

ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA LA ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON PARÁMETRO PEQUEÑO

Aisseli Comet Marrero

acomet96@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-8023-3143>

Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte (UCIA)
Camagüey, Cuba.

Lorgio Félix Batard Martínez

lorgio@uclv.edu.cu

<https://orcid.org/0000-0003-1309-8310>

Universidad Central de las Villas Martha Abreu (UCLV)
Santa Clara, Cuba.

Cila Mola Reyes

cila.mola@reduc.edu.cu

<https://orcid.org/0000-0001-7755-3605>

Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte (UCIA)
Camagüey, Cuba.

Recibido: 12/04/2022 **Aceptado:** 23/11/2022

Resumen

En la presente investigación se realiza un estudio del proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), más específicamente de las EDO con parámetro pequeño, con el propósito de estructurar dicho PEA permitiendo un mejor desempeño de los estudiantes universitarios en la resolución de tareas que involucren estas ecuaciones. Para ello se presenta una alternativa que permita la estructuración del PEA de las EDO con parámetro pequeño, que promueve el desarrollo comprensivo de las mismas. Esta propuesta deberá permitir al docente reevaluar y profundizar en el sistema de conocimientos, los métodos y estrategias de dichas ecuaciones de manera general, para dar paso a nuevas estrategias metodológicas que posibiliten el desarrollo del PEA de la matemática.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), parámetro pequeño, proceso de enseñanza aprendizaje (PEA)

DIDACTIC ALTERNATIVE FOR THE STRUCTURING OF THE TEACHING-LEARNING PROCESS OF NON-HOMOGENEOUS LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETER.

Abstract

In the present investigation, it is presented a study is presented on the equations In the present investigation, a study of the teaching-learning process of ordinary differential equations is carried out, more specifically of the ODEs with a small parameter, with the purpose of structuring said PEA allowing a better performance of university students in the resolution of tasks that involve these equations. For this, an alternative is presented that allows the structuring of the teaching-learning process of ordinary differential equations with a small parameter, which promotes their comprehensive development. This proposal should allow the teacher to reassess and delve into the knowledge system, the methods and strategies of these equations in a general way, to give way to new methodological strategies that enable the development of the teaching-learning process of mathematics.

Keywords: ordinary differential equations, small parameter, teaching learning process.

ALTERNATIVA DIDÁTICA PARA A ESTRUTURAÇÃO DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS COM PEQUENO PARÂMETRO.

Resumo

Na presente investigação, é realizado um estudo do processo de ensino-aprendizagem de equações diferenciais ordinárias, mais especificamente de equações diferenciais ordinárias com pequenos parâmetros, com o objetivo de estruturar o referido processo de ensino-aprendizagem

permitindo um melhor desempenho dos estudantes universitários na resolução de tarefas envolvendo essas equações. Para isso, é apresentada uma alternativa que permite a estruturação do processo ensino-aprendizagem de equações diferenciais ordinárias com um pequeno parâmetro, o que promove seu desenvolvimento integral. Esta proposta deve permitir ao professor reavaliar e aprofundar o sistema de conhecimento, os métodos e estratégias destas equações de uma forma geral, para dar lugar a novas estratégias metodológicas que possibilitem o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias, pequenos parâmetros, processo ensino-aprendizagem.

Introducción

Las universidades constituyen las instituciones que, de forma ineludible, tienen la tarea de preparar a un individuo apto para enriquecer sus conocimientos, de manera que se garantice lo teórico - práctico mínimo indispensable y se desarrollen las capacidades creativas necesarias, que favorecen a la formación de un profesional competitivo. Por tal motivo el sistema educacional universitario cubano se encuentra en constante perfeccionamiento, siendo una de sus principales directrices el enseñar a pensar. En este sentido, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), como parte del sistema de conocimientos de la Disciplina Matemática ocupan un lugar importante, por su contribución al desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico del estudiante y aportar los fundamentos básicos de contenidos de la profesión.

Sin embargo, para la comunidad de educadores matemáticos no resultan desconocidas las dificultades que mundialmente se presentan en su proceso de enseñanza aprendizaje (PEA), lo que se evidencia en numerosos resultados investigativos (De las Fuentes, 2020; Collante, 2019; Alonso, 2018; Rubal, 2018; Camunga y Batard, 2017; Puente, 2017; Guzman, 2016; Mariño, 2016; Molina, 2015; Barbarán, 2014; Moreno, 2013; Guerrero, 2010; Hernández, 2009; Camacho, 2007; Fascella, 2006; Camarena, 2004; Loumen, 2000; Artigue, 1995), y que contribuyen al estudio de esta problemática.

En los trabajos referidos, se registran entre otras, como dificultades de los estudiantes: la identificación y clasificación de los distintos tipos de EDO, analizar el comportamiento de las funciones solución cuando estas se expresan de forma implícita y la realización de transformaciones elementales en la ecuación diferencial. Así como, el planteamiento de la ecuación característica; reconocer y diferenciar constantes, parámetros y variables; la selección del método más conveniente para hallar la solución de la EDO, y la argumentación de las soluciones particulares.

En lo particular, del PEA de las EDOL no homogéneas en diferentes carreras de la Universidad de Camagüey (Licenciatura en Educación Matemática, Licenciatura en Educación Física, Ingeniería Civil, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Informática, Ingeniería Mecánica, Ingeniería en procesos agroindustriales, Ingeniería Química), mediante el empleo de diversos métodos empíricos, además de las insuficiencias antes expuestas; se precisaron las siguientes causas:

- Por lo general no siempre se realiza el aseguramiento del nivel de partida, y la propuesta de problemas a modelar mediante una EDOL no homogéneas con parámetro pequeño, y ejercicios donde deba identificar parámetros, constantes y variables.
- Pobre aprovechamiento de las potencialidades del contenido para estimular la comprensión de la relación existente entre el modelo deducido y el fenómeno estudiado.

- Débil articulación de los métodos algebraico, gráfico y numérico que permita al estudiante asociar un número determinado de curvas solución con sus respectivas ecuaciones diferenciales, así como interpretar las soluciones gráficas y numéricas para justificar tal asociación.
- Las orientaciones metodológicas del programa de la asignatura no ofrecen sugerencias suficientes que le permitan al docente una adecuada utilización de los recursos tecnológicos (clases y folletos en soporte magnético, videos, multimedia y software) como mediadores didácticos para la comprensión de los objetos de las EDOL no homogéneas con parámetro pequeño.
- El método empleado por los docentes para la conformación de los tipos de clases está estructurado atendiendo más a la complejidad del contenido, que a las peculiaridades del pensamiento matemático de los estudiantes.

Al realizar un análisis detallado del PEA de las EDO se identificó el siguiente *problema*: ¿Cómo estructurar el proceso de enseñanza aprendizaje de las EDO, que permita un desempeño comprensivo de los estudiantes universitarios en la resolución de tareas que involucren EDOL no homogéneas con parámetro pequeño?

Si bien el PEA de las EDOL no homogéneas ha sido abordado por diversas investigaciones, desde la práctica y la pesquisa realizada, se ha podido delimitar que existe una insuficiente integración y sistematización teórica de los aportes obtenidos a nivel nacional e internacional en el sistema educacional universitario en relación con el proceso de comprensión de los objetos de las EDOL no homogéneas con parámetro pequeño.

El *objetivo* de esta investigación: se orienta a proponer una alternativa didáctica para la estructuración del PEA de las EDO, que promueva el desarrollo comprensivo de las EDO no homogénea con parámetro pequeño.

Esta propuesta deberá permitir al docente reevaluar y profundizar en el sistema de conocimientos, los métodos y estrategias de las EDO de manera general para dar paso a nuevas estrategias metodológicas que posibiliten el logro de las metas actuales: una educación matemática para el Siglo XXI.

Desarrollo

El desarrollo de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias está relacionado con los descubrimientos emergidos principalmente en el Cálculo Diferencial e Integral, y el resultado de respuestas a problemas vinculados con el campo de la: Astronomía, Biología, Física, Ingeniería, Mecánica, Química, etc. Mediante el método histórico-lógico se devela la dinámica, trayectoria y lógica objetiva del desarrollo de las EDO y de las EDOL homogéneas con parámetro pequeño en lo particular.

Referencial Teórico

Como principales impulsores de la teoría de las EDO se tienen entre otros, a: Jules Poincare (1858-1912), Georg Riemann (1826-1866), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Pierre de Laplace (1749-1827), Joseph Lagrange (1736-1813), Jacopo Riccati (1676-1754),

Alexis Clairaut (1713-1765), Leonard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1792), Jacques Bernoulli (1654-1705), Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isacc Newton (1642-1727).

La primera sistematización de los trabajos alrededor de las ecuaciones diferenciales publicados en el libro *Institutiones Calculi*, y a la que se puede llamar primera teoría de las EDO, fue realizada entre los años 1768 -1770 por el matemático Leonard Euler. Él clasifica las EDO de primer orden en: separables, homogéneas, lineales y exactas. Las EDO de segundo orden: lineales, susceptibles a reducir el orden y generalización a orden superior. También se tiene el método de series de potencia para resolver ecuaciones de la forma $y'' + a_1 y = 0$, donde conceptualizó las ED mediante la expresión $\frac{dy}{dx}$ entendida como cociente entre diferenciales y no como derivada.

De esta manera, fueron elaborados los recursos matemáticos elementales de resolución de una EDO; desarrollados en el ámbito de la resolución de problemas, como, por ejemplo: el problema del péndulo isócrono, el oscilador armónico, los dos cuerpos, de la catenaria, de la tractriz, de la braquistócrona. Así como, el problema mecánico de Abel, las leyes de Kepler, la ecuación depredador – presa, etc. En resumen, se puede decir, que a partir de los años 70 del siglo pasado comenzó un estudio detallado de las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables del tipo, $\epsilon d^2 y dx^2 + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$, con las condiciones de contorno $y(0) = A$ y $y(1) = B$.

Un resultado importante aparece en la tesis del Dr. C. Batard (1990) titulada “*Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y el problema de Riemann con parámetro pequeño*”. En la misma se analiza la convergencia de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias con parámetro pequeño en la derivada de mayor orden, a la solución del problema límite cuando el parámetro tiende a cero, donde se considera el novedoso concepto de “Ecuación Complementaria Característica”.

O sea, dada la ecuación:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^m \epsilon^k a_n + k y^{n+k}(x) = f(x) \tag{1}$$

Donde $a_n \neq 0, a_{n+m} \neq 0, \epsilon > 0$ (parámetro pequeño) y $f: D \subseteq R \rightarrow R$ continua o seccionalmente continua, y las condiciones iniciales:

$$Y^{(k)}(0) = A_k, \quad k = (0, m + n - 1)^- \tag{2}$$

Se denomina ecuación complementaria característica a la ecuación algebraica

$$\sum_{k=0}^m a_{n+k} s^k = 0 \tag{3}$$

Se denota a la solución del problema (1) – (2) regular, si las partes reales de todas las series (3) son negativas y se denomina como problema límite de (1) – (2) al problema:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = f(x) \tag{4}$$

$$Y^k(0) = A_k, \quad k = (0, n - 1)^- \tag{5}$$

En la referida tesis doctoral, trabajando en clases de funciones suficientemente buenas, se demostró que la solución del problema (1) – (2) converge uniformemente a la solución del problema límite (4) – (5), sí y solamente si el problema es regular.

En investigaciones más recientes, fundamentalmente en el presente siglo, que enfocan diversidad de problemas de la Física -Matemática con coeficientes pequeños, se ha trabajado no solo en las condiciones de convergencia y estabilidad, sino también en el estimado del error cometido al sustituir la solución del problema original por la solución del problema límite cuando el parámetro tiende a cero. La relevancia de esta última línea de investigación en el presente siglo, queda de manifiesto en los trabajos que enfocan diversidad de problemas que modelan una Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal (EDOL) con coeficientes pequeños.

Constituyen otros referentes, los resultados obtenidos en el trabajo de diploma: "*Estimación del error cometido en la simplificación de las EDOL de segundo y tercer orden*" (Comet, 2018). En el trabajo, se toma como base los resultados desarrollados por Batard (1990) y otras investigaciones (Kamenskii, Quincampoix y Pergamenchtchikov, 2017; Shakhmurov y Bourada, 2016), y se realiza por primera vez a saber, desde el punto de vista matemático, un estudio detallado del error que se comete en el caso de las EDOL no homogéneas de segundo y tercer orden con parámetro pequeño, al sustituir la solución del problema original por la solución del problema límite. Además, se implementa la programación de los resultados a partir de algoritmos determinados; aportando de este modo a los especialistas del tema, la facilidad de la utilización de este tipo de ecuaciones en sus trabajos investigativos.

Todo lo anteriormente planteado, demuestra la creación de un movimiento renovador entre los docentes que imparten los contenidos relativos a las EDO, que ha instado a lograr una visión estratégica para el proceso de formación del estudiante universitario de las áreas de ciencias técnicas y sociales, con el objetivo de prever el panorama en el cual se desempeñarán en el futuro (Vargas, Burguet, Lezcano y Durán, 2018).

Para esta investigación, desde estos referentes, se reconocen como puntos de partida entre otros, las aportaciones de:

- Jose Joaquín (2014): propone una estrategia para posibilitar en el estudiante el dominio del contenido de las EDO mediante una reactivación implícita del nivel de partida.
- Rios (2017) y Rubal (2018): plantean alternativas didácticas para promover la construcción del concepto EDO con la utilización de un software matemático, concatenando los métodos algebraico, gráfico y numérico.
- Mombo (2014): se aporta un conjunto de actividades que incorporan recursos tecnológicos con sus correspondientes indicaciones metodológicas para el tratamiento del contenido de las EDO, con énfasis en la resolución de problemas.

Como se observa, las investigaciones en el tema de las EDO han tenido un gran desarrollo. Se destacan aquellas que ponen énfasis en la necesidad de su comprensión mediante el desarrollo de tareas que favorezcan la experimentación y conceptualización a través de diversas situaciones y contextos, la utilización de diferentes registros de representación semiótica de manera articulada, dado la variedad de aspectos a tener en cuenta en su PEA y la utilización de recursos tecnológicos. Sin embargo, en la bibliografía consultada no existen recomendaciones totalmente elaboradas para estructurar didácticamente el proceso de

comprensión de los objetos de las EDOL no homogénea enfatizando en el papel que juegan las condiciones iniciales y de los parámetros en la interpretación de la solución de la EDO.

Metodología

Para cumplimentar el objetivo, mediante la utilización del método análisis-síntesis se realiza una caracterización del PEA de las EDOL. La sistematización como método, permitió inferir las regularidades que sustentan los fundamentos teórico-metodológicos de la alternativa didáctica para la estructuración del PEA de las EDO y su concreción en las actividades donde se resuelven tareas que precisen el tratamiento de una EDOL con parámetro pequeño.

La modelación sistémico estructural funcional, proporcionó la orientación general del estudio realizado para concebir la estructura de la alternativa didáctica para su aplicación en la práctica. Los talleres de reflexión crítica permitieron valorar la pertinencia científica de la alternativa didáctica. El procedimiento investigativo seguido, se concibió del siguiente modo:

- Caracterización epistemológica el proceso de enseñanza aprendizaje de las EDOL.
- Diseño estratégico de la alternativa didáctica para la estructuración del PEA de las EDOL no homogénea con parámetro pequeño.
- Ejemplificación de la alternativa
- Concepción de las tareas docentes para la enseñanza aprendizaje de las EDOL con parámetro pequeño con el uso de herramientas tecnológicas.

Caracterización epistemológica el proceso de enseñanza aprendizaje de las EDOL.

Objetivo: Determinar el desarrollo epistemológico del proceso de enseñanza aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales.

El siglo XX significó un salto cualitativamente superior en el desarrollo teórico de las EDOL. Sin embargo, la estructuración del contenido en su PEA no puede concebirse solamente en el ordenamiento de conceptos, teoremas o procedimientos, requiere de la sistematización de los conocimientos producidos en las investigaciones pedagógicas para el mejoramiento del PEA. González (2002), define la necesidad de que este sea sistemático, dirigido y específico, por cuanto la interrelación docente - estudiante deviene en un accionar didáctico mucho más directo, cuyo único fin es el desarrollo integral de la personalidad de los educandos, lo cual enriquece la idea planteada con anterioridad. En general, esto es válido cuando se particulariza en el PEA de las EDOL no homogéneas, que tiene como fin consolidar la concepción científica del mundo, mediante:

- La comprensión de las relaciones entre los modelos matemáticos, los conceptos y resultados de esta ciencia y la realidad material existente objetivamente.
- La comprensión que el análisis del surgimiento de las EDOL no homogéneas, expresa las contradicciones que tienen lugar en su desarrollo histórico, esencialmente subordinada a las necesidades de la vida material de la sociedad.

Por lo que se debe para ello:

- Desarrollar las capacidades cognitivas mediante la apropiación de las diferentes teorías de las EDOL no homogéneas estudiadas, así como de los principales procedimientos de solución intrínsecos a ella, que le permitan enfrentar una posible solución de un problema con valores iniciales de la vida cotidiana o profesional.
- Desarrollar las formas del pensamiento lógico mediante, el trabajo con los conceptos, la identificación e interpretación de ellos, y la argumentación de propiedades.
- Estimular el pensamiento algorítmico en la solución de tareas que contienen sistemas dinámicos.
- Desarrollar la capacidad de comunicación, mediante el manejo de los diferentes sistemas de representaciones semióticas (analítica, gráfica, numérica y verbal).
- Un amplio y progresivo empleo de recursos tecnológicos que facilite los cálculos, el tratamiento de los sistemas de representación semiótica y la modelación e interpretación de los problemas con EDOL no homogéneas.

Desde esta perspectiva, se realizó una revisión de la normativa cubana vigente en relación con la formación del profesional universitario, haciendo énfasis en la dirección del PEA de la disciplina Matemática, así como en la estructuración del contenido de la asignatura donde se imparte el sistema de conocimientos de las EDO. Mediante el reconocimiento de los indicadores que a continuación se muestran; se exponen las diferentes posiciones didácticas manifestadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales no homogéneas. Tomando como indicadores: orientación de los objetivos, selección y organización del contenido objeto de asimilación, los tipos de actividades representativas para asimilar el contenido, las estrategias, métodos y recursos para favorecer el desarrollo de la comprensión dominio del sistema de conocimientos.

Al estudiar el lugar de los problemas en la estructura del PEA, se reconoce como tendencia que los mismos son presentados al final del estudio, tema o en las evaluaciones, o de forma ocasional para motivar el estudio del tema, aunque en ningún caso constituye el medio para el aprendizaje de toda la teoría de las EDOL. Los aspectos de tipo gráfico son reducidos, y no exigen que a partir de la representación gráfica se le extraiga toda la información posible; el acercamiento numérico se hace de forma muy descriptiva, o en algunos casos describiendo el algoritmo de resolución en algún lenguaje de programación, desaprovechándose las potencialidades de los recursos tecnológicos. Sin embargo, esta presentación de la variedad de ejemplos en el campo de las aplicaciones se realiza mediante una fórmula, sin una explicación de cómo se construye esta ecuación diferencial, sobre cómo se realiza ese cambio de registro verbal al registro algebraico. Así como deja en segundo plano cuestiones centrales acerca del comportamiento de las soluciones.

El estudio realizado permitió detectar como debilidades principales que caracterizan al PEA de las EDO las siguientes:

- Casi nunca se concibe y realiza el proceso a partir del reconocimiento del estudiante como aprendiz de matemática.
- Es insuficiente el empleo de diferentes medios de enseñanza y la explotación de sus posibilidades para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

- En escasas ocasiones se exige a los estudiantes que expliquen la vía, los recursos y los medios utilizados en la solución de sus tareas y valoran su posible utilización en otros casos.
- Las tareas que se proponen tienden a ser reproductivas, no siempre exige el trabajo individual y grupal que posibiliten realizar ajustes tanto al proceso como a los resultados, lo que no favorece la adquisición e intercambio de estrategias cognitivas y metacognitivas.
- Insuficiencias en el dominio de los elementos fundamentales del conocimiento que precede a las EDO.
- Raramente se promueve la reflexión acerca de cómo el estudiante pensó, las acciones que realizó, que lo condujeron al éxito y/o fracaso o dificultades, cómo lo comprobó, cómo puede evaluarlo y perfeccionarlo.
- Es débil la automatización de las acciones que resultaron útiles para aprender mediante el control reflexivo valorativo del proceso y los resultados que posibilite la construcción y reconstrucción de estrategias cognitivas y metacognitivas.
- Además, es insuficiente la visión integradora sobre cómo se debe desarrollar metodológicamente el PEA de las EDOL no homogéneas.

En resumen, los aspectos abordados hasta aquí informan de las insuficiencias en la estructuración del PDE de la Disciplina Matemática, lo que conduce al limitado desempeño de los estudiantes universitarios en la resolución de tareas que involucran EDOL no homogéneas con parámetro pequeño.

Diseño estratégico de la alternativa didáctica para la estructuración del PEA de las EDOL no homogénea con parámetro pequeño.

Objetivo: Exponer el diseño estratégico que se propone para la alternativa didáctica, teniendo en cuenta los aspectos filosóficos, psicológicos y didácticos para la estructuración de la alternativa.

La alternativa didáctica que se propone tiene como fundamento

Filosófico

La teoría del conocimiento explicada por Lenin (1990), y en particular sus postulados sobre:

- La cognoscibilidad del mundo, pues está concebida para que, a partir de los problemas relacionados con las EDO con parámetro pequeño, el estudiante pueda analizar, buscar información, interpretarla, formular problemas análogos y adquirir conocimientos necesarios para utilizarlos en su aprendizaje al realizar su actividad en el aula, considerando la práctica como el principio y el fin de la actividad cognoscitiva.
- La concepción dialéctico-materialista acerca del lenguaje, como capacidad humana que se adquiere en el proceso de socialización del individuo.
- El papel de las contradicciones en el proceso de adquisición de los conocimientos y la necesidad de determinar, entre otras, las que se manifiestan entre los nuevos

conocimientos, habilidades y valores que adquieren los estudiantes durante la actividad matemática.

Psicológico

El enfoque histórico cultural de Vigotsky (1979) y sus seguidores, quienes asumen la naturaleza compleja del desarrollo humano, la cual se interpreta en la dinámica del desarrollo integral de la personalidad del estudiante, que se concibe y promueve como producto de su actividad y comunicación -donde se concretan los procesos de interiorización y exteriorización que garantizan la apropiación activa y creadora de los elementos de la cultura (Bermúdez y Pérez, 2004, p. 50).

Los cambios en la zona de desarrollo próximo se consideran elementos claves para el análisis cualitativo de un proceso de aprendizaje, que encuentra en la interacción socio-cultural un medio plausible para la interrelación cognitivo-afectiva. Y la mediación pedagógica con la integración de las TIC en el PEA de las EDOL con parámetro pequeño.

Didácticos

Se basa en las leyes didácticas planteadas por Álvarez de Zayas (1999): de las relaciones del proceso con el contexto social, y de las relaciones internas entre los componentes del proceso; en particular en la triada objetivo contenido-método, que se considera la lógica fundamental del proceso y condiciona las relaciones de subordinación entre los componentes didácticos del tema (objetivo- contenido- métodos- medios- estructura del tema).

Específicamente desde la *Didáctica de la Matemática*:

- Los antecedentes históricos de las EDO desde los enfoques: algebraico (resolución exacta), geométrico (resolución cualitativa) y numérico (resolución aproximada).
- Tratamiento didáctico de las ecuaciones en la escuela y su relación con el tratamiento de las EDOL con parámetro pequeño.
- La integración de las TIC en el PEA de las EDOL con parámetro pequeño (visualización, dinamismo, interactividad, tratamiento de las diversas representaciones semióticas).
- La distinción entre un objeto y su representación como punto estratégico para la comprensión de las EDOL con parámetro pequeño.
- La posibilidad de organizar los contenidos de las EDOL con parámetro pequeño, priorizando los procesos de análisis y construcción de significados mediante el tratamiento de las diversas representaciones semióticas en dependencia del sistema de representación semiótico utilizado.
- El papel asignado a la motivación asociado al planteamiento y solución de problemas.
- El uso de la resolución de problemas como núcleo de profundización de los conceptos relacionados con las EDOL con parámetro pequeño.

Objetivo de la alternativa: establecer la organización y secuenciación de las diversas actividades que resultan más propicias en el PEA de las EDOL con parámetro pequeño.

Se proponen las siguientes acciones:

- Determinar la sistémica estructural-funcional de organización del contenido en las diversas actividades.

- Modelar los problemas para sistematizar el contenido de las EDOL con parámetro pequeño.
- Seleccionar los métodos a emplear para la solución de las tareas.
- Establecimiento de los niveles organizativos de las actividades matemáticas: individual y grupal.
- Estructurar el sistema de actividades que den significación y objetividad al contenido y sirvan de base para la motivación y orientación de los estudiantes.
- Concepción de las tareas docentes para la enseñanza aprendizaje de las EDO con software.
- Facilitar distintos niveles de ayuda en correspondencia con la complejidad de la tarea.
- Localización de los recursos bibliográficos, informáticos y materiales para asegurar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje.

Consideraciones generales

Se debe establecer desde el inicio una visión integradora del contenido teórico de la asignatura, principalmente las definiciones, los teoremas, las fórmulas, las reglas y los procedimientos de cálculo más utilizados. Esto permitirá garantizar que el estudiante durante el PEA de las EDOL con parámetro pequeño por una parte sistematice los métodos primeramente estudiados y asimile los nuevos que permitan resolver los problemas mediante una adecuada comprensión de su esencia a partir de:

- ¿Qué se estudia? (Aspecto cognitivo)
- ¿Qué utilidad tiene? (Aspecto social)
- ¿Para qué se estudia?
- ¿Qué características tiene el objeto EDO?
- ¿Cómo podrá ser utilizado?

El sistema de actividades debe estar organizado, a partir de una categorización, tipificación y selección, permitiendo formar al estudiante desde el punto de vista teórico, adquirir habilidades y destrezas. Así como, las de carácter investigativo con la finalidad de lograr un nivel de desarrollo comprensivo superior. Se debe hacer un análisis riguroso y selección de aquellas herramientas tecnologías disponibles que diversifiquen las posibilidades de visualización, dinamismo, interactividad, trabajo colaborativo, modelación y experimentación matemática.

En el tratamiento EDOL con parámetro pequeño, se debe realizar un análisis detallado de las características de estas ecuaciones, tanto científico como metodológico, a medida que las mismas se presenten y desarrollen. Se recomienda en el tratamiento del cálculo del error estimado que se comete al utilizar este método para resolver las EDO con parámetro pequeño, la utilización de algún software, e incentivar al estudiante a crear habilidades de programación atendiendo a la forma de la EDO y procedimiento de solución. Se debe hacer una graduación de acuerdo a los niveles de asimilación de ejercicios y problemas resueltos en dependencia de la significatividad para el tema y con un mayor detalle de explicación de la solución de los mismos.

Los problemas deben tener el objetivo de dar significación y objetividad al contenido de las EDO y servir de base para la motivación y orientación de los estudiantes. Se deben caracterizar por: transmitir información y estimular a la valoración de situaciones prácticas, no de forma aislada, sino con un conjunto de datos y relaciones sobre un tema determinado que

posibilite extraer conclusiones sólidas, estimular el desarrollo de diferentes formas de razonamiento y procedimientos heurísticos y dar permanencia a los objetivos básicos de la asignatura de manera que los contenidos se reactiven permanentemente. Los problemas esenciales pueden ser formulados como ejercicios, como preguntas, como actividades extra clases para buscar el valor práctico o como actividades prácticas usando medios de enseñanza u objetos reales.

Ejemplificación de la alternativa

Objetivo: Exponer la nueva estructura del contenido en correspondencia con la alternativa didáctica.

A partir de la sistematización de los aportes de autores como Mombo (2015), José Joaquín (2014), Chacon M. (2021), Blass F. E. (2014), Guzman P. (2016) y de los referentes asumidos se presenta la alternativa didáctica.

Se parte del supuesto que la asignatura comienza con una conferencia donde se exponen los aspectos teóricos del objeto Ecuación Diferencial Ordinaria. Con vistas a generar una necesidad cognoscitiva que conduzca al estudiante a implicarse en ese proceso de construcción de la ED; se recomienda para definir que es una ED, seleccionar un problema sencillo de variación de algún fenómeno (físico, químico, biológico, económico, etc.) que implique el uso de una ED de primer orden.

A continuación, se declara que las expresiones algebraicas que tratan de representar o modelar problemas físicos, biológicos, químicos, entre otros, para conjeturar soluciones a corto y mediano plazo, se les conoce por el nombre de ecuaciones diferenciales. Luego se dará la definición formal del concepto Ecuación Diferencial, Ecuación Diferencial Ordinaria.

Definición (Elsoltz 1997): Una ecuación que contiene solo derivadas ordinarias de una variable dependiente con respecto a una sola variable independiente se le denomina Ecuación Diferencial Ordinaria. Se representa mediante la expresión:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x) \quad (6)$$

Donde

- x es la variable independiente,
- y depende de x como función de esta,
- y' es la primera derivada de y con respecto a x , lo cual se puede denotar como $\frac{dy}{dx}$
- y'' es la segunda derivada de y como función de x , o lo que es lo mismo $\frac{d^2y}{dx^2}$
- $y^{(n)}$ es la derivada n -ésima de la función y , o sea y derivada n veces, lo cual se puede denotar como $\frac{d^ny}{dx^n}$
- $g(x)$ es una función que depende de x

Posteriormente se definen los conceptos de orden, grado, solución general y la solución particular de una ecuación diferencial. Se analiza el teorema de unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden y primer grado; así como analizar el problema con condiciones iniciales.

A continuación, se propondrá un problema que posee un nivel de dificultad mayor para encontrar la solución. El estudiante puede encontrar el modelo en términos matemáticos, pero

no puede continuar el proceso de resolución, al no disponer de los conocimientos necesarios para poder dar solución al mismo. Siendo necesario la expansión en su clasificación y métodos de resolución. Por otra parte, en las clases, las tareas dirigidas a la fijación comprenderán sistemas de ejercicios, preparados para que el estudiante forme y desarrolle las habilidades matemáticas relacionadas con la elaboración y uso de conceptos, teoremas, procedimientos y análisis de situaciones intra y extra matemáticas.

En esta investigación, se le presta atención a EDO lineales expresada de la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (7)$$

Donde $a_i(x), i = 0, n$ son los coeficientes de las derivadas n-esimas correspondientes, los cuales pueden ser 0, constantes o variables y $g(x)$ es una función que depende de x

Dependiendo $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x), g(x)$, solo de la variable x .

Dentro de las ecuaciones diferenciales lineales, atendiendo al objeto de estudio de la investigación, se distinguen las no homogéneas ($g(x) \neq 0$) y se clasifican en EDOL no homogéneas con coeficientes constantes (todos los coeficientes son constantes) y EDOL no homogéneas con *coeficientes variables* (si algún coeficiente es una función $a_i(x)$ que depende de x , y no es constante).

Inciendo en la Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal no homogéneas con parámetro pequeño, la cual tiene como ecuación:

$$a_n(x) \epsilon y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y = g(x) \quad (8)$$

Atendiendo al orden de la ecuación diferencial (derivada de mayor orden en la ecuación), por lo general se ha establecido el siguiente esquema que expresa la secuencia lógica, interrelación, agrupación o distribución de los conceptos, relaciones y procedimientos y los modos de actuación asociados a la construcción del contenido teórico de las EDOL no homogéneas en el PEA. De este modo se propone estudiar la:

- *Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal no homogéneas de primer orden*

$$a_1y' + a_0y = f(x) \quad (9)$$

- *Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal no homogéneas de segundo orden*

$$a_2y'' + a_1y' + a_3y = f(x) \quad (10)$$

Durante el tratamiento de los anteriores dos tipos de EDOL, se sugiere realizar un trabajo profundo en el desarrollo de estrategia cognitivas y metacognitivas que aseguren en el estudiante:

- Extraer los elementos del problema (datos, relaciones y exigencias), de los conocimientos relacionados con la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y a otros registros de representación semiótica.

Es importante hacer hincapié en el reconocimiento de los términos en el contexto en que se encuentran, lo que permite orientar la interpretación que realice el estudiante, dado el carácter personalógico que posee el acto interpretativo.

- La comprensión de los conocimientos básicos fundamentales sobre el objeto EDO de primer y segundo orden, sus características y métodos de solución.
- Desarrollar habilidades en el método de resolución de ejercicios o problemas que involucran EDOL de primer y segundo orden.

- Realizar un análisis reflexivo del proceso de resolución empleado (por sí mismo, un compañero, o el profesor) antes de determinar la solución; y evaluar su aprendizaje en correspondencia con los resultados obtenidos.

Lo anterior permitirá ir sistematizando los conocimientos y orientar de manera apropiada al estudiante hacia la comprensión de la EDOL con parámetro pequeño de manera general. Es decir, presupone un proceso de aprendizaje que comienza con la formación de las acciones necesarias para apropiarse de los conocimientos y habilidades como paso previo para la resolución de problemas.

Luego se introducirán de manera gradual y en relación con los contenidos anteriores, los objetos de las EDOL no homogénea con parámetro pequeño, partiendo de las EDO de segundo orden conocidas y desarrollando la temática hasta llegar a abordar los aspectos fundamentales de las EDO de tercer orden con parámetro pequeño.

Para las EDOL no homogéneas de segundo orden, se concibe la siguiente estructuración:

1. Coeficientes constantes y parámetro pequeño en la función incógnita.
2. Coeficientes variables y parámetro pequeño en el término sin derivar.
3. Coeficiente constante y parámetro pequeño en la derivada de orden superior.

Se recomienda que, en el diseño de las actividades, se establezca una nueva relación entre la forma en que se enseña la EDOL y la forma que ésta es utilizada en determinado contexto. También, se incorporará la utilización de algún software matemático que le permita el estudio cualitativo de las soluciones para una mayor comprensión de la solución.

Coeficientes constantes y parámetro pequeño en la función incógnita.

En Comet (2018) se describe detalladamente el procedimiento para el análisis de las EDO de segundo orden con parámetro pequeño, llegando a una estimación en cada caso y proponiendo la utilización de software para la estimación del mismo. En esta, además se incluyen ejemplos que muestran la disminución del error a medida que ϵ se acerca a cero. Basados en esta novedosa investigación se propone la alternativa en cuestión, brindándole al estudiante una vía más rápida y eficiente para solucionar problemas de este tipo. El problema de Cauchy correspondiente a estas ecuaciones tendrá la siguiente estructura:

$$\hat{y}_\epsilon''(x) + a_1 \hat{y}_\epsilon'(x) + \epsilon a_0 \hat{y}_\epsilon(x) = 0 \quad (11)$$

$$\hat{y}_\epsilon(0) = y_1$$

$$\hat{y}_\epsilon'(0) = y_2$$

Para introducir este contenido es fundamental partir de los conocimientos previamente adquiridos por los estudiantes, por lo cual se plantea primeramente una situación conocida para luego dar paso a la nueva temática. Esto puede ser partiendo de un problema concreto, que se modele a través de un ED de segundo orden y coeficientes constantes, el cual no presente parámetro pequeño. Además, es importante definir de manera clara y precisa el conjunto de funciones con el que se trabaja y las condiciones del problema de Cauchy en cuestión. Siguiendo el procedimiento descrito en Comet 2018 se puede llegar, a través del Teorema de Convergencia Continua de Elgotz 1977, a que el problema original converge al problema límite (el problema donde el término que presenta el parámetro es eliminado) y estimar una ecuación

para el cálculo del error que se comete al aplicar este procedimiento en un intervalo de $[0, b]$, el problema límite será:

$$y_0''(x) + a_1 y_0'' = 0 \quad (12)$$

Como se puede apreciar en Comet 2018, esta ED de segundo orden puede ser reducida a una de primer orden, facilitando la solución de la misma. Posteriormente se obtiene la siguiente fórmula para la estimación del error cometido:

$$e(\epsilon) = d(\hat{Y}_\epsilon(x), Y_0(x)) = \max_{0 \leq x \leq b} |Y_\epsilon(x)| \quad (13)$$

Donde \hat{Y}_ϵ es la solución analítica del problema original, $Y_0(x)$ la solución del problema límite y Y_ϵ la diferencia entre la solución del problema original y el problema límite.

Para analiza el error es importante que se utilice un software o varios, con los que el estudiante este familiarizado, e implementar un pequeño programa que, teniendo como base esta ecuación dada, calcule el error conociendo los coeficientes, las condiciones iniciales y el parámetro. En Comet 2018 se ha utilizado el Python, el cual constituye un software libre, y se ha implementado el programa anteriormente dicho, el cual permitirá apreciar que tan buena es la estimación para el problema tratado teniendo en cuenta diferentes valores del parámetro.

Coefficientes variables y parámetro pequeño en el término sin derivar.

Para el caso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficiente variable no se tratará a profundizará, si no, que se realizara una pequeña mención a las mismas. Se podrá observar, como estas ecuaciones en específico se tratan de manera similar a las anteriormente analizadas, sin embargo, el cálculo de los coeficientes puede ser muy complejo en ocasiones. El problema de Cauchy homogéneo para este tipo de ecuaciones tiene la forma:

$$\hat{y}_\epsilon(x) + a_1(x) \hat{y}_\epsilon(x) + a_0(x) \hat{y}_\epsilon(x) = 0 \quad (14)$$

$$\hat{Y}_\epsilon(0) = y_1$$

$$\hat{Y}_\epsilon'(0) = y_2$$

Teniendo en cuenta el Teorema de la Convergencia continua anteriormente mencionado se tiene, como problema límite:

$$y_0''(x) + a_1(x) y_0'(x) = 0 \quad (15)$$

Por esta razón se sugiere que al trabajar con estos coeficientes se utilicen programas computacionales que permitan una solución numérica de estas ecuaciones. Es bueno orientar al estudiante correctamente sobre el estudio de esta temática y algunos textos y/o sitios donde encontrarla, sin embargo, esta a su vez puede ser utilizada para que el estudiante desarrolle sus habilidades investigativas y autogestión del conocimiento. Es una buena opción llevar la ecuación diferencial que se desee trabajar a un sistema de ecuaciones y resolverla numéricamente mediante métodos como el método de Runge Kutta para sistemas de ecuaciones diferenciales, para luego continuar con la estimación del error, teniendo en cuenta que, al utilizar este método, así como otros, se está incurriendo en un error.

EDO de segundo orden con coeficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior.

Luego que ya el estudiante tiene los conocimientos para resolver problemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden y ecuaciones diferenciales de segundo orden con parámetro pequeño en el término sin derivar, surge la interrogante. ¿Qué sucede si la ED presenta el parámetro en la derivada de orden superior?

En este caso se debe analizar primeramente si el problema converge al problema límite, para ello es necesario hallar la ecuación complementaria característica con la cual se puede conocer si el problema es regular o no. Recuérdese que anteriormente en esta investigación se definió la ecuación complementaria característica y cuando un problema es regular, teniendo en cuenta Batard 1990. Teniendo en cuenta que el problema se llama regular si la solución de la ecuación complementaria característica es negativa. O sea, si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ o $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$. La solución del problema se llama regular si la solución de la ecuación complementaria característica cumple que: $t = -\frac{a_1}{a_2} < 0$. Teniendo esto se puede realizar un análisis de la convergencia del problema de Cauchy al problema límite y posteriormente de la solución y la estimación del error, como se plantea en Comet 2018. Téngase en cuenta que para ello se deben utilizar conocimientos anteriormente obtenidos como son la Transformada de Laplace y el Producto de Convolución.

Es importante en este caso que el estudiante comprenda que no se puede aplicar el mismo procedimiento, ya que esto no se cumple cuando el parámetro se encuentra en la derivada de orden superior. En este caso, para lograr una mejor comprensión de la problemática, resulta de gran utilidad separar el problema por niveles de dificultad, planteando:

- Plantee el problema límite
- Analice si el problema es regular
- Halle la solución al problema para las condiciones iniciales dadas.
- Estime el error cometido para varios parámetros con la ayuda de un software y analice el comportamiento del mismo.

De manera que al finalizar el análisis del problema el estudiante será capaz de analizar el error que se comete al sustituir el problema de Cauchy por el problema límite. Recuérdese que como la ED de segundo orden presenta el parámetro en la derivada de orden superior, al plantear el problema límite este sería una ED de primer orden, lo cual simplifica su solución. Según las investigaciones realizadas en Comet 2018, al realizar este procedimiento el error disminuye a medida que el parámetro ϵ se acerca a cero. Dado el problema de Cauchy

$$\epsilon a_2 \hat{y}''(x) + a_1 \hat{y}'(x) + a_0 \hat{y}(x) = f(x) \quad (16)$$

Con las siguientes condiciones iniciales

$$\hat{y}_\epsilon(0) = A_0$$

$$\hat{y}_\epsilon'(0) = A_1$$

El error cometido tiene la forma:

$$e(\epsilon) \approx \left| \epsilon \left| \frac{a_2(A_1 - Y_0'(0))}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \right| e^{-\frac{a_0}{a_1}} + \left| \frac{\epsilon^2 a_2^2}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \max_{0 \leq x \leq b} |y_0''(x)| e^{-\frac{a_0}{a_1} b} \right| \quad (17)$$

$$\text{Si } -\frac{a_0}{a_1} > 0, 0$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Si } -\frac{a_0}{a_1} < 0 \\
 e(\epsilon) & \approx \left| \epsilon \left| \frac{a_2(A_1 - Y'_0(0))}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \right| \right| + \left| \frac{\epsilon^2 a_2^2}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \max_{0 \leq x \leq b} |y''_0(x)| \right| \quad (18)
 \end{aligned}$$

Donde $a_i, i = 0,1,2$ son los coeficientes de las derivadas i -ésimas, A_1 es la condición inicial y $Y_0(x)$ es la solución del problema límite, por lo que $Y'_0(0); Y''_0(x)$ son la primera derivada de la solución al problema límite en $x = 0$ y la segunda derivada del problema límite respectivamente.

Como se explica en Comet 2018, el segundo término de la suma en ambas estimaciones del error, son infinitesimales de segundo orden con respecto a ϵ en la práctica el error se puede expresar como el módulo del primer término. En dicha investigación se implementó, para el cálculo del error, un programa en el software libre Python, basado en las ecuaciones obtenidas para la estimación del error. Como se ha mencionado, es bueno que los estudiantes sean capaces de utilizar este tipo de recursos e incluso implementar sus propios programas en los software de su preferencia. Este programa calcula el error conociendo los coeficientes y las condiciones de Cauchy con el cual se realizarán los cálculos necesarios en el ejemplo que se observa en dicha investigación. También es importante que el estudiante pueda apreciar como el error que se comete al resolver el problema a través del método planteado disminuye si $\epsilon \rightarrow 0$. Para ello, en cada ejemplo desarrollado se propone realizar un análisis del error similar al propuesto en Comet 2018, utilizando un software que sea propicio a la carrera y adecuado a su vez a los conocimientos de los estudiantes.

Luego de un estudio exhaustivo y varios ejemplos sobre las EDO de segundo orden con parámetro pequeño, el estudiante estará preparado para profundizar en las EDO de tercer orden con parámetro pequeño, para lo cual se propone la siguiente estructura.

Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal no homogéneas de tercer orden.

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (19)$$

Dentro de estas se analizarán, aquellas en las que aparecen:

1. Coeficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior en el caso que no aparece la función incógnita sin derivar.

$$\epsilon a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' = f(x) \quad (20)$$

2. Coeficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior.

$$\epsilon a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (21)$$

Teniendo en cuenta el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo $[0, b]$, se analizarán, a continuación, las ecuaciones diferenciales de tercer orden lineales no homogéneas con coeficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior. Para esto es necesario el dominio de los conceptos de ecuación complementaria característica (Batard 1990), transformada de Laplace y producto de convolución (Céspedes 1989).

Para ambos casos debe realizarse un análisis detallado teniendo en cuenta el procedimiento llevado a cabo en Comet 2018. Es importante tener en cuenta que para este primer caso mencionado se plantea una reducción de orden en la EDO de tercer orden, llevándola a una

de segundo orden para realizar a partir de ese momento el procedimiento explicado para las EDO de segundo orden, coeficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior. Primeramente se debe determinar la solución general y la estimación del error, teniendo en cuenta las características generales de cada problema, los coeficientes y condiciones iniciales, proponiendo un software para el cálculo de este error estimado, desarrollado en Comet 2018.

Coefficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior en el caso que no aparece la función incógnita sin derivar.

En este caso están concebidos los problemas que conducen a ecuaciones diferenciales con una estructura como la ecuación 20. Es importante el análisis de este tipo de ecuaciones primero, debido a que las mismas tienen gran similitud con las ED de segundo orden y coeficientes constantes en la derivada de orden superior (16). Esto es debido a que como las mismas no presentan término sin derivar, se puede realizar una reducción de orden, tomando $z(x) = y'(x)$, lo cual convierte al problema en una ED de segundo orden y coeficientes constantes en la derivada de orden superior, el cual ha sido analizado con anterioridad. Esta similitud entre ambos problemas propiciará un aprendizaje gradual de los contenidos por parte de los estudiantes, asociando ambos procedimientos.

Una vez realizado el análisis de la convergencia del problema original al problema límite, teniendo en cuenta la ecuación complementaria característica del mismo, se debe realizar un análisis detallado de las soluciones homogéneas, particular y general del problema se puede pasar a la estimación del error siguiendo el procedimiento planteado en Comet 2018.

Una buena forma de que los estudiantes comprendan esta temática es a través ejemplos sencillos en los cuales se establezcan los niveles organizativos de los mismos, propiciando un aprendizaje gradual y organizado, desde lo más sencillo a lo más complejo

Coefficientes constantes y parámetro pequeño en la derivada de orden superior.

El presente apartado tiene el propósito de mostrar, desde el punto de vista práctico, el desarrollo de las EDO tercer orden con coeficientes constante y parámetro pequeño en la derivada de orden superior, que se lleva a cabo en la alternativa para la estructuración del PEA. La resolución de este tipo de ecuaciones en la escuela le brinda al estudiante un mayor conocimiento y permite un mejor manejo y aprovechamiento de sus habilidades ante problemas que conduzcan a EDO con parámetro pequeño. La propuesta se concreta en un ejemplo que muestra la utilización de dichos conocimientos para cada caso y el desarrollo de programas sencillos que faciliten el cálculo del error estimado.

Una vez analizado y ejercitado los casos anteriores entonces los estudiantes tendrán las herramientas necesarias para el análisis y comprensión del problema de Cauchy del tipo

$$\epsilon a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (21)$$

$$\hat{y}_\epsilon(0) = A_0$$

$$\hat{y}'_\epsilon(0) = A_1$$

$$\hat{y}''_\epsilon(0) = A_2$$

En este caso una buena estrategia sería comenzar desde un caso particular, de un problema en específico, para luego generalizar a todas las ecuaciones con la forma anteriormente descrita. Sin embargo, esto también depende de las características que presente el grupo de estudiante y el grado de asimilación y comprensión de los mismos. Téngase en cuenta que se trabaja con el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo $[0, b]$. Además se utilizarán teoremas y conceptos conocidos o trabajados por otros autores, como es el caso del teorema de convergencia continua (Elsgolts, 1977), el concepto de ecuación complementaria características dado por Batard en su tesis doctoral, el concepto de transformada de Laplace y producto convolución (Céspedes 1989), por lo cual es necesario que el estudiante maneje estos conceptos adecuadamente. Finalmente es necesario tener en cuenta, en este caso como en los otros el error estimado cuando se sustituye el problema original por el problema límite y el análisis del mismo a través de un software que facilite dicho procedimiento. Finalmente para estas ED se obtiene como estimación del error, teniendo:

$s_i, i = 1, 2$ Son las soluciones de la ecuación característica del problema límite.

t es la raíz de la ecuación complementaria característica.

Si s_i son negativos

$$e(\epsilon) \approx \left| \epsilon \left| \frac{A_2 - Y_0'''(0)}{(s_2 - s_1)(t - \epsilon s_1)} \right| + \epsilon \left| \frac{A_2 - Y_0'''(0)}{(s_1 - s_2)(t - \epsilon s_2)} \right| \right| + \left| \epsilon^2 b \left| \frac{a_0}{\Delta} \right| \left(\max_{0 \leq x \leq b} |Y'''(x)| \right) (|\epsilon s_2 - t| + |\epsilon s_1 - t|) \right| \quad (22)$$

Si s_i son ambos positivos

$$e(\epsilon) \approx \left| \epsilon \left| \frac{A_2 - Y_0'''(0)}{(s_2 - s_1)(t - \epsilon s_1)} \right| + \epsilon \left| \frac{A_2 - Y_0'''(0)}{(s_1 - s_2)(t - \epsilon s_2)} \right| e^{s_2} \right| + \epsilon^2 b \left| \frac{a_0}{\Delta} \right| \left(\max_{0 \leq x \leq b} |Y'''(x)| \right) (|\epsilon s_2 - t| e^{s_1 b} + |\epsilon s_1 - t| e^{s_2 b}) \quad (23)$$

La estimación del error es útil para saber qué tan buena es la solución obtenida según los requerimientos del problema. Es recomendable comenzar con ejemplos sencillos que permitan al estudiante ir desarrollando poco a poco las habilidades necesarias, además de enfatizar en la importancia de utilizar un software para la estimación del error, el cual puede ser el propuesto Comet 2018 o desarrollado en el aula.

Concepción de las tareas docentes para la enseñanza aprendizaje de las EDOL con parámetro pequeño con el uso de herramientas tecnológicas.

Objetivo. Estructurar el sistema de actividades con el uso de herramientas tecnológicas.

De forma general, la estructuración del PEA de las EDOL no homogéneas en el que se realice la coordinación entre los tres registros y el uso de algún software permite tratar los aspectos teóricos, la representación gráfica de campos de direcciones asociado a una ecuación diferencial, hacer referencia a las tangentes y comparar con gráficos (curvas) de funciones conocidas y/o lugares geométricos que se estudian en la enseñanza precedente (elipses, circunferencias, etc.), el análisis de soluciones cuando no se dispone de una expresión algebraica. Así como mostrar entre otros, algunos ejemplos de ideas erróneas del estudiante que el uso de software ayuda a desterrar, por ejemplo, que los métodos algebraicos de resolución de una EDOL proporcionan la expresión más general de las soluciones.

Esta forma de utilizar el software en las EDO, obliga a proponer tareas de enseñanza aprendizaje muy diferentes a las que se venían planteando anteriormente. Por un lado, se deben considerar tareas con las que el estudiante se familiarice con el uso de los mismos, de tal forma que sea capaz de utilizar de forma fluida este y su sistema de notación. Estas tareas, aunque no tienen un interés especial para las EDO, sin embargo, sirven para que el estudiante sepa utilizar los comandos del software para el estudio de las EDO.

La política educacional cubana está encaminada a elevar la efectividad del proceso docente educativo para aumentar la calidad de la preparación de los especialistas y con menor tiempo de estudio incrementar la eficiencia en los profesores, mejorando los resultados académicos de los alumnos. Por lo tanto, el proceso docente educativo se debe desarrollar sobre bases científicas para alcanzar con mayor eficacia las exigencias que la sociedad le plantea a la educación. (Miqueo 1998). Se propone que al realizar ejercicios relacionados con estos contenidos se vincule la resolución de los mismos con la utilización de software, de manera que le permitan al estudiante la estimación del error obtenido de una manera más eficiente. Al estudiar las ecuaciones mediante las cuales se define el error cometido para cada caso, se puede apreciar, que las mismas en ocasiones pueden ser muy extensas y complejas, de aquí que la utilización de programas basados en dichas ecuaciones (los cuales se explica su funcionamiento en cada tema) para la estimación del error es una opción más viable que la estimación del mismo a mano. A su vez, el estudiante estará implementando, de ser posible, sus propios programas en los softwares de su preferencia, a pesar de que en esta investigación se plantean software para cada temática. Esto facilita el aprendizaje de los estudiantes y propicia un mejor desarrollo de la clase, además, el estudiante da pasos importantes en la vinculación de la resolución de situaciones que conllevan a ecuaciones diferenciales con estas características y las tecnologías, preparándose para resolver problemas de forma independiente y desarrollando habilidades que le permitan una correcta preparación, lo cual le posibilitará un mejor desempeño como futuros profesionales.

La computadora es un método de enseñanza fundamental para el PEA en la actualidad debido a la importancia de la optimización y perfeccionamiento de este proceso. Una de las vías para solucionar este problema es el empleo de la computadora como herramienta de trabajo y como medio de enseñanza.

Los medios de enseñanza computalizados cumplen los siguientes principios pedagógicos:

- Principio de la asequibilidad (de lo fácil a lo difícil)
- Micropartición del contenido.
- Atención diferenciada al estudiante.
- El trabajo independiente.
- Verificación inmediata del aprendizaje.

(Miqueo 1998)

Cada uno de los programas propuestos incrementa la eficiencia y la efectividad del proceso de la estimación del error ya que facilita los cálculos y permite el desarrollo de habilidades de programación, el pensamiento multidisciplinario y la utilización de herramientas computacionales para incrementar la eficiencia del procedimiento matemático.

Análisis y Resultados

Considerando la alternativa didáctica propuesta, se realiza una valoración de la misma a través de talleres de crítica y reflexión. En dichos talleres se pretende colectivizar la propuesta desarrollada para someterla así, al debate y reflexión de los docentes. Esto permite analizar las fortalezas y deficiencias de la alternativa, teniendo en cuenta los criterios, los aspectos en que coinciden y difieren, los docentes. Lo que posibilita valorar la alternativa y fortalecer sus deficiencias. Se realizaron dos talleres durante los meses de septiembre a diciembre del 2021 en los que estuvieron presente los docentes del Departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey, fundamentalmente los docentes pertenecientes al colectivo de disciplina de Análisis Matemático.

Análisis de los talleres de reflexión crítica

Objetivo:

Teniendo en cuenta las características de esta asignatura y el contenido en cuestión, así como el desarrollo de las EDO y las EDO con parámetro pequeño en la Universidad de Camagüey, expuesto con anterioridad primeramente se propone lograr un adecuado conocimiento y manejo del contenido, partiendo de las EDO y teoremas estudiados con anterioridad.

Las funciones que se consideran caracterizan la propuesta que presenta para la estructuración de las EDO con parámetro pequeño son las siguientes:

- **Lógica:** la alternativa constituye la base para la estructuración del contenido referente a las EDO con parámetro pequeño, partiendo de las EDO estudiadas con anterioridad que no presentan dicho parámetro, teniendo en cuenta la vía lógica para la obtención del nuevo contenido.
- **Sistematizadora:** la variante permite la relación de conceptos y procedimientos y construir un nuevo sistema de conocimientos y habilidades, concretándolo en las EDO con parámetro pequeño de segundo y tercer orden.
- **Modeladora:** esta propuesta va desarrollando un modelo de actuación al enfrentarse a este tipo de problemática, convirtiéndose en referencia para la resolución de EDO con parámetro pequeño o en la elaboración de nuevos procedimientos.
- **Desarrolladora:** esta temática ofrece al estudiante ampliar su visión sobre las EDO cuando estas presentan parámetro pequeño en diferentes términos y del contenido correspondiente a las EDO en general, así como método de solución y de estimación del error cometido, como expresar estas ecuaciones y sus resultados adecuadamente.

Esta propuesta parte de la necesidad de una preparación matemática más profunda, que permita la formación de profesionales más preparados, permitiéndole enfrentarse a situaciones problemáticas de mayor complejidad a través de una vía más simple y efectiva. La variante consiste en estructurar el PEA de las EDO de segundo y tercer orden, en su forma esencial, incluyendo en el estudio de las mismas las EDO con parámetro pequeño, y desarrollar de forma representativa todo el sistema de conocimientos y habilidades necesarios asociados a esta. Estas funciones brindan las condiciones necesarias para fundamentar la estructura del contenido de la enseñanza de la Matemática y desde el punto de vista formativo, permitiendo al estudiante la

comprensión y desarrollo de estas EDO. Una vez adquiridos los conocimientos fundamentales los estudiantes serán capaces de enfrentarse a diversas situaciones matemáticas y correspondientes a otras ciencias que anteriormente le resultaban desconocidas o muy complicadas.

El propósito es dotar a los estudiantes de nuevos conocimientos, preparándolos para las diversas situaciones y problemáticas a las que deberán enfrentarse una vez graduados, lo cual les permitirá encontrar vías de soluciones más rápidas y eficientes. Con esta alternativa se profundiza más en las EDO, las cuales son fundamentales en la modelación y resolución de problemas de diversa índole, adaptando el PEA a los nuevos avances tanto científicos como tecnológicos, permitiendo responder a la necesidad de formar cada día profesionales más preparados y capaces.

Conclusiones

El estudio de las EDO no homogéneas sigue centrándose en una comprensión instrumental, trayendo como consecuencia una pobre comprensión por parte de los estudiantes de donde se obtienen las ecuaciones, qué significan desde su funcionalidad matemática, y cómo se aplican a la modelación de diferentes fenómenos de la ciencia (Arslan, 2010).

Una variación de esta concepción debe propiciar que la ejercitación, la profundización, sistematización y aplicación constituyan realmente momentos que propicien que la comprensión de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades matemáticas, se logren de forma integrada, desde el principio a partir del objetivo que se aspira (resolución de problemas). Otro momento importante es el que se ocupa de la construcción de los conceptos, teoremas y procedimientos que conforman el sistema de conocimientos y habilidades como componentes imprescindibles para poder resolver los problemas derivados del problema esencial. Permitiendo frente a un grupo representativo de problemas, la búsqueda de la solución de cada tipo de ecuación según el grado y condiciones iniciales, a partir de reflexiones lógicas, indagando los conceptos que intervienen, sus relaciones, y a través del trabajo heurístico y algorítmico.

Referencias

- ABAMBARI, M. MACHADO, E. Modelo didáctico de la evaluación de la competencia solucionar problemas en la Educación Superior. **Transformación**, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, 2015.
- AKHMETOV, R. G. Asymptotic behavior of the solution to a convection-diffusion problem with bulk chemical reaction in the wake of a particle. **Computational Mathematics and Mathematical Physics**. Vol 46, pp 796–809, 2006
- ALVAREZ, M. **Relación entre geometría sintética y analítica y TIC's: Análisis matemático-didáctico de una actividad**. Tesis. Universidad Nacional de General Sarmiento. Aguirregabiria, J, 2014.
- BATARD, L. F. Análisis de la convergencia de las Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, lineales y no homogéneas con parámetro pequeño. **Revista Ciencias Matemáticas**. Vol XI. No 2. La Habana. Cuba, 1990.
- BATARD, L. F. **Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y el problema de Riemann con parámetro pequeño**. Tesis (Doctorado) UCLV. Santa Clara. Cuba. 1990

- BLAS, F. E. **Perspectiva didáctica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, mediante la integración de marcos algebraico, geométrico y numérico.** Tesis Universidad Nacional de Trujillo. Facultad de ciencias Físicas y Matemáticas, 2014.
- BOGOLIOBOV, N.N. **On Some Statistical Methods in Mathematical Physics.** Izv.vo Akademiia nauk Ukrainskoi SSR, Kiev. 1945
- CALLA, A. **Una situación didáctica para la enseñanza de la derivada, en el segundo ciclo de la carrera de ingeniería en una Universidad Privada de Lima.** Tesis. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. Perú: Lima, 2017.
- CAMUNGA, A. BATARD, L. Desarrollo de habilidades para la selección del método más adecuado para la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior. **Revista Conrado**, 13(58), 82-88. Recuperado de <http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>, 2017.
- CELESTINO, J. **Estrategia didáctica basada en la resolución de problemas para el tratamiento de los teoremas matemáticos en la disciplina Análisis Matemático** Tesis (Doctorado). Cuba: UCLV: Santa Clara, 2015.
- CHACON, M. **Estrategia didáctica para fortalecer la competencia resolución de problemas en estudiantes de ingeniería de un curso de ecuaciones diferenciales de una universidad privada.** Tesis (Maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga-UNAB, 2021.
- COLLANTE, A. **Un estudio de la Ecuación Diferencial Ordinaria con estudiantes de Ingeniería Mecánica mediante una situación problema.** Tesis (Maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú, 2019.
- COMET, A. **Estimación del error cometido en la simplificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de segundo y tercer orden.** Tesis. Cuba: UCLV, Santa Clara, 2018.
- CRISOSTOMO, E. **Idoneidad de los procesos de estudio del cálculo integral en la formación de docentes de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y del conocimiento profesional.** Tesis (Doctorado). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. ISBN: 978-84-9028-374-5, 2012.
- CUETARA, Y. **Alternativa didáctica para el proceso de enseñanza, aprendizaje de la estadística en el décimo grado de la Educación Preuniversitaria.** Tesis de (Doctorado). Universidad de Matanzas. Cuba. ISBN 9789591634320, 2017.
- ELSGOLTZ, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo variacional.** Segunda edición. Editorial Mir. Moscú, 1977
- ENRIQUE, F. **Una concepción didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística en la formación inicial del docente de matemática.** Tesis (Doctorado). Universidad de ciencias pedagógicas. Cuba: La Habana, 2016.
- ESCALONA, M. (2011) El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. Su concreción en las carreras de ingeniería en la Universidad de Holguín. **Revista Iberoamericana de Educación.** No. 54/4. ISSN: 1681-5653.
- FONSECA, J. ALFARO, C. El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. **Revista Educación**, vol. 42, núm. 2. Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 2018.
- GARCIA, F. BARQUERO, B. FLORENSA, I. BOSCH, M. Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. **Avances de Investigación en Educación Matemática.** 15, 75 – 94, 2019.
- GARCÍA, O. **Metodología orientada al tratamiento del contenido biodiversidad en la enseñanza de la biología en secundaria básica.** Tesis (Doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Blas Roca Calderío. Cuba: Manzanillo, 2013.
- GIBERT, E. **Una alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de la asignatura Matemática en la Educación Secundaria Básica** Tesis (Doctorado) Universidad de Ciencias Pedagógicas: Enrique José Varona. Cuba: La Habana, 2012.
- GOERING, H.; FELGENHAUER, A.; LUBE, G.; ROOS, H. G. y YOBISKA, L. **Singularly perturbed differential equations.** Akademie-Verlag. Berlín, 1983

- GORDILLO, W. **Análisis de la comprensión sobre la noción antiderivada en los estudiantes universitarios.** Tesis (Doctorado). Universidad de Los Lagos. Chile: Santiago. 2015.
- GUERRA, M. **Diseño, implementación y evaluación de una descomposición genética de los procesos y conceptos de la noción de ecuación diferencial de primer orden.** Tesis (Doctorado) Universidad autónoma de Barcelona, 2002
- GUZMAN, P. L. **Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros** Tesis (Maestría). Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Mexico, 2016.
- HENAO, S. **La constitución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como disciplina de la matemática: Un análisis histórico-epistemológico.** Tesis (Maestría) Universidad Autónoma de Guerrero. México, 2016.
- IBARRA, E. SANGUEDOLCE, J. NABARRO, S. **Ecuaciones Diferenciales (Serie didáctica)** Universidad Nacional de Santiago del Estero: Facultad de Ciencias forestales. E-Book ISBN 978-987-1676-25-5, 2005
- III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (III GIDAM 2012-SEIEM).** Salamanca, 2012.
- ILEA, M. TURNEA, M. AROTARIT, D. y TOMA, C.M. Differential equations with small parameter with applications in radioimmunotherapy. **Rev Med Chir Soc Med Nat Iasi.** pp937-42, 2010.
- INFANTE, S. **Métodos en diferencias finitas no estándar para la educación de Langevin.** Tesis (Master) Cimat, 2011.
- JOSÉ-JOQUIM, A. **Estrategia metodológica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la Escuela Superior Politécnica de Malanje.** Tesis (Maestría) Universidad de Las Villas. Cuba: Santa Clara, 2014.
- KALAS, J. Periodic solutions of Lienard–Mathieu differential equation with a small parameter. **Published Online:** <https://doi.org/10.1515/gmj-2017-0001>, 2017.
- KAMENSKII, M.; PERGAMENCHTCHIKOV, S. QUINCAMPOIX, M. Secondorder differential equations with random perturbations and small parameters. **Published online:** <https://doi.org/10.1017/S0308210516000354>, 2017.
- KAMOOCKI, R. MAJEWSKI, M. On the Existence and Continuous Dependence on Parameter of Solutions to Some Fractional Dirichlet Problem with Application to Lagrange Optimal Control Problem. **Journal of Optimization Theory and Applications.** Vol 174, pp 32–46, 2017.
- MERCEDES, A.; PEREZ, O.; TRIANA, B. Propuesta didáctica basada en múltiples formas de representación semiótica de los objetos matemáticos para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial. **Revista Academia y Virtualidad**, 10, (2), 20-30, 2017.
- MISHCHENKO, F. **Differential Equations With Small Parameters and Relaxation Oscillations.** Editor Springer US, 2012.
- MOMBO, F. (2014) **El proceso de enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias: una estrategia didáctica con integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Cabinda.** Tesis (Doctorado) Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”. ISBN 959-16-2564-9. La Habana, 2014.
- MORALES, A. CORDERO, F. La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.** 17 (3): 319-345. DOI: 10.12802/relime.13.1733, 2011.
- NÁPOLES, J. NEGRÓN, C La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto **Xixim.** **Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas.** <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/>, 2002
- OLIVER, J. **Estrategia didáctica del proceso de formación matemática del tecnólogo de la salud.** Tesis (Doctorado). Universidad de Sancti Spiritus "José Martí Pérez".Cuba, 2015.

- PÉREZ, S. GUILLÉN, G. Planteamiento de un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la geometría en secundaria a través de diferentes enfoques. Utilización de un curso-taller como técnica para la obtención de datos. Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. **XIII Simposio de la SEIEM. Santander**, 2009.
- PONTRYAGIN, L. S. y RODYGIN, L. V. Periodic solution of a system of ordinary differential equations with a small parameter in the terms containing derivatives. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. Vol 132. no 3. pp. 537–540, 1960
- REYNALDO, R. GONZALEZ, G. Caracterización filosófica, didáctica, psicopedagógica y metodológica del proceso de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas matemática y ciencias naturales y su expresión en la dinámica interdisciplinar en la educación primaria cubana. **Revista Órbita Pedagógica**. Vol. 2. No. 2, 2015
- RIOS, V. MILLONEDO, R. QUISPITUPA, M. Influencia del software MatLab en el aprendizaje de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en los estudiantes de ingeniería. Universidad Alas Peruanas Puerto Maldonado. **Revista CEPROSIMAD**. Vol. 05 (2): 24-38. ISSN 2310-3485, 2017.
- RODRÍGUEZ, M. **Secuencias didácticas para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas basadas en los estilos de aprendizaje**. Tesis (Doctorado). Universidad Nacional de San Agustín. Perú: Arequipa, 2017.
- ROMERO, S. MORENO, F. RODRIGUEZ, **Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's)** Universidad de Huelva Escuela Politécnica Superior de La Rábida, 2001.
- SAAVEDRA, H. **Concepción teórico-metodológica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos científicos en escolares sordos de segundo ciclo**. Tesis (Doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. Cuba: La Habana, 2015.
- SAFARYAN, R. G. y SARAFYAN, V. V. Asymptotic behavior of the solution of the Dirichlet problem for a differential operator with a small parameter. **Ukr. Mat. Zh.** Vol 36, no 6, pp. 734 – 737, 1984
- TIJONOV, A. N. E System of differential equations containing small parameter in the derivatives. **Mat. Sb.** (N.S.), Vol 31(73), no 3, pp. 575–586, 1952
- VERDECIA, S. **Tareas docentes para el desarrollo del trabajo independiente en la asignatura Práctica Agrícola I de la carrera de Ingeniería en Agronomía**. Tesis (Maestría) Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, 2012.
- ZILL, D. **Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado**. Sexta edición. ISBN 968-7529-21-0. Mexico. Traducción del libro “Differential Equations with Modeling Applications”. Publicado por Brooks/Cole Publishing, 6th ed. ISBN 0-534-95574-6, 2006

Autores:

Aisseli Comet Marrero

Licenciada en Matemática por la Universidad Central de las Villas Martha Abreu, Cuba. Actualmente es profesora de la Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte. Tiene experiencia en la enseñanza de la matemática.

Correo electrónico: acomet96@gmail.com

ORCID: [0000-0001-8023-3143](https://orcid.org/0000-0001-8023-3143)

Lorgio Félix Batard Martínez

Licenciado en Matemática por la Universidad Central de las Villas Martha Abreu, Cuba. Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas por la Universidad Central de las Villas Martha Abreu, Cuba. Actualmente es profesor emérito de la Universidad Central de las Villas Martha Abreu. Tiene experiencia en la enseñanza de la matemática.

Correo electrónico: lorgio@reduc.edu.cu

ORCID: 0000-0003-1309-8310

Cila Mola Relles

Doctora en Ciencias Pedagógica y Master en Enseñanza de la Matemática. Es profesora Titular y Jefa del Departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey. Desarrolla investigaciones en las líneas de Didáctica de la Matemática y formación continua del docente. Ha colaborado en la superación del claustro profesoral en varias universidades de la República Dominicana.

Correo electrónico: cila.mola@reduc.edu.cu

ORCID: [0000-0001-7755-3605](https://orcid.org/0000-0001-7755-3605)

Como citar este artículo:

MARRERO, Aisseli Comet; MARTÍNEZ, Lorgio Félix Batard; RELLES, Cila Mola. Alternativa Didáctica para pa Estructuración pel Proceso pe Enseñanza-Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales No Homogéneas con Parámetro Pequeño. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Nro. 1;** 527 – 551; enero, 2023.
DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p527-551.id1307