Sentidos asignados a ecuaciones algebraicas. El caso de profesores de matemáticas

Gladys Mejía Osorio
gmejiao@educacionbogota.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-5759-5688
Secretaría de Educación Distrital de Bogotá (SED)
Bogotá, Colombia

Pedro Javier Rojas Garzón
pjrojasgarzon@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9694-4609
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD)
Bogotá, Colombia

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Los resultados presentados en este documento hacen parte de una investigación que se desarrolló en el marco del Doctorado en Educación de la Universidad Francisco José de Caldas (Colombia), la cual estuvo orientada a indagar sobre posibles similitudes entre las dificultades que los profesores y los estudiantes encuentran en su trabajo con diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. Se muestra las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, relacionadas con una tarea sobre interpretaciones de ecuaciones. Se evidenció que los profesores reconocen la equivalencia sintáctica entre dichas expresiones, pero no su equivalencia semántica, pues al dotarlas de sentido y significado las asocian con objetos matemáticos diferentes, basados en que las ecuaciones tienen formas diferentes; estas dificultades resultan similares a las identificadas en estudiantes. En el análisis de los datos se emplean algunos lineamientos metodológicos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).
Palabras clave: Articulación de sentidos; Tratamiento; Equivalencia; Semántica; Sintáctica.

Sentidos atribuídos às equações algébricas. O caso dos professores de matemática

Resumo

Os resultados apresentados neste documento fazem parte de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Doutorado em Educação da Universidade Francisco José de Caldas (Colômbia) que foi orientada a investigar possíveis semelhanças entre as dificuldades que professores e alunos encontram em seus trabalhar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Mostram-se as dificuldades encontradas por um grupo de professores de matemática para articular os significados atribuídos às representações semióticas obtidas por tratamento, relativas a um trabalho de interpretação de equações. Evidenciou-se que os professores reconhecem a equivalência sintática entre essas expressões, mas não sua equivalência semântica, pois ao dar-lhes sentido e significado, associam-nas a diferentes objetos matemáticos, pelo fato de as equações possuírem formas distintas; essas dificuldades são semelhantes às identificadas nos alunos. Na análise dos dados, são utilizadas algumas diretrizes metodológicas propostas pela Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS).
Palavras chave: Articulação dos sentidos; Tratamento; Equivalência; Semântica; Sintaxe.

Senses assigned to algebraic equations. The case of mathematics teachers

Abstract

The results presented in this document are part of an investigation that was developed within the framework of the Doctorate in Education at the Francisco José de Caldas University (Colombia), which was oriented to investigate possible similarities between the difficulties that teachers and students encounter in their work with different representations of same mathematical object. It shows the difficulties encountered by a group of mathematics teachers to articulate meanings assigned to representations. Semiotics obtained through treatment, related to a task on interpretations of equations. It was evidenced that teachers recognize the syntactic equivalence between these expressions, but not their semantic equivalence, since by giving them sense and meaning they associate them with different mathematical objects, based on the fact that the equations have different forms. These difficulties are similar to those identified in students. In the analysis of the data, some methodological guidelines proposed by the Ontosemiotic Approach of Cognition and Mathematics Instruction (EOS) are used.
Keywords: Articulation of senses; Treatment; Equivalence; Semantics; Syntax.

Introducción

En la última década diversos estudios en Didáctica de las Matemáticas resaltan la importancia que tienen los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que las representaciones semióticas son la única vía para acceder y manipular los objetos matemáticos. Al respecto, Duval (1993, 2017) plantea que los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y a su vez posibilitan una manipulación sobre estos, en virtud de ello uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se centra en que tanto estudiantes como profesores reconozcan un objeto matemático por medio de diferentes representaciones semióticas, que les posibilite expresar y representar ideas matemáticas, así como transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra, tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que este autor denomina *tratamientos* y *conversiones*, respectivamente.

Duval (1999, 2017) destaca que usualmente los problemas cognitivos están relacionados con la *conversión*, pues enfatiza en la complejidad semiótica que conlleva el reconocimiento de un mismo objeto a través de diferentes representaciones. D'Amore (2006), por su parte, resalta la necesidad de realizar una precisión a la teoría propuesta por Duval quien relaciona en gran parte las dificultades de las matemáticas con la conversión dejando de lado los tratamientos, considerados por muchos matemáticos y educadores decisivos para el trabajo matemático, que también pueden generar dificultades en la comprensión de objetos matemáticos por parte de los sujetos, y pueden ser un problema relevante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

D'Amore (2006) reporta la experiencia que ha tenido con algunos estudiantes quienes frente a una representación simbólica de un objeto matemático le asignan un cierto sentido y realizan de manera adecuada transformaciones a dicha representación, en el interior del respectivo sistema semiótico de representación, obteniendo otra representación del objeto a la cual le asignan un nuevo sentido, pero éste no es relacionado con el sentido inicial, aspecto que permite concluir que en matemáticas las transformaciones de tratamiento podrían ser causa de dificultades en la aprehensión de objetos matemáticos por parte de los aprendices, fenómeno que produce que una persona que realiza correctamente transformaciones semióticas de tratamiento pasando de una representación semiótica a otra de un mismo objeto matemático, y conservando el registro semiótico, atribuye significados diversos a las dos "escrituras" o representaciones, hecho que evidencia que el significado asignado intuitivamente al objeto O cambia o no se relaciona con el inicialmente dado en la mente de un estudiante, lo que este autor ha denominado *cambio de sentido* y Rojas (2012) sugiere denominar *no articulación semiótica*.

D'Amore (2006) planteó la necesidad de investigaciones que, por un lado, centren la atención en los *tratamiento*s en diferentes poblaciones y, por otro lado, permita profundizar y clarificar el fenómeno desde una óptica antropológica o, mejor aún, pragmática en tanto este fenómeno se presenta independiente de la formación académica de los sujetos quienes encuentran algunas dificultades al abordar situaciones que requieren la aplicación de tratamientos las cuales impiden la comprensión de objetos matemáticos. En virtud de ello, el presente estudio centra la atención en las dificultades identificadas en profesores y en estudiantes asociadas con la transformación semiótica de tratamiento en contextos matemáticos; por una parte reporta dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático (obtenidas mediante tratamiento) al abordar tareas específicas y, por otra, presenta evidencias sobre similitudes con las dificultades que se han identificado en estudiantes al resolver el mismo tipo de tareas, reportadas en investigaciones previas (SANTI, 2011; ROJAS, 2012).

1. Fundamentación teórica

El estudio se ubica en un enfoque filosófico pragmático, en tanto se reconoce que la experiencia humana juega un papel fundamental en la constitución e interpretación de los signos. Dentro de este enfoque los objetos matemáticos son considerados símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas que caracterizan a la pragmática humana y que son modificados continuamente en el tiempo, con relación a los intereses y necesidades de los sujetos (D'AMORE; GODINO, 2007).

A continuación, se presentan algunas nociones y constructos básicos del EOS que han sido fundamento teórico y una herramienta en el análisis de las producciones realizadas por el grupo de profesores en esta investigación, bajo este enfoque se considera el *objeto matemático* como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas (GODINO, 2002). La *práctica matemática* es asumida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (GODINO, et al., 2012).

En la práctica matemática se reconocen seis tipos de objetos primarios (FONT, GODINO; GALLARDO, 2013): (1) *Lenguaje* (términos, expresiones, gráficos, etc.); (2) *Conceptos* (mediante definiciones o descripciones); (3) *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos); (4) *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas, etc.); (5) *Situaciones* (problemas, tareas, ejercicios, etc.); y (6) *Argumentos* (validan las proposiciones y procedimientos). Los anteriores objetos se interrelacionan entre sí, en tanto los conceptos, proposiciones y procedimientos describen lo que se denominan las «ideas» del triángulo epistemológico[1], que a su vez se relacionan con los símbolos del lenguaje (significantes). Las situaciones y argumentos pueden ser entendidos como los contextos o los objetos de referencia. Esta interrelación entre los objetos primarios permite profundizar en la naturaleza de los objetos de una manera dinámica y pragmática, donde se establecen vínculos entre ellos y sus atributos complementarios. Así mismo, las relaciones entre los seis objetos primarios determinan las *configuraciones*, definidas por Godino, Batanero y Font (2008) como:

> las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, que son activadas por los sujetos, que a su vez son herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. (p.8)

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales (GODINO, 2002): personal – institucional; ostensivo – no ostensivo; expresión – contenido; extensivo – intensivo (ejemplar – tipo); y unitario –

[1] Triángulo alumno – maestro– saber, entendido como modelo sistémico de la «didáctica fundamental».

sistémico. En este estudio el análisis se centra en la faceta *expresión-contenido*, debido a que permite clasificar las relaciones que establecen los sujetos por medio de las funciones semióticas. En términos de funciones semióticas, Rojas (2012) asume la *articulación semiótica* como el proceso de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que se relacionan entre sí; de manera análoga se asume la no articulación semiótica como el proceso interrumpido de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que no se logran relacionar entre sí. Los sentidos asignados a un objeto son dinámicos, dependen del tiempo y del contexto en que se aborda, así como de cada sujeto, es decir, no son únicos ni estables (ROJAS, 2012). Se comparte con este autor que el sentido de un objeto es el contenido que tiene al objeto primario como antecedente/expresión de la función semiótica. Tal y como se relaciona a continuación:

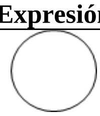
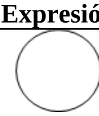
Tabla 1 – Sentido asignado a un objeto matemático primario

Antecedente/Expresión	**Consecuente/Contenido**
Objeto Primario	Sentido del Objeto Primario

Fuente: Rojas (2012)

Un mismo objeto primario puede tener diferentes sentidos. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia, los resolutores recurren a diferentes referencias para designar al mismo objeto.

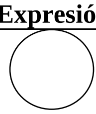
Tabla 2 – Diferentes sentidos de un objeto que se espera que los resolutores construyan

Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	**Antecedente/ Expresión**	**Consecuente/ Contenido**
 **Sentido 1**	Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro	 **Sentido 2**	Puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2$=r^2

Fuente: Rojas (2012

En los esquemas anteriores se muestran diferentes sentidos que pueden ser asignados a la misma referencia *circunferencia.* Se produce una articulación de sentidos o *articulación semiótica* cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo *objeto matemático,* es decir, cuando uno de los sentidos (consecuente/contenido) del objeto primario se convierte en antecedente/expresión de una nueva función semiótica que tiene como consecuente/contenido a otro sentido de dicho objeto. Por ejemplo, en el siguiente caso se muestra la relación de dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático.

Tabla 3 – Articulación de sentidos mediante funciones semióticas

Antecedente/Expresión		
Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	**Consecuente/ Contenido**
	Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro **Sentido 1**	Puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2$=r^2 **Sentido 2**

Fuente: Rojas (2012)

Como se evidencia en el anterior ejemplo, se relaciona dos sentidos diferentes "puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro" y "puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2$=r^2" que corresponden al consecuente/contenido de la nueva función semiótica que un sujeto puede establecer. En este caso particular, se tiene un objeto matemático primario al que se le asignan dos sentidos; estas funciones semióticas se pueden reducir a una sola que pone en relación tales sentidos (articulación semiótica), como se muestra a continuación:

Tabla 4 – Ejemplo de una función semiótica, como articulación de sentidos (simplificada)

Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**
Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro	Puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2$=r^2

Fuente: Rojas (2012)

En palabras de Rojas (2012) la articulación es el resultado de la concatenación de dos funciones semióticas, es decir, se origina una articulación de sentidos cuando se establece una nueva función semiótica en la que una de las dos funciones semióticas anteriores juega el papel de antecedente/expresión. Las representaciones de un mismo objeto matemático, obtenidas por transformaciones semióticas de tratamiento, pueden ser relacionadas mediante funciones semióticas; reconociendo, además de la equivalencia sintáctica entre estas, que el sentido asignado a una de ellas puede ser asignado a la otra (equivalencia semántica). Por ejemplo, en el registro algebraico, al aplicar procedimientos y reglas a la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$, ésta se puede transformar en $x+y=\frac{1}{x+y}$, o viceversa, y establecer una función semiótica al reconocer una equivalencia sintáctica entre dichas expresiones:

Tabla 5 – Transformación tipo tratamiento. Equivalencia de ecuaciones

Antecedente/Expresión	Consecuente/ Contenido
$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$ $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x + y}}$	Son equivalentes

Fuente: Rojas (2012)

Una vez establecida la equivalencia sintáctica de las expresiones (un objeto primario con dos representaciones), en tanto una de ellas es obtenida a partir de la otra como resultado de un proceso de tratamiento, se les puede asociar el mismo sentido (el mismo consecuente/contenido), es decir, reconocer así su equivalencia semántica:

Tabla 6 – Asignación de un mismo sentido a objetos matemáticos primarios

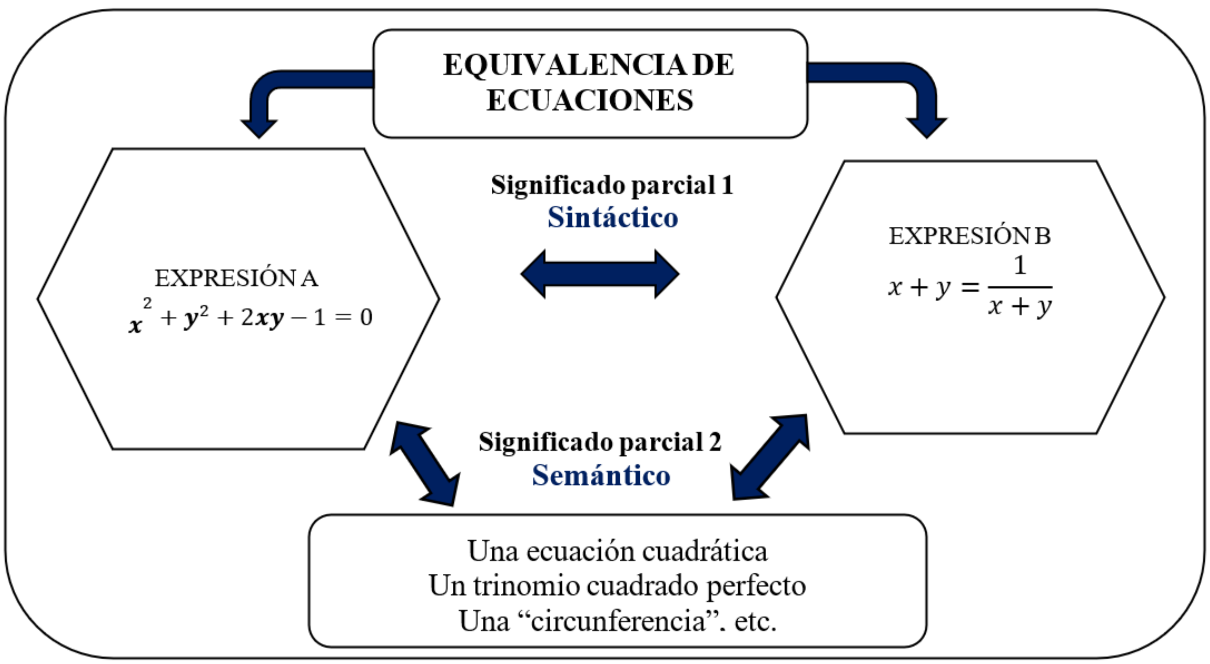
Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido	Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Es una “circunferencia”	$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x + y}}$	Es una “circunferencia”

Fuente: Rojas (2012)

En este caso, al asignar el mismo *consecuente/contenido* a dos objetos primarios, se origina una articulación de sentidos. Cuando el sentido asignado a una representación semiótica no se articula con el sentido asignado posteriormente a otra representación semiótica obtenida de ésta mediante tratamiento, se evidencia la no articulación semiótica, en tanto las representaciones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes; por ejemplo, cuando en el caso antes mencionado se reconoce la equivalencia sintáctica de las dos expresiones; sin embargo, mientras la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ es reconocida como una “circunferencia”, la segunda expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no es reconocida como tal (es necesario reiterar que si bien estas expresiones no representan una *circunferencia* este trabajo no se centra en si sus interpretaciones son adecuadas sino en analizar si logran establecer una articulación semiótica de estas). ´

Reconocemos que en cualquier transformación tipo tratamiento subyace la noción de equivalencia, en este caso mediante la aplicación de procedimientos y reglas a una expresión algebraica se posibilita obtener otra equivalente. Al respecto, y siguiendo planteamientos del EOS, se considera que en la equivalencia se encuentran presentes dos fuentes de significados parciales: *sintáctico* y *semántico*, así como su necesaria articulación, lo cual brinda elementos para establecer que dos expresiones son equivalentes más allá de la aplicación de reglas. Desde la visión sintáctica, se dice que dos expresiones son equivalentes cuando éstas tienen una reescritura numérica o algebraica común, la cual puede ser obtenida por medio de la aplicación de propiedades algebraicas conocidas (conmutativa, asociativa, distributiva, identidades notables, simplificación, etc.). Desde su aspecto semántico, se dice que dos expresiones son equivalentes cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales y en el que, además, se puede decir que estos dos significados son el mismo, por ejemplo, en la tarea propuesta, los profesores asignan interpretaciones a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, asociadas a la forma de la expresión, admiten que ésta es equivalente a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ (equivalencia sintáctica); y desde su aspecto semántico dichas expresiones toman el mismo valor contextual, interpretadas como una ecuación cuadrática, un trinomio cuadrado perfecto, una "circunferencia" (no corresponda a una circunferencia, pero interesan las relaciones entre interpretaciones), etc.

Figura 1 – Equivalencia de Ecuaciones



Fuente: Adaptado de Chalé-Can, Font & Acuña (2017

En el caso que se reporta, si bien los profesores admiten la equivalencia entre las dos expresiones obtenidas mediante tratamiento (desde lo sintáctico) no realizan el mismo reconocimiento desde lo semántico; por ejemplo, plantean que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser una “circunferencia” en tanto no tiene sus variables elevadas al cuadrado o que presenta restricciones para los valores que éstas pueden tomar.

2. Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (RODRÍGUEZ; GIL; GARCÍA, 1996; GOETZ; LECOMPTE, 1988), el cual resulta pertinente para analizar los sentidos asignados a representaciones semióticas y las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas en ejercicio para relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas que se obtienen mediante tratamiento, lo que ha sido denominado como articulación semiótica (ROJAS, 2012, 2014). Es un estudio *descriptivo* en tanto, se relacionan elementos fundamentales de las producciones realizadas por los profesores de matemáticas en su proceso de significación en situaciones que requieren transformaciones de tratamiento, y es *interpretativo* puesto que, dichas producciones son analizadas a la luz de los referentes teóricos presentados. Para estudiar el fenómeno de la *articulación de sentidos* o *articulación semiótica* se realizó un *estudio de caso colectivo*, debido que, el fenómeno a estudiar tiene múltiples variables (STAKE,1994) como la formación matemática de los profesores de matemáticas que incide en el lenguaje matemático utilizado, los signos empleados, los significados que otorgan a estos, las representaciones movilizadas, las que son movilizadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los significados personales otorgados a los diferentes objetos matemáticos, la visión epistemológica y ontológica de las matemáticas, etc.

2.1 Participantes

Para el caso específico de la tarea relacionada con ecuaciones, se contó con 32 profesores de educación básica secundaria, se seleccionaron aquellos profesores que aplicaron una serie de procedimientos y reglas matemáticas (tratamientos) que les permitió reconocer la equivalencia sintáctica de las ecuaciones, pero desde el aspecto semántico no relacionaron entre sí los sentidos asignados a dichas expresiones o significados parciales, en tanto las relacionaron con objetos matemáticos diferentes, es decir, no establecieron una articulación semiótica. Este criterio permitió tener una población final de 11 profesores que conformaron un estudio de caso y para el análisis de la tarea propuesta se muestran las producciones de 4 profesores, quienes son relacionados como Profesor-B -C -D y -F.

2.2 Instrumentos de análisis

(Tarea – Interpretaciones de ecuaciones). *En lo que sigue, asuma que* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:
$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$
2. ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$?
   (a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente (ítem 1), y luego respóndala.

¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$, es ______________________________ ?

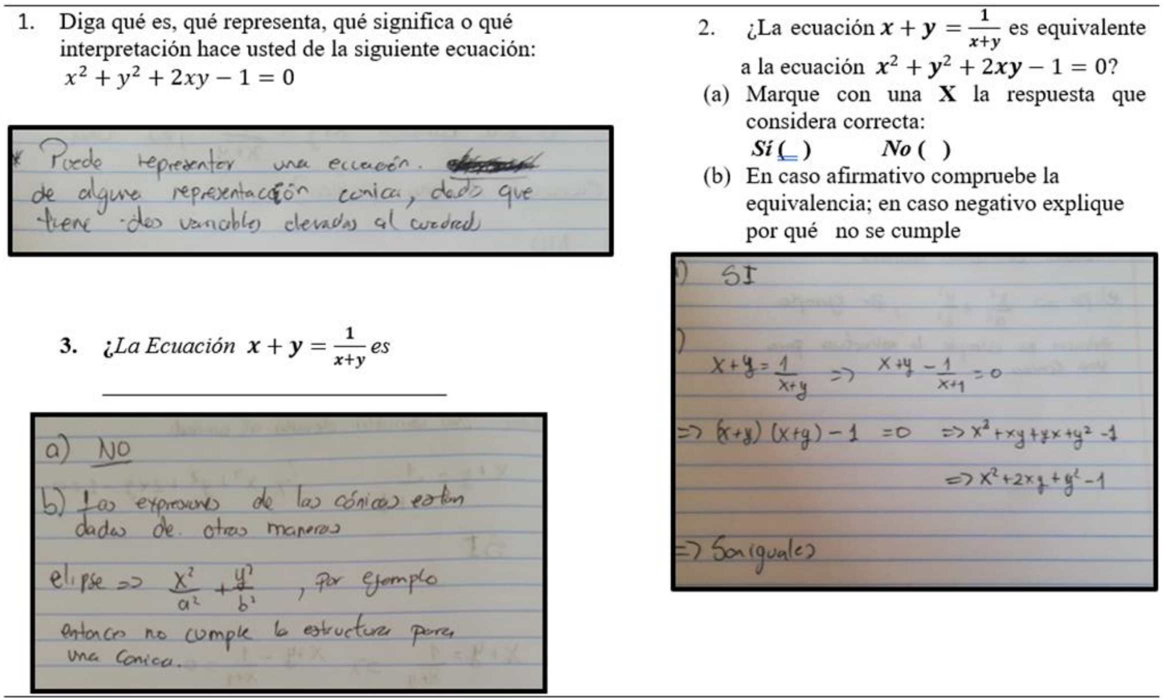
   (a) Marque con una **X** la respuesta que considere correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

Los análisis y resultados presentados en este documento corresponden a una tarea sobre interpretación de ecuaciones, la cual fue trabajada previamente por Rojas (2012) con estudiantes de educación media (16-17 años). La tarea presenta la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, que corresponde a una "cónica degenerada" (dos rectas paralelas). Cabe señalar que algunas personas pueden aludir que en las evidencias que aquí se presentan los profesores no reconocen desde lo sintáctico la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, en tanto, el sentido asignado inicialmente no corresponde con el significado institucionalmente establecido, aspecto importante pero no relevante para este estudio, puesto que se desea mostrar la relación establecida entre los sentidos asignados a las expresiones y que estos pueden estar asociados con su "forma", desde la cual puede ser una ecuación cuadrática, un polinomio o, incluso, una "circunferencia" (basados, por ejemplo, en las variables identificadas y sus exponentes); por su parte, la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ puede ser relacionada con una ecuación lineal o la suma de números reales igual a su inverso.

2.3 Análisis de la información

Se seleccionaron aquellos profesores que reconocen desde el aspecto sintáctico la equivalencia de las ecuaciones $x + y = \frac{1}{x+y}$,y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, ya que a partir de una de ellas se puede obtener la otra (realizando transformaciones de tratamiento a la ecuación inicial), pero no reconocen la equivalencia desde el aspecto semántico, en tanto las expresiones son relacionadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes, impidiendo que relacionen entre sí los dos sentidos asignados. Por ejemplo, en la siguiente producción se muestra que el profesor reconoce la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, pero no la equivalencia semántica de éstas, es decir, no relacionan entre sí, los sentidos asignados a dichas expresiones, ver Figura 2.

Figura 2 – Producción de un profesor secundaria



1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$

* Puede representar una ecuación ~~[illegible]~~ de alguna representación conica, dado que tiene dos variables elevadas al cuadrado

3. *¿La Ecuación* $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ *es* ________________

a) NO

b) Las expresiones de las cónicas estan dadas de otras maneras

elipse ⇒ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, por ejemplo

entonces no cumple la estructura para una conica.

2. ¿La ecuación $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a la ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$?

(a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta:

Si (_) ***No*** ( )

(b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple

a) SI

b) $x+y = \frac{1}{x+y} \Rightarrow x+y - \frac{1}{x+y} = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x+y) - 1 = 0 \Rightarrow x^2+xy+yx+y^2-1$

$\Rightarrow x^2+2xy+y^2-1$

⇒ Son iguales

Fuente: Producción del profesor secundaria-6

Así mismo, con los profesores que conforman el estudio de caso colectivo, se realizó una serie de entrevistas semiestructuradas con el fin de identificar posibles similitudes o diferencias entre los argumentos dados por ellos y los planteados por estudiantes a esta misma tarea, así como las dificultades reportadas en la literatura. Para el desarrollo de las entrevistas se diseñó un guion que contenía una serie de preguntas asociadas con esta tarea; además, cada entrevista se realizó «en positivo», en tanto en el desarrollo de éstas no se cuestionó la respuesta dada o la selección realizada por cada profesor, sino que se indagó sobre los motivos que lo llevaron a tomar dicha decisión; por ejemplo, se indagó sobre los elementos que permitieron establecer que la interpretación asignada a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ difería de la interpretación realizada a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$.

En particular, se presentan los resultados obtenidos a partir de las producciones realizadas por los profesores -B -C -D y -F, para lo cual se hizo uso de algunos elementos del análisis ontosemiótico propuesto por el EOS (GODINO, 2002) identificando en las soluciones las prácticas matemáticas desarrolladas por los profesores, las configuraciones cognitivas y las relaciones que estos establecen por medio de las funciones semióticas. Se considera que estos elementos permiten describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios que intervienen en la práctica matemática (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que son activados en las configuraciones cognitivas, con el fin identificar y caracterizar las dificultades que encuentran los profesores para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento por medio de las relaciones que ellos establecen.

3. Resultados

Por medio de una tabla que sintetizan las configuraciones cognitivas activadas por el grupo de profesores, que relaciona los seis objetos primarios que emergen en la solución de la tarea y que ponen en evidencia los sentidos otorgados por estos profesores a las representaciones semióticas, así como las dificultades que éstos encuentran para relacionar los sentidos otorgados. A continuación, se presenta una síntesis del trabajo realizado por el grupo de profesores de matemáticas de secundaria.

Tabla 7 – Configuraciones Cognitivas Activadas por el Grupo de Profesores de Secundaria

SITUACIÓN

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

2. ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$?

(a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**

¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es ______________________________ ?

Docente	Lenguaje	Conceptos	Proposiciones	Procedimientos	Argumentos
Secundaria-B	Ecuación de segundo grado Igualdad Conjuntos de puntos en el plano $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x+y}$	Ecuación Conjunto Equivalencia	Inverso multiplicativo e inverso aditivo [implícito]	Aplicación de transformaciones algebraicas.	**Tesis:** La expresión pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado. **Razón:** No, aunque son expresiones equivalentes la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene más restricciones en su dominio $x + y \neq 0$.
Secundaria-C	Circunferencia Centro Igualdad Lugar geométrico	Ecuación de una circunferencia Equivalencia	Inverso multiplicativo e inverso	Aplicación de transformaciones algebraicas.	**Tesis:** La expresión pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado.

	Conjunto de puntos $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x+y}$		aditivo [implícito]		**Razón:** No, puesto que, la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =$y $x\ + y = \frac{1}{x+y}$, tienen unas restricciones respecto a los valores que puede tener x e y, en los números reales es decir que $x \neq -y$.
Secundaria-D	Polinomio de segundo grado Diferencias de cuadrados Ecuación lineal Igualdad Opuesto aditivo Suma de dos números reales $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x+y}$	Polinomio Ecuación Equivalencia	Inverso multiplica-tivo e inverso aditivo [implícito] . .	Aplicación de transforma-ciones algebraicas	**Tesis:** La expresión corresponde a un polinomio de segundo grado. **Razón:** No, puesto que expresa una igualdad de dos ecuaciones lineales con $x \neq -y$ o $y \neq -x$ o puede ser interpretada como la suma de dos números reales que, en este caso, es igual a su opuesto de esa suma.
Secundaria-F	Sección Cónica Ecuación de segundo grado $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x+y}$	Ecuación de una cónica Equivalencia	Inverso multiplica-tivo e inverso aditivo [implícito]	Aplicación de transforma-ciones algebraicas	**Tesis:** La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una ecuación de una cónica **Razón:** No, tiene la forma de una ecuación cónica.

Fuente: Elaboración de los autores

El profesor [secundaria-B] relaciona la expresión $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una ecuación de segundo grado, y la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, con una igualdad entre dos cantidades o un conjunto de puntos en el plano; realiza los tratamientos necesarios que le permiten corroborar que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ son equivalentes, pero no admite que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado, pues considera que el dominio no es el mismo, en tanto $x + y$ debe ser diferente de cero.

El profesor [secundaria-C] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con una "circunferencia"; aplica los tratamientos requeridos que le permiten reconocer la equivalencia entre la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x\ + y = \frac{1}{x+y}$. Pese a reconocer la igualdad entre ambas ecuaciones el profesor no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una "circunferencia", debido a que la ecuación tiene una restricción en el dominio respecto a los valores que pueden tomar las variables, $x \neq -y$ (no reconoce que, en este caso, $x + y \neq 0$).

El profesor [Secundaria-D] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con un polinomio de segundo grado, afirma que al ser factorizado representa una "diferencia de cuadrados"; aplica una serie de procedimientos que le permiten verificar la equivalencia entre la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$. Aunque el profesor reconoce que las expresiones son iguales desde el punto de vista sintáctico, no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ pueda ser interpretada como un polinomio de segundo grado, puesto que esta representa una igualdad de dos ecuaciones lineales o como la suma de dos números reales que, en este caso, es igual al opuesto de esa suma, con unas restricciones en su dominio como $x \neq -y$ o $y \neq -x$.

El profesor [Secundaria-F] relaciona la expresión $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con una "ecuación cónica", aplica una serie de procedimientos que le permite reconocer la equivalencia entre las expresiones $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, pero no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ pueda ser interpretada como una ecuación de una "cónica" (segundo grado), puesto que "no tiene la misma forma".

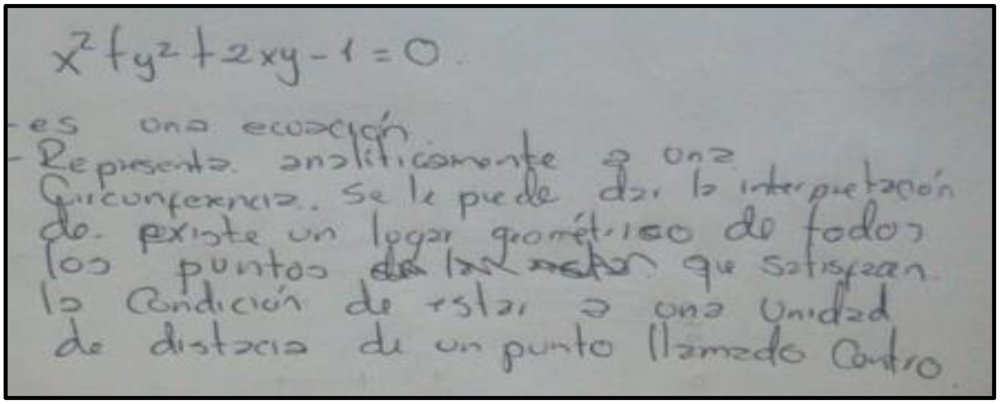
Las producciones anteriores muestran que la aplicación de transformaciones algebraicas permite reconocer la equivalencia sintáctica entre ambas ecuaciones, pero para dotar de sentido o significado de las expresiones y prima su "forma". Por ejemplo, $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, sentido asignado a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, pues plantean que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no tiene la misma "forma", es decir las variables x e y elevadas al cuadrado, o que tiene más "restricciones en su dominio". Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo $[12{:}01 - 18{:}34]$ de la entrevista que se desarrolló con el profesor Secundaria-F:

> ***Entrevistadora:*** *Finalmente hablemos de la última pregunta que indaga por la interpretación asignada a la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, *si esta ecuación es equivalente a la expresión* $x + y = \frac{1}{x+y}$, *y si esta última ecuación corresponde a la interpretación dada inicialmente. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *corresponde a una sección cónica.*
> ***Secundaria-F:*** *Bueno apenas vi la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *me di cuenta que tenía la forma general de una cónica que* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, *y la asocié con una función cónica.*
>
> ***Entrevistadora:*** *Me gustaría que me comentara qué elementos tuvo en cuenta para asociar la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *con la ecuación general de una cónica.*

> ***Secundaria-F:*** *Quizás por mi formación porque sé que las cónicas tienen esa forma y las variables x e y deben estar al cuadrado, entonces teniendo en cuenta esos elementos dije que era una función de una cónica.*
>
> ***Entrevistadora:*** *Y ahora me gustaría que me explicara un poco cómo se dio cuenta que la ecuación $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$ no corresponde a una sección cónica pese a que es una ecuación equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$.*
>
> ***Secundaria-F:*** *Esta pregunta me hizo dudar mucho porque yo hice todo el procedimiento y verifiqué que ambas expresiones son iguales pues al desarrollar la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ obtengo $x + y = \frac{1}{x+y}$ y viceversa, pero esta ecuación ya no tiene la forma inicial que al ser factorizada se obtiene la forma de una cónica, pero al ver esta ecuación corresponde a una ecuación de primer grado porque ya sus variables x e y no están al cuadrado.*
>
> *(Diálogo entre el profesor y la investigara, 2020)*

En la transcripción el profesor de secundaria-F manifiesta que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ tiene la forma de una función cónica definida por la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, aspecto que hace que sea asociada con una sección cónica, en tanto la expresión tiene las variables x e y elevadas al cuadrado, siendo está una característica de las cónicas. Sin embargo, pese a reconocer que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$ son sintácticamente equivalentes, plantea que esta última ecuación no puede ser asociada con una sección cónica puesto que las variables dejan de estar al cuadrado y pierde su forma inicial, "es de primer grado". Tanto en la solución inicial como la entrevista se muestra que para el profesor prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a una "*sección cónica*" caracterizada por tener la forma de la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, que a su vez las variables x e y deben estar al cuadrado, pese a la comprobación de la equivalencia desde su aspecto sintáctico las variables influyen para ver en las expresiones dos objetos matemáticos diferente, una sección cónica y una ecuación de primer grado. Resultados que corroboran que las interpretaciones que los profesores otorgan a las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ se asignan con base en su forma (dada por los exponentes de las variables), por ejemplo, con base en su "forma" la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ es relacionada con una "*circunferencia*", una ecuación de segundo grado o un polinomio de segundo grado, etc., tal como se muestra en la Figura 3. En relación con las interpretaciones antes mencionadas, es necesario reiterar que si bien la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ no representa una circunferencia, ni la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ representa una ecuación de primer grado, para los propósitos de este trabajo lo importante es analizar si los sujetos logran o no establecer una articulación semiótica de los sentidos asignados por ellos a las expresiones dadas.

Figura 3 – Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$



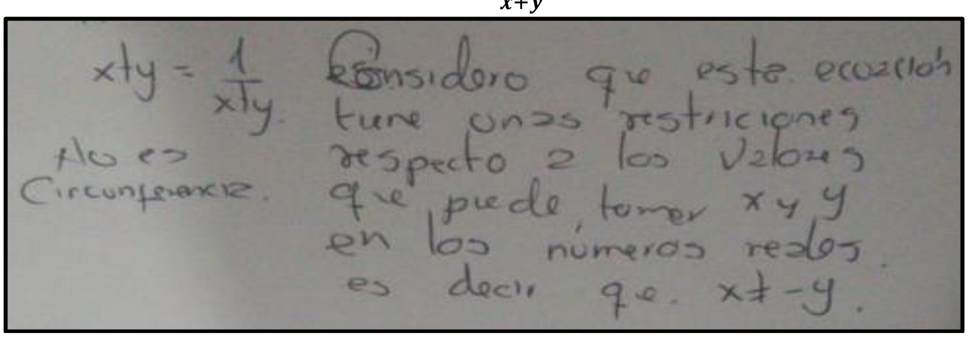
$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$.

- es una ecuación
- Representa analíticamente a una Circunferencia. Se le puede dar la interpretación de existe un lugar geométrico de todos los puntos ~~de las rectas~~ que satisfagan la Condición de estar a una Unidad de distacia de un punto llamado Centro.

Fuente: Solución del profesor secundaria-C

Por otro lado, la interpretación de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es asignada con base en dos características: una, las variables y, otra, las restricciones en su dominio, por ejemplo, los profesores de secundaria D y F la relacionan con una ecuación lineal o una suma de dos números reales igual a su opuesto, debido a que la expresión no tiene sus variables elevadas al cuadrado, como en el caso de la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Además, los profesores B y C tienen en cuenta la restricción del dominio, siendo una características propias de las ecuaciones racionales, definida como el cociente de polinomios, en este caso su denominador $x + y$ debe ser diferente de cero, en tanto no está definida la división entre cero (aunque en este caso se puede reconocer que $x + y = \pm 1$. En la Figura 4 se presenta la solución dada por este profesor:

Figura 4 – ¿La Ecuación *es* $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ ____________________?



$x+y = \frac{1}{x+y}$

No es Circunferencia.

Considero que esta ecuación tiene unas restricciones respecto a los Valores que puede tomar x y y en los números reales. es decir que $x \neq -y$.

Fuente: Solución del profesor secundaria-C.

Estas producciones son similares a las soluciones dadas por algunos estudiantes de educación secundaria, por ejemplo, Rojas (2012) presenta evidencias de que ellos también asocian la expresión (ecuación) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con una circunferencia o con una parábola. Así mismo, aplican a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ las transformaciones de tratamiento que les permiten obtener la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, o viceversa, y con ello comprueban e identifican que ambas expresiones son sintácticamente equivalentes. Este autor resalta que para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* asociado a la *"circunferencia",* planteando que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ tiene las variables al cuadrado, interpretación que está asociada a la característica antes mencionada, así mismo reporta que algunos estudiantes manifiestan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser interpretada como una circunferencia, debido que las dos variables no se encuentran al cuadrado.

En cuanto a las funciones semióticas los profesores de secundaria-C y F establecen dos: la primera, entre el antecedente "*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$*"* y el consecuente *"una circunferencia"*, "*una sección cónica*"*;* y entre el antecedente "$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente "*ecuaciones equivalentes*". El profesor de secundaria-D establece tres funciones semióticas; la primera, entre el antecedente *"la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*un polinomio de segundo grado";* la segunda, entre el antecedente "*la ecuación* $x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente *"una igualdad de dos ecuaciones lineales";* y la tercera, entre el antecedente "$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = x + y = \frac{1}{x+y}$"» y el consecuente "*son ecuaciones equivalentes".*

El profesor de secundaria – *B* establece cuatro funciones semióticas: la primera, entre el antecedente *"la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$*"* y el consecuente "*ecuación de segundo grado*"; la segunda, entre el antecedente "*la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*igualdad entre dos cantidades un conjunto de puntos en el plano*"; la tercera, entre el antecedente "*la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*conjunto de puntos en un plano*"; y la cuarta, entre el antecedente *"la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *y* $x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente "*expresiones equivalentes*". Los argumentos y relaciones que el profesor establece por medio de las funciones semióticas muestran que la aplicación de transformaciones algebraicas permite corroborar la equivalencia entre ambas ecuaciones (equivalencia sintáctica), pero desde el aspecto semántico la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, puesto que, la expresión debe cumplir que $x + y \neq 0$.

En relación con las funciones semióticas, Rojas (2012) señala que algunos estudiantes establecen dos funciones semióticas que se relaciona entre sí; la primera (F1), entre el antecedente "*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =0$" y el consecuente "*una circunferencia*"; y la segunda (F2), entre el antecedente "*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =0$*, es equivalente a* $x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente "*ambas ecuaciones son equivalentes*". Así mismo, los estudiantes establecen una tercera función semiótica F3**,** cuyo antecedente radica en justificar sí la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una "circunferencia" y el consecuente "*no es una circunferencia*", que no logra ser relacionada con las funciones semióticas F1 y F2. Al igual que los resultados mostrados por este autor, en el presente estudio los profesores establecen dos funciones semióticas con relación al mismo objeto matemático, como es la interpretación asignada a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =0$, y la igualdad con la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, que se relacionan entre sí.

Las soluciones dadas por estudiantes y profesores muestran que las interpretaciones que realizan a cada una de las expresiones están asociadas con la percepción *"forma"* de éstas (desde lo icónico*)*, por ejemplo, las variables al cuadrado es un indicador para decidir que: la expresión corresponde a una *"circunferencia"*, *"una ecuación de segundo grado"*, etc., resultados que muestran que la percepción icónica influye para que la expresión sea asociada con un objeto matemático que tenga dichas características de *"forma*".

En términos de los significados parciales sintáctico y semántico, los resultados muestran que desde el aspecto sintáctico los profesores aplican determinadas reglas como la factorización, multiplicación de términos etc., procedimientos que les permite comprobar la equivalencia entre ambas expresiones; pero el significado parcial sintáctico no es articulado con el significado semántico, en tanto la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no tiene la misma forma a la ecuación inicial o el dominio en las variables x e y presentan algunas restricciones como los valores que toman x deben ser diferentes a $-y$ o que la suma x e y debe ser diferente de cero.

En su aspecto sintáctico la aplicación de reglas y procedimientos posibilita transformar $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ en $x + y = \frac{1}{x+y}$ o viceversa, en su aspecto semántico el contexto permite que las ecuaciones adquieran significados que puedan ser relacionados entre sí y que permiten concluir que las expresiones siguen siendo equivalentes, hecho que pone en evidencia la necesidad articular estos dos significados parciales.

4. Conclusiones

En el apartado de los resultados se mostraron evidencias de que si bien algunos profesores reconocen la *equivalencia sintáctica* entre las ecuaciones no por ello logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones y, por tanto, no reconocen la *equivalencia semántica* entre éstas, pues al asignar sentido o significado a dichas expresiones las asocian con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Dichos resultados corroboran que no solo las transformaciones de conversión se relacionan con dificultades en la comprensión de un objeto matemático, sino que estas dificultades también son asociadas con las transformaciones de tratamiento (D'AMORE, 2006; SANTI, 2011; ROJAS, 2012), incluso por parte de profesores de matemáticas en ejercicio.

Adicionalmente, el trabajo realizado por el grupo de profesores de matemáticas reportado en este estudio pone en evidencia algunas similitudes entre las dificultades que encuentra el grupo de profesores con los resultados previamente reportados en la literatura sobre dificultades identificadas en estudiantes para articular sentidos asignados a expresiones matemáticas obtenidas mediante tratamiento.

Tomando como referencia los resultados documentados por Rojas (2012) frente al trabajo realizado por los estudiantes, las dificultades encontradas por estos pueden clasificarse en cuatro grupos: "*reconocimiento icónico de las expresiones; anclaje a situaciones dadas; interacción y cambios en la interpretación; y dificultades con el lenguaje matemático"*. En el presente documento se muestran evidencias que los sentidos asignados a expresiones algebraicas por parte de los profesores de matemáticas también se relacionan con el "*reconocimiento icónico"* de dichas expresiones, hallazgos similares a lo reportados por dicho autor frente al trabajo con estudiantes.

Los resultados obtenidos muestran que tanto estudiantes como profesores asignan sentidos a las expresiones (ecuaciones) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y $x + y = \frac{1}{x+y}$ con base en un *reconocimiento icónico* de tales expresiones. Los profesores de secundaria-B, C, D y F, que hacen parte del estudio de caso colectivo, reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes desde lo sintáctico, pero la interpretación que otorgan a la segunda expresión (ecuación) no se articula con la interpretación realizada a la primera ecuación, en tanto plantean que no corresponden al mismo objeto matemático, es decir, no reconocen su equivalencia desde lo semántico. Las producciones de los profesores se pueden clasificar en los siguientes subgrupos:

a) *Forma de las variables.* En este grupo se ubican los profesores de secundaria-D y F quienes reconocen la equivalencia de las ecuaciones desde el aspecto sintáctico, pero al asignar sentido y significado a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no reconocen la equivalencia desde el aspecto semántico (equivalencia semántica). Por ejemplo, el profesor-D relaciona la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con un polinomio de segundo grado, en tanto la expresión tiene las variables elevadas al cuadrado, tal y como se evidencia en el siguiente argumento: "*las variables de un polinomio de segundo grado deben estar elevadas al cuadrado y como en la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, *las variables* x *e* y, *se encuentran al cuadrado corresponde a un polinomio de segundo grado*", pero la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es asociada con una ecuación lineal, argumenta que "*las variables están elevadas a uno, representa la suma de dos números reales (*$x + y$*) igual a su opuesto lineal, entonces al hacer la gráfica serían dos como rectas, por decirlo así, dos rectas porque son ecuaciones lineales*".

El profesor de secundaria-F expresa que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, tiene la forma general de una cónica definida como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, por tanto, corresponde con una función cónica, así mismo, alude que dada su formación matemática conoce que las funciones cónicas tienen esta forma (las variables x e y, deben estar al cuadrado), aspecto que no cumple la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$. Al respecto, Rojas (2012) mostró evidencias de que este tipo de argumento es similar a los dados por los estudiantes quienes expresan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no corresponde a una circunferencia, afirman que: "*no puede ser una circunferencia, porque en una (ecuación) las variables están al cuadrado y en otra no*», la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ "*no se ve como una circunferencia, porque uno parte de que la circunferencia, como ecuación básica, es [...] cuando ambas variables están al cuadrado*" (ROJAS, 2012, p. 78). Al igual que los profesores, los estudiantes aceptan la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones, aplican las transformaciones de tratamiento requeridas y reconocen que a partir de una ecuación se puede obtener la otra. Estos resultados muestran que tanto para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* que se asocia con la "*circunferencia*", "*parábola*", "*ecuación de segundo grado*", etc., caracterizada por tener las variables elevadas al cuadrado, más que con la verificación de la *equivalencia sintáctica* realizada inicialmente.

b) *Restricción en los dominios.* En este subgrupo se encuentran los profesores de secundaria-B y C, quienes reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes pero la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no corresponde con el sentido asignado a la primera ecuación puesto que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ tiene unas restricciones respecto a los valores que pueden tomar x e y, en el cual $x \neq -y$, los argumentos planteados son: "*no, aunque son expresiones equivalentes la expresión* $x + y = \frac{1}{x+y}$ *tiene más restricciones en su dominio* $x + y \neq 0$» y «*puesto que la ecuación* $x + y = \frac{1}{x+y}$ *tiene unas restricciones respecto a los valores que puede tener* x *e* y *en los números reales es decir que* $x \neq -y$". Resultados que dejan en evidencia que para asignar sentido a estas expresiones priman las restricciones de una función racional, en tanto la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ es asociada con algunas características de este tipo de funciones como son: la expresión debe estar en términos de x : $f(x) = \frac{numerador}{denominador}$, dada por cociente de dos polinomios: $f(x) = \frac{P\,(x)}{Q(X)}$, y las restricciones en el dominio en relación a los valores en que se encuentra definida la función, esto es, los valores de x para los cuales la función está definida. Dada esta condición en el denominador se debe excluir del dominio todos los valores de la variable x, para los cuales su valor se convierte en cero, hecho característico de este tipo de funciones.

Estos resultados muestran que en el trabajo matemático tanto para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la expresión como un *ícono* asociado a una "circunferencia", una ecuación de segundo grado, o un polinomio de segundo grado, etc., objetos que se caracterizan por tener las variables elevadas al cuadrado, o como manifiestan algunos profesores, porque la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ está conformada por expresiones "lineales" o tiene un dominio más restringido, aspectos que influyen para ver expresiones sintácticamente equivalentes como representaciones de dos objetos matemáticos diferentes, es decir, no reconocen la equivalencia semántica de dos representaciones de un mismo objeto.

Por otra parte, en este trabajo se asume que en toda transformación de tipo tratamiento subyace la noción de equivalencia, en términos del EOS los significados parciales sintácticos y semánticos son parte constitutiva en el desarrollo de dicha noción, los cuales requieren ser articulados (CHALÉ-CAN; FONT; ACUÑA, 2017). Frente a los resultados obtenidos se encontró que desde el *significado parcial sintáctico* los profesores aplican los procedimientos respectivos que les posibilita transformar la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ en $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, que permite corroborar la equivalencia entre las ecuaciones; y desde el *significado parcial semántico* la última expresión no puede ser interpretada como una "circunferencia" o como una ecuación de segundo grado, un polinomio de segundo grado, etc., en tanto, las variables no están expresadas al cuadrado o tiene más restricciones en su dominio.

Se puso en evidencia la complejidad de la noción de equivalencia, descrita por medio de dos significados parciales (sintáctico y semántico), unas veces desde la valoración numérica de cada expresión realizada por los profesores mediante la asignación de un número específico o mediante la reducción de términos semejantes en el caso de la tarea sobre interpretación de expresiones, el obtener la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ resultado de las transformaciones de tratamiento aplicadas a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Para algunos profesores éste fue el paso que les permitió verificar la equivalencia, estableciendo así una relación entre las perspectivas semántica y sintáctica; para otros este aspecto no fue suficiente y a pesar de verificar la *equivalencia sintáctica* no reconocen la *equivalencia semántica*, en tanto *«ven»* expresiones con formas diferentes, que les evocaba operaciones u objetos matemáticos diferentes, y asignan sentidos diferentes que no se relacionaban entre sí. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can, Font y Acuña (2017) se reconoce que la complejidad en torno a la equivalencia de expresiones algebraicas requiere de las perspectivas sintáctica y semántica, así como su necesaria articulación, en tanto cada significado posibilita una serie de prácticas matemáticas específicas, tales como: a) usar propiedades matemáticas para transformar la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y obtener la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, aspecto que permite corroborar la *equivalencia sintáctica* entre ambas ecuaciones; b) otorgar a cada una de las ecuaciones el mismo valor contextual, y así asignar el mismo sentido a ambas (*equivalencia semántica*).

Es importante reiterar que en los casos que se reportan los profesores asignan los sentidos a las dos expresiones con base en un reconocimiento icónico (las formas de las expresiones), hecho que hace que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ no sea relacionado con el significado institucional establecido (cónica degenerada), admiten la equivalencia entre las dos expresiones obtenidas mediante tratamiento (desde lo sintáctico) pero no realizan el mismo reconocimiento desde lo semántico; por ejemplo, plantean que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no tiene sus variables elevadas al cuadrado o que presenta restricciones para los valores que éstas pueden tomar.

Los resultados permiten concluir que las dificultades encontradas por los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas, obtenidas mediante tratamiento, son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas, en tanto admiten la *equivalencia sintáctica* entre dos expresiones algebraicas, pero no reconocen la *equivalencia semántica*.

Referencias

CHALÉ-CAN, S; FONT, V; ACUÑA, C. La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**, 2017**.** Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/chale-can.pdf. Acceso: 12 nov. 2021.

D'AMORE, B. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentidos. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 4, p. 177-196, 2006. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/9706/1/D%60Amore2006Objetos.pdf. Acceso: 15 dic. 2021.

D'AMORE, B.; GODINO, J. D. El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 10, n. 2, p. 191-218, 2007. Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000200002&script=sci_arttext&tlng=en. Acceso: 15 dic 2021.

DUVAL, R. Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Science Cognitives**, v. 5, n. 1, p. 37–65, 1993. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266ñ. Acceso: 10 oct.2021.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales,** Cali: Universidad del Valle, 1999.

DUVAL, R. **Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations**. Springer International Publishing, 2017.

FONT, V., GODINO, J. D; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dortmund, v. 82, 97-124, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0. Acceso: 10 oct. 2021.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, Grenoble, v. 22, n. 23, p. 237-284, 2002. Disponible en : https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf. Acceso: 15 dic. 2021

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2008. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf. Acceso: 15 dic. 2021

GODINO, J. D; CASTRO, W.; AKE, L.; WILHELMI, M. Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. **Bolema,** Rio Claro, v. *26*, *n.* 42B, p. 483-511, 2012. DOI: https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000200005. Acceso: 10 oct. 2021.

GOETZ, J.P.; LECOMPTE, M.D. **Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa**. Madrid: Morata, 1988. Disponible en: https://upeldem.files.wordpress.com/2018/03/libro-etnografc3ada-y-disec3b1o-cualitativo-en-investigacic3b3n-educatica-j-p-goetz-y-m-d-lecompte.pdf. Acceso: 5 feb. 2021.

RODRÍGUEZ, G. GIL, J; GARCÍA, E. **Métodos de investigación cualitativa**. Málaga: Aljibe, 1996.

ROJAS, P. **Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos**. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, 2012. Disponible en: https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/16315/RojasGarzonPedroJavie r2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acceso: 5 feb. 2021.

ROJAS, P. **Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos**. Bogotá, Colombia: Universidad, 2014. DOI: https://doi.org/10.14483/9789588832333.

SANTI, G. Objectification and semiotic function. **Educational Studies Mathematics**, Dortmund, v. 77, p. 285-311, 2011.

STAKE, R. Case Study. In N. K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). **Handbook of Qualitative Research** (pp. 236-247). London: Sage, 1994.

Autores

Gladys Mejía Osorio
Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD, Bogotá),
Magíster en Docencia de las Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional (UPN, Bogotá)
Doctora en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD, Bogotá),
Línea de Investigación: Semiótica y Cognición
Docente de matemáticas de la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá
Correo electrónico: gmejiao@educacionbogota.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9694-4609
Bogotá, Colombia

Pedro Javier Rojas Garzón
Licenciado en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS, Bucaramanga),
Magister en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia (UN, Bogotá) y
Doctor en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD, Bogotá)
Líneas de investigación: Didáctica de las matemáticas y Formación de profesores
Profesor jubilado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá)
Correo electrónico: pjrojasgarzon@gmail.com
ORCID: https://doi.org/10.14483/9789588832333
Bogotá, Colombia

Cómo citar el artículo:

MEJÍA, G.; ROJAS, P. Sentidos asignados a ecuaciones algebraicas. El caso de profesores de matemáticas**. Revista Paradigma, Vol. XLIV**, **Edição Temática: EOS. Questões e Métodos;** junio de 2023 / 59 - 83. DOI: 10.37618/