Paradigma

Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
ISSN 1011-2251 ISSN 2665-0126
Volume XLV, Enero/Junio de 2024
Edición Normal, Número 1
doi 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024008.id1337

Análise preliminar e *a priori:* o caso dos Tabuleiros Hexagonais e a Sequência Tetranacci

Francisco Regis Vieira Alves[1] **Paula Maria Machado Cruz Catarino**[2]
Ana Paula Florêncio Aires[3]

Resumo

Os autores de livros de História da Matemática dedicam tempo considerável na discussão de elementos alegóricos, cujo viés de curiosidade relega e determina um papel secundário do saber matemático e seu intrínseco caráter epistemológico-evolutivo. Diante deste cenário, o presente trabalho aborda a relação de sequências numéricas e a noção de Tabuleiro. A noção de Tabuleiro costuma se recorrentemente empregada e generalizada em uma literatura especializada da pesquisa em Matemática Pura, todavia, de difícil acesso ao professor de Matemática em formação. Por conseguinte, com aparo de determinados pressupostos de uma Engenharia Didática de Desenvolvimento e Formação (EDDF), aliada com a Teoria das Situações, o trabalho apresenta um itinerário de abordagem e a descrição de duas situações didáticas envolvendo a noção de Tabuleiro hexagonal e a Sequência Tetranacci. Por fim, indicamos alguns elementos capazes de promover um viés de regularidade e de eventual aplicação em sala de aula, visando o incremento de conhecimentos.
Palavras-chave: História da Matemática, Formação de professores, Engenharia Didática de Desenvolvimento e Formação, Tabuleiro, Sequência Fibonacci e Tetranacci.

Preliminary and *a priori* analyses: the case of hexagonal boards and the Tetranacci sequence

Abstract

The authors of History of Mathematics books dedicate considerable time to the discussion of allegorical elements, whose bias of curiosity relegates and determines a secondary role of mathematical knowledge and its intrinsic epistemological-evolutionary character. Given this scenario, the present work addresses the relationship between numerical sequences and the notion of Board. The notion of Board is often used and generalized in a specialized literature of research in Pure Mathematics, however, difficult to access for Mathematics teachers in training. Therefore, with the support of certain assumptions of a Didactic Engineering of Development and Training (EDDF), allied with the Theory of Situations, the work presents an itinerary of approach and the description of two didactic situations involving the notion of Hexagonal Board and the Sequence Tetranacci. Finally, we indicate some elements capable of promoting a bias of regularity and eventual application in the classroom, aiming at increasing the teacher's knowledge about the theme “recurrent numerical sequences and Boards”.
Keywords: History of Mathematics, Teacher training, Didactic Development and Training Engineering, Board, Fibonacci and Tetranacci sequence.

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), Fortaleza, Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br
[2] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal. E-mail: pcatarino23@gmail.com
[3] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal. E-mail: aaires@utad.pt

Análisis preliminar y *a priori:* el caso de los tableros hexagonales y la secuencia Tetranacci

Resumen

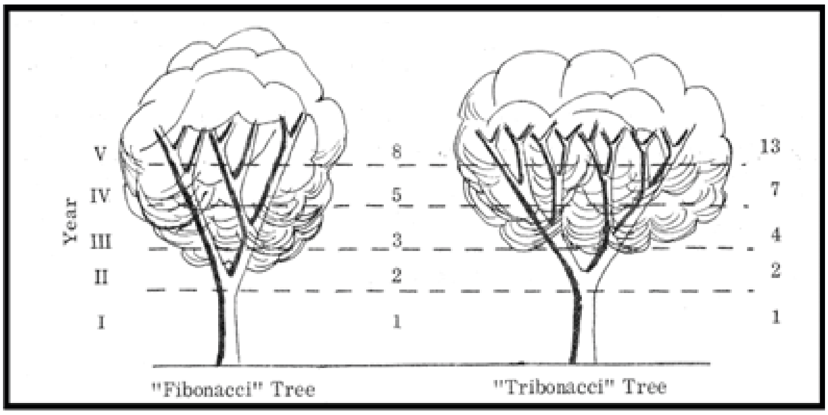
En este trabajo presentamos una síntesis de la reconstrucción del significado global de la derivada que hemos realizado con la ayuda de algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Así mismo, caracterizamos el significado pretendido en el currículo de Bachillerato a partir de las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel. La comparación de ambos significados (global y curricular) permite valorar la idoneidad epistémica del significado curricular. La metodología de análisis didáctico aplicada para el caso de la derivada en el currículo (Plan de Estudios y libros de texto) mexicano se puede aplicar a otros contenidos y contextos. La información aportada puede ser útil para el profesor de matemáticas de bachillerato ya que revelamos algunos sesgos en los significados de la derivada privilegiados por el currículo que podrían ser evitados para mejorar la enseñanza de la derivada.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Formación de profesores, Ingeniería de Formación y Desarrollo Didáctico, Junta, Secuencia de Fibonacci y Tetranacci.

INTRODUÇÃO

Deparamos nos compêndios de História da Matemática (HM) um expediente que costuma colocar em evidência um caráter ou viés de curiosidade, anedótico e/ou outros elementos que envolvem uma cultura científica que não se esforça em explicar os devidos vínculos com o saber cientifico e matemático, basta lembrar os casos de manifestação, por exemplo, da sequência de Fibonacci na Botânica (Ver Figura 1). Por outro lado, em nossos trabalhos temos assinalado (ALVES, 2017; 2018; ALVES e CATARINO, 2022) outra perspectiva que busca evidenciar a necessidade de compreensão, por parte do professor de Matemática, de um processo matemático, epistemológico e evolutivo do saber matemático. De modo particular, temos discutido o caso do processo evolutivo em torno da noção de sequências (generalizadas) numéricas recorrentes que, na Figura 1, conseguimos identificar os padrões numéricos correspondentes com a sequência de Fibonacci e Tribonacci.

Figura 1: Exemplos de manifestações da sequência Fibonacci e Tribonacci na natureza



Fonte: Feinberg, 1963, p. 70

Cabe assinalar que, do ponto de vista histórico, a Sequência Tribonacci foi descoberta em 1963, por M. Feinberg, se baseia na seguinte definição formal que indicamos a seguir.

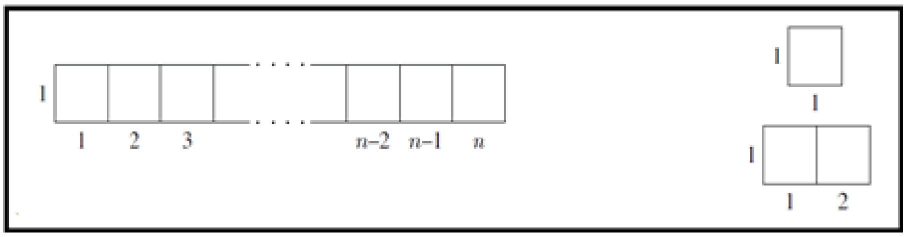
Definição 1: A sequência Tribonacci é definida pela seguinte relação . (FEINBERG, 1963)

Alguns de seus valores iniciais podem ser expressos por: 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24 44,.... Por outro lado, constatamos um exemplo de evolução dos conceitos matemáticos que atestam, por vezes em exemplos particulares, sobre o caráter não estático e evolutivo do saber matemático. Com efeito, aproximadamente uma década depois, em um artigo, Hoggatt e Bicknell (1973) introduzem a generalização do modelo de recorrência indicado a seguir.

Definição 2: A sequência Tribonacci polinomial é definida pela seguinte relação . (Hoggatt e Bicknell, 1973).

Não obstante, a partir de uma compreensão e preocupação com um cenário de formação e de aprendizagem do professor de Matemática (inicial ou continuada) se mostra imprescindível o acesso a determinados conteúdos ou abordagens que revelam um caráter não estático e de evolução do saber matemático, inclusive, seu estádio atual. (ALVES, 2022a). Para exemplificar, na Figura 2, podemos identificar um tabuleiro[4] unidimensional, com dimensões e, logo ao lado direito, um quadrado e um dominó . Por intermédio de um expediente heurístico, que pode ser comparado com a natureza do problema da reprodução de pares de coelhos que popularizou o trabalho de Leonardo Pisano (1170 – 1250), os autores Benjamin e Quinn (2003b) perguntam: De quantas formas podemos ladrilhar e, também, preencher um tabuleiro de comprimento , constituído com células de dimensão , utilizando-se apenas as quadrados e os dominós ?

Figura 2: Benjamin e Quinn (2003b) introduzem o problema dos tabuleiros relacionados com a sequência numérica recorrente de Fibonacci



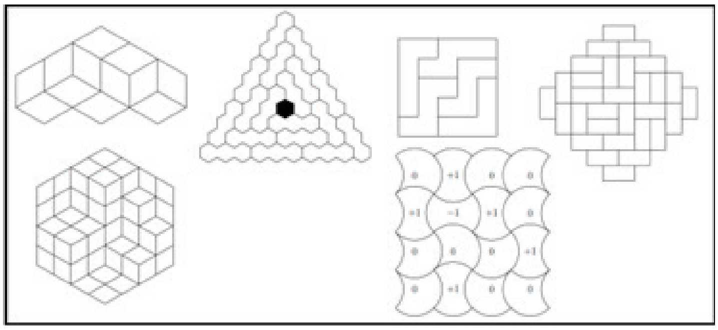
Fonte: Benjamin e Quinn, 2003b, p. 12

De forma surpreendente, ao considerarem o termo que representa a quantidade de formas diferentes de ladrilhar um Tabuleiro, então determinam a relação com representando, de forma precisa, a sequência de Fibonacci. Por outro lado, com o amparo da Figura 3, ilustramos ainda as considerações de Propp (2015) que fornece inúmeros exemplos de

[4] Assinalamos uma diferença a noção de Tabuleiro, segundo o contexto de jogos de Tabuleiro e de Matemática da noção abstrata de Tabuleiro, considerando o cenário de pesquisa e de uma abordagem combinatória para sequências numéricas generalizadas. No primeiro contexto, resgatando o pensamento de Kamii (1982), o interesse em ensinar a noção de números e suas propriedades possui profunda origem no pensamento de Piaget. No caso da noção de Tabuleiro, abordagem combinatória para sequências numéricas, o interesse maior se destina à aprendizagem do adulto e, de modo particular, a aprendizagem do professor de Matemática.

outros Tabuleiros, de formas variadas e que, em certos casos, se relacionam com outras sequências numéricas recorrentes e envolvem pesquisa em Álgebra Enumerativa.

Figura 3: Descrição de formas e construções variadas de Tabuleiros relacionados com problemas em Álgebra Enumerativa.



Fonte: Propp, 2015, p. 39

Diante do cenário anterior, indicaremos o seguinte questionamento norteador: Como estruturar um conjunto de situações didáticas com o escopo de proporcionar ao professor de Matemática, em formação inicial, um entendimento sobre o caráter matemático - evolutivo da sequência numérica recorrente de Fibonacci e suas relações com a noção de Tabuleiro? O questionamento anterior proporcionar formularmos os seguintes objetivos específicos: a) Identificar um cenário histórico, epistemológico e evolutivo sobre a sequência de Fibonacci; b) Compreender as relações entre a noção de Tabuleiro e algumas formas generalizadas da sequência de Fibonacci; c) Descrever um conjunto de situações envolvendo elementos da pesquisa atual em torno da noção de Tabuleiro, todavia, com o intuito de torná-las acessíveis e transmissíveis aos professores, sob um viés de recurso pedagógico.

Antes, porém, assinalamos os elementos estruturantes e organizações dos objetivos específicos devem se amparar na Engenharia Didática de Desenvolvimento e Formação (EDDF) que, de acordo com Perrin-Glorian (2011), desde o seu estádio de nascedouro, sob a influência de vários didatas e pesquisadores dos IREM (*L´Institut de Recherche sur l´Enseignement dês Mathématiques*) das escolas normais (école normale) e dos IUFM (*Instituts Universitaires pour la Formation des Maîtres*), podíamos identificar, de forma expressiva, uma preocupação com “situações produzidas por intermédio da Engenharia Didática para pesquisa, muitas vezes, para servirem como um meio de construir situações de formação (inicial ou continuada)” (PERRIN – GLORIAN, 2011, p. 65). Por intermédio de um interesse semelhante, nas seções subsequentes, indicaremos alguns pressupostos aplicados e originados da vertente francesa da Didática da Matemática. (ARTIGUE, 2020).

ANÁLISES PRELIMINARES: TABULEIROS HEXAGONAIS E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI, TRIBONACCI, TETRANACCI, ETC..

Decerto que, tendo em vista o interesse pelo desenvolvimento de determinadas fases de uma Engenharia Didática, com maior interesse pela formação docente, empregaremos determinadas noções familiares e originadas dos estudos em Engenharia Didática. De modo especial, restringir-nos-emos aos momentos de Análises preliminares, análise *a priori* e a concepção de situações didáticas, com o amparo de um clássico binômio, que envolve a utilização da Engenharia Didática aliada com a Teoria das Situações (ARTIGUE, 2011).

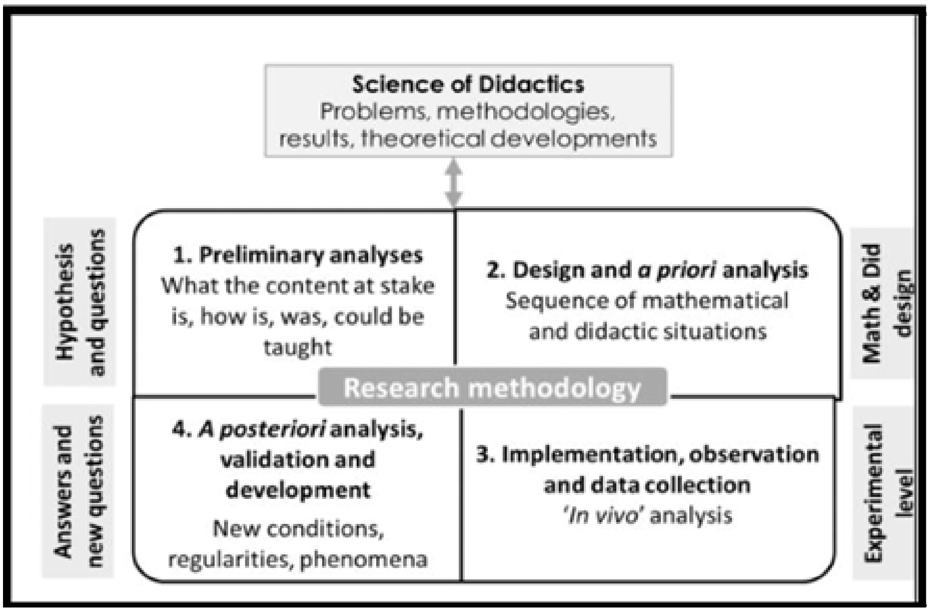
Depois de décadas de uma tradição dos estudos amparados pelos pressupostos estabelecidos pela utilização do binômio ED – TSD sabemos que as análises preliminares "costumam incluir três dimensões: análise epistemológica do conteúdo matemático em jogo, análise das condições e condicionantes institucionais, análise do que a pesquisa didática oferece para apoiar o projeto" (ARTIGUE, 2020, p. 33). Não obstante, nos deteremos ao exame de uma análise epistemológica do conteúdo matemático em jogo. Ademais, quando consideramos a etapa de concepção e de análise *a priori*, consideramos um conjunto de elementos que independem de um quadro de referência empírica particular e que antecedem o eventual momento de uma eventual experimentação. Assim, dois elementos ou categorias devem ser evidenciadas nessa etapa, de acordo com Almouloud (2007, p. 172), a saber: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido.

Na figura seguinte buscaremos situar o cenário de nossas ações que envolvem apenas as etapa 1 e 2 de uma Engenharia Didática. Outrossim, desde que empregamos os pressupostos introduzidos por Perrin-Glorian (2011), tendo em vista um maior interesse pela formação inicial e da concepção de recursos para o professor de Matemática, em formação inicial, assinalamos que, embora com viés essencialmente teórico, recordamos um primeiro nível objetivando um público constituído de professores, segundo Perrin-Glorian (2019).

> Trata-se de testar a validade teórica das situações no nível epistemológico e cognitivo e identificar as escolhas essenciais de Engenharia, o que é essencial porque é fundamental deixar margem de manobra aos professores, ao mesmo tempo em que lhes indica os fundamentos da Engenharia que possibilitam construir com os alunos o significado dos conceitos ensinados. (PERRIN – GLORIAN, 2019, p. 12).

Na figura 4 resgatamos um esquema mnemônico que Artigue (2020) resignifica a partir de um trabalho de Barquero e Bosh (2015). Artigue (2020) interpreta com amparo do binômio clássico empregado em pesquisa "Engenharia Didática – Teoria das Situações".

Figura 4: Fases de uma Engenharia Didática associada com a TSD

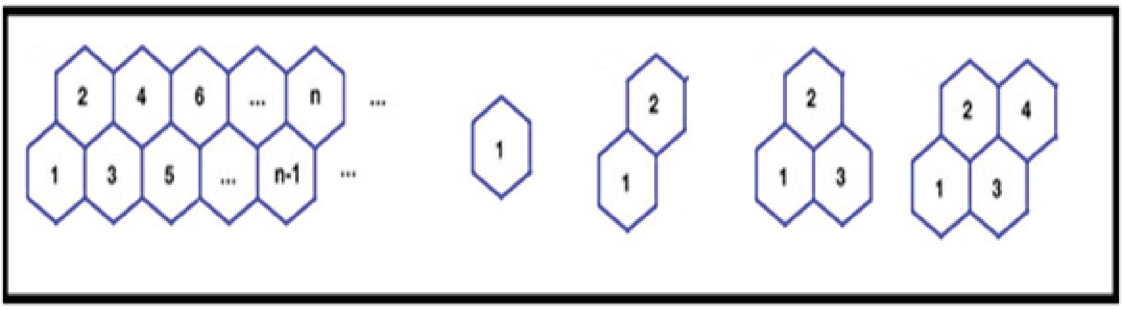


Fonte: Artigue, 2020, p. 21

Com o interesse de compreender um componente epistemológico e evolutivo sobre a noção de Tabuleiro e de responder, pelo menos de forma parcial, os dois questionamentos iniciais, examinaremos um conjunto de trabalhos, predominantemente artigos científicos que, de modo recorrente, possuem uma circulação e acesso a um público restrito e especializado de pesquisadores e matemáticos profissionais. No conjunto dos trabalhos examinados, de forma resumida, podemos identificar trabalhos que empregam a noção de tabuleiros unidimensionais (Ver Figura 2) ou de dimensões 1 x n, 2 x n, 3 x n que evidenciam relações com a sequência de Fibonacci, sequência de Pell e a sequência de Jacobsthal. (Benjamin e Quinn, 1999; 2003a; 2003b). Em outros trabalhos deparamos as relações com da sequência de Lucas e o Tabuleiro circular (Benjaminn e Walton, 2009). Em outros casos, identificamos Tabuleiros de formatos variados, como o Tabuleiro em 'L' estudado por Tauraso (2004).

Diante de um cenário que confirma um processo evolutivo e de generalização de inúmeras propriedades derivadas via Tabuleiro, por exemplo, da sequência de Fibonacci, examinaremos o caso dos tabuleiros hexagonais (Došlić e Podrug, 2022), cujas células regulares hexagonais recordam propriedades discutidas na literatura e que relacionam regularidades na construção das abelhas com Fibonacci (Huntley, 1970). No caso do Tabuleiro hexagonal, formulado por Ziqian e Dreden (2019), podemos perceber que determinadas relações com a sequência Tribonacci e a Tetranacci, que envolvem generalizações da sequência de Fibonacci. Coates *et al*. (2022), por exemplo, envolvem uma configuração com células hexagonais e dos arranjos critalográficos simétricos. (Ver Figura 5).

Figura 5: Descrição de um Tabuleiro hexagonal

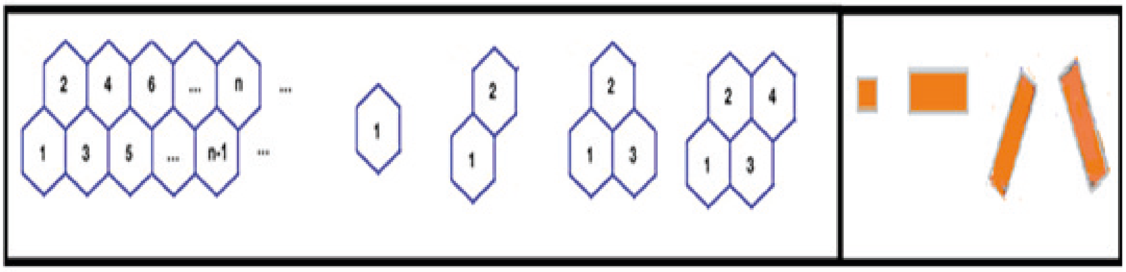


Fonte: Ziqian e Dresden, 2019, p. 5

ANÁLISES *A PRIORI*: TABULEIROS HEXAGONAIS E A SEQUÊNCIA DE TETRANACCI

Vamos considerar o seguinte tabuleiro constituído de células hexagonais. Com amparo do trabalho de Ziqian e Dresden (2019). No lado direito da mesma figura, podemos verificar alguns casos particulares, envolvendo n = 1, 2, 3, 4 células hexagonais. A seguir, na figura seguinte, podemos visualizar: um quadrado, um dominó horizontal, um dominó inclinado à esquerda, um dominó inclinado à direita (todos na cor laranja). (Ver Figura 6).

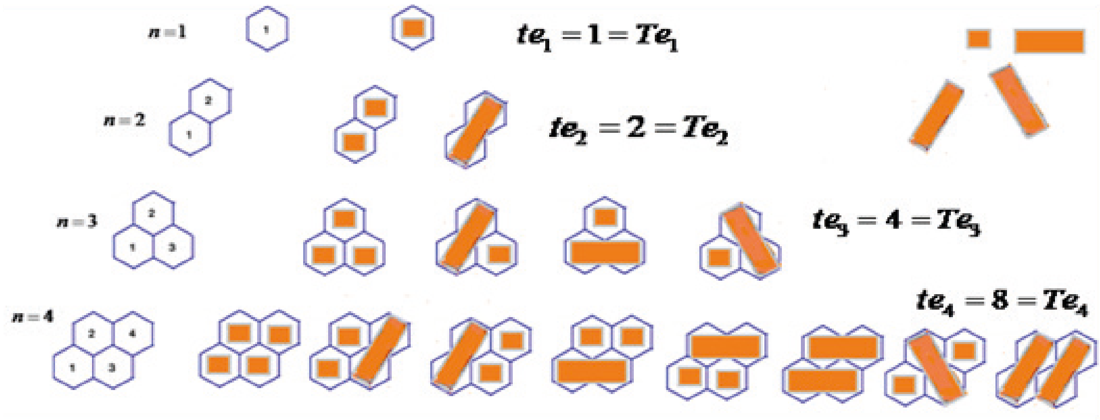
Figura 6: Descrição de um Tabuleiro hexagonal



Fonte: Ziqian e Dresden (2019, p. 3)

Em seguida, consideraremos os casos particulares e, com o arrimo da Figura 7, descrevemos alguns casos que não são pormenorizadamente discutidos no trabalho de Ziqian e Dresden (2019). Com efeito, visualizamos os casos particulares envolvendo n = 1, 2, 3, 4 células hexagonais. Um argumento, preliminarmente heurístico, todavia, *standard* em Matemática Pura, envolve descrever uma associação ou regra de equivalência dos ladrilhos com um correspondente sistema matemático notacional. Por conseguinte, ainda na mesma figura, para efeito notacional, para o caso n = 0, estabeleceremos inicialmente que $te_0 = 1$.

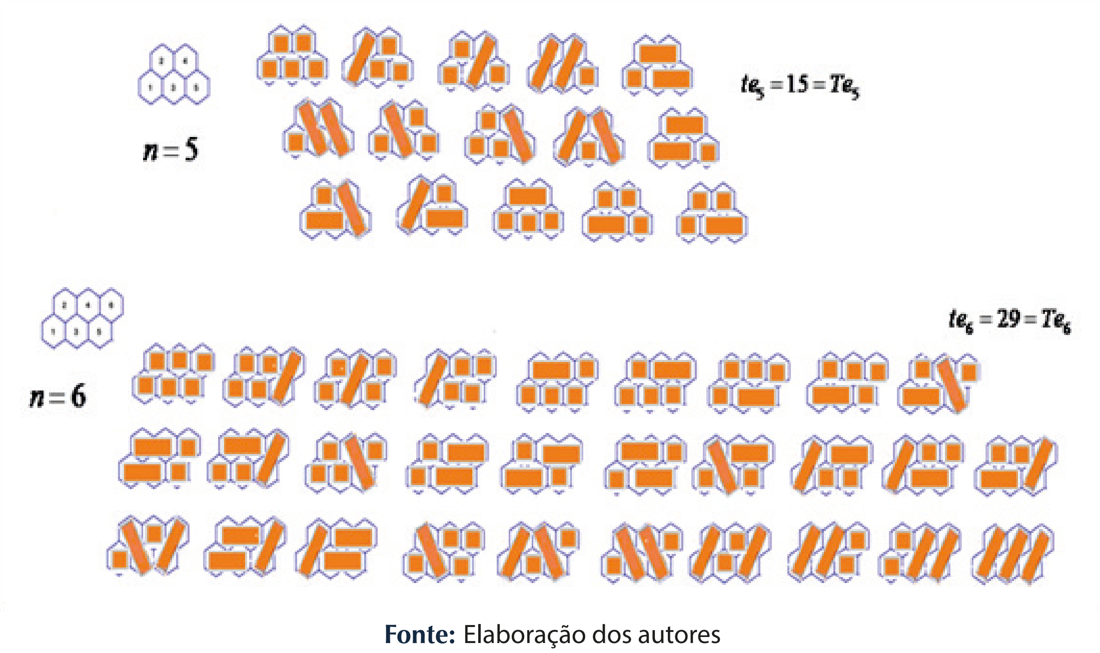
Figura 7: Descrição dos casos iniciais com ladrilhos (n = 1, 2, 3, 4) e do Tabuleiro hexagonal e a convenção de um sistema matemático notacional (Elaboração dos autores).



Fonte: Elaboração dos autores

Em seguida, repetimos a estratégia proposta por Ziqian e Dresden (2019) para construir os casos subsequentes, que indicamos para os valores particulares n = 5, 6.

Figura 8: Descrição dos casos iniciais com ladrilhos n = 5, 6, o Tabuleiro hexagonal e a elaboração de um sistema notacional para a sequência Tetranacci



Fonte: Elaboração dos autores

Antes de iniciarmos a seção subsequente, cabe assinalar, que a Sequência Tetranacci é indicada pelo conjunto numérico: 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, ... (OEIS A000078)[5](*). Agora, com o amparo das figuras 7 e 8, podemos constatar as relações numéricas e identificar que, a partir da descrição dos ladrilhos anteriores conseguimos determinar, de modo preciso, cada termo presente na Sequência Tetranacci, convencionando que te_0! Nas seções

5 A Enciclopédia Online de Sequências de Inteiros (*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences - OEIS*) se constitui como uma extensa base de dados na Internet que registra inúmeras informações sobre sequências de números inteiros, com livre acesso na *Internet*. Para o professor de Matemática interessado, basta o usuário inserir alguns elementos da sequência ou elementos textuais, e recebe de volta possíveis sequências. Cada sequência particular, como uma etiqueta, possui uma identificação particular como, por exemplo (A000045) – números de Fibonacci. (site: https://oeis.org/)

subsequentes desenvolveremos uma ação que costuma desempenhar um papel decisivo em qualquer pesquisa com interesse no ensino de Matemática e, de modo especial, no interesse na formação inicial de professores de Matemática. Não obstante, assinalamos posição concorde com Brousseau (2004, p. 244) quando explica que transmitimos e também ensinamos ¨modelos e uma modelização, de modo semelhante ao processo científico, acrescido de determinadas justificativas que transformam esse ensino em uma verdadeira formação epistemológica”.

Nesse contexto, o papel das representações surge no sentido de um meio de provocar/estimular determinada aprendizagem e constituem um meio de ensino e de amparo para um processo de transposição didática (CHEVALLARD, 1991). Isso posto, assinalamos que embora possam se constituir como uma dificuldade ou barreira ao professor de Matemática, de modo especial, as figuras de 9 até 15, que abordaremos nas seções subsequentes não assumem papel secundário para o processo de investigação encetado. Por outro lado, assumindo posição concorde com Brousseau (1976), sabemos que a emergência de obstáculos é uma consequência natural das relações em determinado sistema de ensino. Por conseguinte, no conjunto das situações didáticas propostas, poderemos prever, em maior ou menor substância, a ocorrência de obstáculos (epistemológicos, metodológicos, etc.).

CONCEPÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS: TABULEIROS HEXAGONAIS E A SEQUÊNCIA DE TRIBONACCI

Assumimos posição concorde com Perrin-Glorian (2011), quando assinala que usar a TSD para estudar o ensino regular “me permitiu considerar a Engenharia Didática, em particular seu uso para estudar o ensino ordinário e produzir recursos para o ensino e a formação”. (PERRIN-GLORIAN, 2011, p. 63). A partir desse e outros pressupostos que podem ser consultados na literatura (Almouloud, 2007), consideraremos a Situação 1.

Situação Didática 1: Considerando um Tabuleiro hexagonal, como exibimos na Figura 6 e as peças escolhidas para descrever os ladrilhamentos correspondentes. Verifique sua relação (numérica) com a alguma forma generalizada da sequência de Fibonacci!

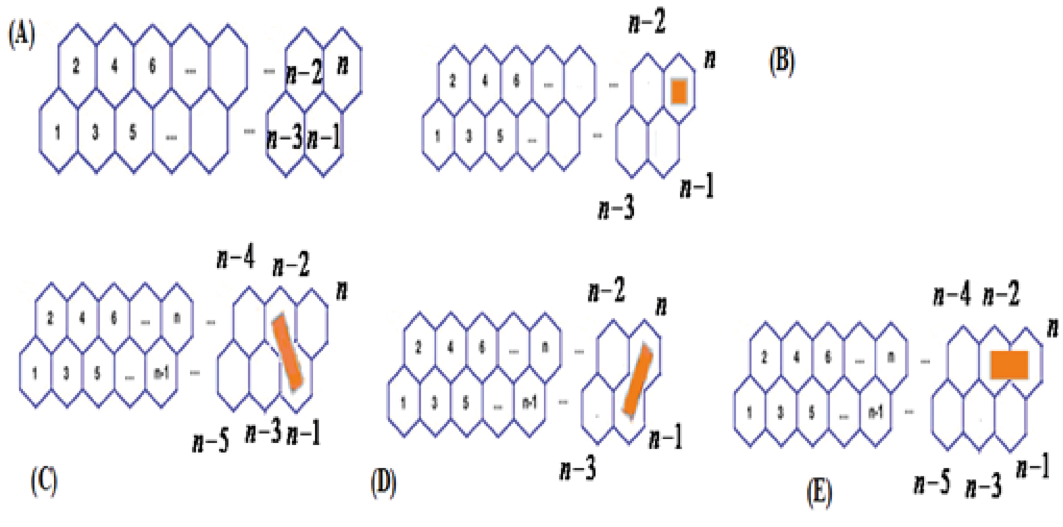
Situação de ação: Com o amparo dos casos particulares exibidos nas figuras 6 e 7, o professor deve estimular os aprendentes em estabelecer relações aritméticas e a descrição preliminar de certas propriedade geométricas, a partir da correspondência visual entre a quantidade de células hexagonais e a disposição das peças necessárias para cada ladrilho.

Situação de formulação: A correspondência aritmética e geométrica se evidencia pelo estabelecimento de um sistema notacional, verificando que podem ocorrer que: $te_0 = 1 = Te_0$, $te_1 = 1 = Te_1$, $te_2 = 2 = Te_2$, $te_3 = 4 = Te_3$, $te_4 = 8 = Te_4$, $te_5 = 15 = Te_5$, $te_6 = 29 = Te_6$, etc.

Reparemos que temos indicado o símbolo para designar a quantidade formas de ladrilhos que preenchem as células indicadas no tabuleiro que exibimos na figura 6.

Situação de validação: Visando a formalização dos argumentos anteriores, os apredentes devem ser estimulados a observar que o tabuleiro hexagonal possui um total de n células hexagonais. Quando na posição n ocorrer um quadrado (Figura 9, item B), as demais células remanescentes podem receber uma contribuição de te_{n-1} ladrilhos, a partir da célula de ordem n - 1. Quando na posição n - 1, n - 2 ocorrer um dominó inclinado à esquerda (Figura 9, item C), as demais células remanescentes podem receber uma contribuição de te_{n-3} ladrilhos, a partir da célula de ordem n - 3, desconsiderando qualquer peça inserida na posição n (que pode ser apenas um quadrado!). Quando na posição n, n - 1 ocorrer um dominó inclinado à direita (Figura 9, item D), as demais células remanescentes podem receber uma contribuição de te_{n-2} ladrilhos, a partir da célula de ordem n - 2. Por fim, quando na posição ocorrer um dominó horizontal (Figura 9, item E), as demais células remanescentes podem receber uma contribuição de te_{n-4} ladrilhos, a partir da célula de ordem n - 4, desconsiderando qualquer ordem de inserção (ou de peças) nas posições respectivas n - 3, n - 1. Na figura 9 resumimos todos os casos examinados (B), (C), (D), (E).

Figura 9: Identificação visual dos casos considerados e dos grupamentos de ladrilhos particulares considerando configurações de ladrilhos particulares (Elaboração dos autores)



Fonte: Elaboração dos autores

Situação de Institucionalização: Segundo a tradição dos estudos de Brousseau (2004)[6], na presente fase, o professor será o responsável pela apresentação de um conteúdo que deve adquirir o caráter de universalidade e impessoalidade intrínseca ao saber matemático e que, além disso, deverá ser incorporado ao patrimônio (cognitivo) de novos saberes, bem como, amparar habilidades do professor. Reparemos que, a partir da figura 9,

[6] Brousseau (2004, p. 250) recorda que "nas situações de formulação ou de comunicação e, por consequência, nas situações de validação explícita, a utilização das representações linguísticas ou icônicas são obrigatórias".

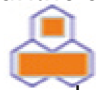
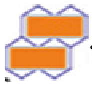
considerando a somatória de todas as contribuições, encontramos $\underset{(B)}{te_{n-1}}+\underset{(D)}{te_{n-2}}+\underset{(C)}{te_{n-3}}+\underset{(E)}{te_{n-4}}$, isto é, determinamos a recorrência que corresponde com a sequência tetranacci. Assim, aos professores em formação deve ser apresentado o seguinte teorema.

Teorema 1: Considerando o tabuleiro hexagonal e as correspondentes peças (ver Figura 6), então $te_{n-1} = Te_n$, $N \geq 0$. (Ziqian e Dresden, 2019).

Demonstração: Ziqian e Dresden (2019) consideram, de modo particular, as contribuições de cada tabuleiro, ao fixarem os ladrilhos correspondentes nas últimas posições numeradas e empregar os argumentos decorrentes da Figura 9. C.q.d.

Situação Didática 2: Considerando um tabuleiro hexagonal, como exibimos na Figura 6. Agora, consideraremos os nossos ladrilhos com os respectivos pesos: quadrado de peso x^3, retângulo horizontal de peso $\frac{1}{x^2}$, retângulos inclinados (à esquerda ou à direita) de peso . Em seguida, consideraremos as indicações apontadas por Koshy (2012), quando examina o comportamento a definição introduzida por Bicknell (1970), da sequência recorrente Tetranacci, na forma algébrica polinomial indicada por: $Te_n = x^3 \cdot Te_{n-1}(x) + x^2 \cdot Te_{n-2}(x) + x \cdot Te_{n-3}(x) + Te_{n-4}(x)$, e elementos iniciais indicados por $Te_0(x) = 0, Te_1(x) = 1, Te_2(x) = x^3, Te_3(x) = x^6 + x^2$.

Situação de ação: Diferente da situação 2 e com o amparo das estratégias desenvolvidas na etapa anterior, em que todos os ladrilhos possuíam peso 1, consideraremos pesos para os ladrilhos indicados na figura 10. Não obstante, os estudantes devem compreender as relações entre as sequências da situação 1 e 2. Para tanto, quando substituem o valor particular para a variável x = 1, conseguimos recuperar os valores expressos em (*)! Ademais, a partir da relação introduzida pela matemática norte americana Marjorie Bicknell Johnson, entusiasta da pesquisa em torno da sequência de Fibonacci, o professor deverá estimular a determinação dos demais termos da sequência polinomial Tetranacci, derivada da sequência de Fibonacci: $Te_4(x) = x^9 + 2x^5 + x$, $Te_5(x) = x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1$, $Te_6(x) = x^{15} + 4x^{11} + 6x^7 + 4x^3$ etc.

Situação de Formulação: Depois de definidos os pesos dos ladrilhos, o professor deverá estimular os estudantes na formulação de determinadas regras que podem ser relacionadas, por intermédio de uma interpretação visual e perceptiva dos ladrilhos particulares que indicamos na figura 10. Com efeito, se mostra necessário uma regra para interpretar as seguintes operações algébricas: $x^3 \times \frac{1}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$ e que resulta em um ladrilho de peso x. Na figura 11, no caso n - 3 visualizamos o caso em que ocorre um ladrilho  com o peso correspondente e envolve, justamente, a operação algébrica que indicamos há pouco. Por outro lado, no caso n - 4, podemos identificar uma configuração particular do ladrilho que confere significado ao seguinte cálculo algébrico $x^2 \times \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$ e que resulta na determinação do peso total de um ladrilho do tipo particular indicado por .

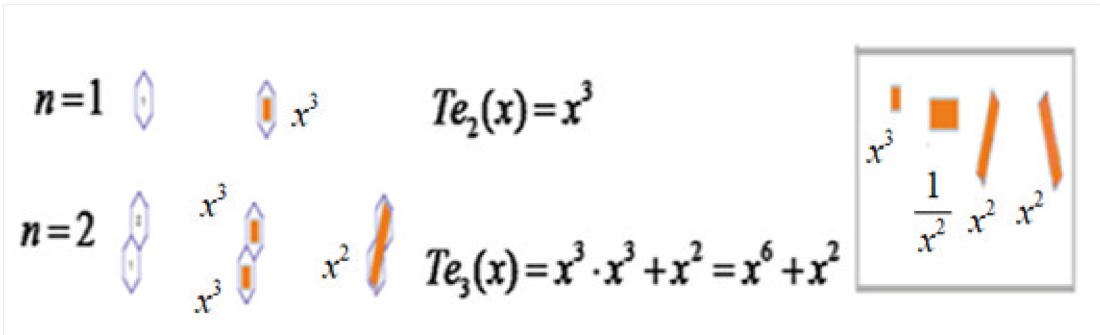
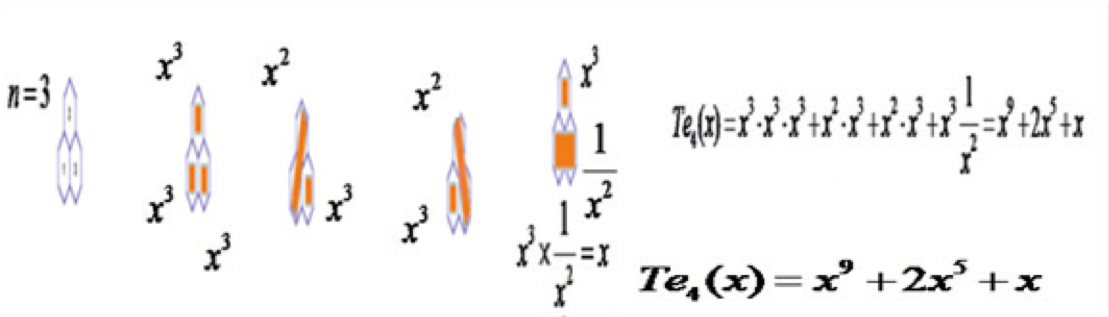


Figura 10: Identificação visual dos casos considerados e dos grupamentos de ladrilhos particulares considerando os casos e

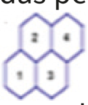
Fonte: Elaboração dos autores.

Na figura 10 (casos n = 1 e n = 2) conseguimos visualizar todas as contribuições correspondentes aos termos indicados ao lado direito, respectivamente, os elementos indicados por $Te_2(x) = x^3$ e $Te_3(x) = x^3 \cdot x^3 + x^2 = x^6 + x^2$. A seguir, na figura 11, visualizamos a contribuição de 4 configurações de ladrilhos particulares. No caso n = 3, visualizamos um ladrilho com peso total de $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^9$. Logo em seguida, dois ladrilhos de peso $x^2 \cdot x^3 + x^2 \cdot x^3 = 2x^5$. Por fim, no último ladrilho, deparamos a aplicação da regra $x^3 \cdot \frac{1}{x^2} = x$.

Figura 11: Visualização dos ladrilhos no caso n = 3.



Fonte: Elaboração dos autores

Reparemos que, ainda sobre a figura 11, quando somamos todas as contribuições resultantes acima, iremos determinar a seguinte representação polinomial $Te_4(x) = x^9 + 2x^5 + x$. Vamos examinar, com base na figura 12, o caso n = 4. De imediato, por intermédio da visualização, identificamos um total de 8 ladrilhos particulares envolvendo as combinações das peças dos dominós fixados, na cor laranja. De modo preliminar, para cobrir o tabuleiro  apenas com quadrados de peso x^3, encontraremos um total de $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^{12}$. Dando sequência ao procedimento, podemos identificar um conjunto de 3 ladrilhos particulares que resultam em um peso individual de $x^3 \cdot x^3 \cdot x^2 = x^8$, $x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^8$, $x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^8$

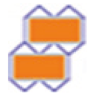
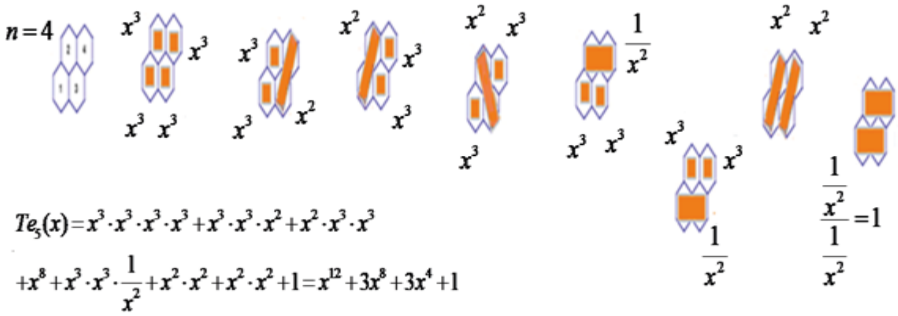
(visualizando no sentido horário), em um total de $3x^8$. O elemento na forma polinomial que ensejamos determinar possui a forma final dada por $Te_5(x) = x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1$. Para determiná-lo e identificar os grupos de ladrilhos remanescentes na figura abaixo, podemos identificar que ocorre, precisamente, um grupo de 3 ladrilhos,com o peso total final de $x^2 \cdot x^2 = x^4$, $x^3 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^2} = x^4$, $\frac{1}{x^2} \cdot x^3 \cdot x^3 = x^4$. Sem desconsiderar,um único caso da forma , o que resulta da regra $\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$ (peso um).

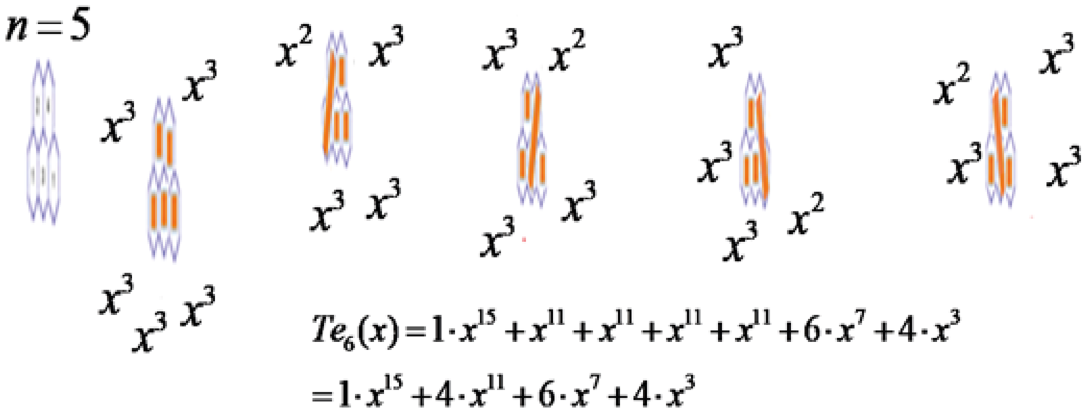
Figura 12: Visualização dos ladrilhos no caso n = 4



Fonte: Elaboração dos autores

Para o caso n = 5, constataremos que ocorrem um total de 15 ladrilhos diferentes, envolvendo o arranjo das peças, na cor laranja, *a priori* designadas na figura 10. Vamos separar dois grupos que podem ser visualizados, logo a seguir, nas figuras 13 e 14.

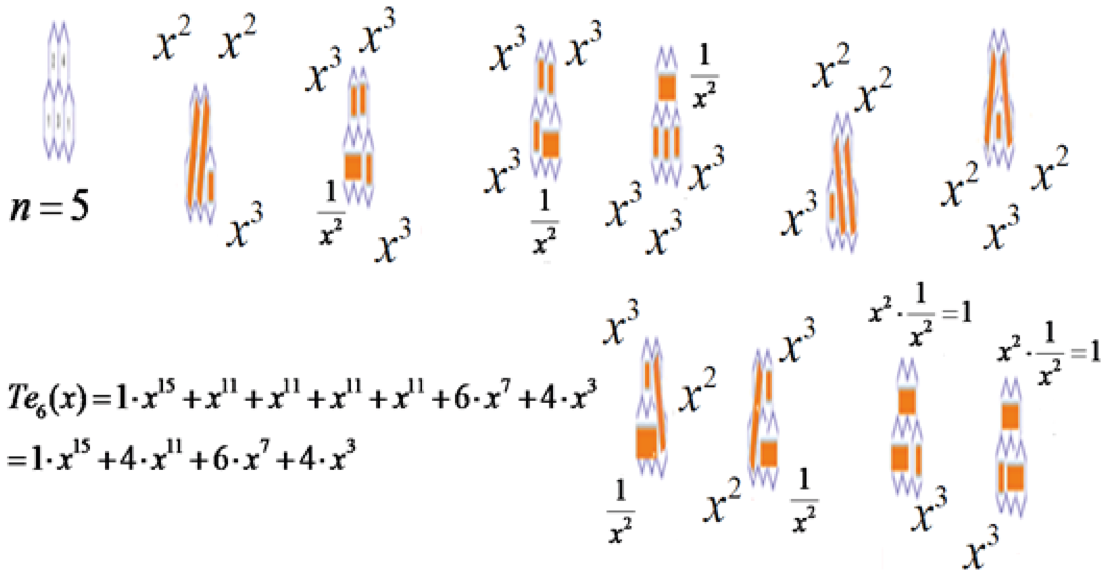
Figura 13 – Visualização dos ladrilhos no caso n = 5



Fonte: Elaboração dos autores

Na figura 13 podemos perceber que ocorre um total de cinco ladrilhos particulares, enquanto, na figura 14, divisamos mais 10 ladrilhos particulares. De modo sistemático, iremos determinar as contribuições totais correspondentes ao grupo de ladrilhos das figuras 13 e 14 (no caso n = 5).

Figura 14: Visualização dos ladrilhos no caso n = 4 e a identificação dos ladrilhos que correspondem ao peso total $6x^7 + 4x^3$.

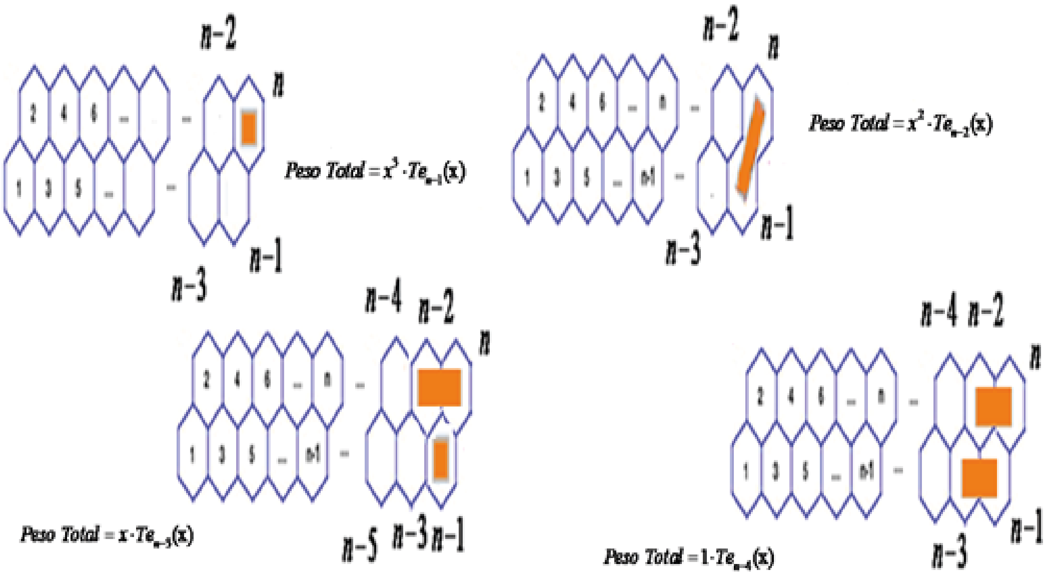


Fonte: Elaboração dos autores

Situação de Formulação: A partir da inspeção visual na figura 13 e caso n = 5, o primeiro ladrilho possui um peso total dado por $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^{15}$. Em seguida, identificamos um grupo de 4 ladrilhos, que podemos determinar suas contribuições indicadas por: $x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3, x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^2, x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^2, x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$ o que resulta em um peso total de $x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 + x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^2 + x^2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = 4x^{11}$. Finalmente, com o amparo da figura 14, iremos separar as contribuições particulares, examinando as potencias na variável de valor 7 e 3. Com efeito, na parte de cima da figura 11, exemplificamos o seguinte caso  que, pelo exame dos pesos, encontraremos $x^2 \cdot x^3 \cdot x^2 = x^7$. Pelo mesmo motivo, iremos encontrar um total de contribuições indicadas por $6x^7$. Finalmente, ainda na mesma figura, na parte inferior, visualizamos um grupo de 4 ladrilhos particulares, todos com o mesmo peso total. Afim de assinalar nossas operações definidas a priori, podemos identificar a seguinte configuração  que resulta no seguinte peso $x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^2 = x^3$.

Situação de validação: Tendo em vista estabelecer um conjunto de argumentos que se tornam invariantes, para cada caso particular, por exemplo, na figura 11, indicamos o peso de cada contribuição particular de ladrilhos. Podemos observar que ocorre apenas um ladrilhos de peso 15, quatro ladrilhos de peso 11, seis ladrilhos de peso 7 e, por fim, quatro ladrilhos de peso 3. Por intermédio da adoção de um sistema notacional, os estudantes devem ser estimulados em perceber as relações $Te_6(x) = \underset{Peso}{1} \cdot x^{15} + \underset{Peso}{4} \cdot x^{11} + \underset{Peso}{6} \cdot x^7 + \underset{Peso}{4} \cdot x^3$ correspondente à somatória de todas contribuições indicadas nas figuras 13 e 14.

Figura 15 - Identificação visual dos casos considerados e os grupamentos de ladrilhos determinados.



Fonte: Elaboração dos autores

Situação de Institucionalização: Na última fase, se mostra necessário o estabelecimento de um Teorema e a verificação de uma conjectura matemática que, de modo estruturante, deverá ser incorporado ao patrimônio dos saberes científicos dos aprendizes. Com amparo dos argumentos coligidos nas etapas predecessoras, o professor deverá enunciar o seguinte teorema. Por último, com amparo na Figura 15, os alunos podem visualizar que foram separados quatro casos, a considerar seguinte recorrência definida *a priori* $Te_n = x^3 \cdot Te_{n-1}(x) + x^2 \cdot Te_{n-2}(x) + x \cdot Te_{n-3}(x) + Te_{n-4}(x)$. Com efeito, na figura 15 separamos o caso de ladrilhos cujo peso total final é determinado por $x^3 \cdot Te_{n-1}(x)$. O caso de ladrilhos cujo peso total final é determinado por $x^2 \cdot Te_{n-2}(x)$ e, de igual modo, para os casos indicados por $x \cdot Te_{n-3}(x)$ e por $x^0 \cdot Te_{n-4}(x) = 1 \cdot Te_{n-4}(x)$. Para finalizar, o professor de Matemática deverá propor a investigação sobre a seguinte conjectura.

Conjectura: Considerando o tabuleiro hexagonal e as correspondentes peças e ladrilhos (ver Figura 10), sendo $te_{n-1}(x)$ as formas de preencher um tabuleiro hexagonal, então $te_{n-1}(x) = Te_n(\mathrm{x}), n \geq 0$. (Formulada pelos autores)

O roteiro de investigação para esta conjectura, que pode ser adotado pelo professor, poderá se amparar nas propriedades verificadas e que derivam do Teorema 1! Para concluir a seção atual, resgatamos uma preocupação revelada na tese de Brousseau (1987, p. 94 - 95), quando explica o papel do funcionamento do componente epistemológico, quando observa que o estudo epistemológico permite "compreender por uma teoria pode ser institucionalizada, e se mostra necessário, de forma preliminar, que possa ser objeto de debate científico entre os estudantes, como meio de estabelecer e refutar provas". Nesses termos, com amparo das duas situações anteriores, identificamos um roteiro para a institucionalização do saber matemático envolvido, a partir da presença e participação de um eventual professor-formador ao decurso de todas as fases previstas pela TSD (ação, formulação, validação e institucionalização).

ELEMENTOS DE REPRODUÇÃO DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA E OS LIMITES DA PROPOSTA

Nas seções anteriores indicamos alguns elementos estruturantes para as duas etapas iniciais de uma Engenharia Didática, com ênfase declarada pelo interesse na formação inicial de professores de Matemática no contexto histórico (ALVES, 2017). Assumimos posição concorde com Artigue (1984; 2011), visando eventual aplicação e replicabilidade do dispositivo teórico concebido, quando indica o papel de compreensão do sujeito, que se mostra associado a determinado estádio de conhecimento, em determinado momento. Assim, se verifica o caráter de imprescindibilidade em considerar a noção matemática objetivada e que ou quais contextos se correlacionam com o saber (*savoir savant*) em determinada época; conjunto de representações icônicas e sistema notacional matemático intrinsecamente relacionado ao objeto de interesse (sequências numéricas recorrentes); classe de problemas em que o mesmo adquire sentido (*sens*); os instrumentos conceituais correlacionados ao objeto de interesse (teoremas, definições matemáticas, regras, propriedades, etc.).

Por outro lado, sempre urge considerar o componente de competência do professor de Matemática, quando objetiva a descrição de um novo itinerário de aprendizagem. Nesses termos, Brousseau (2002) indica, em determinada substância, o conjunto de transformações e modificações necessárias para o seu ato de ensino, quando menciona que:

> Para ensiná-lo, então, um professor deve reorganizar o conhecimento para que ele se encaixe nessa descrição, nessa “epistemologia”. Este é o início do processo de modificação do conhecimento que altera sua organização, sua importância relativa, sua apresentação e sua gênese, seguindo as necessidades do contrato didático (BROUSSEAU, 2002, p. 35).

Por outro lado, quando assumimos os pressupostos e preocupações de Artigue (1984, p. 104), de forma essencial, temos interesse por “um processo de institucionalização no interior de uma sequência didática”. Por conseguinte, no conjunto das duas situações didáticas apresentadas, ocorre o interesse pela compreensão, por parte dos estudantes (professores em formação inicial), de modelos de verificação, de refutação de conjecturas, de demonstração e prova empregados em trabalhos recentes de pesquisa, todavia, que não envolve um interesse por um processo de transposição didática (CHEVALLARD, 1991) e possível repercussão para professores de Matemática (em formação inicial ou continuada)!

Ainda em posição concorde com Artigue (2018), na medida em que indica a importância do processo de modelização de situações didáticas reprodutíveis, sobretudo, os níveis de suas regularidades e que, em um contexto científico amplo, constatamos o fato é que "cada campo científico se posiciona através dos tipos de fenômenos, invariantes, regularidades, a que aspira. identificar e os métodos que permitem produzi-los e validá-los." (ARTIGUE, 2018, p. 10). Por conseguinte, de modo particular, se mostra imprescindível uma compreensão das interações derivadas do trinômio clássico "estudantes – saber matemático – professor de Matemática". Finalmente, os elementos indicados e elaborados nas seções predecessoras envolvem um componente de independência de análises e de fatos empíricos que emergem de eventual experimentação (LABORDE, 2016). Entretanto, auxiliam uma configuração inicial de pesquisa a ser desenvolvida no Brasil, entretanto, com influência da tradição estabelecida pela vertente francesa da Didática da Matemática (BLUMM, 2019), correspondente ao tema aqui discutido, sobretudo em suas dimensões epistemológicas, históricas e matemáticas (LABORDE, 2016).

Por fim, no âmbito dos limites do trabalho atual, recordamos que parte substancial dos trabalhos empregados para constituir nosso roteiro de abordagem visando o ensino e a investigação em torno da noção de Tabuleiro e que não se confunde com a noção de tabuleiros no contexto de Jogos com regras, empregamos um conjunto de artigos científicos (Coates, S. *et al*.., 2022; Doslic e Produg, 2022; Dresden e Xiao, 2022; Komatsu, Németh, e Szalay, 2018; Tauraso, 2004; Ziqian, 2019), de restrita circulação no meio científico da pesquisa e voltado ao interesse de matemáticos profissionais e no bojo de uma pesquisa contemporânea. Por conseguinte, assinalamos que as figuras de 5 à 15 constituem um investimento didático do professor, no sentido de empregar diferentes representações de um mesmo objeto, no sentido de Brousseau (2004), como um instrumento visando a transmissão (transposição) e ensino de um determinado conteúdo.

Outrossim, diante da natureza do estudo, essencialmente teórica, se mostra imprescindível o desenvolvimento de pesquisas empíricas capazes de verificar o funcionamento do presente modelo didático e da transmissão das ideias principais de cada situação didática e, por tal expediente, revelar o caráter não estático e dinâmico do saber matemático que, no caso de sequências numéricas, continua atraindo o interesse de pesquisadores em vários países.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E FUTURAS PESQUISAS

Nas seções predecessoras descrevemos as duas etapas iniciais de uma Engenharia Didática, objetivando o seguinte tema: Tabuleiros hexagonais (BENJAMIN e QUINN, 1999; 2003a; 2003b) e a sequência Tetranacci. Podemos constatar que o referido tema se encontra, recorrentemente, restrito a um público especializado que, de modo *standard*, envolve o emprego de artigos científicos e que costuma acompanhar os avanços recentes sobre a evolução da pesquisa em Matemática Pura e, de modo especial, na área de pesquisa denominada Matemática Enumerativa, todavia, de modo apartado de um interesse maior visando a formação do professor de Matemática (ALVES, 2017; 2022a; 2022b; ALVES e VIEIRA, 2023).

Por outro lado, por intermédio da influência dos trabalhos de Perrin-Glorian (2011; 2019), assinalamos um interesse pela formação e aperfeiçoamento das práticas ordinárias e em sala de aula do professor de Matemática, no contexto da História da Matemática (ALVES e CATARINO, 2022). Assim, os pressupostos assumidos que envolveram uma Engenharia Didática pelo Desenvolvimento e Formação (EDDF) que permitem uma reflexão sobre um conteúdo e a correspondente transposição didática, com um triplo viés, a saber: reflexão epistemológica, reflexão cognitiva, reflexão didática (PERRIN – GLORIAN, 2019).

Finalmente, no cotejo das duas situações didáticas, de modo sistemático, indicamos um teorema decorrente da 1ª situação didática e uma conjectura matemática, como consequência da 2ª situação didática e que, de modo *standard*, seguindo os cânones em Matemática, deverá ser estimulada, objetivando a sua eventual comprovação ou a sua refutação. (LAKATOS, 1976). Para concluir, assumimos posição concorde com Perrin-Glorian (2011) quando apresentamos um itinerário de situações que permitem sua exploração em sala de aula, com o escopo de apresentar o modelo combinatório para a sequência Fibonacci e sua forma generalizada e, geralmente, negligenciada nos livros de História da Matemática (a sequência Tetranacci).

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio para o desenvolvimento dessa pesquisa, com processo e projeto de nº 305495/2022-4 e financiamento pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. Fórmula de De Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF. **Revista de História da Matemática**, v. 17, nº 33, 1 – 16, 2017. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/36>. Acesso em 01de fev, 2023.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, nº 3, 47-83, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/36808>. Acesso em 01de fev, 2023.

ALVES, F. R. V. Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Hist oposal for Historical Research in Brazil on Recurring Number azil on Recurring Number Sequences. **The Montana Math Enthusiast**, v. 19, nº 3, 1/239-274, 2022a. Disponível em: <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol19/iss1/12/>. Acesso em 01de fev, 2023.

ALVES, F. R. V. Propriedades combinatórias sobre a sequência de Jacobsthal, a noção de tabuleiro e alguns apontamentos históricos. **Revista Cearense de Educação Matemática**, v. 1, n.1, 1 – 16, 2022b.

ALVES, F. R. V. VIEIRA, R. P. M. Abordagem combina-tória para a Seq uência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pen-tanacci,...etc.e a noção de Tabuleiro. **REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA**, v. 23, nº 3, p. 1-21, 2023.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. A sequência de Padovan ou de Coordonier. **Revista de História da Matemática**, v. 17, n. 33, 1 – 16. 2022. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/328>. Acesso em 04 de fev, 2023.

ALABI, O. J.; DRESDEN, G. Fault-Free Tilings of the 3 × n Rectangle With Squares and Dominos, **Journal of Integer Sequences**, v. 24. n. 2, 1 – 11, 2021. Disponível em: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL24/Dresden/dresden7.pdf>

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. C. A Sequência de Padovan ou Coordonier. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 44, n. 23, 1 – 20, 2022.

ARTIGUE, M. **Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques**. (Thése d´État, Paris: Université Paris VII, 19, 1984. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250658/> Acesso em 11de fev, 2023.

ARTIGUE, M. Didáctica de las matemáticas y reproducibilidad, **Educación Matemática**, v. 30, n.2, 9-32, 2018 Disponível em: https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v30n2/1665-5826-ed-30-02-9.pdf

ARTIGUE, M. Didactical engineering. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. Second Edition (pp. 202-206). New-York : Springer, 2020.

ARTIGUE, M. L'Ingenierie Didactique: un essai de synthese. In: Margolinas, C. *et a*l. (2011). **En amont et en aval des Ingenieries Didactiques**, (pp. 220 – 232). Paris: La Pensée Sauvage, 2011.

ARTIGUE, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: Où en sommes-nous ? **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, 27 – 64, 2020.

BARQUERO, B; e BOSCH, M. Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths.In: Watson, A.; Ohtani, Minoru. **Task Design In Mathematics Education**. ICMI study 22, New York: Springer, (pp. 251 – 270), 2015.

BENJAMIN, A. T. e QUINN, J. J. Recounting Fibonacci and Lucas Identities. **The College Mathematics Journal**, v. 30, n. 5, 359-366, 1999.

BENJAMIN, A. T. e QUINN, J. J. The Fibonacci numbers-exposed more discretely, **Math. Magazine**. v. 76, n. 3, 182–192, 2003a.

BENJAMIN, A.T. e QUINN, J. J. Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof. **Dolciani Mathematical Expositions**, New York: Mathematical Association of America, v. 27, n.1, 1 – 15, 2003b.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, **Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques**, France, 101 – 117, 1976. Disponivel em: <https://hal.science/hal-00516569v2/document>

BROUSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. (Thése d`État), Bourdeau: Université Bourdeaux I, 1986a. Disponivel em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00471995v3>. Acesso em 12de fev, 2023.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 7, n. 2, 33–115, 1986b.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. New York: Springer, 2002.

BROUSSEAU, G. Les représentations: étude en théorie des situations didactiques. **Revue des sciences de l'éducation**, v. 30. n. 2, 241 – 277, 2004. Disponivel em: <https://www.erudit.org/fr/revues/rse/2004-v30-n2-rse1025/012669ar.pdf>

BURTON, D. M. **The History of Mathematics: an introduction**. New York: McGraw-Hill Companies, 2007.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique: Du savoir savant au savoir enseigné**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

COATES, S. *et al*.. A hexagonal golden-mean tiling. **AirXiv**, v. 7, n. 2, 1 – 7, 2022.

CRAVEIRO, I. M. **Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal** (Tese de doutorado). Campinas: Unicamp, 2004.

DOŠLIĆ, T.; PODRUG, L. Tilings of a Honeycomb Strip and Higher Order Fibonacci Numbers. **AirXiv**, v. 2, n. 4, 1 – 22, 2022.

DRESDEN, G.; XIAO, Y. Weighted Sums of Fibonacci and Lucas Numbers through Colorful Tilings. **The Fibonacci Quarterlly**, **v.** 6, n. 2, p. 126 – 135, 2022.

FATHAUER, R. **Tessellations: mathematics, art, and recreation**, London: Francis e Taylor, 2021.

FEINBERG. M. Fibonacci-Tribonacci, **The Fibonacci Quarterlly**, v. 1, nº 3, 71 – 75, 1963. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/1-3.html>. Acesso em 15de fev, 2023.

HOGGATT, V. E., BICKNELL, M. Generalized Fibonacci Polynomials, **The Fibonacci Quarterly**, 457 – 465, 1973. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/Scanned/11-5/hoggatt.pdf>.

Acesso em 22 de fev, 2023.

HUNTLEY, H. E. **The divine proportion**, Dover Publications, 1970.

KAMII, C. **Number in Preschool and Kindergarten: Educational Implications of Piaget's Theory**, Washington: National Association for the Education of Young Children, 1982.

KOMATSU, T.; NÉMETH, L. e SZALAY, L. Tilings of hyperbolic (2 × n)-board with colored squares and dominoes. **Ars Mathematica Contemporanea**, v. 15, n. 16, 338 – 347, 2018.

LABORDE, C. A view on subject matter didactics from the left side of the Rhine, **Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)**, 37(2), 1 – 16, 2016. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s13138-015-0082-0

LAKATOS, I. **Proofs and Refutations: the Logic of mathematical Discovery**, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

OEIS Foundation Inc. **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**. https://oeis.org/A000078, 2019.

PERRIN-GLORIAN, M – J. L'Ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. développement de ressources et formation des enseignants. In: Margolinas, C. *et a*l., 2011). **En amont et en aval des Ingenieries Didactiques**, (pp. 55 – 76). Paris: La Pensée Sauvage.

PERRIN-GLORIAN, M – J. A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. International Congress on the Joint Action Theory in Didactics - JATD in questions, questions to didactics, Rennes, France, 1 – 13, 2019.

PROPP. J. Tilings. In: Bona. M. **Handbook of Enumerative Combinatorics**, Taylor e Francis, (pp. 541 – 573), 2015.

ROBERT, A. De recherche "de type ingenierie". In: Margolinas, C. *et a*l. (2011). **En amont et en aval des Ingenieries Didactiques**, (pp. 209 – 219). Paris: La Pensée Sauvage, 2011.

TAURASO, R. A New domino Tiling sequence, **Journal of Integer Sequences**, *7(4)*, 1 – 5. 2004.

ZIQIAN, A. J. Tetranacci Identities With Squares, Dominoes, And Hexagonal Double-Strips, **AirXiv**, v. 2, n, 4, 1 – 20, 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1907.09935.pdf>

COMO CITAR — APA

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; AIRES, A. P. F. (2024). Análise preliminar e a priori: o caso dos Tabuleiros Hexagonais e a Sequência Tetranacci. *PARADIGMA*, *XLV*(1), e2024008.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024008.id1337.

COMO CITAR — ABNT

ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz; AIRES, Ana Paula Florêncio. Análise preliminar e a priori: o caso dos Tabuleiros Hexagonais e a Sequência Tetranacci . **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, n. 1, e2024008, Ene./Jun., 2024. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024008.id1337.

HISTÓRICO
Submetido: 04 de marzo de 2023.
Aprovado: 07 de Diciembre de 2023.
Publicado: 30 de Enero de 2024.

EDITORES
Fredy E. González
Luis Andrés Castillo

ARBITROS
Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres