Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
ISSN 1011-2251 ISSN 2665-0126
Volume XLV, Enero/Junio de 2024
Edición Normal, Número 1
doi 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024009.id1338

Aplicación del modelo de Van Hiele al estudio de los conceptos de perímetro y área en una escuela rural con aulas multigrado

Matías Bustamante-Valdés[1] Carlos Caamaño[2]
Atif Lodhi[3] Danilo Díaz-Levicoy[4]

Resumen

La investigación se centra en el análisis de los niveles de razonamiento geométrico y los grados de adquisición, de acuerdo con el modelo de Van Hiele, que obtienen los estudiantes de 5º y 6º de Educación Básica de una escuela rural con aulas multigrado, al implementar una unidad didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros. La metodología es mixta, con un diseño pre-experimental, con aplicación de pre-test y post-test. La muestra está constituida por 7 estudiantes en un curso multigrado. Para el análisis de los niveles de razonamiento, se tomaron en cuenta los tipos de respuesta de los estudiantes, los que son de utilidad para ponderar las respuestas y con ello lograr medir los grados de adquisición. Se describen resultados antes y después de la implementación que, aplicando la prueba no paramétrica Wilcoxon para muestras emparejadas, evidencian cambios positivos mostrando diferencias estadísticamente significativas, logrando alcanzar los niveles de razonamiento y grados de adquisición acordes a su nivel educacional.
Palabras clave: Niveles de razonamiento, Grado de adquisición, Perímetro, Área, Aula multigrado.

Application of the Van Hiele model in the study of the concepts of perimeter and area in a multi-grade classroom rural school

Abstract

The research focuses on the analysis of the levels of geometric reasoning and the degrees of acquisition, according to Van Hiele's model, obtained by 5th and 6th grade students of Basic Education of a rural school with multigrade classrooms, when implementing a didactic unit on perimeter and area of quadrilaterals. The methodology is mixed, with a pre-experimental design, with application of pre-test and post-test. The sample is constituted by 7 students in a multigrade course. For the analysis of the levels of reasoning, the types of answers of the students were taken into account, which are useful to weight the answers and thus measure the degree of acquisition. Results before and after the implementation are described, which, applying the nonparametric Wilcoxon test for paired samples, show positive changes showing statistically significant differences, achieving the levels of reasoning and degrees of acquisition according to their educational level.
Keywords: Levels of thinking, Degree of acquisition, Perimeter, Area, Multi-grade classroom.

[1] Universidad Católica del Maule (UCM), Talca, Chil. Correo electrónico: matias.bv6@gmail.com
[2] Universidad Católica del Maule (UCM), Talca, Chil. Correo electrónico: cleoncaamano@gmail.com
[3] Universidad de Barcelona (UB), Barcelona, España. Correo electrónico: alodhe2@yahoo.com
[4] TUniversidad Católica del Maule (UCM), Talca, Chil. Correo electrónico: dddiaz01@hotmail.com

Aplicação do modelo de Van Hiele ao estudo dos conceitos de perímetro e área numa escola rural com salas de aula multisseriadas

Resumo

A pesquisa se concentra na análise dos níveis de raciocínio geométrico e dos graus de aquisição, de acordo com o modelo de Van Hiele, obtidos por alunos da 5ª e 6ª séries do Ensino Básico em uma escola rural com salas de aula de várias séries, ao implementar uma unidade didática no perímetro e área de quadriláteros. A metodologia é mista, com projeto pré-experimental, com aplicação de pré-teste e pós-teste. A amostra consistiu de 7 alunos em uma turma com várias turmas. Para a análise dos níveis de raciocínio, foram levados em conta os tipos de respostas dos alunos, que são úteis para ponderar as respostas e, portanto, para medir o grau de aquisição. Os resultados antes e depois da implementação são descritos, os quais, aplicando o teste não paramétrico Wilcoxon para amostras pareadas, mostram mudanças positivas mostrando diferenças estatisticamente significativas, alcançando níveis de raciocínio e graus de aquisição de acordo com seu nível educacional.

Palavras-chave: Níveis de raciocínio, Grau de aquisição, Perímetro, Área, Sala de aula multigraduada.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, existe una alta preocupación respecto a la calidad de los aprendizajes matemáticos de los estudiantes chilenos, que, en pruebas internacionales, evidencian bajos resultados para todos los ejes de esta asignatura. Así lo confirman, por ejemplo, los resultados de la prueba TIMMS del año 2015 para 4º año de Educación Básica, donde los logros de aprendizaje en Matemática y Ciencias Naturales son significativamente menores al centro de la escala de esta prueba, siendo estable en relación con la evaluación del año 2011 (Chile, 2012, 2017). También, a través de los datos aportados por este instrumento, se observa la amplia brecha que existe según dependencia del centro educativo, es decir, las instituciones particulares pagadas obtienen mejores resultados que las municipales; señalando que los ingresos en el hogar tienen relación con los resultados obtenidos, donde la diferencia es estadísticamente significativa.

Por otro lado, la Geometría aporta contenidos necesarios de trabajar sobre todo en los niveles educacionales de Enseñanza Básica, pues "es una materia cuyo estudio permite desarrollar el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización para ubicarnos en el espacio en el que vivimos" (Barrantes-López et al., 2014, p. 98), así como su importancia, a lo largo de los años, para el desarrollo del hombre (Fripp, 2012). Asimismo, respecto a las magnitudes y su medida, Godino et al. (2004, p. 361) señalan que son importantes:

> (…) en el currículo de matemáticas desde los niveles de educación infantil hasta secundaria debido a su aplicabilidad y uso extendido en una gran cantidad de actividades de la vida diaria. El uso de la medición también ofrece oportunidad de aprender y aplicar otros contenidos matemáticos, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, conceptos estadísticos y la noción de función. Permite establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas diferentes, como el área de sociedad, ciencias, arte y educación física.

La importancia de estas temáticas es recogida en las directrices curriculares del Ministerio de Educación chileno (Chile, 2018a), donde se establecen cinco ejes, entre ellos el de *geometría* y de *medición*. En el eje de geometría se espera que los estudiantes aprendan habilidades como reconocer, visualizar y dibujar figuras; describir características y propiedades de figuras en 3D y 2D; adquieran conceptos y un lenguaje más preciso para entender la estructura del espacio; y, por último, analicen objetos en movimiento, desarrollando tempranamente el pensamiento espacial. Asimismo, en lo referido a la *medición*, las directrices curriculares pretenden que los estudiantes:

> (…) sean capaces de identificar las características de los objetos y cuantificarlos, para poder compararlos y ordenarlos. Las características de los objetos –ancho, largo, alto, peso, volumen, etc. – permiten determinar medidas no estandarizadas. Una vez que los alumnos han desarrollado la habilidad de hacer estas mediciones, se espera que conozcan y dominen las unidades de medida estandarizadas. Se pretende que sean capaces de seleccionar y usar la unidad apropiada para medir tiempo, capacidad, distancia y peso, usando las herramientas específicas de acuerdo con lo que se está midiendo (Chile, 2018a, p. 219).

Concretamente, se espera que los estudiantes al finalizar el quinto curso de Educación Básica cumplan los siguientes objetivos de aprendizaje (Chile, 2018a, p. 249):

- Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm, mm) en el contexto de la resolución de problemas.
- Realizar transformaciones entre unidades de medidas de longitud: km a m, m a cm, cm a mm y viceversa, de manera manual y/o usando software educativo.
- Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.
- Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares, aplicando las siguientes estrategias: conteo de cuadrículas; comparación con el área de un rectángulo; completar figuras por traslación.
- De modo similar, en sexto básico (CHILE, 2018a, p. 254):
- Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^2 y m^2.
- Calcular el volumen de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^3, m^3 y mm^3.

Finalmente, otro elemento considerado en esta investigación es la escuela rural multigrado, donde asumimos la concepción de Hinojo et al. (2010), basada en las ideas de Corchón (2000, 2005) sobre escuela rural, porque responde de mejor forma a las características de un grupo importante de la realidad chilena, que es la única de una localidad (por lo general, inferiores a 500 habitantes), con una cantidad de cursos que va de 1 a 4 y que tienen más de un nivel educacional por aula.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, este trabajo tiene por objetivo *analizar el impacto de la implementación de una unidad didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros, según el Modelo de Van Hiele, en una escuela rural con aulas multigrado*.

FUNDAMENTOS

Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

Los investigadores Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, basados en su experiencia dando clases de Educación Secundaria y concretado en sus tesis doctorales (Van Hiele, 1957; Van Hiele-Geldof, 1957), proponen un modelo para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, llamado comúnmente modelo de Van Hiele. Este modelo destaca la importancia que tiene la comprensión de este tema por parte de los profesores, para generar estrategias efectivas de enseñanza, considerando la forma en que se produce el aprendizaje geométrico en los estudiantes.

Por su parte, Jaime (1993) destaca que este modelo tiene un aspecto descriptivo, el que identifica formas de razonamiento geométrico de un individuo y permite la valoración de sus avances; y otro instructivo, dirigido a los profesores, que corresponde a las fases de aprendizajes, permitiendo que los estudiantes puedan transitar de un nivel de razonamiento a otro superior. En el Cuadro 1, se presenta un resumen de las características de los niveles de razonamiento de Van Hiele según Aravena y Caamaño (2013), basado en la descripción realizada en trabajos previos (Fuys et al., 1988; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1996).

Cuadro 1: Niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele

Niveles	Características
Nivel 1: Reconocimiento o visualización	- Es el nivel más elemental de razonamiento, los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen. - Los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan, se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
Nivel 2: Análisis	- Es en este nivel donde se presenta por primera vez un tipo de razonamiento, que podría llamarse matemático. - Los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades, a partir de la observación y la manipulación.
Nivel 3: Clasificación	- En este nivel los estudiantes pueden entender que unas propiedades pueden deducirse de otras y adquieren la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. - Son capaces de clasificar diferentes figuras geométricas y dar definiciones matemáticas.
Nivel 4: Deducción formal	- El estudiante logra la capacidad de razonamiento lógico matemático y una visión. globalizadora del área que se esté estudiando. - Esto les permite realizar demostraciones formales de aquellas propiedades que antes habían "demostrado informalmente", como también, descubrir y demostrar nuevas propiedades.
Nivel 5: Rigor	- En este nivel el estudiante debe trabajar sistemas axiomáticos distintos del usual, transferencias de conocimientos a otros sistemas. - Gutiérrez y Jaime (1996) plantean que existe una posición de escepticismo respecto de la validez de las características del quinto nivel y la poca posibilidad de testarlas.

Fuente: Aravena y Caamaño (2013, p. 149)

Asimismo, respecto a las fases de aprendizajes que permite la organización de actividades con el objetivo de ayudar a estudiantes a avanzar de un nivel a otro (Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1990). En el Cuadro 2, se muestran las ideas centrales de cada fase:

Cuadro 2: Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele

Fases	Características
Fase 1: Información	Se coloca el énfasis en la visualización y en la comparación de objetos, se enuncian características de manera informal.
Fase 2: Orientación dirigida	Identificación de características, reconocimiento de propiedades y establecimiento de relaciones.
Fase 3: Explicitación	Intercambio de experiencias, comentar las regularidades encontradas, las propiedades, explicitación del trabajo realizado.
Fase 4: Orientación libre	Aplicación de los conocimientos a situaciones nuevas, pero con
Fase 5: Integración	Visión global de lo aprendido, integrando los nuevos conocimientos y métodos de trabajo. Se trata de la organización de los conceptos, definiciones, propiedades o relaciones adquiridas en las fases anteriores.

Fuente: Aravena y Caamaño (2013, p. 150)

Completando estas cinco fases, los estudiantes deben haber alcanzado un nuevo nivel de razonamiento. Ahora se debe comenzar de nuevo con el proceso, enfocados en avanzar al nivel de razonamiento, retomando algunos aspectos del tema que se está trabajando (Gutiérrez, 1994).

Además de la descripción de los niveles de razonamiento, se hace necesario señalar las características generales de estos, donde existe una jerarquización y secuencialidad (Jaime y Gutiérrez, 1990), es decir, cada uno se apoya del anterior y estos presentan diferentes grados de complejidad. Asimismo, se menciona que dentro de los primeros 3 niveles, se pueden encontrar habilidades de uso implícito que, serán explicitados en el nivel inmediatamente superior: no reconocer la importancia de las partes de la figura (nivel 1); no reconocer relaciones de propiedades (nivel 2); y no reconocer la necesidad de desencadenamiento para demostración (nivel 3).

Por su parte, Jaime y Gutiérrez (1990) destacan la importancia del lenguaje en cada nivel de razonamiento, teniendo en consideración, que la capacidad de razonamiento no solo se observa en el desarrollo de problemas, sino que también en la forma en que el estudiante se expresa. Gutiérrez y Jaime (1998) describieron los atributos que se deben considerar en cada nivel de razonamiento (Cuadro 3), elementos que han sido la base para esta investigación.

Cuadro 3: Atributos de procesos de razonamiento en niveles de razonamiento

Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento y descripción	Atributos físicos (posición, forma, tamaño)	Propiedades matemáticas		
Uso de definiciones		Definiciones con estructura simple	Definiciones con estructura matemática compleja	Aceptar definiciones diferentes
Formulación de definiciones	Listado de propiedades	Listado de propiedades	Conjunto de propiedades	Prueba la equivalencia de
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos	Exclusiva basada en atributos matemáticos	Clasificar con diferentes definiciones, exclusiva e inclusiva	
Demostración		Verificación con ejemplo	Demostraciones lógicas informales	Demostración m

Fuente: Gutiérrez y Jaime (1998, p. 32)

Investigaciones del modelo de Van Hiele

El uso e impacto de este modelo viene desde sus primeras publicaciones. Por ejemplo, en la Unión Soviética lo consideraron para diseñar las directrices curriculares de matemática que se implementaron hacia los años 60 (Pyskalo, 1968). Más adelante, en Holanda, se utilizó en el proyecto Wiskobas de desarrollo curricular (Treffers, 1987). En los países de occidente, su difusión viene luego de la publicación de Wirszup (1976).

También, es necesario mencionar tres proyectos que han sido impulsores del modelo de Van Hiele que, además, han marcado precedentes profundos para investigaciones posteriores, brindando información valiosa sobre este modelo: proyecto Brooklyn (Fuys et al., 1988), de Chicago (Usiskin, 1982) y de Oregón (Burger y Shaughnessy, 1986, 1990).

En el caso de España, uno de los grupos más relevantes en el uso y difusión del modelo de Van Hiele es el liderado por Ángel Gutiérrez de la Universidad de Valencia. Algunas investigaciones, como, por ejemplo, Gutiérrez y Jaime (1991) efectúan un estudio dirigido a los docentes, en base a las fortalezas que tiene la implementación del modelo de Van Hiele en el aula en la enseñanza de las rotaciones. Asimismo, Jaime (1993) incorpora los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico como nueva metodología, para medirlo con mayor exactitud en estudiantes españoles de diferentes niveles sobre las isometrías. Asimismo, Gutiérrez (2009) plantea, a partir de sus investigaciones, una proyección de los niveles de razonamiento, señalando que los estudiantes de 1º a 4º básico solo alcanzan el nivel 1, y no necesariamente en un alto grado de adquisición, mientras que los de 5º básico estarían en un periodo de transición entre el nivel 1 e inicios del 2 y en 6º básico podrían comenzar con el nivel 2.

En el contexto chileno, encontramos el trabajo de Aravena y Caamaño (2013), donde se analizó el nivel de razonamiento geométrico de estudiantes de 6º de Educación Básica a 2º de Educación Media. Sus resultados muestran el predominio del nivel 1 de Van Hiele y un grado de adquisición bajo respecto de los procesos de razonamiento. Más tarde, Aravena et al. (2016) muestran los resultados de una intervención de aula sobre semejanza de figuras planas en estudiantes de 2º medio de centros vulnerables, con grupos experimental y control, y con la aplicación de pre-test y pos-test. Los resultados arrojan diferencias significativas, a favor del grupo experimental, en el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico.

Por último, es necesario destacar que no se han encontrado estudios que consideren el modelo de Van Hiele en el contexto de aulas multigrado en ruralidad, por lo que nuestro estudio entrega resultados novedosos.

Extensión del modelo de Van Hiele hacia otras áreas

Dada la importancia que ha tomado este modelo, diversos autores lo han utilizado para analizar el razonamiento en otros objetos matemáticos no geométricos. Por ejemplo, Land (1990) realiza un primer intento al extenderlo hacia la enseñanza del álgebra, aunque no se considera una correcta extensión del modelo, pues se centra en habilidades de tipo operacional y no en el pensamiento mismo. En Llorens (1996), se extiende el modelo al concepto de aproximación local a través de la recta tangente en un punto. Campillo y Pérez (1998) aplican el modelo al concepto de continuidad de Cauchy. Jaramillo y Pérez (2001) extienden el modelo con la noción de convergencia de series. Esteban y Llorens (2003) lo utilizan para el concepto de recta tangente a una curva en un punto, usando otro medio de visualización, ampliando lo considerado en Llorens (1996). Y, por último, Prat (2015) lo extiende al concepto de área.

Estos estudios nos motivan a considerar el modelo de Van Hiele en los conceptos de perímetro y área de cuadriláteros. Si bien, existen autores como D'Amore y Fandiño (2007) que indican que corresponden a conceptos propios de la geometría, Prat (2015) y las directrices curriculares chilenas (Chile, 2018a) los consideran conceptos no geométricos, incluso esta última lo incorpora dentro del eje de medición.

Dificultades respecto a los objetos matemáticos de área y perímetro en cuadriláteros

Para el estudio de los objetos matemáticos de perímetro y área, es importante considerar características y propiedades de las figuras geométricas, las relacionadas con formas, tamaño, distancia y ubicación, las cuales constituyen un aspecto esencial para la medición de longitudes, como también las dificultades y obstáculos que se presentan al momento de interactuar con estos objetos.

Rogalski-Muret (1979) señala que en el proceso de aprendizaje de los temas de perímetro y área existen dificultades en los cambios de la forma y dimensiones, además del uso de las unidades de medición. El obstáculo generado por parte de los estudiantes se produce al momento que asocian erradamente unidades de longitud con cálculos realizados en figuras geométricas, como, por ejemplo, no considerar las unidades cuadradas al obtener el área de una superficie. Además, están las dificultades de diferenciar perímetro de área, cuando se efectúan mediciones de contornos y superficies, y la de no asociar la longitud de lados con la forma de la figura (Moreira y Comiti, 1994).

Además, existen estudios que involucran concepciones que poseen los profesores para la enseñanza del área, donde se evidencian carencias respecto de estos objetos matemáticos. Por ejemplo, Tierney et al. (1990) estudian la percepción sobre el concepto de área en futuros profesores de Educación Primaria, observando que lo relacionan más con la fórmula de cálculo que con su concepción general, asociado a un aprendizaje memorístico.

Finalmente, Azhari (1998) menciona que se encuentran obstáculos cuando hay dos relaciones ligadas mutuamente, en donde se aplica la Ley de Conservación, es decir, si el perímetro aumenta, los estudiantes esperan que el área también lo haga.

METODOLOGÍA

Tipo, muestra, datos de contexto e instrumentos de recogida de datos

El trabajo sigue una metodología mixta, con un diseño pre-experimental (Hernández et al., 2014), basado en la implementación de una unidad de aprendizaje, con la aplicación de un pre-test y post-test, para analizar el nivel de razonamiento y el grado de adquisición en los temas de perímetro y área, según el modelo de Van Hiele.

La muestra estuvo formada por 7 estudiantes del curso multigrado de 5º y 6º básico de una escuela rural con aulas multigrado de una comuna de la Región del Maule (Chile). Entre los motivos para la selección intencionada de esta muestra se encuentran: 1) las proyecciones de los niveles de razonamiento de Van Hiele para estudiantes de 5º y 6º básico según Gutiérrez (2009); 2) la escasez de investigaciones en centros educativos con características de ruralidad y multigraduación en sus aulas; 3) por ser la Región del Maule una de las con mayor índice de pobreza, la que aumenta en el contexto rural (Chile, 2018b).

La recogida de datos se efectuó mediante la aplicación de un pre-test y un post-test, con 7 actividades de estructura y dificultad similar, sobre los temas de perímetro y área, para evaluar la mejora de los niveles de razonamiento y sus grados de adquisición alcanzados por los estudiantes. Ambos instrumentos se validaron por medio de juicio de expertos (3). En el Cuadro 4 se muestra el contenido evaluado y los niveles de razonamiento involucrados en cada actividad.

Cuadro 4: Contenido geométrico de ítems de pre-test y post-test

Ítem	Niveles		Contenido
	1	2	
1	x		Identificación de cuadriláteros
2	x		Identificación de interior y contorno de cuadriláteros
			Identificación y descripción de unidades de medida
3	x	x	Construcción de cuadriláteros
			Cálculo de perímetro y área.
4	x	x	Descomposición de figuras
			Cálculo de perímetro y área
5		x	Relación entre formas de figuras con perímetro y área
6		x	Reconfiguración de figuras
			Cálculo de perímetro y área
7		x	Construcción de cuadriláteros a partir de perímetro y área
			Identificación de propiedades de cuadriláteros

Fuente: Elaborado por los autores

Implementación de la experiencia de aula

A continuación, en el Cuadro 5, presentamos los objetivos abordados sobre los objetos de perímetro y área de los niveles 1 y 2 de razonamiento del modelo de Van Hiele, como también las fases de aprendizajes que estructuran el proceso de enseñanza.

Cuadro 5 Objetivos considerados para trabajar los objetos de área y perímetro, según nivel de razonamiento y fases de aprendizaje

Fase	Nivel 1: Reconocimiento	Nivel 2: Análisis
1	- Identifican visualmente objetos de contexto local, que tengan características comunes relacionadas con los cuadriláteros - Identifican interior y contorno de cuadrilátero - Miden interior y contorno de cuadrilátero	- Clasifican cuadriláteros según sus características - Identifican transformaciones que permitan crear cuadriláteros
2	- Miden interior de figuras a partir de cuadrículas - Miden contornos de cuadriláteros, utilizando unidades de medida no estandarizada - Construyen cuadriláteros a partir de cuadrículas	- Relacionan el área y perímetro con la forma de figura - Clasifican cuadriláteros de acuerdo a su forma de calcular perímetro y área - Obtienen área y perímetro de diferentes cuadriláteros, utilizando unidades de medida estandarizada y no estandarizada - Construyen cuadriláteros a partir de perímetros, áreas y otras características - Realizan transformaciones de cuadriláteros para calcular perímetro y áreas - Generan expresiones de cálculo de perímetro y área de cuadriláteros.

3	- Describen estrategia de conteo de cuadrículas - Describen construcciones de cuadriláteros - Explican utilización de unidades de medida no estandarizada - Explican mediciones de contornos	- Describen características de cuadriláteros - Explican los procedimientos utilizados para la construcción de cuadrículas - Explican resultados y procedimientos utilizados de cálculo de perímetro y área - Discuten sobre el cálculo de perímetro en figuras compuestas - Describen regularidades de cuadriláteros - Describen expresiones de cálculo de perímetro y área
4	- Suman áreas de cuadrilátero para obtener una mayor - Realizan transformaciones entre unidades de medida no estandarizadas - Descomponen superficies en cuadrados y rectángulos	- Modifican superficies a partir de perímetros - Relacionan regularidades que surgen a partir de duplicación de lados, en relación al perímetro y el área - Utilizan expresiones para calcular perímetro y áreas - Reconfiguran figuras para obtener cuadriláteros
5	- Realzan resumen de conceptos tratados anteriormente y describen forma de calcular perímetro y área	- Integran estrategia de arreglo rectangular para contar cuadrículas - Explican regularidades que permiten generar expresiones de cálculo de perímetro y área

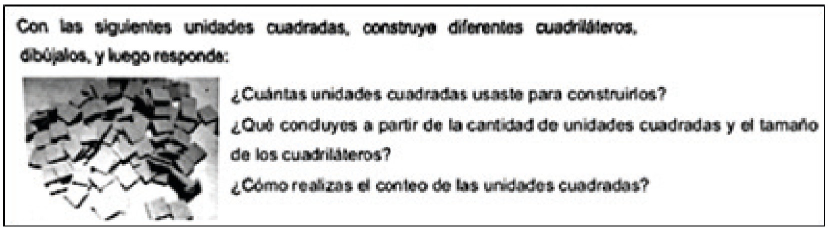
Fuente: Elaborado por los autores

Ejemplos de actividades consideradas en la unidad didáctica

Los objetivos mencionados en el punto anterior nos permitieron diseñar las actividades consideradas en la unidad didáctica, las que fueron sometidas a validación por juicio de expertos (3), previo a su implementación. A continuación, ejemplificamos y detallamos algunas de las actividades consideradas.

En la Figura 1, se muestra una actividad que aborda el concepto de área, correspondiente al nivel 1 de razonamiento. El estudiante debe construir cuadriláteros a partir unidades cuadradas entregadas, observando lo realizado y obteniendo conclusiones. Se esperaba que los estudiantes relacionaran la cantidad de unidades cuadradas utilizadas con el tamaño de la figura, explicando que entre más unidades cuadradas se utilizan para confeccionar cuadriláteros, más grandes son.

Figura 1: Actividad planteada a los estudiantes, Fase 2-Nivel 1



Con las siguientes unidades cuadradas, construye diferentes cuadriláteros, dibújalos, y luego responda:

¿Cuántas unidades cuadradas usaste para construirlos?

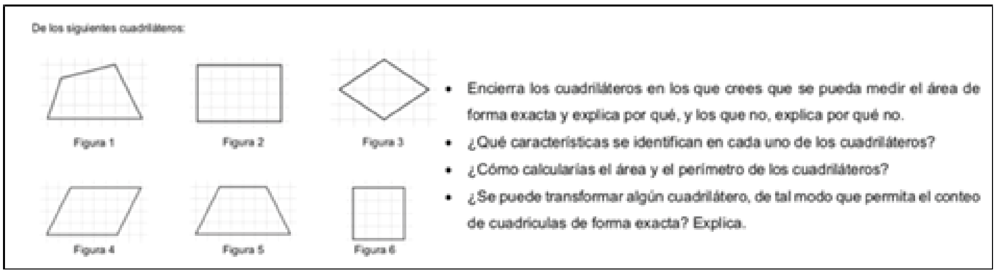
¿Qué concluyes a partir de la cantidad de unidades cuadradas y el tamaño de los cuadriláteros?

¿Cómo realizas el conteo de las unidades cuadradas?

Fuente: Elaborado por los autores

En la Figura 2 se muestra una actividad del nivel 2 de razonamiento, donde los estudiantes tienen que clasificar cuadriláteros, teniendo en cuenta los procesos iniciales al cálculo de perímetro y área, con énfasis en la reconfiguración de figuras para el conteo de unidades cuadradas y sin alterar la medida del área, y, además, observen que el perímetro puede cambiar después de aplicar las transformaciones.

Figura 2: Actividad planteada a los estudiantes, Fase 1-Nivel 2



Fuente: Elaborado por los autores

Análisis de datos

Considerando que los niveles de razonamiento se adquieren de manera gradual, en el Cuadro 6 se muestran los grados de adquisición y su cuantificación considerados por Jaime (1993).

Cuadro 6: Descripción y cuantificación de los grados de adquisición

Grado de adquisición	Característica	
Adquisición nula	No existen características del nivel	0-15
Adquisición baja	Comienzan con características métodos y exigencia del nivel, aunque su utilización es pobre	16-39
Adquisición intermedia	Los métodos de este nivel son más frecuentes y precisos, aunque no se domina, por lo que, ante situaciones complejas, se produce retroceso de nivel.	40-60
Adquisición alta	Es habitual el trabajo en este nivel, produciendo con muy poca frecuencia el retroc	61-84
Adquisición completa	Existe un dominio total de herramientas y métodos del nivel de razonamiento	85-100

Fuente: Adaptado de Jaime (1993)

Para analizar las respuestas de los estudiantes se consideraron los tipos de respuesta propuestas en el cuadro anterior, que son aplicables para ítems de desarrollo, permitiendo describir con mayor precisión el nivel de razonamiento que posee cada estudiante. Aravena y Caamaño (2013) proponen un cuadro considerando los tipos de respuestas, conocimiento matemático, grados de adquisición y ponderación de cada nivel de razonamiento, que se muestra a continuación (Cuadro 7).

Cuadro 7: Organización de los tipos de respuesta, de acuerdo al conocimiento, precisión matemática, grados de adquisición y ponderación

<table>
<tr><th rowspan="2">Tipos de respuesta</th><th colspan="2">Conocimiento y precisión matemática</th><th rowspan="2">Grado de adquisición</th><th rowspan="2">Ponderación</th></tr>
<tr><th>Incorrecto</th><th>Correcto</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Su respuesta es no codificable o no contesta</td><td>Nulo</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Respuesta inconsistente y muy incompleta</td><td></td><td rowspan="2">Bajo</td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>Respuesta muy incompleta, breve y pobre, aunque muestra inicios de cierto nivel de razonamiento</td><td>25</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>Respuesta que refleja dos niveles de razonamiento. Presentando ideas de distintos niveles que abarca la pregunta</td><td>Intermedio</td><td>50</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Respuesta muy completa, donde predomina un cierto nivel de razonamiento. La</td><td></td><td>Alto</td><td>75</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>Respuesta bastante completa, pero no llegan a responder el problema totalmente, porque hay saltos en el proceso o faltan argumentos</td><td rowspan="2">Completo</td><td>80</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>Respuesta muy completa. Da solución total al problema</td><td>100</td></tr>
</table>

Fuente: Aravena y Caamaño (2013, p. 152)

RESULTADOS

A continuación, en la Tabla 1 se detallan los resultados del pre-test y post-test de acuerdo con los grados de adquisición (en porcentaje y concepto), detallando los porcentajes generales de los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico en el estado inicial y final, de los estudiantes del curso multigrado. Al contrastar los resultados de ambas pruebas, queda en evidencia el incremento en porcentajes de los grados de adquisición alcanzado por los estudiantes en los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico. Dicha diferencia es estadísticamente significativa, según la prueba Wilcoxon para muestras relacionadas.

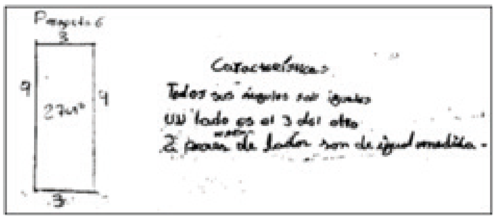
Tabla 1 - Grado de adquisición en el pre y post-test en los estudiantes del curso multigrado

Estudiante	Cursos	Pre-test				Post-test			
		Gr (Nivel 1)		Gr (Nivel 2)		Gr (Nivel 1)		Gr (Nivel 2)	
1	5º	8,9	Nulo	0	Nulo	77,8	Alto	28,3	Bajo
2	5º	25,6	Bajo	0	Nulo	79,4	Alto	41,7	Intermedio
3	5º	21,1	Bajo	16,7	Bajo	97,8	Completo	96,7	Completo
4	6º	8,9	Nulo	0	Nulo	100	Completo	89,2	Completo
5	6º	76,7	Alto	12,5	Nulo	100	Completo	93,3	Completo
6	6º	32, 2	Bajo	12,5	Nulo	100	Completo	89,2	Completo
7	6º	51,1	Intermedio	2,2	Nulo	100	Completo	88,3	Completo

Fuente: Elaborado por los autores

En la tabla anterior, en el pre-test, se puede visualizar que el estudiante 3 (5º básico) obtuvo el porcentaje más alto en el nivel 2 de razonamiento geométrico (16,7%), aunque este porcentaje corresponde a un grado de adquisición bajo. En la Figura 3 vemos la respuesta del estudiante al ítem 6 del pre-test, donde construye una figura considerando, a elección, algunas características (relaciones entre lados y ángulos) y con un perímetro y área dados, utilizando unidades de medida cuadradas para referirse al área. Si bien, reconoce características de la figura construida, no logra explicar su descripción.

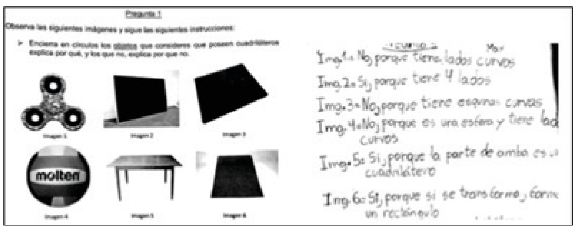
Figura 3: Respuesta al ítem 6 del pre-test



Fuente: estudiante 3

En el post-test (Tabla 8), se muestra que los estudiantes 1 y 2 (5º básico), obtienen los resultados más bajos de los niveles 1 y 2 de razonamiento, alcanzando un grado de adquisición alto del nivel 1 (77,8% y 79,4%, respectivamente), significando que dominan habitualmente este nivel, aunque, en ocasiones, hacen uso inadecuado de sus herramientas. Por ejemplo, en la Figura 4, se muestra una respuesta del ítem 1, donde, por medio de la visualización, identifica las características de cuadriláteros y no cuadriláteros, argumentando mediante atributos físicos, aunque se observan errores en la justificación relacionada a la Imagen 6: “porque si se transforma, forma un rectángulo”.

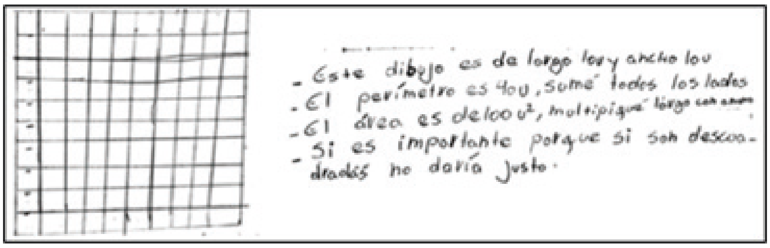
Figura 4: Respuesta al ítem 1 del post-test



Fuente: Estudiante 2

En la Figura 5, se observa un ejemplo de las respuestas del ítem 3 del post-test, donde es necesario construir un cuadrilátero para calcular perímetro y área, además de comunicar sobre las dimensiones de la figura y la importancia de las unidades cuadradas para el área. El estudiante usó adecuadamente el lenguaje, haciendo diferencias entre unidades (entre las y no cuadradas, usadas para referirse al área y perímetro, respectivamente), con expresiones como largo, ancho, lado y, también, calculando correctamente el perímetro y área.

Figura 5: Respuesta al ítem 3 del post-test



Fuente: Estudiante 3

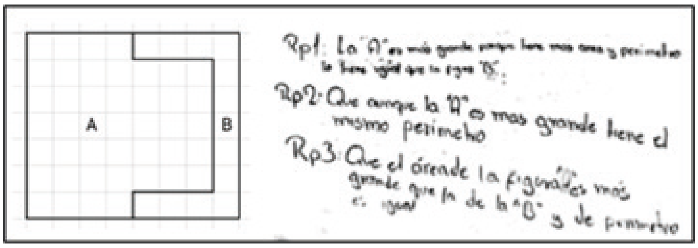
En la Figura 6, se muestra un ejemplo de respuesta del ítem 4 del post-test (cálculo de perímetro y área de una figura compuesta). En ella, el estudiante utilizó la descomposición en rectángulos como estrategias para obtener largo y ancho de figuras más pequeñas. Asimismo, obtiene medidas faltantes de los lados, para obtener el cálculo del área total, sumando las áreas de los rectángulos. Y para calcular el perímetro, multiplica la medida del lado (3 unidades) por las veces que se repite (6) y luego suma con los demás. Si bien, el estudiante emplea lenguaje acorde a su nivel educativo, señalando unidades de medida cuadrada para referirse al área, confunde *lado* por *rectángulo* al justificar sus procedimientos y no utiliza unidades para referirse a la medida de perímetro.

Figura 6: Respuesta al ítem 4 del post-test

Fuente: Estudiante 4

En la Figura 7, se expone un ejemplo de respuesta al ítem 5 del post-test, donde los estudiantes tienen que comparar la forma de dos figuras, enfocándose en el cálculo de perímetro y área para obtener conclusiones. En este caso, el estudiante logra calcular correctamente el área de ambas figuras, señalando que una es más grande que otra, porque tiene mayor área. Asimismo, se da cuenta que, a pesar de que el área es distinta, el perímetro es el mismo. Desde el punto de vista de los niveles de razonamiento, esta respuesta contiene el uso de definiciones matemáticas propias del nivel 2 que, a través de su uso, logra obtener conclusiones. Y, por último, el estudiante identifica que, en las figuras compuestas, la relación entre el perímetro y el área puede cambiar respecto a las que tienen la misma forma, es decir, puede no darse que, a mayor área, mayor sea el perímetro.

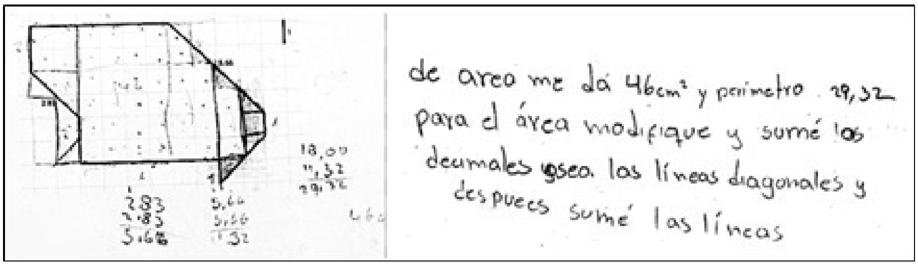
Figura 7: Respuesta al ítem 5 del post-test



Fuente: Estudiante 5

En la respuesta que vemos a continuación (Figura 8), el estudiante realiza una reconfiguración, de tal modo que las pintadas (5 triángulos y 1 cuadrado) fueron *trasladadas* y/o *rotadas,* para realizar el cálculo de área, teniendo en cuenta las unidades de medida cuadrada. De acuerdo con los niveles de razonamiento, el estudiante logra calcular correctamente el perímetro, utilizando la figura original, pero no usa unidades de medición.

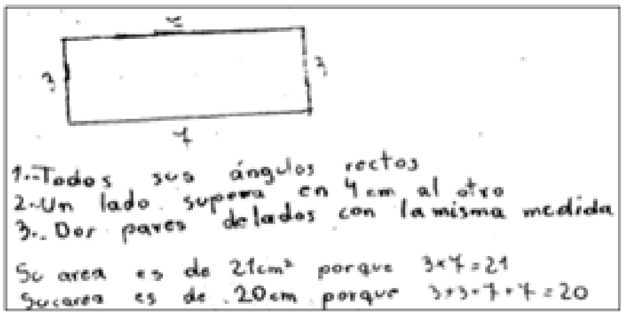
Figura 8: Respuesta al ítem 6 del post-test



Fuente: Estudiante 5

Finalmente, en la Figura 9, se muestra un ejemplo de respuesta del ítem 7, donde se construyó un rectángulo, a partir de un perímetro y un área dados, señalando sus características, pero sin justificarlas. Realiza correctamente los cálculos de perímetro y área, utilizando las unidades de medida correspondientes.

Figura 9: Respuesta al ítem 7 del post-test



Fuente: Estudiante 6

CONCLUSIONES

Con este trabajo quisimos explorar el impacto de una unidad didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros, de acuerdo con los niveles de razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele, y sus grados de adquisición, en una escuela rural con aulas multigrado. Para ello, consideramos actividades de respuesta abierta (Jaime, 1993), porque permiten realizar análisis más profundos y aproximarnos, de mejor forma, al pensamiento de los estudiantes; así como, hacer posible la generación y aplicación de problemas de contexto propio de la ruralidad, utilizando materiales y superficies del entorno más próximo.

Además, por tratarse de un curso multigrado, con estudiantes de diferentes niveles educativos (5º y 6º básico), permite la interacción de estos al momento de resolver un problema, haciendo posible que, los de menor edad tengan las mismas oportunidades de conocimiento y razonamiento de los cursos superiores; y, es probable, que los mejores resultados no sean necesariamente obtenidos por estudiantes de 6º básico. Asimismo, es importante señalar que, en este tipo de escuela, al tener una cantidad reducida de estudiantes por aula, se permite una mayor interacción entre ellos y el profesor, facilitando los procesos de enseñanza y de aprendizaje, ya que estos se realizan de una forma personalizada.

Por otra parte, las actividades propuestas permitieron abordar las problemáticas frecuentes respecto a la comprensión de los conceptos de perímetro y área que se han descrito en la literatura (Azhari, 1998; Moreira y Comiti, 1994; Rogalski-Muret, 1979; Tierney et al., 1990).

Los resultados previos a la intervención muestran que los estudiantes no alcanzan los grados de adquisición de los niveles de razonamiento propuestos por Gutiérrez (2009), es decir, no se encuentran en la transición entre el nivel 1 y 2 de razonamiento en el curso de 5º básico, y los de 6º básico no inician con el nivel 2. En el post-test, en cambio, se observa una mejora en los resultados, evidenciados en un incremento en los porcentajes de grados de adquisición de los niveles 1 y 2 del curso multigrado. En promedio, los mejores resultados se obtuvieron en el curso superior (6º básico), alcanzando una adquisición completa de ambos niveles de razonamiento, aunque un estudiante de 5º básico obtuvo los mejores resultados. Además, hay que considerar que, si bien se obtuvieron los grados de adquisición completa respecto al nivel 2 de razonamiento, ninguno de los estudiantes logra el 100% de este nivel, pudiendo dominar los métodos y herramientas que les permiten resolver problemas de perímetro y área, aunque puede haber errores en respuestas o falta de información.

Por tanto, al finalizar la intervención, se puede concluir que el modelo de Van Hiele permite mejorar los aprendizajes respecto al tema de geometría y medición en escuelas rurales con aulas multigrados, como lo evidencian los resultados del pre-test y post-test.

Teniendo en cuenta las escasas investigaciones en el contexto rural referido al modelo de Van Hiele, así como los positivos resultados de esta experiencia sobre el aprendizaje del perímetro y el área de cuadriláteros, creemos que es necesario continuar este trabajo considerando otros temas geométricos en este mismo tipo de escuelas.

REFERENCIAS

ARAVENA, M. y CAAMAÑO, C. Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *RELIME, 16*(2), 139-178.

ARAVENA, M., GUTIÉRREZ, Á. y JAIME, A. (2016). Estudios de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 107-128.

AZHARI, N. (1998). *Using the intuitive rule "same of A, same of B" in conservation tasks*. Tel Aviv University.

BARRANTES-LÓPEZ, M., LÓPEZ-LÓPEZ, M. y FERNÁNDEZ-LENO, F. (2014). Las representaciones geométricas en los libros de textos utilizados en la Comunidad Autónoma de Extremadura. *Campo Abierto. Revista de Educación, 33*(1), 97-116.

BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48.

BURGER, W. F. y SHAUGHNESSY, J. M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry. Final report*. Oregon State University.

CAMPILLO, P. y PÉREZ, P. (1998). La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas, 6*(1), 69-80.

CHILE (2012). *Resultados TIMSS 2011 Chile. Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias.* MINEDUC y TIMSS & PIRLS.

CHILE (2017). *Informe Nacional: TIMMS 2015*. Agencia de Calidad de la Educación.

CHILE (2018a). *Bases Curriculares: Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

CHILE (2018b). *Informe de Desarrollo Social 2018*. Ministerio de Desarrollo Social.

CHILE (2019). *Informe de Resultados educativos: Docentes y Directivos Educación Básica 2018*. Agencia de la Calidad de la Educación.

CORCHÓN, E. (2000). *La escuela rural: pasado, presente y perspectivas de futuro*. Oikos-Tau.

CORCHÓN, E. (2005). *La escuela en el medio rural: modelos organizativos*. Da Vinci Continental.

D'AMORE, B. y FANDIÑO, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *RELIME, 10*(1), 39-68.

ESTEBAN, P. V. y LLORENS, J. L. (2003). Aspectos comparativos en la extensión den modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *Suma, 44*, 45-52.

FRIPP, A. (2012). Enseñanza de la geometría en la escuela primaria. Cómo entrelaza el maestro, en sus prácticas, la matemática, el contexto y sus alumnos. *Cuadernos de Investigación Educativa, 3*(18), 55-63.

FUYS, D., GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988). *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents*. NCTM.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y ROA, R. (2004). *Didáctica de la Matemática para maestros: Proyecto Edumat-Maestros*. GAMI.

GUTIÉRREZ, A. (Ed.). (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. MEC.

GUTIÉRREZ, A. (2009) Un enfoque didáctico de la enseñanza de la demostración matemática. Talca: Universidad Católica del Maule (Conferencia en marco del Proyecto Fondecyt 1090617).

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: los giros. *Educación Matemática, 3*(2), 49-65.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2-3), 27-46.

HERNÁNDEZ, R., FERNÁNDEZ, C. y BAPTISTA, M. P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.

HINOJO, F., RASO, F. y HINOJO, M. (2010). Análisis de la organización de la escuela rural en Andalucía: problemática y propuestas para un desarrollo de calidad. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 8*(1), 79-105.

JAIME, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. LLINARES y M. V. SÁNCHEZ (Eds.), *Teoría y práctica en educació*n matemática (295-384). Alfar.

JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Síntesis.

JARAMILLO, C. M. y PÉREZ, P. (2001). La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele. *Educación Matemática, 13*(1), 68-80.

LAND, J. E. (1990). *Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions*. Boston

University.

LLORENS, J. L. (1996). Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *Suma, 22*, 13-24.

MOREIRA, P. y COMITI, C. (1994). Difficultés rencontrés par des élèves de cinquième en ce qui conceme la dissociation aire/périmètre pour des rectangles. *Petit x, 34*, 5-29.

PRAT, M. (2015). *Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área* (Tesis doctoral). Universitat Politècnica de València, España.

PYSKALO, A. M. (1968). *Geometry in grades 1-4: problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades*. Prosveshchenie.

ROGALSKI-MURET, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications. Les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP, 320*, 563-586.

TIERNEY, C., BOYD, C. y DAVIS, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. En G. BOOKER, P. COBB, T. N. MENDICUTI (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (307-315). IGPME.

TREFFERS, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas Project*. Reidel.

USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. University of Chicago.

VAN HIELE, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Países Bajos.

VAN HIELE-GELDOF, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of secondary school* (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Países Bajos.

WIRSZUP, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En J. L. MARTIN y D. A. BRADBARD (Eds.), *Space and geometry. Papers from a Research Workshops* (pp. 75-97). ERIC Center for Science, Mathematics and Environment Education.

COMO CITAR — APA

BUSTAMANTE-VALDÉS, M., CAAMAÑO, C., LODHI, A., & DÍAZ-LEVICOY, D. (2024). Aplicación del modelo de Van Hiele al estudio de los conceptos de perímetro y área en una escuela rural con aulas multigrado. *PARADIGMA*, *XLV*(1), e2024009. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024009.id1338.

COMO CITAR — ABNT

BUSTAMANTE-VALDÉS, Matías; CAAMAÑO, Carlos; LODHI, Atif; DÍAZ-LEVICOY, Danilo. Aplicación del modelo de Van Hiele al estudio de los conceptos de perímetro y área en una escuela rural con aulas multigrado. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, n. 1, e2024009, Ene./Jun., 2024. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024009.id1338.

HISTÓRICO
Submetido: 04 de marzo de 2023.
Aprovado: 01 de Diciembre de 2023.
Publicado: 30 de Enero de 2024.

EDITORES
Fredy E. González
Luis Andrés Castillo

ARBITROS
Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres