Una mirada a las condiciones sociohistóricas del surgimiento y demostración del teorema de incompletitud de Gödel en 1931[1]

Rosemeire de Fatima Batistela
rosebatistela@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2779-7251
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)
Feira de Santana/BA, Brasil.

Recibido: 12/12/2021 **Aceptado:** 22/02/2022

Resumen

Este artículo expone las principales cuestiones que, a nuestro entender, movieron los esfuerzos de los matemáticos en el momento de la demostración del teorema de incompletitud de Gödel, buscando mostrar que las herramientas matemáticas disponibles hasta ese momento fueron fundamentales para la elaboración de la demostración de Gödel. Así, este texto aborda este resultado junto con otros teoremas de imposibilidad de las Matemáticas y destaca que la metamatemática era conocida por Gödel y que esto no estaba claro para los autores de las pruebas de imposibilidad de los problemas clásicos de la Antigüedad. Además, exponemos que las pruebas finitas y los sistemas formales completos requeridos en el programa de Hilbert no pueden existir. Se trata de un estudio teórico de carácter bibliográfico realizado desde la perspectiva de un enfoque cualitativo. En la dimensión personal, la demostración de incompletitud se construyó como consecuencia del deseo/necesidad de obtener el título de Privatdozent en la Universidad de Viena y el esfuerzo inicial por demostrar la consistencia del análisis que se transmutó en otros problemas. Finalmente, presentamos que este teorema fue demostrado en 1931 principalmente porque Gödel conocía la existencia de pruebas de imposibilidad, distinguía las matemáticas de las metamatemáticas y buscaba atacar un problema de consistencia de la aritmética que estaba relacionado con la aritmética de los campos de las Matemáticas.
Palabras Clave: Teoremas de imposibilidad. Metamatemáticas. Crisis de la Fundación de las Matemáticas. Teorema de incompletitud de Gödel. Investigación Cualitativa.

Uma visada sobre as condições sócio-históricas de emergência e demonstração do teorema da incompletude de Gödel em 1931

Resumo

Este artigo expõe as principais questões que em nosso entendimento movimentavam o empenho dos matemáticos à época da demonstração do teorema da incompletude de Gödel buscando apresentar que o ferramental matemático disponível até aquele momento fora fundamental para a elaboração da demonstração por Gödel. Assim este texto aborda este resultado juntamente

[1] Este artigo é uma versão ampliada do trabalho apresentado como comunicação científica no VI SIPEQ em 2021. Anais: https://arquivo.sepq.org.br/VI-SIPEQ/Anais/comunicacoes.

com outros teoremas de impossibilidade da Matemática e destaca que a metamatemática[2] era conhecida por Gödel e que isso não era claro para os autores das provas de impossibilidade dos problemas clássicos da Antiguidade. Além disso, expomos que as provas finitistas e os sistemas formais completos solicitados no programa de Hilbert não podem existir. Trata-se de um estudo teórico de natureza bibliográfica realizado na perspectiva da abordagem qualitativa. Na dimensão pessoal, a demonstração da incompletude foi construída como consequência do desejo/necessidade de obtenção do título de *Privatdozent* na Universidade de Viena e do empenho inicial de demonstrar a consistência da análise que foi se transmutando em outros problemas. Por fim apresentamos que este teorema foi demonstrado em 1931 principalmente porque Gödel conhecia a existência de demonstrações de impossibilidade, distinguia matemática de metamatemática e buscava atacar um problema da consistência da aritmética que se relacionava à aritmetização dos campos da Matemática.
Palavras-chave: Teoremas de Impossibilidade. Metamatemática. Crise da Fundamentação da Matemática. Teorema da Incompletude de Gödel. Abordagem Qualitativa.

A look at the socio-historical conditions of emergence and proof of Gödel's incompleteness theorem in 1931

Abstract

This paper exposes the main issues that, in our understanding, moved the efforts of mathematicians at the time of the proof of Gödel's incompleteness theorem, seeking to show that the mathematical tools available until that moment were fundamental for the elaboration of the proof by Gödel. Thus, this text approaches this result together with other impossibility theorems of Mathematics and highlights that metamathematics was known by Gödel and that this was not clear to the authors of the impossibility proofs of the classical problems of Antiquity. Furthermore, we expose that finite proofs and complete formal systems required in Hilbert's program cannot exist. This is a theoretical study of a bibliographic nature carried out from the perspective of a qualitative approach. In the personal dimension, the demonstration of incompleteness was built as a consequence of the desire/need to obtain the title of Privatdozent at the University of Vienna and the initial effort to demonstrate the consistency of the analysis that was transmuted into other problems. Finally, we present that this theorem was demonstrated in 1931 mainly because Gödel knew the existence of proofs of impossibility, distinguished mathematics from metamathematics and sought to attack a problem of the consistency of arithmetic that was related to the arithmeticization of the fields of Mathematics.
Keywords: Impossibility Theorems. Metamathematics. Crisis of the Foundation of Mathematics. Gödel's Incompleteness Theorem. Qualitative Approach.

[2] Nagel e Newman (1973) explicam que Hilbert declarou que a metamatemática é a linguagem que versa sobre a Matemática: “Os enunciados metamatemáticos são enunciados acerca dos signos que ocorrem dentro de um sistema matemático formalizado (isto é um cálculo) acerca dos tipos e arranjos de tais signos quando eles se combinam para formar cadeias mais longas de marcas denominadas fórmulas ou acerca das relações entre fórmulas obteníveis como conseqüência das regras de manipulação específicas para elas” Nagel & Newman (1973, p. 33).

Introdução

A perspectiva assumida aqui é a fenomenológica husserliana. Este texto expõe um estudo teórico de natureza bibliográfica e tem objetivo de apresentar considerações a respeito da interrogação *por que o teorema da incompletude de Gödel (TIG)*[3] *foi demonstrado em 1931*? Para darmos conta da pergunta apresentamos um estudo oriundo de nossa experiência vivenciada com o teorema de Kurt Gödel (1906-1978) buscando trazer os principais acontecimentos na comunidade matemática, as principais ideias que estavam sendo perseguidas, do período histórico que envolve, aproximadamente, os últimos cinquenta anos do século XIX e os primeiros trinta anos do século XX.

A respeito de nosso entendimento sobre o que é pesquisa e o que é pesquisar, desde que nos deparamos com a visão de Joel Martins sobre o que é, filosoficamente, fazer pesquisa, nos convencemos de que ela vem ao encontro do nosso modo de conceber esta ação. Assim, pesquisar é "*ter uma interrogação e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez...*" (Bicudo, 1993, p. 18).

No âmbito dessa compreensão, depreendemos que uma interrogação é central em uma pesquisa qualitativa com viés fenomenológico,

> Ela se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido [...] ela diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, inquirindo [...] (Bicudo, 2011, p. 23-24).

A interrogação *por que o teorema da incompletude de Gödel (TIG) foi demonstrado em 1931?* direciona nosso andar em torno do tema. Consideramos importante clarear o foco da pergunta e dos termos que enunciam a questão. Assim, a interrogação interroga pelos motivos que tornaram possível a demonstração do teorema da incompletude de Gödel no ano de 1931, no século XX. A questão também solicita informações sobre por que não foi demonstrado antes. Evitaremos apresentá-lo como um teorema repentino e traremos aspectos que buscam esclarecer porque, naquele momento, havia uma escuta atenta a este tema na comunidade matemática.

---

[3] Por vezes nos referiremos ao teorema da incompletude de Gödel por TIG. O artigo que expõe o TIG é intitulado *Sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos,* foi publicado em 1931 na revista *Monatshefte für Mathematik und Physik.* A primeira divulgação deste teorema deu-se em 1930, num congresso sobre Epistemologia das Ciências Exatas em Königsberg, Lannes (2014).

O movimento de pesquisa em torno da pergunta permite-nos apresentar aspectos pessoais, sociais e históricos que objetivam responder questões, tais como: por que Gödel demonstrou o teorema da incompletude? Que condições tornaram possível a emergência da demonstração do TIG? A respeito disso, Wang (1981) apresenta que o motivo pessoal que levou Gödel a demonstrar o teorema da incompletude, conforme o próprio Gödel expõe, era obter o posto de *Privatdozent* na Universidade de Viena, para isso precisava apresentar algum resultado e naquela oportunidade convergiu esforços para provar a consistência da Análise Matemática em relação à teoria dos números.

> Ele achou misterioso que Hilbert quisesse provar diretamente a consistência da análise pelo método finitista. Ele acredita geralmente que se deve dividir as dificuldades para que cada parte possa ser superada mais facilmente. Neste caso particular, sua ideia era provar a consistência da teoria dos números pela teoria finitista dos números, e provar a consistência da análise pela teoria dos números, onde se pode assumir a verdade da teoria dos números, não apenas a consistência (Wang, 1981, p. 654, tradução nossa)[4].

O primeiro teorema da incompletude estabelece a existência de proposições verdadeiras cujas demonstrações não podem ser derivadas logicamente do conjunto de axiomas da teoria dos números naturais. Ele é surpreendente pois evidencia uma impossibilidade não esperada. Na história da Matemática outros eventos apresentam situações que se assemelham, em termos de surpreenderem a comunidade, tais como, a descoberta dos incomensuráveis, a criação das geometrias não-euclidianas e a teoria de Evariste Galois (1811 - 1832). Esses fatos levaram os matemáticos a admitirem, respectivamente, a impossibilidade de se encontrar uma medida que seja comum para todas as medidas possíveis, de descrever o mundo físico com o modelo geométrico de Euclides e de deduzir fórmulas para encontrar raízes de polinômios de grau qualquer, respectivamente.

O TIG apresenta uma impossibilidade que contrariava a expectativa da comunidade matemática no início do século XX em termos de fundamentação da Matemática, aquela que entendia que o conhecimento matemático não tinha limites e que demonstração e verdade matemática coincidiam. Frente aos demais teoremas notáveis o TIG possui uma característica que o torna único: ele é um resultado produzido inteiramente por Gödel próximo à quando foi

---

[4] Do original: "He found it mysterious that Hilbert wanted to prove directly the consistency of analysis by finitist method. He believes generally that one should divide the difficulties so that each part can be overcome more easily. In this particular case, his idea was to prove the consistency of number theory by finitist number theory, and prove the consistency of analysis by number theory, where one can assume the truth of number theory, not only the consistency" (Wang, 1981, p. 654).

publicado. Ele impacta no problema da consistência da aritmética que havia sido claramente exposto por David Hilbert (1862 – 1943) em 1900 no Congresso Internacional de Matemática ocorrido em Paris. Na comunidade matemática ele estava posto como um desafio aos matemáticos envolvidos na busca de fundamentação dessa ciência. O enunciado desse problema circunscrevia o método de resolução que dizia dessa demonstração ser realizada na teoria da aritmética.

A título de esclarecimento adicional, o segundo teorema da incompletude de Gödel[5], segundo Goldstein (2008) mostra que, na hipótese de que a aritmética de Peano seja consistente, a consistência de um sistema formal que contenha a aritmética não pode ser formalmente provada dentro daquele sistema. “Ele não afirma que a consistência de um sistema formal da aritmética não é dedutível de nenhuma maneira. Ele simplesmente diz que um sistema formal que contenha a aritmética não consegue provar a consistência de si mesmo” (Goldstein, 2008, p. 155-156). Esta limitação pode ser contornada e pode ser possível demonstrar a consistência construtivamente com uma teoria que assuma pouco mais que a original, Ramos (2019).

Período de 1850 a 1931: as questões colocadas e as ideias que moviam a comunidade matemática

O século XIX foi para a Matemática uma ocasião em que muitos problemas que perduravam por longo período de tempo foram resolvidos, teorias foram criadas e fundamentos foram procurados. As construções circunscritas aos três problemas clássicos da Antiguidade[6], as quais dependiam de encontrar as raízes que satisfizessem certas equações foram provadas como logicamente impossíveis. Com o desenvolvimento da Álgebra, especificamente aqui com

[5] O segundo teorema da incompletude demonstra a indecidibilidade da consistência da aritmética de Peano. É importante dizer que há pelo menos uma demonstração realizada em 1936 por Gerhard Gentzen (1909 – 1945) da consistência da aritmética de Peano em sistemas imunes ao teorema de Gödel, ou seja, “não foi dentro de um sistema formal finitário.” Goldstein (2008, p. 156, nota *). A prova de Gentzen pode ser encontrada no livro *Introduction to Mathematical Logic*, de Elliott Mendelson. Cabe dizer que embora se diga que Gödel tem dois teoremas da incompletude, ele nunca provou o segundo teorema, ele apenas o anunciou como uma hipótese e prometeu prová-lo, mas nunca o fez. A primeira prova totalmente detalhada deste teorema foi publicada em *Grundlagen der Mathematik* em 1939 de David Hilbert (1862-1943) e Paul Bernays (1888-1977). Em Stępień & Stępień (2017) encontra-se uma prova feita dentro do sistema aritmético de que o conhecido Sistema Aritmético é consistente no sentido tradicional, e em Abrahão (2011) pode-se encontrar algumas demonstrações da consistência da aritmética clásica.

[6] Do problema da *duplicação do cubo* diz de dada a aresta de um cubo, construir a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro. O problema da *trissecção do ângulo* pedia que estabelecesse um método para construir um outro com um terço da amplitude de um ângulo qualquer dado. Por sua vez, o problema da *quadratura do círculo* pede que, dado um círculo de área qualquer, que se construa um quadrado com mesma área do círculo.

a teoria de Galois, esses problemas foram demonstrados como de resoluções impossíveis, nas condições que os circunscrevem, ou seja, com instrumentos euclidianos.

Em outra linha, a questão que envolvia o quinto postulado de Euclides foi desvendada e estabeleceu-se a impossibilidade de derivar o axioma das paralelas dos outros quatro axiomas propostos por Euclides. O quinto postulado de Euclides mostrava-se independente dos outros quatro e com isso foi possível a construção de sistemas axiomáticos que contivessem a negação do quinto postulado em suas bases. As Geometrias não-euclidianas são construídas e com isso alguns aspectos da epistemologia grega foram chacoalhados, a saber: i) a questão de a Geometria Euclidiana ser uma possível representação do espaço e ii) as verdades matemáticas serem relativas aos axiomas da teoria. Algumas décadas se passaram até no final do século XIX quando Berhnard Riemann (1826 – 1866) desenvolveu uma teoria que unificou as Geometrias não-Euclidianas e a Geometria Euclidiana, considerando as outras geometrias como casos particulares da Geometria proposta por ele, tirando as novas geometrias da margem da comunidade matemática. Pode-se ter nesse episódio uma ideia de uma característica da comunidade matemática da época, qual seja, a unificação das áreas de conhecimento.

Destacamos desses eventos citados acima duas ocorrências que movimentaram os matemáticos e resultaram em subprodutos importantíssimos. O primeiro, é o fato até então inédito, de dar uma prova da impossibilidade de, dentro de um sistema provar certas proposições; e, segundo, a necessidade de investigar nos sistemas de axiomas "se as alegadas conclusões são de fato consequências lógicas necessárias das pressuposições iniciais" (Nagel & Newman 1973, p. 20).

Nesse clima de verificação ganha força claramente o problema da consistência, qual seja, o de saber se o fundamento de um sistema é internamente consistente, isto significa saber com certeza, que aqueles axiomas da base da teoria não geram contradições, ou seja, que os teoremas que vierem a ser demonstrados no sistema não poderão ser mutuamente demonstrados como verdadeiros e falsos. Essa questão da consistência, conforme anunciamos acima, ganhou lugar entre os problemas que Hilbert em 1900 expôs na palestra intitulada "Problemas Matemáticos", (Hilbert, 2003), apresentando-os como os problemas que os matemáticos do novo século tinham a tarefa de resolver. A introdução do texto Hilbert (2003) tem o tom de uma conversa entre um técnico esportivo e seus jogadores; o maior incentivo vai em direção de apontar que, com a dose exata de esforço a vitória estaria garantida. Em consonância com essa metáfora, afirma que a solubilidade de todo e qualquer problema bem formulado era certeira. Essa era a perspectiva de Hilbert e correspondia à da comunidade matemática à época.

O livro marco na história da Lógica foi o *Principia Mathematica* publicado em 3 volumes em 1910, 1912 e 1913 nos quais Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947) tentaram obter todas as verdades matemáticas de um conjunto bem definido de axiomas (os axiomas de Giuseppe Peano (1858 – 1932)) e regras de inferência expressas em lógica simbólica. A questão do momento era verificar se existia alguma contradição nesses axiomas e se existia alguma proposição que não pudesse ser provada.

Na segunda metade do século XIX o pensamento ocidental sofreu interferências profundas quando novas teorias foram criadas, a saber, a teoria da evolução das espécies, a teoria da relatividade, a termodinâmica e a psicanálise, essas, segundo Lannes (2009, p. 24), "provocaram mudanças estruturais do pensamento filosófico e científico" neste ambiente cultural "o sonho iluminista da razão universal que levou à a busca da unidade de diversos campos como a física e a matemática se viu profundamente abalado".

Por sua vez, D'Ambrósio (2005) expõe:

> Os avanços do conhecimento na transição do século XIX para o século XX permitiram a elaboração de propostas que podem responder a insuficiência do conhecimento e os desacertos do comportamento, e possibilitem entender a indissolubilidade do quaterno cosmos, natureza, indivíduo e sociedade e as intermediações criadas pelo homem entre esses quatro elementos. Os pilares sobre os quais repousa a ciência moderna foram profundamente abalados pelo surgimento de três teorias científicas: a mecânica quânt[i]ca; o intuicionismo; o teorema de Gödel (D'Ambrósio, 2005, p. 166).

Na sequência disso, D'Ambrósio (2005) explica que em 1900 na mesma época da apresentação da mecânica quântica por Max Planck a obra *A interpretação dos sonhos* de Sigmund Freud, ambas, apresentavam propostas que sugerem diferentes níveis de percepção sobre a realidade do universo material e psíquico. Na Matemática, a fundamentação proposta em 1905 por Luitzen Brouwer, o principal autor das ideias da escola filosófica intuicionista, deixa evidente que outras lógicas podem ser admitidas na construção do conhecimento matemático ao apresentar uma alternativa para a fundamentação clássica dessa ciência.

O clima cultural social no início do século XX abrigava empenhos para resolver certos problemas produzidos pelo surgimento de novas teorias e nele foram fecundadas gradualmente mudanças epistemológicas que resultaram dos empenhos do cuidado com o rigor matemático, com a consolidação da linguagem simbólica, com a axiomatização e aritmetização das teorias e a relação entre lógica e teoria dos conjuntos (Lannes, 2009, p. 25) traz que "*até a Idade*

Moderna, a Matemática era sustentada epistemologicamente pelo tripé geometria-intuição-variável, mas esta base foi gradativamente substituída por conjuntos-axiomática-aritmética."

Já nos referimos ao problema da consistência dos axiomas da aritmética, contudo entendemos que ainda se faz necessário apresentar o que movimentava a comunidade a propor este problema: uma consequência relacionada à queda da supremacia da geometria de Euclides foi a ideia da aritmetização que se colocava na comunidade junto com a axiomatização de campos matemáticos. Uma vez que "*a esta altura, não era adequado ter a geometria como base epistemológica para toda a matemática, não era seguro construir uma teoria matemática fora dos moldes euclidianos*" (Lannes, 2009, p. 29). A proposta de aritmetização da análise soou como a alternativa mais atraente "*consistiria em trocar a linguagem baseada numa intuição geométrica que dominava as técnicas processos infinitesimais pela linguagem lógica da aritmética*" (Lannes, 2009, p. 30). Como a definição de número real dependia dos números racionais, e estes, por sua vez, dependiam de uma relação de equivalência de inteiros e, estes últimos, dos números naturais fazia-se necessário demonstrar a consistência dos axiomas da teoria dos números naturais. Assim se explica a razão de existir do problema da consistência da aritmética que foi referido anteriormente pois os axiomas de Peano seriam então o menor conjunto de premissas que definiriam os números naturais que seriam a base de toda a matemática.

É da teoria dos conjuntos que brotam os paradoxos que foram responsáveis pela crise dos fundamentos da Matemática cujo teorema de Gödel é o maior fruto. Para mais detalhes sugerimos a leitura de (Batistela, Bicudo, & Lazari, 2017) ocasião em que explicitamos que a área de estudos sobre os fundamentos da Matemática se constituiu para resolver a turbulência da inconsistência do edifício matemático desencadeada pelos paradoxos encontrados na teoria dos conjuntos, área essa que parecia ser a pedra angular para o desenvolvimento de toda a Matemática. A teoria dos conjuntos se entrelaça a problemas originados no âmbito dos progressos havidos em Cálculo juntamente com a carência de uma estruturação axiomática para a Matemática.

O TIG no âmbito de teoremas que provam impossibilidades de certas provas

Nas linhas a seguir apresentamos o estudo que analisa o teorema de Gödel em relação a alguns problemas de impossibilidade tendo como pano de fundo a questão do momento histórico da Matemática, as demonstrações de impossibilidade que o antecederam e as condições que tornaram possível que o teorema de Gödel fosse demonstrado por Gödel em 1931.

O TIG foi apresentado à comunidade matemática em 1931 e, nos termos de Nagel & Newman (1973, p. 19), "*o artigo de Gödel é uma prova da impossibilidade de demonstrar certas proposições importantes na aritmética*". Ele foi visto por essa comunidade como uma resposta de impossibilidade à resolução positiva do problema 2 de Hilbert. O TIG afirma que a consistência dos axiomas da aritmética básica de Peano é indecidível, ou seja, não existe uma sequência finita de linhas que determina se essa proposição é ou não um teorema da teoria; aponta, assim, a impossibilidade da solução desse problema.

A consistência da aritmética era uma questão chave para o desenvolvimento da Matemática, em função das provas de consistência relativas que dela dependiam à época e, principalmente porque, dessa prova dependia o sucesso do programa de Hilbert. Uma prova de consistência absoluta era esperada e a comunidade matemática aguardava ansiosa por ela.

O TIG no âmbito dos resultados matemáticos popularizados aparece como uma das mais significativas realizações da Matemática do século XX, ao lado de outros teoremas matemáticos famosos[7], quais sejam, o último teorema de Fermat, o teorema das quatro cores, o teorema do empilhamento proposto por Kepler.

A respeito da fama do TIG, Feferman (2006) explica que ele contrasta com os demais teoremas famosos por não ser um resultado advindo de um problema que engajou esforços de relativo número de matemáticos, com diferentes abordagens e graus de trabalho intenso. Foi um resultado inesperado e cuja prova, embora envolvesse novas técnicas, não é a mais difícil na escala de dedicação e esforço. *Inesperado* nessa afirmação significa que está extremamente distante da expectativa que incidia sobre ele, qual seja, a concernente à resposta positiva para a completude da Aritmética.

[7] Famosos significa aqui: aqueles que se tornaram populares independentemente de serem teoremas ensinados nas escolas, aqueles cuja história da solução tornou-se bastante divulgada para além da Academia e da Escola. Particularmente aqui, o *Último teorema de Fermat* que é tema de um livro; *o Teorema das Quatro Cores* que é de formulação e conceituação fáceis e por isso sua resolução foi por muito tempo proposta como desafio aos menos acadêmicos, além disso, sua resolução feita por meio de um computador, pelos modos analíticos da computação, a exaustão, e tem causado discussões sobre a aceitação de tal prova; o *Teorema de Kepler* bastante divulgado por levar desde que foi formulado mais de quatrocentos anos para ser provado e depois de provado ficou sendo verificado exaustivamente por 12 matemáticos durante 4 anos e, ainda assim, até hoje, não pode ser verificado em sua totalidade.

No que tange às expectativas de solução, os três problemas clássicos da Antiguidade que durante aproximadamente 20 séculos tiveram inúmeras tentativas de prova, neste mesmo século foram provados como de impossível resolução nas condições dos enunciados dos problemas.

No século XIX o problema relacionado ao quinto postulado de Euclides foi resolvido quando se apresentou a prova de que ele não decorria dos outros quatro axiomas. O quinto postulado segundo o qual *duas retas convergentes se cortarão quando são ilimitadamente prolongadas,* por não ser tão evidente como os quatro anteriores era duvidoso e suscitou a investigação sobre os fundamentos da Geometria. Nunca se conseguiu provar que este axioma era um teorema, mas pode-se entender que ele é independente dos demais e quando se utiliza a negação desse axioma junto com os quatro anteriores tem-se as geometrias não-euclidianas.

A respeito do significado da abordagem de problemas matemáticos e do valor lógico de provas de impossibilidade, Crippa (2014)[8] considera que na Matemática nova, entendida como a que se desenvolve a partir do século XIX, os problemas receberam uma solução diferente da que vinha sendo praticada. Mudou-se o significado do que se podia resolver. Os olhos dos matemáticos se abriram para, diante de um problema, se perguntarem se ele tinha solução, antes de se dedicarem à sua resolução.

Entendemos como Crippa (2010) que dado um problema matemático, a essa época, século XIX, começa-se a perguntar: este problema tem solução? Em caso afirmativo o problema é resolvido e a expressão última deste se transforma num teorema. No caso de obter-se uma resposta negativa tem-se um teorema de impossibilidade. Ambos os teoremas, teorema de possibilidade ou de impossibilidade, têm o mesmo estatuto lógico. Se este não tem solução, outra pergunta se faz: a impossibilidade é absoluta ou se relaciona aos métodos de resolução?

No caso dos problemas clássicos, a quadratura do círculo, por exemplo, somente no século XIX é que se pode provar por métodos algébricos que o problema formulado, tal como foi formulado, não podia ser provado. Contudo, é possível perceber, intuitivamente, que se pode ter um círculo de área x e construir um quadrado de mesma área x (Lützen, 2010; Crippa, 2010).

---

[8] Durante o curso “O papel da impossibilidade na Matemática Clássica” proferido pelo professor Davide Crippa, pós doutorando da Universidade Paris I, França, pelo Projeto CAPES/COFECUB "Provas, demonstrações e representação" dos programas de Pós-graduação de Filosofia e de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas de Universidade Federal da Bahia, realizado nos dias, 15, 22 e 29 de julho de 2014.

Um aspecto comum entre o teorema de Gödel e os demais teoremas de impossibilidade aqui referidos, é que podem ser compreendidos como resultados metamatemáticos, mas, certamente, consoante Crippa (2014) isso não era claro para seus autores, com exceção de Gödel que foi contemporâneo das ideias e do trabalho de Hilbert, portanto conhecedor da metamatemática como uma Filosofia da Matemática que não é a própria Matemática, é uma metaciência que trata a partir de fora o que a Matemática é, trata de suas condições e de seus princípios que são os axiomas da Matemática. Segundo Lannes (2009) é um ramo da Lógica que demonstra resultados sobre a Matemática. Enquanto os objetos da Matemática são números, figuras, funções, etc, os objetos da metamatemática são sentenças matemáticas que expressam afirmações sobre a Matemática, portanto uma metalinguagem da Matemática.

Com base nessas considerações, afirmamos que os demais teoremas de impossibilidade (os teoremas que provaram a impossibilidade de solução, com régua e compasso, dos problemas da Antiguidade) inauguraram uma fase na qual os teoremas de possibilidade e de impossibilidade têm o mesmo peso lógico. E mais que isso, no teorema da incompletude, Gödel desenvolve sua teoria, valendo-se das ideias da metamatemática. Frente aos outros teoremas, o TIG apresenta vasta amplitude na reverberação de seu resultado, enquanto os demais atacam problemas pontuais. O TIG estabelece-se numa ordem outra, um limite em seu modo de fazer Matemática, e não foca apenas um problema local.

Ainda em relação ao período da nova Matemática no qual está inserido o momento histórico do surgimento do TIG, Crippa (2014) apresenta que a distância de tempo entre o teorema de Gauss que afirmava possível construir um polígono de 17 lados com régua e compasso, e a construtibilidade efetiva deste é de aproximadamente 100 anos. Discute que baseado também em outras situações, na Matemática nova, a ênfase está nas provas de construtibilidade e não na construção efetiva. Afirma que a solubilidade dos problemas se refere aos meios de resolução pelos quais se propunha e que se involucra na formulação do problema original. Este autor pondera que na Matemática anterior, aquela antes dos problemas de insolubilidade serem provados, não havia possibilidade de prova de construtibilidade sem exibição da resolução e, a importância das construções na Geometria Antiga é existencial, ainda que admita que, certamente, haja exceções.

Lützen (2010, p. 06) expõe que o teorema da incompletude de Gödel está entre os teoremas matemáticos modernos que afirmam impossibilidades, contudo, que na palestra proferida por Hilbert em 1900 sobre os problemas matemáticos, a importância dos resultados de impossibilidade era um fenômeno relativamente novo, mesmo estando no início do século XX. E argumenta, a partir de uma fala de Hilbert, referindo-se aos problemas, ao postulado das paralelas, à quadratura do círculo e à solução de equações de quinto grau por radicais, haver-se finalmente encontrado soluções totalmente satisfatórias e rigorosas, para esses problemas, embora em sentido diferente daquele inicialmente previsto.

À luz do exposto por Lützen (2010), o TIG é um teorema de impossibilidade e sua repercussão é grande porque o programa de Hilbert tinha seu sucesso vinculado à solução positiva do problema 2, ou seja, o programa de Hilbert, que buscava fundamentar a Matemática sob a base da aritmética dependia, para completar seu intento, da prova da consistência do conjunto de axiomas.

Podemos afirmar, frente ao exposto acima, que Gödel foi quem então teria se perguntado se o problema 2 de Hilbert tinha solução. A partir de Gödel outra pergunta se faz ante a um problema: *este problema pode ser resolvido?*

Doxiadis (2001) afirma que o resultado da incompletude afetou também os matemáticos que, a pedido de Hilbert, se empenhavam na resolução dos problemas

> [...] A partir de agora, para cada enunciado ainda não demonstrado, teremos que perguntar se pode ser um caso da aplicação do Teorema da Incompletude.... Toda hipótese ou conjectura importante pode ser indemonstrável a priori! A afirmação de Hilbert, 'na matemática não existe *ignorabimus*', não se aplica mais; o chão que nós pisávamos foi retirado dos nossos pés! (Doxiadis, 2001, p. 83, tradução nossa)[9].

Embebidos das visões que apresentam o teorema de Gödel como um teorema que prova a impossibilidade de provar algo, marcando um ponto de mudança no modo como a Matemática encara seus problemas e visto o ideal cognitivo dos matemáticos que lhe destinavam a capacidade de provar ou negar toda e qualquer conjectura, nos perguntamos: o que esta prova tinha de especial? Por que Hilbert foi afetado por este resultado?

Entre os principais resultados que quebraram a soberania da Matemática, temos, por exemplo, as seguintes impossibilidades: de encontrar uma medida padrão para todas as medidas possíveis (crise dos incomensuráveis), de descrever o mundo físico com apenas um modelo

[9] No texto original: "A partir de ahora tendremos que preguntarnos si el teorema de la incompletitud puede aplicarse a cada proposición no demostrada... ¡Toda hipótesis o conjetura importante puede ser indemostrable a priori! Las palabras de Hilbert de que en matemáticas no hay ignorabimus ya no tienen sentido. ¡Han sacudido el propio suelo que pisamos!" (Doxiadis, 2001, p. 83).

geométrico (geometrias não-euclidianas), de deduzir fórmulas algébricas para encontrar raízes de polinômios de grau qualquer (teoria de Galois), de construir com régua e compasso soluções para os três problemas clássicos da Antiguidade: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

Todos esses resultados de impossibilidade, e talvez outros, eram conhecidos por Hilbert, muito embora, como acima interpretado por Lützen (2010), ele os percebia (referindo-se à prova de que o quinto postulado não era um teorema, à prova da impossibilidade da quadratura do círculo e à impossibilidade de solução de equações de quinto grau por radicais demonstrada por Niels Henrik Abel (1802 – 1829) como provados de forma diferente do previsto. Trata-se de uma experiência distinta, pois trabalhavam, naquele momento, com problemas originais que solicitavam uma solução, a partir das demarcações na hipótese para uma solução de um determinado tipo. Contudo, as provas de impossibilidade não fornecem uma solução para os problemas, mas mostra como uma solução para estes está fora de alcance.

A impossibilidade, nesses casos, está relacionada ao método da resolução. Podemos intuir e, por exemplo, construir com um software a construção da duplicação do cubo, da trissecção do ângulo ou da quadratura do círculo. Porém, os teoremas de impossibilidade referem-se ao método de construção com régua e compasso. Seus resultados afirmam não ser possível resolvê-los com régua e compasso: que essas construções não podem ser realizadas satisfazendo-se as hipóteses dos teoremas, mas podem ser realizadas de outros modos.

Nossa compreensão é que os teoremas acima chamados de teoremas de impossibilidade são resultados de impossibilidade com repercussão local, não produziram reverberação no ideal de Hilbert para a Matemática, tal qual aconteceu com o teorema de Gödel. A crença diretriz na época era que toda verdade matemática poderia ser provada, pois são teoremas matemáticos de uma Matemática que vinha sendo historicamente praticada, compreendida e realizada da mesma forma: por demonstrações de seus teoremas.

Compreendendo o que tornou possível a demonstração do TIG em 1931

Esse artigo buscou expor os principais problemas que estavam postos e os principais resultados que tornaram possível que o teorema de Gödel fosse demonstrado em 1931 quase um século depois da teoria de Galois e das provas de impossibilidade dos três problemas clássicos da Antiguidade. As provas de impossibilidade são provas de que as construções (no caso dos três problemas clássicos da Antiguidade - de um quadrado com mesma área de um determinado círculo; da trissetriz de um ângulo qualquer e de um cubo com volume igual a duas vezes o volume de um determinado cubo) são logicamente impossíveis.

Gödel quando demonstrou seu teorema da incompletude conhecia a metamatemática, que por sua vez era trabalhada por Hilbert, a demonstração do TIG é um resultado da metamatemática e conclui a impossibilidade da completude de teorias que contenham a aritmética. Nagel & Newman (1973, p. 32-33) explanam que Hilbert "fazia distinção entre Matemática (sistema de signos sem significação) e metamatemática (enunciados significativos sobre a Matemática, os signos que ocorrem no cálculo, seus arranjos e relações)". Torna-se mais claro para nós a partir dessas considerações, o motivo do abalo que o teorema de Gödel provocou em Hilbert, pois, sendo a metamatemática um discurso sobre a Matemática, o resultado de Gödel era o próprio autorretrato da Matemática. Um autorretrato que dizia, na extensão de seu significado, que ela não poderia ser circunscrita sob as hipóteses da axiomatização e da Aritmética de Peano.

Wang (1981) expõe que o caminho tomado por Gödel de demonstrar a consistência da Análise não funcionou e o problema foi se transmutando, pois a certa altura ele compreendeu que a verdade na teoria dos números não pode ser definida na teoria dos números. Ele iniciou a demonstração representando números reais por fórmulas da teoria dos números e se deparou com a necessidade de usar o conceito de verdade para sentenças da teoria dos números para que pudesse se verificar o axioma da separação da teoria dos conjuntos para a Análise, nesse ponto ele se deparou com os paradoxos do mentiroso e de Richard conectando verdade e definibilidade, o que tornou claro para ele a necessidade de distinguir Matemática e metamatemática. Com isso, Gödel compreendeu que no sistema utilizado no *Principia Mathematica* (teoria dos tipos) existiam proposições indecidíveis. Assim, ele direcionou os trabalhos na construção dessa sentença que fosse verdadeira no sistema e não demonstrável.

Então Gödel passou a representar símbolos por números naturais, sentenças por sequencias de números e provas por sequencias de sequências de números, utilizando noções e funções que poderiam ser expressas em sistemas finitários da teoria dos tipos ou teoria dos conjuntos. Ele compreendeu que a proposição indecidível deveria ser de natureza combinatória finitária. Numa reunião ocorrida em Königsberg, conforme relata Wang (1981), J. von Neumann (1903 – 1957) expressou sua crença de que tais objetos combinatórios pudessem ser mapeados no conjunto dos números inteiros. Gödel em resposta expôs que do que ele compreendia, do curso sobre proposições indecidíveis sobre os inteiros, as proposições indecidíveis poderiam ser assim construídas, mas elas conteriam conceitos bastante diferentes daqueles que ocorrem na teoria dos números, como adição e multiplicação.

A construção da proposição indecidível ocorreu pouco tempo depois sobre números naturais, na forma polinomial precedida de quantificadores. A respeito do segundo teorema da incompletude de Gödel, que é o momento em que Gödel entende que a declaração de consistência também é uma proposição indecidível, Wang (1981, p. 655) apresenta:

> Ao mesmo tempo, mas independentemente desse resultado [da construção da sentença indecidível, o que é amplamente conhecido como primeiro teorema de Gödel], Gödel também descobriu seu segundo teorema que afirma que nenhuma prova de consistência de um sistema razoavelmente poderoso pode ser formalizada no próprio sistema. Um resumo informando esses resultados foi apresentado em 23 de outubro de 1930 à Academia de Ciências de Viena por Hans Hahn. Pouco depois, Gödel recebeu uma carta de von Neumann sugerindo o teorema sobre as provas de consistência como uma sequência do resultado original de Gödel (Wang, 1981, p. 655, tradução nossa)[10].

Gödel apresenta uma representação mais geral de seus teoremas utilizando a aritmética de Peano em vez da teoria dos tipos. Entendemos ser essa a demonstração publicada em 1931.

Do exposto compreendemos que a demonstração da incompletude foi possível principalmente pelos trabalhos que estavam sendo desenvolvidos por Hilbert, quais sejam, a teoria dos tipos, a metamatemática, que se relacionavam à busca de fundamentação da Matemática. E também porque Gödel sabia existir teoremas que expunham impossibilidade de se provar algo.

Referências

Abrahão, F. S. (2011). *Demonstrando a Consistência da Aritmética*. (Dissertação de mestrado). Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ. Recuperado de https://doi.org/10.5281/zenodo.1213459

Batistela, R. F., Bicudo, M. A. V. & Lazari, H. (2017). O Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 10(3), 198-207. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2017v10n3p198-207

[10] “At the same time but independently of this result, Gödel also discovered his second theorem to the effect that no consistency proof of a reasonably rich system can be formalized in the system itself. An abstract stating these results was presented on October 23, 1930 to the Vienna Academy of Sciences by Hans Hahn. Shortly afterwards Gödel received a letter from von Neumann suggesting the theorem on consistency proofs as a consequence of Gödel's original result” (Wang, 1981, p. 655).

Bicudo, M. A. V. (2011). Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). *Pesquisa qualitativa segundo uma visão fenomenológica* (pp. 29-40). São Paulo, SP: Editora Cortez.

Crippa, D. (2010). A solução cartesiana da quadratura do círculo. *Scientiae studia*, 8(4), 597-621. https://doi.org/10.1590/S1678-31662010000400005

Crippa, D. (2014). *O Papel da impossibilidade na Matemática Clássica*. Minicurso realizado na Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal da Bahia.

D'Ambrósio, U. (2005). Etnometodologia, Etnomatemática, transdisciplinaridade: embasamentos crítico-filosóficos comuns e tendências atuais. *Revista Pesquisa Qualitativa*, 1(1), 155-167. https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/12

Doxiadis, A. (2001). *Tio Petrus e a conjectura de Goldbach*. Lisboa: Editora 34.

Feferman, S. (2006). The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. *Notices American Mathematical Society*, 53(4), 434-439.

Goldstein, R. (2008). *Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel.* Tradução de I. Koytowski. São Paulo: Companhia das Letras.

Hilbert, D. (2003). Problemas matemáticos: Conferência proferida no 2º Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris em 1900. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Tradução de S. Nobre. 3(5), 5 -12. https://doi.org/10.47976/RBHM2003v3n505-12

Lannes, W. (2009). *A incompletude além da matemática: impactos culturais do teorema de Gödel no século XX*. (Tese de doutorado). Programa de Pós-graduação em História, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG. Recuperado de http://hdl.handle.net/1843/VGRO-82THEU

Lannes, W. (2014). Sobre as implicações do Teorema de Gödel na organização social de Matemáticos e Lógicos no Século XX. In *Anais do XIV Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*. Belo Horizonte, MG. Recuperado de https://www.14snhct.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1919

Lützen, J. (2010). The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. *Centaurus*, 52(1), 4-37. https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.2009.00160.x

MENDELSON, E. (1964). *Introduction to Mathematical Logic*. (2a ed.). Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company, Inc.

Nagel, E., & Newman, J. R. (1973). *Prova de Gödel*. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo.

Ramos, L. S. P. (2019). *A demanda por demonstrações de consistência nos fundamentos da matemática*. (Dissertação de mestrado). Programa de Pós-Graduação em Metafísica, Universidade de Brasília, Brasília. Recuperado de https://repositorio.unb.br/handle/10482/35257

Stępień, T. J., & Stępień, Ł. T. (2017). On the Consistency of the Arithmetic System. *Journal of Mathematics and System Science*, 7(2), 43-55. . https://doi.org/10.17265/2159-5291/2017.02.001

Wang, H. (1981). Some Facts About Kurt Gödel. *The Journal of Symbolic Logic*, 46(3), 653-659. https://www.jstor.org/stable/2273764

Autora:
Rosemeire de Fatima Batistela
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro/SP. Mestrado e Doutorado em Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação Maemática da UNESP de Rio Claro/SP. Atualmente é professora Adjunta da área de Educação Matemática do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).
E-mail: rosebatistela@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2779-7251

Como citar o artigo:
BATISTELA, R. F. Uma visada sobre as condições sócio-históricas de emergência e demonstração do teorema da incompletude de Gödel em 1931. **Revista Paradigma**, Vol. XLIII, Edición Temática: Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, pp 454-470, mayo, 2022.