acesso em: 01 mar. 2022.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FLORES, P. El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de Matemáticas. In: OLIVIER, A.; NEWSTEAD, K. (Eds.), **Proceedings of 22 International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, Stellenbosch, África do Sul, 2001. Disponível em: [https://www.academia.edu/5110083/EL\\_AN%C3%81LISIS\\_DID%C3%81CTICO\\_DE\\_L\\_CONTENIDO\\_MATEM%C3%81TICO\\_COMO\\_RECURSO\\_EN\\_LA\\_FORMACI%C3%93N\\_DE\\_PROFESORES\\_DE\\_MATEM%C3%81TICAS](https://www.academia.edu/5110083/EL_AN%C3%81LISIS_DID%C3%81CTICO_DE_L_CONTENIDO_MATEM%C3%81TICO_COMO_RECURSO_EN_LA_FORMACI%C3%93N_DE_PROFESORES_DE_MATEM%C3%81TICAS). Acesso em: 02 mar. 2022.
- BEN-ZVI, D. Statistical reasoning learning environment. **Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, Recife, v. 2, n. 2, p. 1-13, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2152/1721>. Acesso em: 01 mar. 2022.
- BOROVČNIK, M.; KAPADIA, R. Research and Developments in Probability. **Education International – Electronic Journal of Mathematics**, v. 4, n. 3, p. 111-130, 2009. Disponível em: <https://www.iejme.com/article/research-and-developments-in-probability-education>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- CASTRO L., F. J.; GUTIÉRREZ F., G.; HUGUES G., E. **Un acercamiento a la variabilidad estadística usando tecnología computacional**. Tecnología Computacional en la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Nuevo León y Asociación Mexicana de Investigadores en Uso de la Tecnología en Educación Matemática A. C., Monterrey, México, 2014. Disponível em: <https://pmme.mat.uson.mx/>. Acesso em: 01 mar. 2022.
- COBO, B. **Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria**. 2003. 301 f. Tesis (Doctoral) – Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, 2003. Disponível em: <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade y Estadística**. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.
- FRANKLIN, C.; KADER, G.; MEWBORN, D.; MORENO, J.; PECK, R.; PERRY, M.; SCHEAFFER, R. **A curriculum framework for K-12 statistics education**. GAISE report. American Statistical Association, 2007. Disponível em: [https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/gaise/gaiseprek-12\\_full.pdf](https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/gaise/gaiseprek-12_full.pdf). Acesso em: 02 mar. 2022.
- GARFIELD, J.; BEN-ZVI, D. A framework for teaching and assessing reasoning about variability. **Statistics Education Research Journal**, v. 4, n. 1, p. 92-99, 2005. Disponível em: [https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4\(1\) Garfield BenZvi.pdf](https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4(1) Garfield BenZvi.pdf). Acesso em: 02 mar. 2022.



- GOULD, R. Statistics and the Modern Student. **International Statistical Review**, v. 78, n. 2, p. 297-315, 2010. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/27919839>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- JELIHOVSKI, E. **Análisis exploratorio de datos utilizando el R**. Ilhéus, Brasil: Editus, 2014.
- KADER, G.; PERRY, M. Variability for categorical variable. **Journal of Statistics Education**, v. 15, n. 2, 2007. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10691898.2007.11889465>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- LEVY, P. **Cibercultura**. Trans. Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 2008.
- LIMA, E. I.; NAGAO, F. Q. A.; SELMO, J. T.; LANDIM, S. P. P.; LIMA, V. M. M. El papel de la educación formal, no formal e informal en la formación política de las educadoras. **Revista Pegada**, Presidente Prudente, v. 20, n. 1, p. 270-286, 2019. Disponível em: <https://revista.fct.unesp.br/index.php/pegada/article/view/6305>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular: Educação é a base**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)
- OLIVEIRA, M. M. **Secuencia didáctica interactiva en el proceso de formación del profesorado**. Petrópolis: Vozes, 2013.
- R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2011. Disponível em: <https://www.r-project.org/>. Acesso em: 01 mar. 2022.
- RAMÍREZ-MONTES, O. S.; NAVARRO-VARGAS, J. R. Aprendizaje basado en problemas: un nuevo referente para la construcción del currículo en los cursos de salud. **Revista de la Facultad de Medicina**, Colombia, v. 63, n. 2, p. 325-330, 2015. Disponível em: [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0120-00112015000200018](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-00112015000200018). Acesso em: 02 mar; 2022.
- SANCHO, J. M. **Por una tecnología educativa**. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- SCHUYTEN, G.; THAS, O. Statistical thinking in computer-based learning environments. **International Statistical Review**, v. 75, n. 3, p. 365-371, 2007. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/41509877>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- SHAUGHNESSY, J. M. Research on statistics learning and reasoning. In: LESTER, F. (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Reston, VA: NCTM, 2007. p. 957-1009.
- SHAUGHNESSY, J. M. Recommendations about the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective from Curriculum and Research. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 14, n. 18, p. 44-58, 2019. Disponível em: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/39892>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- SILVA, R. C. **Impactos, dificultades y avances en la inserción de tecnologías en la cultura escolar**. 2014. 108 f. Tesis (Maestría) - Post-Graduación Stricto Sensu en Educación, Universidad Estatal del Oeste de Paraná - UNIOESTE, Brasil, 2014. Disponível em: <https://tede.unioeste.br/bitstream/tede/958/1/Raul%20Cesar.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2022.

- SNELL L.; PETERSON W. Does the computer help us understanding statistics? In: **Statistics for the Twenty First Century**. Ed. Florence, G. and Gordon, S. MAA Notes, 26, 1992.
- SOUZA, J.; PEÑALOZA, R. A. S. **Estadísticas exploratorias de series nominales y ordinales**: teoría y aplicación a medidas difusas de pobreza multidimensional para datos ordinales, 2005. Disponible em: [https://www.ufrgs.br/ppge/wp-content/themes/PPGE/page/textos-para-discussao/pcientifica/2005\\_03.pdf](https://www.ufrgs.br/ppge/wp-content/themes/PPGE/page/textos-para-discussao/pcientifica/2005_03.pdf). Acesso em: 01 mar. 2022.
- TORNAGHI, A. J. C.; COSTA, A. J.; BRITO, M. E. B.; ALMEIDA, M. E. B. A. **Tecnologías en la educación: enseñar y aprender con las TIC: una guía para el estudiante**. Brasília: Departamento de Educación a Distancia, 2010.
- VERZANI, J. Using R in Introductory Statistics Courses with the pmg Graphical user Interface. **Journal of Statistics Education**, v. 16, n. 1, p. 1-17, 2008. Disponible em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10691898.2008.11889558>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- WATSON, J.; KELLY, B. A. Can grade 3 students learn about variation? In: **Sixth International Conference on Teachings Statistics**. Proceedings ICOTS 6, África do Sul, 2002. Disponible em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/>. Acesso em: 01 mar. 2022.

**Autores:**

**Ailton Paulo de Oliveira Júnior**

Ciencias Estadísticas por la Escuela Nacional de Ciencias Estadísticas, Licenciatura en Matemáticas por la Universidad Católica de Brasilia, Maestría en Investigación Operativa por el Instituto Militar de Ingeniería, Doctorado en Educación (Didáctica, Prácticas Escolares y Técnicas de Enseñanza) por la Universidad de São Paulo y Post-Doctorado en Educación de la Universidad de São Paulo. Profesor Asociado III de la Carrera de Matemáticas del Centro de Matemática, Computación y Cognición y del Programa de Posgrado (Maestría y Doctorado) en Enseñanza e Historia de las Ciencias y las Matemáticas de la Universidad Federal del ABC - UFABC. Las líneas de investigación están relacionadas con: concepciones y actitudes de docentes y estudiantes en relación a la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística; Resolución de problemas, juegos pedagógicos, equivalencia de estímulos, tecnologías digitales, libros de texto, análisis de libros de texto y enfoques históricos que contribuyen a la enseñanza de la Probabilidad, Estadística y Combinatoria.

Correo electrónico: [ailton.junior@ufabc.edu.br](mailto:ailton.junior@ufabc.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-2721-7192>

**Flávia Helena Pereira**

Maestría en Educación por la Universidad Federal del Triângulo Mineiro. Graduado en Licenciatura en Matemáticas por la Universidad Federal del Triângulo Mineiro. Graduada en Gestión de Recursos Humanos por la Universidad de Uberaba. Profesor de Educación Básica por la Secretaría de Educación del Estado de Paraná. Miembro del Grupo de Estudios e Investigación en Educación y Cultura - GEPEDUC.

Correo electrónico: [fh\\_pereira18@yahoo.com.br](mailto:fh_pereira18@yahoo.com.br)

<https://orcid.org/0000-0002-6438-6972>

**Diego Marques de Carvalho**

Estudiante de Doctorado en el Programa de Postgrado en Didáctica e Historia de las Ciencias y las Matemáticas. Magíster en Ciencias de la Computación de la Universidad Federal del ABC. Graduada en Comunicación Social por la Facultad de Tecnología y Comunicación de Paulus. Profesor del curso de Programación de Juegos Digitales en el Centro Estatal de Educación Tecnológica Paula Souza, en ETEC Guaracy Silveira y Faculdade Impacta de Tecnologia. Tiene experiencia en el área de Desarrollo de Juegos Digitales, trabajando principalmente en los siguientes temas: desarrollo de software y juegos para dispositivos móviles e internet, medios digitales, web 2.0 y educación a distancia.

Correo electrónico: [diego.marques@ufabc.edu.br](mailto:diego.marques@ufabc.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-5842-4653>

**Jaqueline de Oliveira Costa**

Estudiante de Maestría en el Programa de Posgrado en Enseñanza e Historia de las Ciencias y las Matemáticas de la Universidad Federal del ABC. Licenciado en Ingeniería Mecatrónica por la Universidade Paulista; Licenciado en Matemáticas, Facultades Oswaldo Cruz. Actúa en las siguientes áreas: Enseñanza de las Matemáticas; docente evaluador de proyectos en educación técnica.

Correo electrónico: [jaqueline.costa@ufabc.edu.br](mailto:jaqueline.costa@ufabc.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-0051-113X>