Fracciones: comprensión de alumnos del 6º año em prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición

Vania Sara Doneda de Oliveira
vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
https://orcid.org/0000-0001-5229-1880
Professora da Secretaria de Estado de Educação do Paraná (*SEED-PR*)
Campo Mourão, Paraná, Brasil.

Maria Ivete Basniak
basniak2000@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0001-5172-981X
Doutora em Educação. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)
União da Vitória, Paraná, Brasil.

Recibido: 31/marzo/2021 **Aceptado:** 24/agosto/2021

Resumen

En ese artículo se ha investigado la comprensión, por alumnos del 6º ano de la Enseñanza Primaria, sobre los números racionales cómo campo numérico diferente de los Naturales, desde prácticas pedagógicas remotas orientadas por la Enseñanza exploratoria de Matemática (EEM) enfocando fracciones en perspectiva de medición. Está basado en estudios de Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) sobre el aprendizaje de fracciones en perspectiva de medición, que discuten el uso de barras Cuisenaire. Se trata de una investigación cualitativa de naturaleza interpretativa, cuyo análisis de datos consideró reportes escritos por alumnos, grabaciones de reuniones y transcripciones, en los que se buscó identificar elementos que revelen y hagan evidente si y cómo los alumnos comprenden fracciones cómo medida. Como resultado, se verificó que los estudiantes entendieron la diferencia en la magnitud numérica de los números naturales a los números fraccionarios, cuando pudieron comparar fracciones, y entendieron que las fracciones equivalentes tienen el mismo tamaño (la misma medida), pero se pueden escribir con diferentes representaciones simbólicas y, que cuando se multiplican fracciones distintas de cero y uno, el resultado de la multiplicación puede ser menor que uno de los factores, lo que no ocurre en números naturales. Se concluye que las comprensiones de los estudiantes se plantearon en las prácticas desarrolladas, las cuales favorecieron el pensamiento de los números racionales desde un punto de vista epistemológico antes que el simbólico, contrastando lo simbólico con los significados y sentidos resultantes de representaciones no simbólicas.
Palabras clave: Números Fraccionarios; Perspectiva de Medición; Tareas de Naturaleza Exploratória; Enseñanza Exploratoria de Matemática; Enseñanza Remota.

Frações: compreensões de alunos de 6º ano em práticas de ensino exploratório orientadas pela perspectiva da medição

Resumo

Neste artigo se investigou a compreensão por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre os números racionais como campo numérico diverso dos números naturais, a partir de práticas pedagógicas remotas orientadas pelo Ensino Exploratório de Matemática (EEM) abordando as frações na perspectiva da medição. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de

cunho interpretativo, cuja análise de dados considerou os registros escritos dos alunos, gravações das reuniões e transcrições, em que se buscou identificar elementos que revelem e evidenciem se e como os alunos compreendem as frações como medida. Como resultado, verificou-se que os alunos compreenderam a diferença da magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, quando conseguiram comparar frações, e compreenderam que frações equivalentes têm o mesmo tamanho (mesma medida), mas podem ser escritas por representações simbólicas diferentes e, que, quando se multiplicam frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos fatores, o que não ocorre nos números naturais. Conclui-se que as compreensões dos alunos foram suscitadas nas práticas desenvolvidas, as quais favoreceram pensarem sobre os números racionais do ponto de vista epistemológico antes do simbólico, contrapondo o simbólico com os significados e sentidos decorrentes das representações não simbólicas.
Palavras-chave: Números Fracionários; Perspectiva da Medição; Tarefas de Natureza Exploratória; Ensino Exploratório de Matemática; Ensino Remoto.

Fractions: understandings by 6th grade students in exploratory teaching practices guided by the measurement perspective

Abstract

This paper has investigated the comprehension by students at 6th Grade Elementary School on rational numbers as a numerical field other than naturals numbers, from remote pedagogical practices guided by Exploratory Teaching of Mathematics (ETM) approaching fractions in measurement perspective. This is a qualitative research of interpretative nature, whose data analysis considered reports by students, meeting recordings and transcriptions, in which was searched for identifying elements that reveal and make evident whether and how students understand fractions as measure. As a result, it was verified that classes based on ETM make possible that students understand difference in the numerical magnitude of natural numbers for fractional numbers, when they can compare fractions, and they understood that equivalent fractions have the same size (same measure), but they may be written by different symbolic representations. Regarding the product, students have concluded that when fractions different from zero and one are multiplied, multiplication result can be lower than one of the factors, and it does not occur with natural numbers. It is concluded that the students' understandings were raised in the developed practices, which favored thinking about rational numbers from an epistemological point of view before the symbolic one, contrasting the symbolic with the meanings and senses arising from non-symbolic representations.
Keywords: Fractional Numbers; Measurement Perspective; Tasks of an Exploratory Nature; Exploratory Teaching of Mathematics; Remote teaching.

Introdução

Percebemos, pela nossa experiência docente, que o ensino de frações prioriza procedimentos sobre como operar frações decorando regras, o que não colabora para promover situações que favoreçam a compreensão pelos alunos das diferentes interpretações de uma fração. Hiebert e Behr (1991) apontam que o ensino de frações deve dar mais importância ao significado do que ao símbolo, e segundo os Parâmetros Curriculares

Nacionais - PCN, “a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais” (BRASIL, 1998, p. 101). Reflexos do ensino podem ser observados na aprendizagem dos alunos quando, por exemplo, o estudante utiliza as propriedades dos números naturais para operar ou comparar frações (BEHR *et al.*, 1983). Essas dificuldades ecoam além do Brasil, pois Fazio e Siegler (2011) constataram que estudantes de várias partes do mundo têm dificuldades com frações. Outro problema apontado por Campos e Rodrigues (2007), citando Caraça (1951), é quanto ao entendimento do conceito de unidade como referencial a ser tomado para resolver problemas, o que, segundo os autores, está associado a esse conceito ser pouco explorado no ensino de números racionais. Lopes (2008, p. 20) critica o desconhecimento da “história do conceito de frações, bem como de suas componentes, epistemológica e cognitiva” pela maioria dos professores e autores de materiais didáticos. O autor denuncia que

> O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”[1], cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico (LOPES, 2008, p. 20-21).

Portanto, ao invés de ensinar procedimentos, precisamos de práticas de ensino que favoreçam a compreensão dos alunos em relação às interpretações[2] das frações. Nesse contexto, o EEM é uma abordagem de ensino e de aprendizagem que permite que o professor conduza suas aulas em uma perspectiva diferente do modelo de ensino tradicional ou direto, centrado nesse mesmo professor. Esse processo de comunicação consiste na transmissão dos conteúdos matemáticos pelo professor para os alunos, seguido de exercícios de aprendizagem e fixação, pressupondo que os estudantes aprendem por reprodução (PONTE, 2005).

Para isso, o professor deve planejar e desenvolver situações de aprendizagem para os alunos com tarefas que sejam provocadoras e sequenciadas, de forma a oportunizar que os

---

[1] Carroções podem ser explicados como “as expressões numéricas que ocupavam uma folha inteira de caderno” (BRASIL, 2014).

[2] Estudos de Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983), Lamon (2012) e outros remetem à importância de ensinar diferentes interpretações de números racionais para os alunos, de modo que se estabeleça uma base sólida para a compreensão das frações. As frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, se articulando individualmente e entre si. Nesse sentido, ao menos cinco interpretações devem ser consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021).

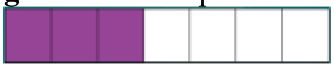
estudantes conheçam e façam matemática com significado, além de desenvolver competências, como resolução de problemas, raciocínio e comunicação (CANAVARRO, 2011; PONTE, 2014).

Orientados por essa perspectiva, planejamos aulas para o desenvolvimento de tarefas de natureza exploratória sobre o ensino de frações na perspectiva da medição para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Paraná. No entanto, com a suspensão das aulas presenciais em março de 2020, em razão da pandemia ocasionada pela disseminação da doença Covid-19, precisamos rever nosso planejamento docente, reestruturando as aulas assentes no EEM para o ensino remoto, e consequentemente realizando adaptações nas tarefas e na forma como seriam desenvolvidas com os alunos (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021). Esse cenário, por um lado preocupante e desolador, constituiu-se, por outro, desafiador e propulsor para problematizar questões, como a que nos propomos a investigar neste artigo, que embora envolva muitas outras variáveis, centramos, aqui, na compreensão por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre os números racionais como campo numérico diverso dos números naturais, a partir de práticas pedagógicas remotas orientadas pelo Ensino Exploratório de Matemática (EEM) abordando as frações na perspectiva da medição. Assim, discutimos a necessidade de uma nova ontologia para o ensino e para a aprendizagem de frações: a perspectiva da medição (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2019b), e como ela pode contribuir para a compreensão dos números racionais e suas diferentes interpretações (DONEDA DE OLIVEIRA; BASNIAK, 2021).

O Ensino de Frações para Compreensão dos Números Racionais

Scheffer e Powell (2019) analisaram livros didáticos atuais do 4º ano do Ensino Fundamental que tratavam do conteúdo de frações, e entre outros apontamentos, verificaram que a abordagem de frações como parte-todo é a que predomina. Essa maneira de abordar frações, associada à ideia de parte-todo, utilizando figuras e/ou objetos particionados, tem o intuito de dar subsídios concretos e visuais ao aluno (POWELL, 2018a). No entanto, Lamon (2001, p.150) destaca que, "matematicamente e psicologicamente, a interpretação parte/todo da fração não é suficiente como base para o sistema de números racionais". Powell (2018a; 2018b) alerta que o conceito de fração trabalhado nas escolas, em que uma área ou conjunto discreto é dividido em partes iguais, em uma perspectiva de partição, restringe a compreensão dos alunos. Essa abordagem de divisão de um inteiro em partes iguais não é suficiente para fundamentar o conceito de frações. O que encontramos nos livros didáticos é que, ao introduzir o conceito de frações como parte-todo, apresenta-se esse tipo de exemplo e/ou tarefa: escreva na forma de fração a parte sombreada da figura.

Figura 1 – Exemplo de tarefa



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Escolano e Gairín (2005) constatam que esse tipo de exemplo ou tarefa não contribui para o ensino e a aprendizagem de frações, pois obriga o aluno a: interpretar a representação gráfica do todo e da parte sombreada, e fazer a transferência dessas representações gráficas para as simbólicas; fazer uma dupla contagem, utilizando números naturais, do todo e das partes sombreadas; e representar, de forma simbólica, os resultados dessas contagens, colocando uma linha para separar o todo (resultado dessa contagem é escrito abaixo da linha) e as partes sombreadas (resultado dessa contagem é escrito e acima da linha).

Dentre alguns problemas ocasionados pelo ensino de fração exclusivamente como parte-todo, Escolano e Gairín (2005) salientam o conhecimento adquirido de forma visual, geralmente pela divisão de figuras geométricas regulares, destacando uma parte e desprezando a medição de magnitude. Em outras palavras, o ato de medir é simplesmente ignorado, bastando fazer uma dupla contagem com números naturais. Para medir é necessária uma unidade, mas nessa abordagem, não é necessário que o aluno saiba qual é a unidade para resolver a tarefa: basta fazer a dupla contagem com números naturais, não havendo a necessidade de um conjunto numérico diferente, o conjunto dos números racionais.

Por isso, conhecer e discutir as propriedades e diferenças entre os números naturais e os números fracionários[3] possibilita que os alunos reflitam e compreendam que são campos numéricos diversos. Isto porque a reflexão sobre essas propriedades favorece o entendimento de magnitude numérica, as diversas representações simbólicas, densidade, e produto e quociente. Obersteiner *et al.* (2019) *apud* Powell (2019b) sintetizam essas diferenças, conforme síntese do Quadro 1.

Quadro 1 – Diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários

[3] Compreendido como aquele que pode ser representado por uma classe de frações (frações equivalentes) (SILVA, 2005).

Categoria de Propriedades	**Propriedades**	
	Números Naturais	**Números Fracionários**
Sinalização de magnitude numérica	Mais dígitos, quanto maior a magnitude: 123 > 23. Numeral maior, maior número: 9 > 3.	Nem o número de dígitos no numerador ou denominador, nem as magnitudes dos dígitos determinam a magnitude da fração: $\frac{8}{9} > \frac{123}{432}$. Numerais maiores não indicam maior número: $\frac{99}{1000} < \frac{4}{3}$.
Representação simbólica	Não usando operações, a magnitude tem uma única representação simbólica: a magnitude de um conjunto de três itens é simbolizada unicamente com o número 3.	Não usando operações, a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas: um e meio itens $= \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \cdots$
Densidade	Cada número natural tem unicamente um antecessor imediato, um sucessor imediato ou ambos: Para o 5, o antecessor imediato é 4 e o sucessor imediato é 6. Entre quaisquer dois números naturais, o número de números naturais é finito: entre 2 e 7 tem quatro números naturais, 3, 4, 5 e 6.	Cada fração não possui nenhum antecessor imediato ou sucessor imediato. Entre quaisquer duas frações existem infinitas outras frações. $\frac{2}{7}$ não é antecessor imediato da $\frac{3}{7}$. Entre as duas frações existe, por exemplo, este conjunto infinito de frações: $\left\{\frac{13}{42}, \frac{11}{35}, \frac{9}{28}, \frac{7}{21}, \frac{5}{14}, \ldots\right\}$.
Produto e Quociente	Multiplicação pode ser definida como adição repetida: 3 + 3+ 3 +3 = 4 × 3. Multiplicar dois números naturais diferentes de 1 ou 0 entre si produz um resultado (produto) maior que os fatores: 4 × 3 = 12, 12 > 4 e 12 > 3. Dividir quaisquer dois números naturais que sejam diferentes de 1 produz um quociente menor do que o dividendo: 12 ÷3 = 4, 4 < 12.	Multiplicação como adição repetida é uma definição insuficiente: $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$, mas $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ não. Multiplicar duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode produzir um resultado (produto) menor que um dos dois fatores: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \frac{1}{3} > \frac{2}{15}$ e $\frac{2}{5} > \frac{2}{15}$. Dividindo-se duas frações diferentes de 1 entre si pode resultar em um quociente maior que o dividendo: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2, 2 > \frac{1}{2}$ e $2 > \frac{1}{4}$.

Fonte: Adaptado de Obersteiner et al. (2019, apud Powell, 2019b).

Observando o Quadro 3.1, constatamos que o estudo de frações, abordando apenas a perspectiva do particionamento, não permite diferenciar todas as propriedades dos racionais, porque essa abordagem está muito relacionada à contagem, confundindo-se com as propriedades dos naturais. Desta forma, o aluno não assume a fração como um novo número, por se tratar de uma situação descritiva (parte como numerador e todo como denominador).

Em seus estudos, Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) utiliza as barras *Cuisenaire* físicas para que os alunos possam progredir das frações não-simbólicas para as simbólicas. Tais barras permitem a comparação de quantidades contínuas.

Sabemos que os estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental já possuem conceitos e ideias pré-estabelecidos sobre frações, sejam eles adquiridos por meio de experiências vividas dentro da escola ou fora dela. Ainda, que a maioria dos estudantes desse ano escolar é capaz de quantificar, ordenar, classificar, relacionar, comparar, comprar, vender e medir. Perez (2008, p. 41-42) explica que

> o tema grandezas e medidas tem um cunho social muito forte e por isso as crianças, quando vêm para a escola, já realizaram algumas experiências mesmo que informais, com medidas, seja em jogos, brincadeiras ou outras atividades do seu dia a dia.

Esse conhecimento dos alunos não pode ser descartado, mas deve ser destacado quanto a sua importância e percepção no cotidiano dos estudantes. Isto porque, a partir do momento que acordamos, começamos a medir: medimos o tempo e organizamos nossos afazeres diários em função do tempo, a quantidade de alimento a ser consumida (massa), a temperatura dos alimentos que consumimos, o tamanho do copo e a quantidade de líquido que será colocada dentro desse copo, etc. É lógico que algumas dessas atividades não requerem precisão de medidas, basta aproximar. Perez (2008, p. 42) alerta que "o ato de medir requer experiência e prática em estimativas, classificações e seriações, além de estabelecer o atributo da grandeza que se quer medir", não sendo uma tarefa fácil para as crianças.

Na história da Matemática, verificamos que a primeira ideia de número racional está associada à representação da medida de quantidades de magnitudes. Para Powell (2019b, p. 03), a magnitude é uma propriedade de todos os números reais, e

> a magnitude absoluta é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida.

Dessa forma, o ensino de frações por meio da medição é fundamentado na ideia de magnitudes, mas, para isso, é necessário estabelecer uma unidade de medida. Portanto, a história dos números racionais está intimamente ligada à necessidade de padronização de unidades de medidas, ao sistema métrico decimal, e ao sistema internacional de medidas (RUSSELL, 1967; GAIRÍN, 1998; BEHR *et al.*, 1983; PEREZ, 2008, ROQUE, 2012). No entanto, precisamos diferenciar grandezas, como o que é passível de medida, de quantidade, o que é de fato medido e indicado por números (RUSSELL, 1967). Assim, comprimento, área, volume, etc., são considerados grandezas de diferentes ordens, e o número encontrado ao realizar a medição é a quantidade. Como exemplos, podemos citar: 3 cm, 1,4 m^2, 20 l (PEREZ, 2008). Powell (2019b, p. 58) afirma que "a quantidade física que expressa magnitude mais direta e inequivocamente que outras é a de comprimento".

Ao apoiar o ensino de frações na medição, evocamos o sentido de relação; ou seja, "uma fração é definida como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis da mesma espécie" (POWELL, 2019c, p. 709). Assim, para Scheffer e Powell (2019), uma abordagem coerente e sólida para o ensino e a aprendizagem de frações está na história das frações, que surgiram devido à necessidade de medição. Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), documento que regulamenta as competências gerais e específicas, as habilidades e as aprendizagens essenciais para todos os estudantes do Brasil referente à Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), no que diz respeito ao conteúdo de números racionais, pontua que:

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (BRASIL, 2018, p. 269).

Desta forma, nosso estudo se fundamenta nesse novo caminho epistemológico para o conhecimento fracionário, que não se baseia na contagem ou partição, mas se sustenta na história dos números racionais como medida e na magnitude das frações. Assim, contribui para o desenvolvimento do senso fracionário, que abarca os seguintes componentes: a *flexibilidade,* que envolve as diferentes representações de uma mesma fração e a escolha daquela mais adequada; a *razoabilidade,* que implica na avaliação se o que foi flexibilizado ou calculado está correto; e a *magnitude* como conceito central (POWELL; ALI, 2018).

Além disso, acreditamos que o EEM se constitui em um grande desafio para professores porque, além das escolhas criteriosas das tarefas, as atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir as aulas, demandam bastante atenção e seu papel é ativo, mas de natureza diversa do ensino dito tradicional ou direto (PONTE, 2005; MENEZES; OLIVEIRA; CANAVARRO, 2013), como discutimos brevemente na subseção que segue.

O Ensino Exploratório de Matemática

A metodologia ativa e inovadora do Ensino Exploratório de Matemática - EEM exige mudanças de atitudes tanto de professores quanto de alunos. Do professor é necessário estudo, planejamento, organização, reflexão, conhecer e conduzir a aula para que as dimensões do EEM se manifestem: *inquiry*, reflexão, comunicação e colaboração[4]. Do aluno é necessário protagonismo para resolução da tarefa, e isto exige adaptação a essa nova metodologia, compreender que o trabalho é coletivo, refletir e comunicar suas ideias e raciocínios, e refletir sobre as ideias dos colegas em um processo dialógico de colaboração. Assim, ao contrário do ensino tradicional, em que o professor desenvolve suas aulas assentes em práticas expositivas e diretas (PONTE, 2005), no EEM, o aluno é o protagonista e o professor é o mediador.

A fim de orientar e organizar as ações do professor, Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem a aula em fases, que Cyrino e Teixeira (2016) admitem ser quatro:

1ª) *Introdução da tarefa* (IT): é o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase, bem como o tempo destinado às fases de desenvolvimento e discussão das resoluções da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa;

2ª) *Realização da tarefa* (RT): nesta fase, os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias e conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida, é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolvê-la em sala de aula. Essa preparação busca antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que saiba como agir, e não valide ou refute ideias;

3ª) *Discussão coletiva da tarefa* (DCT): para este momento, o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam elas corretas ou não, para que, na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões;

4ª) *Sistematização das aprendizagens* (SAM): o papel do professor é estruturar e organizar as aprendizagens matemáticas. Não basta sintetizar ideias, mas sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor

[4] As dimensões do EEM são discutidas nos trabalhos de Estevam e Basniak (2019).

solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Além disso, o EEM sustenta-se em uma seleção criteriosa de tarefas pelo professor, que são resolvidas em um ambiente que promova a comunicação entre alunos e alunos, e alunos e professor, com ênfase para as discussões coletivas, proporcionando negociações de significados matemáticos e desenvolvimento de raciocínios (MENEZES; OLIVEIRA; CANAVARRO, 2013; PONTE, 2005).

Contexto e Pressupostos Metodológicos

Para atingir o objetivo deste trabalho, planejamos e organizamos situações de aprendizagem por meio de tarefas de natureza exploratórias sobre o conteúdo de frações que fossem desafiantes e devidamente sequenciadas, a fim de que os alunos compreendessem frações como medida. A fim de que assim, os alunos pudessem compreender frações equivalentes, (re)conhecer formas de representações de frações, bem como compreender magnitude e capacidade de operar com frações; ou seja, o desenvolvimento do senso fracionário (POWELL; ALI, 2018). A transposição do campo dos números naturais para os números racionais está entre as ideias matemáticas mais importantes e complexas que os alunos do Ensino Fundamental precisam compreender, além de se tratar de conteúdo elementar para compreensão de outros conteúdos, como Álgebra, por exemplo (BEHR *et al.*, 1983).

Portanto, se planejar tarefas de natureza exploratória não é algo simples, no contexto do ensino remoto, foi mais desafiante e complexo, especialmente por envolver os números racionais. Assim, nossas ações, antes e durante as aulas, foram orientadas pelos quadros reelaborados por Oliveira e Basniak (2021), que sustentam ações intencionais do professor, assentes no EEM, envolvendo Tecnologias Digitais – TD, e o papel esperado dos alunos em todas as fases de gestão da aula: IT, RT, DCT e SAM. Esses quadros foram norteadores para o desenvolvimento das aulas no ensino remoto, e uma discussão pormenorizada desses aspectos pode ser encontrada em Oliveira e Basniak (2021). Nesses quadros, procuramos registrar e antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos e, por isso, eles foram atualizados durante o desenvolvimento das tarefas realizadas neste trabalho. Afirmamos que não se trata de quadros estáticos, pois é possível que sejam ampliados e ajustados de acordo com novos elementos: questionamentos, equívocos, estratégias de resolução, etc.

Todas as tarefas, quadro de orientação/antecipação, bem como os planos de aulas foram discutidos e validados em reuniões síncronas (*lives*[5]) via *Google Meet*[6] pelos integrantes do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTEMatE, e foram essenciais para a validação do planejamento, dos objetivos, das ações dos alunos e professor, além da sistematização das aprendizagens matemáticas do conteúdo.

As aulas remotas foram desenvolvidas com alunos de duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino, que tinham entre 11 e 13 anos, e já haviam estudado frações em anos anteriores do Ensino Fundamental. Por isso, as frações simbólicas foram abordadas juntamente com não-simbólicas, mas não foi o foco do trabalho analisar as diferenças e implicações disso, pois as análises foram centradas na compreensão dos alunos acerca das frações na perspectiva da medição.

Foram convidados todos os alunos dessas turmas em que a professora pesquisadora trabalhou no ano de 2020. Dos 61 alunos, 30 preencheram os termos de assentimento e consentimento da pesquisa, e 22 deles participaram do início ao fim da pesquisa.

Para organizar os encontros, os alunos preencheram um formulário do *Google Formulários,* elaborado pela professora pesquisadora, informando dias e horários disponíveis, o tipo de conexão com a internet e artefatos disponíveis (computador, *notebook*, celular ou *tablet*). Com estas informações, seis grupos foram constituídos, com cinco alunos em cada um.

No Quadro 2, explicitamos a organização final dos grupos, os pseudônimos escolhidos pelos próprios alunos, os equipamentos e conexão disponível, além dos dias e horários dos encontros dos grupos (*lives*).

Quadro 2 – Organização dos encontros semanais

Grupos	**Participantes**	**Artefatos Disponíveis**	**Conexão**	**Dia da Semana e Horário**
G1	Docinho, Doguinha, Florzinha, Fofinha, Lindinha e Thor	Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi*	Terças-feiras às 8h

[5] Utilizamos o termo *live* para reuniões síncronas (ao vivo) transmitidas via internet por meio de redes sociais, como Facebook, Instagram, ou ainda via *Google Meet* (a interação entre os participantes pode ocorrer por meio de áudio e/ou vídeo e/ou mensagens escritas - *chat*) ou *Youtube* (a interação ocorre apenas por mensagens escritas - *chat*).

[6] *Google Meet* é uma solução desenvolvida pela *Google,* que oferece serviço de comunicação por videoconferência gratuito para até 250 pessoas para contas institucionais. Pode ser utilizado no navegador de internet ou instalando o aplicativo *Google Meet* para dispositivos móveis. Os participantes podem compartilhar a tela do seu dispositivo apresentando documentos, imagens e qualquer outro tipo de arquivo. Essas reuniões podem ser facilmente compartilhadas por *link* para que os participantes acessem, e podem ser gravadas e posteriormente compartilhadas para que sejam revistas ou visualizadas por quem não participou.

G3	Boom, Flora, Maluquinha, Mazarect e Olívia	*Notebook* e celular	*Wi-fi* e Dados Móveis	Terças-feiras às 18h30min
G4	Anubis, Bob, Fifo, Magrão, Spider-man e Ymercurius	Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi*	Quartas-feiras às 10h
G5	Luffy, Mulher Maravilha, Poster, Viúva Negra, Zorro	Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi*	Quartas-feiras às 14h40min
Todos os alunos participantes e não participantes da pesquisa		Computador, *notebook* e celular	*Wi-fi* e Dados Móveis	Sextas-feiras às 14h40min

Fonte: Nosso arquivo (2020).

Portanto, os dados coletados são decorrentes de vinte e oito (28) reuniões, todas realizadas via Google Meet, sendo: sete (07) reuniões com o G1 , seis (06) reuniões com G4, seis (06) reuniões com G5, e três (03) reuniões com o G3 , além de seis (06) reuniões com todos os alunos, participantes e não participantes da pesquisa . A aula foi gerida em fases, e em uma mesma reunião (live), tivemos a IT e RT para cada um dos grupos. Em outra reunião (live) com todos os alunos, foi realizada a DCT e a SAM, com pelo menos um dia de intervalo entre as duas primeiras fases. Em todas as tarefas utilizamos o applet das Barras Cuisenaire e na Tarefa 4, utilizamos também, os applets Quadriláteros, Fraction Models e Prova sem palavras.

No Quadro 3 explicitamos as tarefas desenvolvidas, seus objetivos e as datas de desenvolvimento das fases de cada tarefa, bem como o tempo das gravações, totalizando 2454 minutos, quase 41 horas.

Quadro 3 – As Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados

Tarefa	**Objetivo(s)**	**Dias de desenvolvimento das fases e minutos gravados**		
		IT e RT		**DCT e SAM**
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	15/09/2020 G1: 124 min G3: 99 min	16/09/2020 G4: 100 min G5: 61 min	18/09/2020 Todos os alunos 91 min
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; - Compreender a representação fracionária.	22/09/2020 G1: 107 min G3:87 min	23/09/2020 G4: 97 min G5: 80 min	25/09/2020 Todos os alunos 66 min
Tarefa 2: Medindo com Barras *Cuisenaire* (Parte 2)	- Comparar frações; - Compreender a adição de frações de mesma unidade de medida.	29/09/2020 G1: 112 min G3: 75 min	30/09/2020 G4: 105 min G5: 82 min	02/10/2020 Todos os alunos 112 min
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; - Compreender adição e subtração de frações de unidades de medida diferentes.	14/10/2020 G1:95 min	14/10/2020 G4: 96 min G5:53 min	16/10/2020 Todos os alunos 76 min
Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros	- Compreender multiplicação de frações;	20/10/2020 G1:126 min	28/10/2020 G1:85 min G4:97 min	23/10/2020 Todos os alunos

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento das fases e minutos gravados		
		IT e RT		DCT e SAM
	- Associar a representação decimal à representação fracionária; - Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros. - Compreender os números racionais como campo diverso dos números naturais.	21/10/2020 G1: 60 min G4: 100 min G5:82 min	G5:71 min	46 min 30/10/2020 Todos os alunos 69 min

Fonte: Nosso arquivo (2020).

Nas reuniões síncronas, a fim de que os alunos tivessem mais autonomia para realizar as tarefas, na fase de *realização da tarefa*, a professora, embora permanecesse conectada todo o tempo, depois de orientar os alunos quanto ao desenvolvimento da tarefa, desligava o áudio e a câmera e informava aos alunos que, caso precisassem de auxílio, deveriam chamá-la no grupo do *WhatsApp*.

Nesta pesquisa, procuramos por elementos que revelem e evidenciem se e como os alunos compreendem: as frações como medida; a magnitude de frações; que para uma mesma magnitude há uma infinidade de representações (frações equivalentes); que os números racionais não têm um sucessor e antecessor imediato, e que na multiplicação de números racionais, o resultado pode ser menor que um dos fatores. Portanto, trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, cuja análise de dados considerou os registros escritos dos alunos, gravações das reuniões e transcrições.

A fim de atingir o objetivo deste artigo, as análises foram estruturadas da seguinte maneira: primeiramente, analisamos os registros das reuniões das fases de DCT e SAM (reuniões gravadas via *Google Meet,* transcrições e registros escritos), buscando identificar, nos diálogos e registros dos alunos, evidências de suas diferenciações e compreensões sobre as frações como medida e das propriedades e diferenças entre números naturais e números racionais: magnitude de frações, frações equivalentes e as diferenças entre operar com números naturais e frações (Quadro 1). Em seguida, analisamos os vídeos, transcrições desses vídeos e registros escritos das fases de IT e especialmente do DCT, a fim de identificarmos como a dinâmica das tarefas e das aulas assentes no EEM contribuíram para essas compreensões.

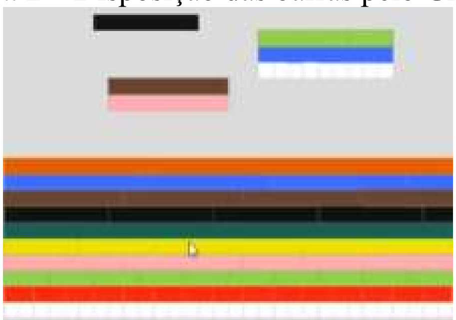
A fim de situar o leitor quanto ao desempenho dos alunos ao longo das aulas, analisamos as tarefas na ordem em que foram propostas e desenvolvidas (Tarefa 1, Tarefa 2 - parte 1 e 2, Tarefa 3 e Tarefa 4), e de/em todas elas, apresentamos excertos da DCT de um mesmo grupo, por ser a fase em que os alunos expressam suas ideias de forma mais organizada, deixando claro suas (in)compreensões.

Análise dos Dados

A Tarefa 1, disponível no Apêndice B, teve como objetivo provocar os alunos a compreenderem a fração como medida e, para isso, precisavam medir o comprimento horizontal da região cinza do *applet*. Para que conseguissem responder à questão, os grupos precisavam discutir como fariam para determinar o comprimento horizontal total da região do *applet* usando as barras que, inteiras, não completavam o comprimento.

A medida do comprimento horizontal do *applet* encontrada pelo G5 foi de 30 barras brancas. Para isso, eles dispuseram todas as barras na tela para realizar a medição, e fizeram algumas comparações entre as barras (Figura 2), explicando o raciocínio na DCT, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

Figura 2 – Disposição das barras pelo Grupo 5



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Poster: *Bem, vamos começar primeiro pelo* [bloco] *rosa. O rosa faltou a metade porque, como o rosa representa quatro blocos brancos, então, o que faltou foram dois blocos brancos. Então, podemos constatar que faltou a metade dele.*
O azul deu $\frac{1}{3}$, *porque o azul, se perceber, ele vale nove blocos brancos, e o que faltou deu três blocos brancos.*

Poster: *O outro foi o* $\frac{2}{7}$, *que foi o preto, porque o preto representa sete blocos brancos, e ele não tinha uma conta como as outras* [referindo-se a fazer equivalência de frações], *igual à rosa e a azul. Então seria completo. Então, colocamos como* $\frac{2}{7}$ *porque faltou dois blocos* brancos [mostram no *Applet* conforme a figura 2].

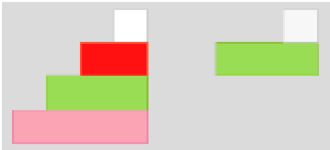
Tarefa 1 – G5. DCT, 18/09/2020.

Verificamos que o G5 expressa a ideia de equivalências de frações, apesar de não verbalizar de forma sistematizada. Conseguem associar que $\frac{2}{4}$ equivalem a $\frac{1}{2}$ (no momento da explicação, eles apontaram as barras no *applet* e compararam a barra rosa com a branca, e com a barra vermelha); portanto, utilizaram mais que uma unidade de medida. Assim como $\frac{3}{9}$ que equivale a $\frac{1}{3}$, compararam a barra azul com a branca, e a azul com a verde-clara.

Embora na apresentação do G5 pareça que as ideias foram construídas de forma rápida pelo grupo, essas conclusões demandaram 1 hora de discussão durante a fase de RT, pois tiveram dúvidas sobre *comprimento horizontal* e recorreram ao buscador do *Google* para esclarecer. Depois, para fazerem o registro do *comprimento horizontal*, os alunos não lembraram de utilizar frações. Comentaram sobre usar decimais, porcentagens, mas não lembraram de frações, e pediram ajuda da professora para indicar qual seria a melhor forma para registrar. Primeiramente, a professora questionou se não haveria uma forma mais precisa para nomear essas medidas que faltavam, mas como o grupo não lembrou, ela perguntou se lembravam de ter estudado frações. A partir de então, começaram a discutir sobre qual fração usar e como comparar as barras para nomear suas medidas que não completavam o *comprimento horizontal*. Isto nos dá indícios de que, embora os alunos tivessem estudado frações nos anos anteriores, não associavam a ideia de medir, e assim, consideramos que a intervenção do professor foi necessária para que realizassem a tarefa. Ao compararem as barras branca e rosa, concluíram que duas barras brancas seriam a metade da rosa, explicando que faltavam duas barras brancas para completar a rosa, e isso era exatamente a metade da rosa. Já para as demais barras, precisaram da intervenção da professora, que questionou como haviam pensado a rosa, com qual barra a haviam comparado, e só então conseguiram expressar o *comprimento horizontal* usando as outras barras como medida.

Na fase de RT, o G4 também precisou da intervenção da professora para entender o que era o *comprimento horizontal,* pois confundiram com área. A professora questionou quanto a como poderiam descobrir o que isso significava, e os alunos recorreram ao buscador *Google*. Depois disso, dispuseram as barras da direita para a esquerda e concluíram que a medida do *comprimento horizontal* era de 31 barras brancas. Começaram a registrar, equivocadamente, todas as medidas que faltavam para completar o *comprimento horizontal,* como *meio*. Só depois do questionamento da professora sobre o que era *meio,* e da sugestão para compararem a barra da cor que faltava para completar o comprimento horizontal com a barra branca, o grupo conseguiu nomear as medidas que faltavam. A interação entre os alunos do G4 na RT foi importante para que eles considerassem as frações como unidade de medida, e pudessem nomeá-las como, por exemplo, quando Bob afirmou que não estava entendendo a tarefa. Para lhe explicar, os alunos alinharam na tela as barras branca, vermelha, verde-clara e rosa, como pode ser observado na Figura 3 e lido no excerto a seguir.

Figura 3 – Realização da Tarefa 1 pelo G4



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Ymercurius: *Olha a diferença da barra branca e olha a diferença da barra vermelha.*

Magrão: *É um bloco de diferença.*

Anubis: *É a metade.*

Bob: *Então o branco é a metade do vermelho, e depois o vermelho é a metade do verde, e vai indo assim?*

Magrão: *Não. O branco é* $\frac{1}{3}$ *da barra verde-clara.*

Professora: *Coloca a verde-clara com a branca pra ele ver... Está vendo que a verde-clara são 3 brancas, então a branca...*

Ymercurius e Magrão: *É* $\frac{1}{3}$ *da verde-clara.*

Anubis: *O verde é* $\frac{3}{4}$.

Magrão: *É* $\frac{1}{4}$.

Anubis: *Eu estou vendo a verde-clara com a rosa, não a branca com a rosa.*

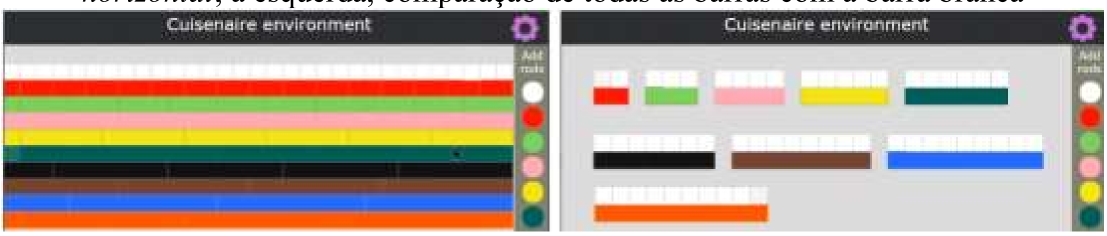
Professora: *O aluno Anubis está falando que a verde-clara é* $\frac{3}{4}$ *da rosa. Vocês concordam?*

Magrão: *Sim.*

Tarefa 1 – G4. RT, 16/09/2020.

A seguir, Anubis sugere a Ymercurius (que está compartilhando a tela com as barras *Cuisenare* dispostas para medição do *comprimento horizontal*) que faça todas as comparações das medidas das barras vermelha, verde-clara, rosa, amarela, verde-escura, preta, marrom, azul e laranja, todas com a branca (figura do lado direito.

Figura 4 – Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 4: à direita, as medições do *comprimento horizontal*; à esquerda, comparação de todas as barras com a barra branca



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Depois de muitas discussões e questionamentos da professora (utilizando o quadro de orientações), ainda na fase de RT, os alunos do G4 explicaram o item *b* da tarefa:

Professora: [...] *A preta ficou que comprimento?*

Anubis: *4 barras e* $\frac{3}{7}$.

Professora: *E a marrom?*

Anubis: *3* [referindo-se às barras inteiras] *e* $\frac{7}{8}$.

Ymercurius: *A azul é 3* [referindo-se às barras inteiras] *e* $\frac{4}{9}$*, e a laranja 3* [referindo-se às barras inteiras] *e* $\frac{1}{10}$.

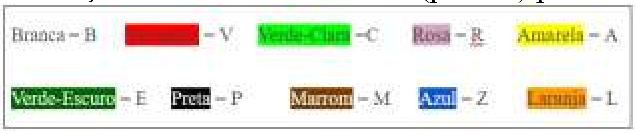
Tarefa 1 – G4. RT, 16/09/2020.

Assim como o G4 e o G5, os grupos G1 e G3 conseguiram criar critérios para nomear as medidas que faltavam para completar o *comprimento horizontal*. Na fase de SAM, os alunos registraram no caderno vários exemplos de nomenclatura de frações, além de um breve relato do contexto histórico das frações como medida.

Na continuidade, para consolidarmos a ideia da fração como medida (apesar de não explicitarmos nos objetivos) e a fim de que compreendessem a representação fracionária, propusemos a Tarefa 2 parte 1 (Apêndice D), em que os alunos realizaram medições da barra escolhida pelo grupo com barras de outras cores para estabelecer relações de equivalência, representando-as algebricamente.

Todos os grupos, coincidentemente, utilizaram as mesmas letras para representar as barras e escolheram o mesmo critério para não repetir as letras. Utilizaram o adjetivo da cor (clara: C, escura: E) e para a barra azul, escolheram a segunda letra do nome da cor (Z), conforme a Figura 5.

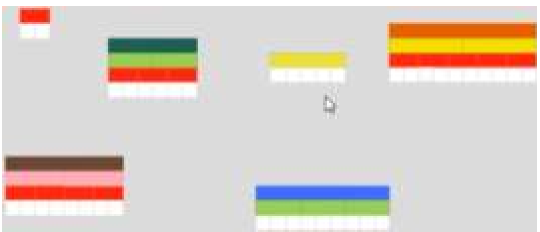
Figura 5 – Resolução do item *a* da Tarefa 2 (parte 1) por todos os grupos



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Segundo os relatos dos alunos, eles nunca haviam trabalhado com letras na Matemática. Mesmo assim, todos os grupos, depois de muitas discussões, conseguiram escrever equações de equivalências entre as barras escolhidas por cada grupo. Na fase de DCT, os alunos do G5 apresentaram a Figura 6 para explicar aos colegas como realizaram as medições das barras vermelha, verde-escura, laranja, marrom e azul.

Figura 6 – Resolução do item *b* da Tarefa 2 (parte 1) pelo Grupo 5



BARRA V	BARRA E	BARRA L	BARRA M	BARRA Z
1 v = 2 B	1 E= 6 B	1 L= 2 A	1 M= 2 R	1 Z= 3 C
1 B= $\frac{1}{2}$ V	1 E= 3 V	1 L= 5 V	1 M=4 V	1 Z= 9 B
	1 E= 2 C	1 L= 10 B	1 M= 8 B	1 C= $\frac{1}{3}$ Z
	1 B= $\frac{1}{6}$ E	1 A= $\frac{1}{2}$ L	1 R= $\frac{1}{2}$ M	1 B= $\frac{1}{9}$ Z
	1 V= $\frac{2}{6}$ E	1 V= $\frac{1}{5}$ L	1V= $\frac{1}{4}$ M	
	1 C= $\frac{3}{6}$ E	1 B= $\frac{1}{10}$ L	1 B= $\frac{1}{8}$ M	

Fonte: Nosso arquivo (2020).

Ainda na fase de DCT, o G5 mostrou, em sua apresentação, ter compreendido a magnitude de frações, como pode ser constatado no excerto a seguir.

Poster: *Uma barra marrom pode ser equivalente a duas barras rosa, e uma barra marrom pode ser equivalente a quatro barras vermelhas, e assim por diante...*
Professora: *E o que vocês entenderam por equivalente?*
Poster: *Equivalente é o que pode ser, por exemplo, com números diferentes* [referindo-se aos algarismos do numerador e denominador]*, mas o valor pode ser igual.*

Tarefa 2 (parte 1) – G5. DCT, 25/09/2020.

Nesta tarefa, as discussões que permearam os grupos foram quais barras de mesma cor poderiam ser utilizadas para medir exatamente a barra escolhida (surgiram ideias de números primos, múltiplos e divisores), e a forma de registrar as equações de equivalências. Depois de compreendido que deveriam escrever relações de equivalências da maior barra para a menor, e da menor barra para a maior, todos os grupos conseguiram atingir o objetivo da tarefa.

Essa discussão foi enfatizada na SAM realizada logo após a DCT, para que os alunos compreendessem a magnitude de fração; ou seja, que uma fração possui infinitas representações simbólicas. Os alunos registraram no caderno que, apesar da fração ser escrita com dois algarismos separados por uma barra, trata-se de um único Número Racional, e o algarismo acima da barra é o numerador, e o que está abaixo é o denominador.

O objetivo da parte 2 da Tarefa 2 está relacionado à como a compreensão de frações equivalentes contribui para o desenvolvimento do senso fracionário (flexibilidade, razoabilidade e magnitude), pois, para somar, subtrair e comparar frações com unidades de medidas diferentes (denominadores diferentes), é necessário que o aluno escolha a fração mais apropriada para que consiga comparar e/ou operar com elas, e depois verifique se o resultado faz sentido (razoabilidade) (POWELL; ALI, 2018).

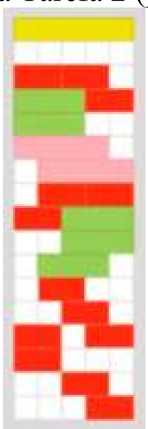
Para resolver a segunda parte da Tarefa 2, os alunos precisaram formar combinações de barras de cores diferentes que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas, e depois comparar as frações encontradas utilizando os sinais matemáticos < e >. Os alunos demoraram para realizar tais combinações. Depois, com a mediação da professora, os grupos conseguiram estabelecer relações aditivas e comparativas com frações de mesma unidade de medida. O G5 conseguiu realizar todas as combinações possíveis para a barra amarela, e apresentou a resolução da tarefa aos colegas da seguinte maneira.

Luffy: *A gente escolheu a barra amarela, e a gente fez 16 combinações* [...].

Professora: *Esse grupo fez todas as possibilidades de barra.*

Luffy: *A gente fez 15 aqui* [além da amarela], *mas colocamos 10* [referindo-se à quantidade de adições escritas], *porque no final, só vai ficar repetindo as mesmas coisas. Lembrando que* $\frac{1}{5}$ *representa a branca,* $\frac{2}{5}$ *representa a vermelha,* $\frac{3}{5}$ *representa a verde-clara,* $\frac{4}{5}$ *representa a rosa, e* $\frac{5}{5}$ *representa a amarela. Aqui, como vocês podem ver, a gente fez* $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$, *que seria 5 barras brancas que equivalem a uma barra amarela inteira. Aqui* $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ *equivale a* $\frac{5}{5}$, *e quer dizer duas vermelhas mais uma branca equivale à amarela.* $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$, *quer dizer a barra verde-clara mais uma barra vermelha representa* $\frac{5}{5}$ *ou a barra inteira.* $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$ *quer dizer que a rosa mais a branca equivale a uma amarela. E aqui vai continuar repetindo, só. E ficou assim, a figura:*

Figura 7 – Registros da Tarefa 2 (parte 2) pelo Grupo G5



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Luffy: *Agora vamos para a d*) [lê o enunciado da questão]. *Aqui,* $\frac{1}{5}<\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}<\frac{5}{5}$; $\frac{5}{5}>\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}<\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}<\frac{5}{5}$; $\frac{2}{5}<\frac{4}{5}$; $\frac{5}{5}>\frac{1}{5}$, *e é isso.*

Tarefa 2 (parte 2) – G5. DCT, 02/10/2020.

O G1 não realizou todas as combinações de cores diferentes possíveis para a barra laranja (até porque seriam 512 combinações diferentes!), mas com as combinações formadas, conseguiram escrever relações aditivas e comparativas de frações (Figura 8).

Figura 8 – Resolução do Item *b* da Tarefa 2 (parte 1) pelo Grupo 1

Fonte: Nosso arquivo (2020).

Esse grupo cometeu alguns equívocos quanto à unidade de medida na DCT, e tal dificuldade é apontada por Caraça (1951) e Campos e Rodrigues (2007), conforme excerto a seguir.

Docinho: *A gente fez assim porque a gente achou melhor de entender.* [...] *O laranja foi o que a gente escolheu das barras para fazer, e* $1L = \frac{2}{10} + \frac{8}{10}$ *da B. O branco, a gente só usou para complementar a conta das barras:* $1L = \frac{5}{10}$ *do amarelo* $+\frac{5}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{3}{10}$ *do verde-claro* $+\frac{7}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{6}{10}$ *do verde-escuro* $+\frac{4}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{4}{10}$ *do rosa* $+\frac{6}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{8}{10}$ *do marrom* $+\frac{2}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{7}{10}$ *do R* $+\frac{3}{10}$ *do branco;* $1L = \frac{10}{10}$ *do branco.*

Professora: *[..] Então, deixa eu complementar uma coisa para vocês. Lembra que a professora falou da unidade de medida antes? Aqui é a mesma coisa. Quando você fala* $\frac{5}{10}$ *de A, não é de A, porque você está falando que uma laranja é igual a uma amarela mais cinco brancas, certo?*

Docinho: *Sim.*

Professora: *Vamos observar as barras Cuisenaire* [professora escreve na tela das barras *Cuisenaire*]. *A amarela é cinco décimos da laranja, e não da amarela, porque A são cinco décimos, mas são cinco décimos da laranja, e a barra branca B é um décimo da laranja.*

Docinho: *Então são todos L?*

Professora: *Todos são L.*

[...]

Professora: *O que a verde-escura é da laranja, por exemplo, quantos décimos?*

Docinho: *Seis décimos.*

Professora: *Isso, mas, então, a verde-escura é seis décimos de quem?*

Docinho: *Da laranja.*

Professora: *Isso. Quando vocês escreveram seis décimos da escura, não é da escura, é da laranja, porque se eu for pensar na verde-escura... A verde-escura em relação a ela mesma é quanto?*

Spider-man $\frac{6}{6}$.

Professora: $\frac{6}{6}$ *ou 1. A vermelha é que fração da verde-escura?*

Docinho: $\frac{2}{6}$.

Tarefa 2 (parte 2) – G1. DCT, 02/10/2020.

O excerto do G1 evidencia que a unidade de medida não havia sido compreendida, sendo necessária a mediação da professora, como pode ser lido no excerto a seguir, ocorrido na fase de RT, para conseguirem realizar a comparação multiplicativa das frações de quantidade.

Professora: [...] *Que combinação nós temos aí?*

Doguinha: *Uma amarela + uma rosa + uma branca.*

Professora: *A amarela é qual fração da laranja?*

Doguinha: *Metade.*

Professora: *E a rosa é que fração da laranja?*

Doguinha: $\frac{4}{10}$.

Professora: *E a branca é que fração da laranja?*

Doguinha: $\frac{1}{10}$.

Professora: *Então, olha o que a Doguinha falou:* $\frac{1}{2} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10}$, *e isso dá quanto?*

Doguinha: *10.*

Professora: *10 o que?*

Doguinha: $\frac{10}{10}$.

Professora: *E a amarela, ao invés de escrevermos meio, podemos escrever como? Ela é que fração da laranja?*

Doguinha: $\frac{5}{10}$.

Tarefa 2 (parte 2) – G1. RT, 29/09/2020.

Apesar de confundirem a unidade de medida, mostraram que compreenderam frações equivalentes (flexibilidade), bem como a adição de unidades de medidas iguais.

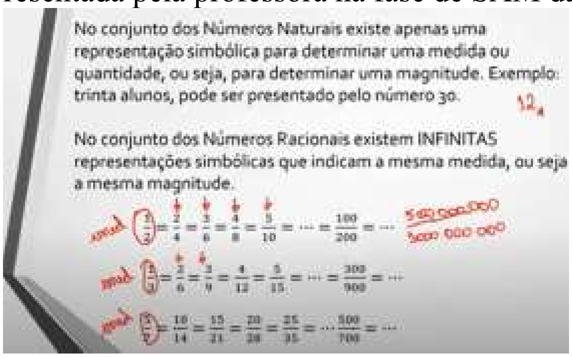
Todos os grupos estabeleceram relações aditivas, realizando corretamente a adição de frações de mesma unidade de medida, e comparações em relação à magnitude das frações. O excerto abaixo, do G4 na fase de RT, relata algumas adições do item *b* da tarefa, e evidencia que a unidade de medida escolhida, no caso a barra amarela, foi compreendida como uma medida inteira.

Spider-man: *Eles colocaram o nome do amarelo de 1. Eu coloquei* $1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5}$ *daí, a outra que eu fiz é* $1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5}$.

Tarefa 2 (parte 2) – G4. RT, 02/10/2020.

Na SAM, o enfoque foi registrar no caderno sobre adição, subtração e comparação de frações de mesma unidade de medida, frações irredutíveis e equivalentes, destacando que uma fração pode ser representada por infinitas frações simbólicas de mesma magnitude (frações equivalentes), aguçando o sentido de flexibilidade.

Figura 9 – Tela apresentada pela professora na fase de SAM da Tarefa 2 (parte 2)



Fonte: Nosso arquivo (2020).

Na sequência, a Tarefa 3, disponível no Apêndice A, teve como objetivo comparar e compreender a adição e a subtração de frações de unidades de medidas diferentes (denominadores diferentes), e teve início com o jogo do trem. Esse jogo utiliza barras *Cuisenaire* e pode ser jogado individualmente ou em duplas, de forma que cada jogador ou dupla escolhe apenas uma cor de barra para jogar. Na sequência, os jogadores comparam suas barras e sempre joga (acrescenta mais uma barra da mesma cor) aquele que estiver com o trem menor. O jogador que deixar o seu trem do mesmo tamanho do adversário, ganha o jogo. Após jogarem algumas vezes, os alunos deveriam escolher uma rodada do jogo e indicar a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro. Com as frações estabelecidas, os grupos deviam comparar essas frações e realizar as operações de adição e subtração.

Todos os grupos, após algumas jogadas, reconheceram que, para vencer o jogo, é necessário escolher a barra menor que a do adversário. Nesta tarefa, o G5 escolheu a rodada em que jogam com o trem (barras) vermelho e azul; e na fase da DCT, explanaram suas conclusões aos colegas da seguinte maneira:

Luffy: *A estratégia para você vencer sempre é escolher as barras menores e a branca é invencível. A vermelha equivale a* $\frac{1}{9}$ *do seu vagão, e a azul equivale à metade do seu vagão.*

Professora: *Metade do trem?*

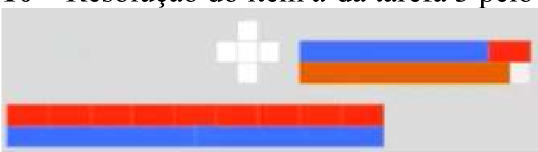
Luffy: *Sim, daí, agora, as equivalências a gente fez assim: a vermelha representa* $\frac{1}{9}$*, então a gente só fez vezes dois, que ficou* $\frac{2}{18}$*, e* $\frac{1}{2}$ *a gente pode colocar de vários jeitos, como* $\frac{9}{18}$ *e* $\frac{3}{6}$*.*

Professora: *Porque vocês usaram como medida a barra verde-clara também...*

Luffy: *Sim, para medir a azul. E a fração* $\frac{1}{2}$ *é maior do que a fração* $\frac{1}{9}$*, porque* $\frac{1}{2}$ *equivale a 50% do trem, e* $\frac{1}{9}$ *equivale por volta de 10 ou 11% do trem. Agora, a letra d) da tarefa, a gente transformou a fração* $\frac{1}{2}$ *em* $\frac{9}{18}$*, e a* $\frac{1}{9}$ *em* $\frac{2}{18}$ *para a gente conseguir somar e chegar à conclusão que* $\frac{2}{18}+\frac{9}{18}$ *equivale a* $\frac{11}{18}$*. Agora, o item e)* $\frac{1}{2}$ *equivale a* $\frac{9}{18}$*, e* $\frac{1}{9}$ *equivale a* $\frac{2}{18}$*, e* $\frac{9}{18}-\frac{2}{18}$ *equivale a* $\frac{7}{18}$*.*

Tarefa 3 – G5. DCT, 16/10/2020.

Figura 10 – Resolução do item *d* da tarefa 3 pelo grupo 5



Fonte: Nosso arquivo (2020).

O grupo criou o símbolo de cruz com barras brancas para indicar que, à direita do símbolo, está a soma de $\frac{1}{9}+\frac{1}{2}$. Para isso, eles alinharam a barra azul e a vermelha lado a lado, e depois, com as barras laranja e branca (embaixo), comprovaram que o total é $\frac{11}{18}$ (Figura 10). Já o G1 escolheu a barra azul e a rosa, e os integrantes apresentaram dificuldade, na fase de RT, em relação à compreensão da magnitude, porque usavam as propriedades do números naturais para operar com frações. Assim, encontraram dificuldades para associar, apenas com as representações fracionárias simbólicas, que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{9}$. Eles mesmos relataram esse problema quando responderam ao questionamento da professora sobre o porquê consideraram a barra azul, $\frac{1}{9}$, maior que a barra rosa, $\frac{1}{4}$. O excerto a seguir, embora extenso, expressa, ao mesmo tempo, a dificuldade dos alunos e o potencial das discussões coletivas para auxiliá-los a diferenciar os números naturais dos racionais, e ainda, a importância de tarefas de natureza exploratória nesse processo.

Professora: *Então, que fração é maior?*
Docinho: *A rosa… ah não, a azul.*
Professora: *Então, que fração é a azul, que vocês escreveram lá na letra a?*
Docinho: $\frac{1}{4}$ *e a rosa* $\frac{1}{9}$.
Professora: *Então, vocês vão dizer o que é maior que o quê? Vocês podem escrever azul é maior que rosa, ou seja...*
Docinho: *Professora, mas a rosa que é maior que azul...*
Professora: *Onde que a rosa é maior do que azul?*
Docinho: *Porque ali está* $\frac{1}{9}$ *e o azul está* $\frac{1}{4}$.
Professora: *Mas o que você está vendo, Docinho? Nas barrinhas?*
Docinho: *Ali na tela, bem no canto, elas estão exatas, bem igualzinho* [referindo-se ao trem azul e rosa].
Professora: *Não, olhe para os vagões, você precisa comparar só um vagão de cada. Quem é maior?*
Lindinha: *O azul.*
Professora: *E que fração o azul é?*
Docinho: $\frac{1}{4}$.
Professora: *Então você tem que dizer que* $\frac{1}{4}$ *é o que?*
Docinho: *Maior que* $\frac{1}{9}$*?*
Professora: *Vocês concordam, gente?*
Lindinha: *Eu sim.*
Docinho: *Eu acho que é menor do que* $\frac{1}{9}$*, professora.*
Professora: *Mas o que você está vendo? Você está vendo que a azul é maior. Por que você não está entendendo que a fração da azul é maior?*
Lindinha: *Professora, ela está dizendo que o* $\frac{1}{9}$ *é maior que* $\frac{1}{4}$ *porque o 9 é maior que o 4.*
Professora: *O algarismo maior na fração não significa que a fração seja maior, porque veja, vocês concordam que a rosa é menor, não concordam?*
Lindinha: *Sim.*
Docinho: *Sozinha é.*
Professora: *Então a fração, por exemplo,* $\frac{1}{9}$*, ela é maior ou menor que* $\frac{1}{4}$*?*
Docinho: $\frac{1}{9}$ *é maior que* $\frac{1}{4}$.
Professora: *Mas não é o que você está vendo...*
Docinho: *É.*
Professora: *Como é que vocês conseguem explicar isso para mim?*
Lindinha: *Porque a gente não pode representar maior ou menor pelos números* [referindo-se aos algarismos do denominador]*, mas sim pelas barras.*
Professora: *Pela medida da barra, você quer dizer, né?*
Lindinha: *Isso.*
Professora: *Tenta entender, Docinho.*
Docinho: *Eu entendi professora.*
Professora: *Então, pensando na medida, por que a rosa é menor do que azul em relação à fração? É esse tipo de coisa que eu estou pedindo para vocês pensarem. Primeiro, registrem ali o que vocês entenderam. O que vocês vão escrever ali na letra c)?*
Docinho: *Eu escrevi assim: a maior fração é a da barra azul, que é* $\frac{1}{4}$*, e é maior que* $\frac{1}{9}$*. Daí eu falei que a gente não pode falar que é maior que pelos números* [referindo-se aos algarismos do denominador]*, e sim pelas barras que medimos.*

Tarefa 3 – G1. RT, 16/10/2020.

O G1, ao resolver a tarefa 3, confundiu a propriedade de sinalização de magnitude numérica dos números naturais, que indica que numeral maior significa maior número, com as propriedades dos números fracionários, em que algarismos maiores, tanto no numerador quanto no denominador, não significam maior número ou magnitude. Entretanto, depois de esclarecida essa dificuldade com as intervenções da professora, e a professora pedindo para compararem outras barras de unidades de medidas diferentes, o G1 conseguiu compreender a propriedade de magnitude numérica dos números fracionários e avançar quanto às equivalências de frações para realizar as operações de adição e subtração de frações de unidades de medidas diferentes, não encontrando dificuldades em realizar tais operações. Já na fase de DCT, os alunos explicitaram que compreenderam a magnitude das frações unitárias estudadas, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

Docinho: *A maior fração é a do azul, que é $\frac{1}{4}$ e é maior do que $\frac{1}{9}$, pois não podemos dizer que é maior que pelos números* [referindo-se aos algarismos do denominador], *e sim independente das barras que medimos.*

Professora: *Explica para os colegas o que você quis dizer com isso.*

Lindinha: *A gente falava que $\frac{1}{9}$ era maior do que $\frac{1}{4}$ por causa dos números, porque 9 é maior do que 4. Só que daí a professora explicou que a gente tem que usar como medida as barras, e daí, como a gente viu que a azul é maior do que a rosa, daí $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{9}$.*

Professora: *E se vocês olharem aqui, comparando só a barra rosa com a barra azul, é possível verificar qual é maior?*

Lindinha: *Sim.*

Professora: *Isso para a fração $\frac{1}{9}$ e para a fração $\frac{1}{4}$?*

Lindinha: *Daí é só pegar uma barra azul e uma rosa, que vai perceber qual é maior.*

Docinho: *O resultado dessas frações é $\frac{13}{36}$, porque $\frac{1}{4} = \frac{9}{36} + \frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ dá $\frac{13}{36}$. Daí a gente colocou esses números, porque são equivalentes a $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{4}$.*

Professora: *Exato. Olha só, elas fizeram aqui $\frac{1}{4} + \frac{1}{9}$, e daí elas trocaram isso pelas equivalências $\frac{1}{4}$ é $\frac{9}{36}$ e $\frac{1}{9}$ é $\frac{4}{36}$, que é o rosa, e daí e disso elas chegaram à conclusão que dava $\frac{13}{36}$, e elas puderam fazer a medição disso com as barras brancas, que dava $\frac{13}{36}$, certo? Próximo, Docinho, da subtração.*

Docinho: *O resultado da subtração é $\frac{5}{36}$ porque $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$ que é igual a $\frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$, pois é só diminuir os numeradores, igual ao que a gente fez na conta de mais.*

Tarefa 3 – G1. DCT, 16/10/2020.

Assim como o G1, o G4 também associou que algarismos maiores das frações indicariam fração maior. Contudo, ainda na fase de RT, essas diferenças entre as propriedades dos Números Fracionários e Naturais foi discutida e esclarecida. Na DCT, notamos que os alunos compreenderam a magnitude da fração e conseguiram escolher as frações mais apropriadas (equivalentes) para realizar as operações de adição e subtração. Por isso, dado o objetivo da tarefa, na fase de SAM, essas diferenças entre as propriedades de sinalização de magnitude numérica e representação simbólica dos números naturais e

Fracionários foram reforçadas, realizando o jogo do trem, com as barras rosa e preta, discutindo suas equivalências, comparação, adição e subtração. Foi explanado e registrado no caderno sobre frações unitárias, ressaltando que quanto maior a unidade de medida (denominador), menor é o número fracionário; ou seja, sua magnitude. Além disso, os alunos registraram no caderno sobre a densidade dos fracionários, que diferentemente do campo dos Naturais, em que há sempre um sucessor e um antecessor imediato (exceto para o zero), os números fracionários não possuem nenhum antecessor ou sucessor imediato, pois entre quaisquer frações existem infinitas outras.

Quanto à tarefa 4, disponível no Apêndice A, apesar de não termos planejado, tivemos que dividi-la em duas partes, pois as fases de IT e RT dos itens *a* e *b* demoraram cerca de 2 horas para o grupo G1. Então, prevendo que todos os grupos demorariam em média o mesmo tempo, realizamos apenas os itens *a* e *b* da tarefa em uma semana (incluindo a DCT e SAM), e na outra semana realizamos todas as fases da aula sobre os itens *c* e *d*.

Esta última tarefa teve como objetivos que os alunos compreendessem a multiplicação e divisão de frações, associassem a representação decimal à representação fracionária, além de que relacionassem a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros. Também, os alunos foram provocados a encontrar a(s) diferença(s) existentes entre a multiplicação de números racionais quando comparadas aos números naturais. Para isso, além das barras *Cuisenaire*, foram sugeridos aos alunos outros três *Applets*, *dois GeoGebra on-line: Quadriláteros e Prova sem palavras e o Fraction Models* do site *Nrich.*

O G5, ao completar a tabela, escreveu frações equivalentes e irredutíveis, e suas respostas evidenciam que compreenderam a propriedade dos Números Fracionários, de que, ao multiplicarmos duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si, pode-se chegar a um produto menor que um dos dois fatores, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

> **Luffy:** [Lê o item *c* da tarefa e responde] *Os números racionais nem sempre aumentam* [referindo-se aos resultados dos produtos], *enquanto os números naturais sempre aumentam de quantidade* [referindo-se aos resultados dos produtos]. *Então, ali, 0,8 vezes 1,6 é igual 1,28; e ali, como vocês podem ver, 2 vezes 5 dá 10. Nos Racionais, se o fator for multiplicado por um outro fator maior que 1 inteiro, sempre o resultado é maior, já se for multiplicado por um fator menor que 1 inteiro, o resultado sempre é menor.*
>
> **Tarefa 4 – G5. DC, 30/10/2020.**

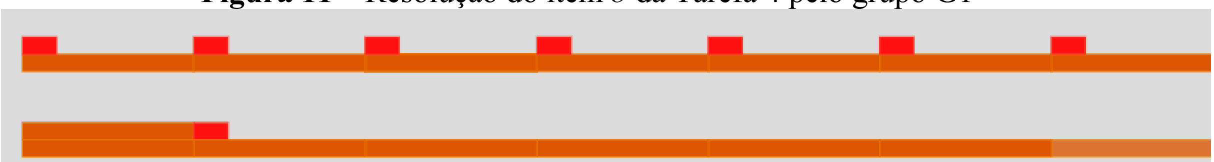
Para preencher os quadros e responder à questão que pedia para diferenciarem a multiplicação dos Naturais e dos Racionais, os grupos G4 e G5 recorreram aos *Applets* sugeridos, mas o G1 recorreu às barras *Cuisenaire* para comparar frações. Isto porque não conseguiram identificar se, por exemplo, o comprimento do retângulo 1 (fator) era maior ou menor que o resultado da área desse retângulo. Apesar de o G1 explicar com representações decimais (zero vir antes da vírgula) a propriedade dos números racionais sobre o resultado da multiplicação ter fator maior, menor ou igual a um dos fatores, constatamos que também compreenderam isto nas representações fracionárias, porque recorreram às barras *Cuisenaire* para comparar dois décimos e doze centésimos na fase de RT, como explicaram na fase de DCT, que pode ser lida no excerto a seguir.

Lindinha: *Nos números racionais, nem sempre o resultado é maior que o fator, pois quando fizemos as equivalências, os resultados deram que alguns davam maior, outros menores e outros iguais. Quando o zero vem antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser menor do que os fatores. Quando qualquer número sem ser zero vir antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser maior que o fator. Quando o resultado é igual a 1* [referindo-se ao produto], *os fatores vão ser iguais a 1.*
Professora: *Vocês estão olhando o que elas escreveram ali, retângulo 1, lá da tabela. Podem ler...*
Lindinha: *R1* $=\frac{2}{10}=\frac{20}{100}$ [referindo-se ao comprimento]. *Daí* $\frac{6}{10}=\frac{60}{100}$ [referindo-se à largura], *que são maiores que* $\frac{12}{100}$ [referindo-se à área].
Professora: *O que vocês fizeram? Vocês pegaram os valores lá da tabela e fizeram o quê?*
Docinho: *A gente usou as barras Cuisenaire para saber quem era maior* [referindo-se a comparar os fatores e o produto].

Tarefa 4 – G1. DC, 30/10/2020.

O G1 dispôs as barras *Cuisenaire* conforme a Figura 11, a seguir.

Figura 11 – Resolução do item *b* da Tarefa 4 pelo grupo G1



Fonte: Nosso arquivo (2020).

O G1 nem precisou terminar de dispor todas as barras (10 barras laranjas) para comparar $\frac{2}{10}$ e $\frac{12}{100}$, concluindo que $\frac{2}{10}$ é equivalente a $\frac{20}{100}$, e o produto $\frac{12}{100}$ é menor que os dois fatores $\frac{20}{100}$ e $\frac{60}{100}$. Para completar a tabela referente ao Retângulo 1, o G1 precisou recorrer às frações simbólicas para analisar os resultados, mas para os quadriláteros seguintes não foi necessário.

Considerações Finais

Desde o início dos nossos estudos, propusemo-nos a abordar as frações como medida e a discutir, em cada tarefa proposta, uma ou mais diferenças entre as propriedades dos números naturais e números fracionários, como a sinalização de magnitude numérica, representação simbólica e produto. Em vista disso, planejamos, elaboramos e desenvolvemos aulas assentes em práticas exploratórias que contribuíssem para o esclarecimento das frações como outro campo numérico, a partir da interpretação de fração na perspectiva da medição, bem como o desenvolvimento do senso fracionário, de maneira que as categorias apontadas por Powell e Ali (2018), flexibilidade, razoabilidade e magnitude, fossem consideradas.

Devido à pandemia no ano de 2020, ousamos desenvolver esse trabalho em aulas remotas e assentes no EEM. A metodologia do EEM, que se fundamenta na resolução em grupo de tarefas de natureza exploratória, possibilitou que ideias matemáticas emergissem, bem como a negociação de significados matemáticos durante a resolução das tarefas. Mais do que realizar procedimentos, os alunos foram estimulados a resolver as tarefas comunicando ideias e argumentando sobre o que estavam pensando. Salienta-se assim a importância de tarefas de natureza exploratória centradas no aluno, que além de reproduzir algoritmos, sejam questionados os resultados que encontram, refletindo sobre o que estão estudando e, assim, em uma relação dialógica e colaborativa, sejam capazes de aprender.

Verificamos que os alunos que participaram de todas as aulas compreenderam a diferença na magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, conseguindo estabelecer relações multiplicativas entre as barras *Cuisenaire* e nomeá-las. Também compararam frações e entenderam que frações equivalentes têm o mesmo tamanho (mesma medida), mas podem ser escritas por representações simbólicas diferentes. Em outras palavras, foram capazes de flexibilizar as frações utilizando as mais adequadas para realizar operações (frações equivalentes). Ao fazer isso, também foram provocados pela professora a argumentar sobre a razão de os resultados encontrados estarem certos; ou seja, porque seriam coerentes, o que envolve a razoabilidade do senso fracionário. Quanto ao produto, concluíram que, quando multiplicamos frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos dois fatores, o que não ocorre nos naturais.

Essas diferenças entre as propriedades dos números naturais e números fracionários foram importantes para que os alunos compreendessem que as frações são outro campo numérico. Os alunos questionaram a professora o porquê nunca tinham estudado frações dessa forma. Também, constatamos que os alunos não estão acostumados a não ter a resposta direta do professor. Em muitos momentos, a professora foi questionada sobre a razão de não responder se estava certo ou errado o que o grupo estava pensando.

Concluímos que a abordagem do EEM para o ensino de frações na perspectiva da medição, permeado pelo uso dos *applets*, permitiu aos alunos pensarem sobre os números racionais do ponto de vista epistemológico antes do simbólico, contrapondo o simbólico com os significados e sentidos decorrentes das representações não simbólicas. Portanto, as compreensões dos alunos foram suscitadas nas práticas desenvolvidas, especificamente no EEM abordando frações como medida, de maneira concatenada e orientada ao raciocínio matemático dos alunos, considerando inclusive seus conhecimentos prévios sobre as frações, que é explicitado no questionamento dos alunos sobre por que não aprenderam assim.

Por último, acreditamos ser necessários outros trabalhos pautados na perspectiva do EEM com intuito de trabalhar as múltiplas interpretações das frações, especialmente na perspectiva da medição. Também acreditamos existir uma lacuna sobre quando, em que sequência e como ensinar cada interpretação das frações para os estudantes do Ensino Fundamental e Médio.

Referências

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A., **Rational Numbers Concepts** in Acquisition of Mathematics Concepts and Process, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Documento orientador das ações de formação em 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de fevereiro de 2020.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 4, p. 68-93, 2007.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. **Práticas de ensino exploratório da matemática**: O caso de Célia. In: CANAVARRO, P., SANTOS, L., BOAVIDA, A., OLIVEIRA, H., MENEZES, L.; CARREIRA, S. (Orgs.), Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2012. p. 255-266.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Portugal, 1951.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 7 jul. 2021.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza Del Número Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESCOLANO, R. V. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente**. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 205-214, 2019.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. Teaching fractions. Educational practices series. Geneva: **International Academy of Education-International Bureau of Education**. v.22, 2011.

GAIRÍN, J. M. **Sistemas de representación de números racionales positivo**s **- Un estudio con maestros en formación**. Tese, Universidad de Zaragoza, 1998.

HIEBERT, J.; BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In: HIEBERT, J. BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3 ed. Reston: NCTM, 1991. p.1-18.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LAMON, S. J. Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In: CUOCO, A.; CURCIO, F. (Eds.), **The Roles of Representations in School Mathematics -** 2001 Yearbook (p. 146-168). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema. Acesso em: 10 abr. 2020.

MENEZES, L.; OLIVEIRA, H.; CANAVARRO, A. P. **Descrevendo as Práticas de Ensino Exploratório da Matemática:** o caso da professora Fernanda. Actas del VII CIBEM. Montevideu, Uruguay: CIBEM, 2013.

NRICH, UNIVERSITY OF CAMBRIDGE - **Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning**. Disponível em: <https://nrich.maths.org/>, Acesso em: 12 mar 2020.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-29, 2021.

PEREZ, M. **Grandezas e Medidas: representações sociais de professores do ensino fundamental**. 2008. Tese. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/16117. Acesso em: 14 de jun. de 2020.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. (Ed.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: IEUL, 2014.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM**: **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM**, Cascavel, Pr, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012 - versão Kindle.

RUSSELL, B. El significado de magnitud. In.: RUSSELL, B. **Los principios de la Matemática**. 2. ed. Madrid: Espaca – Calpe S. A., cap. XIX, p. 193-212, 1967.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez. 2019.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

APÊNDICE I - TAREFAS

Tarefa 1 - Qual o comprimento?

1) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html. Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar, cliquem na cor desejada.
   a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *Applet*. Façam isso para todas as cores.
   b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *Applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *Applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

Tarefa 2 (Parte 1) - Medindo com Barras Cuisenaire

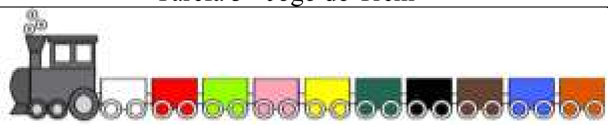
2) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html.

a) Para facilitar as representações, nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras. Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.
b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida, formem o máximo de combinações possíveis nessa condição. Utilizem as representações do quadro do item *a* para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

Tarefa 2 (Parte 2) - Medindo com Barras Cuisenaire

c) Na primeira parte da tarefa, vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observem que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha. O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar, que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.
d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos < e > para as comparações entre as barras de cada combinação.

Tarefa 3 - Jogo do Trem



3) Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html.

Vamos fazer o jogo do trem. Chamaremos de *vagão* cada barra; e de *trem,* o alinhamento horizontal de um ou mais *vagões*. Para isso, cada grupo deve se dividir em duplas, ou jogam dois e um espera para jogar na próxima rodada. Cada dupla ou jogador escolhe um vagão. O jogo do trem funciona assim:

- Cada dupla ou jogador só utilizará o vagão escolhido para jogar, ou seja, sempre a barra de mesma cor;
- Os vagões escolhidos por cada jogador (ou dupla) serão colocados alinhados verticalmente na tela;
- Inicia jogando quem escolher o vagão mais curto;
- Joga sempre quem tem o trem mais curto, até que fique com o trem maior que o do adversário;
- Os jogadores alternam a vez para jogar;
- O jogo acabará quando os trens ficarem do mesmo tamanho;
- Ganha o jogo a dupla ou jogador que colocar o último vagão.

Após jogarem algumas vezes, respondam:

a) Qual(is) a(s) melhor(es) estratégia(s) para ganhar o jogo? Após a finalização de uma rodada do jogo, considerando cada um dos trens separadamente, escreva a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro.
b) Observando as frações escritas no item *a*, construam trens do mesmo tamanho de cada vagão de cada um dos jogadores. Mas há uma condição: os trens devem ser da mesma cor. Escrevam as frações equivalentes, respectivas aos trens e vagões.

c) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual dessas duas frações é maior?
d) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual o resultado da soma dessas frações? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.
e) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual o resultado da subtração da fração maior menos a fração menor? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.

Tarefa 4 - Área e Perímetro de Quadriláteros

4) Abram o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq. Movimentem os controles deslizantes *a* e *b*, observem o que ocorre na figura representada e respondam.

a) O que é alterado na figura representada pelo GeoGebra com a movimentação dos controles deslizantes *a* e *b*?
b) Considerando que a área de quadrados e retângulos é o resultado da multiplicação do comprimento pela largura, e que perímetro é a soma de todos os lados, utilize o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq e o *Applet Fraction Models* disponível em https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/ para completar a tabela referente aos lados, perímetros e áreas dos quadriláteros em suas representações decimais e fracionárias.

	Retângulo 1		**Quadrado 2**		**Retângulo 3**	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação fracionária
COMPRIMENTO	0,2				0,7	
LARGURA	0,6			$\frac{9}{10}$		
PERÍMETRO						
ÁREA					0,35	

	Quadrado 4		**Retângulo 5**		**Quadrado 6**	
	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal	Representação decimal	Representação fracionária	Representação decimal
COMPRIMENTO						
LARGURA			4,5			
PERÍMETRO						
ÁREA			13			$\frac{24}{5}$
	1					

c) Observem as tabelas e respondam: qual(is) diferença(s) existem entre a multiplicação de números racionais quando comparadas aos números naturais? É possível afirmar que, na multiplicação dos números racionais, os resultados sempre aumentam? Expliquem seu raciocínio e, se necessário, explorem mais o arquivo do GeoGebra testando diferentes valores.
d) Calculem as divisões abaixo, explicando detalhadamente como chegaram ao resultado. Se desejarem, utilizem os *Applets* a seguir para auxiliá-los.

* Barras Cuisenaire: https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html
* Geogebra 1: Quadriláteros https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq
* Geogebra 2: Prova sem palavras https://www.geogebra.org/m/b4mdnfbs
* Fraction Models: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives /Fraction-Models/

i) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} =$ ii) $\frac{2}{5} \div \frac{6}{12} =$ iii) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} =$ iv) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} =$

Autores:
Vania Sara Doneda de Oliveira
Secretaria de Estado da Educação - SEED/PR
Mestrado Acadêmica em Educação Matemática - PRPGEM
Professora de Ensino Fundamental e Médio.
Pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em educação matemática
vania.oliveira28@escola.pr.gov.br

Maria Ivete Basniak
Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná (2014), Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Estadual do Paraná (2009). Realizou estágio pós-doutoral no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná sob a supervisora da professora Sani de Carvalho Rutz da Silva. Atuou na Educação Básica (Educação Infantil, Anos Finais do Ensino Fundamental e Médio), na Educação de Jovens e Adultos, Educação Profissional e formação continuada de professores em tecnologias na educação como coordenadora pedagógica da Coordenação Regional de Tecnologia na Educação. Atualmente é professora Adjunta do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória e professora permanente do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (PRPGEM). É líder do Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática (GETIEM) e coordena o projeto de pesquisa financiado pela Fundação Araucária: Análise de tarefas como prática para (res)significação de conhecimentos profissionais de professores de matemática. Tem experiência na área de Matemática Aplicada e Educação, atuando principalmente nos seguintes temas: educação, tecnologias, políticas educacionais, ensino da matemática.
basniak2000@yahoo.com.br