Uso de argumentos históricos para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con recursos tecnológicos

Weimar Muñoz Villate
wmunoz@unisalle.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-4947-5600
Universidad de La Salle (ULS)
Bogotá, Colombia.

Olga Lucía León Corredor
olleon@udistrital.edu.co
https://orcid.org/0000-0003-4373-8630
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC)
Bogotá, Colombia.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen
La literatura sobre la enseñanza y aprendizaje del Teorema Fundamental del cálculo (TFC) ha evidenciado las dificultades que tienen los alumnos para su comprensión y se ha concentrado en secuencias de tareas que no tienen en cuenta la complejidad de su evolución histórica. En este escrito se realiza un estudio que permite el esbozo de una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del TFC en la que se incorporan, gracias al uso de herramientas tecnológicas, argumentos históricos obtenidos de los estudios de Newton y de Leibniz. La metodología ha sido, básicamente, una revisión historiográfica de los escritos de Newton y de Leibniz sobre este teorema. El proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC aquí esbozado, además de facilitar la visualización de este objeto matemático, permite presentar a los alumnos una perspectiva más compleja de este teorema, con lo que, a priori, se mejora la idoneidad epistémica y de medios con relación a las propuestas habituales para la enseñanza de dicho objeto matemático.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, Newton, Leibniz, software educativo, Enfoque Ontosemiótico.

Use of historical arguments for teaching the Fundamental Theorem of Calculus (FCT) with technological resources

Abstract
The papers about the teaching and learning process of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) has shown the student's problems on its comprehension, and some of these articles are focused on didactic sequences avoiding the historical evolution of the FTC. In this paper we report a proposal for teaching and learning the FTC using technological tools and historical arguments from the study of some manuscripts of Newton and Leibniz. The methodology has been, basically, a historiographical review of the writings of Newton and Leibniz on this theorem. The teaching and learning process of this theorem outlined here allows to introduce the FTC with a more complex perspective and to facilitate the visualization of this mathematical

object to the students. Like a consequence, a priori we hope, to improve the epistemic and media suitability, in contrast to the usual proposals for the teaching of this mathematical object.
Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, Newton, Leibniz, Educational software, Ontosemiotic Approach.

Uso de argumentos históricos para o ensino do teorema fundamental do cálculo (TFC) com recursos tecnológicos

Resumo

A literatura sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) tem destacado as dificuldades que os alunos apresentam em compreendê-lo e tem focado em sequências de tarefas que não levam em conta a complexidade de sua evolução histórica. Neste artigo é realizado um estudo que permite delinear uma proposta de ensino e aprendizagem do TFC em que são incorporados, graças ao uso de ferramentas tecnológicas, argumentos históricos obtidos a partir dos estudos de Newton e Leibniz. A metodologia foi, basicamente, uma revisão historiográfica dos escritos de Newton e Leibniz sobre esse teorema. O processo de ensino-aprendizagem do TFC aqui delineado, além de facilitar a visualização desse objeto matemático, permite apresentar aos alunos uma perspectiva mais complexa desse teorema, melhorando assim, a adequação epistêmica e de meios em relação às propostas usuais para o ensino do referido objeto matemático.
Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Newton, Leibniz, software educacional, Abordagem Ontosemiótica.

Introducción

Este trabajo se enmarca en una de las preguntas de investigación que guían al Enfoque Ontosemiótico (EOS): ¿Qué tipo de acciones y recursos se deben implementar en un proceso de instrucción llevado a cabo en un contexto dado para que se pueda optimizar el aprendizaje de las matemáticas? (GODINO; BATANERO, 2020). En el EOS, para responder a esta pregunta se ha generado la noción de *Idoneidad Didáctica* (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018) que se desglosa en seis criterios de idoneidad (epistémico, cognitivo, ecológico, afectivo, mediacional e interaccional). En particular en esta investigación estamos interesados en la mejora a priori de la idoneidad epistémica y mediacional de los procesos de instrucción del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

El objetivo de este escrito es, por tanto, utilizar la notación moderna y herramientas tecnológicas con software matemático para hallar y hacer visibles argumentos históricos del TFC, que son heurísticamente pertinentes para la enseñanza universitaria y para mejorar la idoneidad epistémica de su enseñanza. Los argumentos que se han rescatado emergieron a partir de una revisión historiográfica de los escritos de Newton y de Leibniz sobre el TFC que pueden alimentar y profundizar trabajos para una reconstrucción holística de la antiderivada (GORDILLO; PINO-FAN, 2015), o aquellos que buscan una presentación alternativa de este teorema usando TIC (ROBLES; TELLECHEA; FONT, 2014; MUÑOZ VILLATE, 2021; MUÑOZ-VILLATE, 2021; MUÑOZ, 2022) .

En cuanto al uso de software, se utilizarán aquellos que permitan la visualización de los argumentos geométricos utilizados por Newton y por Leibniz, esto es, aquellos que permitan comparar gráficas de manera simultánea y dinámica. Desde el EOS se afirma que dentro de las ventajas que ofrece el uso de computadores y de software matemático al proceso de enseñanza y aprendizaje, se encuentran que éstos "proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa" (GODINO, 2004, p. 143). Agregando a lo anterior, estas herramientas tecnológicas aumentan la velocidad en los cálculos, permitiendo así que los estudiantes se centren en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. Las TIC también otorgan dinamismo a las gráficas o esquemas que se puedan realizar.

Se mostrarán entonces, primero, dos argumentos históricos del TFC mediados por estas TIC. Uno de Newton y otro de Leibniz. La implementación de estos argumentos mediante un software educativo será el foco central de este escrito, Como la elección de un software que permita mejorar la visualización del TFC no es una tarea sencilla, se realizó una revisión de la literatura de las investigaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza del Cálculo. Además, para la elección del software se tuvieron en cuenta criterios de robustez, velocidad, gratuidad, y otros aspectos que serán mencionados a continuación.

1. Referencial Teórico

Herramientas tecnológicas. La tecnología puede ser vista no sólo como una ayuda para realizar cálculos de manera más sencilla, ni como la última poderosa infraestructura representacional introducida por la humanidad para reproducir los pensamientos e ideas de manera digital, sino que además, también puede verse como una infraestructura que admite al menos dos desarrollos: primero, que ya no se requiere la participación humana para la ejecución de un proceso, y segundo, el acceso al simbolismo no se restringe ahora a un privilegiado minoría de personas, como lo fue en el pasado (FERRARA; PRATT; ROBUTTI, 2019). Luego el uso de tecnologías sirve como medio de democratización del conocimiento.

En esta investigación, dichas herramientas tecnológicas han servido para recuperar argumentos históricos del TFC que sólo son conocidos por expertos o por una pequeña parte de la población académica, así como herramienta de ayuda para mejorar la visualización de dichos argumentos.

Es oportuno decir entonces que, dentro de las ventajas que ofrece el uso de computadores y software matemático al proceso de enseñanza y aprendizaje, se encuentran que éstos proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, y que, además, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa (GODINO et al., 2014), además de tener la posibilidad de otorgar dinamismo a las gráficas o esquemas que se puedan realizar. Adicionalmente, permiten desarrollar de manera más intuitiva argumentos históricos como los de Leibniz: "vemos la intuición de Leibniz, que se exhibió en los primeros artículos publicados sobre el cálculo, aunque vilipendiado durante trescientos años en la prensa inglesa, apareciendo como una concepción natural en un enfoque informático moderno[1]" (TALL, 1991[a], p. 9).

Las TIC también sirven para mejorar la visualización, y ésta juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que las representaciones gráficas de estructuras pueden permitir formas de razonamiento distintas a las inferencias deductivas, y puede ayudar a la comprensión (MCDOUGALL et al., 2010).

Teniendo claras estas ventajas que ofrece el uso de un software para el proceso educativo, y en particular para esta investigación, se pueden abordar algunas categorizaciones de estas herramientas tecnológicas. Es pertinente para este investigación seguir la clasificación que hacen Godino et al. (2004) de los tipos de software para la enseñanza: Lenguajes de programación (e.g. C++ y Java), Paquetes profesionales (e.g. SPSS, RStudio, Mathematica), Software didáctico (Sebran y GCompris sirven para ayudar a los niños a identificar letras, colores, números), Micromundos (e.g., Karel el Robot, promueve la creatividad y la lógica para el aprendizaje básico de la programación), Software de uso general (e.g. Excel), y los Tutoriales

[1] Traducción propia de Tall (1991), p. 9: 'we see the intuition of Leibniz, which was exhibited in the very first published articles on the calculus, yet vilified for three hundred years in the English press, appearing as a natural conception in a modern computer approach'.

(e.g. iSpring Suite que permite crear cursos en base a diapositivas). De manera particular, en este escrito, los argumentos de Newton y de Leibniz elegidos sobre el TFC serán mediados por herramientas tecnológicas de tipo *Lenguajes de Programación o Software de uso general*.

Argumentos históricos.

Se verá a continuación el referente teórico para los argumentos históricos heurísticamente pertinentes del TFC, no sin antes enunciar la versión de este teorema que será considerada a lo largo de este escrito.

Teorema Fundamental del Cálculo:

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$,

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es una antiderivada de f, i.e., $F'(x) = f(x)$.

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es una piedra angular dentro de la estructura que se reconoce hoy en día como análisis matemático (DUNHAM, 2005). Por tanto, hacer alguna modificación en su forma de presentación tendrá repercusiones en otros objetos matemáticos que se enseñan posteriormente, tales como el teorema de Green, el cálculo de la longitud de arco, etc. Sin embargo, el proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC tiene dificultades para muchos docentes, porque no saben cómo mejorar su enseñanza creando secuencias didácticas que busquen la mejora de la comprensión del teorema (ROBLES; TELLECHEA; FONT, 2014). Para los estudiantes, los obstáculos al entender el TFC, radican en la dificultad de comprender objetos matemáticos estudiados previamente al estudio de este teorema, tales como función, continuidad y antiderivada (THOMPSON; DREYFUS, 2016).

Una posible solución para afrontar la enseñanza de objetos matemáticos complejos, como es el caso del TFC, que propone la didáctica de la matemática es buscar en la génesis de estos objetos: “La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia” (GODINO; BATANERO, 1994, p. 4).

Las razones para esta reflexión histórica sobre los objetos matemáticos a enseñar son varias La búsqueda de los aspectos históricos permite analizar la construcción de un saber a partir del encuentro con otros saberes, de comprender las uniones con las otras actividades científicas y de reunir diferentes campos de las matemáticas. Negarse a abordar la perspectiva histórica de procesos, conceptos, objetos matemáticos, algoritmos, etc. que se piensan enseñar, es negarle al estudiante comprender que las matemáticas tienen un estatus de actividad cultural inseparable de las otras actividades y prácticas humanas (BARBIN, 2006). Fauvel (1991) también coincide en que no hay que encubrir el lado humano de las matemáticas, ya que implica ocultarles a los estudiantes que ellos no son los únicos con dificultades procedimentales.

Ahora bien, explorar el TFC desde la perspectiva histórica podría realizarse desde el estudio de las matemáticas a partir de la misma Grecia si se quiere. Si se piensa en la génesis del análisis matemático, habría que estudiar entonces a Newton, Leibniz, Barrow, Cavalieri, Descartes, Sluse, Hudde, Fermat, van Heuraet, Gregory, entre otros, porque todos ellos trabajaron con objetos matemáticos propios del TFC (KATZ, 1993; BRESSOUD, 2011; MENA, 2014; BLÅSJÖ, 2015; MUÑOZ VILLATE, 2022). También podría realizarse un estudio del TFC desde los escritos de Cauchy, Riemann, Euler, etc. quienes formalizaron y potenciaron el análisis matemático. Sin embargo, en esta investigación, se hace la elección de indagar en los trabajos de Newton y de Leibniz, porque ellos no sólo vieron la relación que había entre el problema inverso de las tangentes y de las áreas, sino que además suministraron algoritmos para resolver más problemas (MUÑOZ VILLATE, 2022; CHEMLA et al., 2016; BRESSOUD, 2011; GUICCIARDINI, 2011; PANZA, 2005). Es decir, no solo reconocieron una relación geométrica o algebraica del TFC, sino que además supieron dónde poder utilizarla.

2. Metodologías

2.1 Metodología para elegir un software educativo

Una forma de abordar el problema de elegir un software educativo es tener en cuenta aspectos, cuestionamientos y criterios sugeridos desde la investigación educativa sobre los beneficios y atributos que tiene cada programa tecnológico que se derivan de las respuestas a preguntas como las siguientes: ¿Es un software atractivo? ¿Permite este software desplazarse sobre las gráficas o videos realizados? ¿Son válidos los resultados del software? ¿El software es versátil, fácil de operar y robusto? (SQUIRES; MCDOUGALL, 1994; MUÑOZ VILLATE, 2021).

Adicionalmente, se debe considerar que por la naturaleza del argumento de Newton sobre el TFC que se mostrará a continuación, es necesario un software que permita graficar de manera simultánea el área bajo una curva y su cuadratura. Para el argumento de Leibniz sobre el TFC, se busca un software que sea amable de manejar y que le permita al usuario recrear él mismo el triángulo diferencial.

Estos aspectos deben ser considerados, porque el hecho de que un software funcione no es un criterio para elegirlo como la herramienta tecnológica a emplear. También hay que considerar el grado de disponibilidad y adecuación de esos recursos tecnológicos y temporales para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC. La elección de un software y su incorporación al proceso de enseñanza y aprendizaje se relaciona con lo que se denomina en el Enfoque Ontosemiótico como idoneidad mediacional (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Dentro de la inmensa gama de herramientas tecnológicas que se podrían utilizar, emergen dos softwares con regularidad: GeoGebra y Microsoft Excel. Ambos tienen una alta disponibilidad: el primero es un software gratuito y tiene incluso una versión on-line, y Excel viene preinstalado en la mayoría de laptops o sistemas Android, teniendo una versión inclusive en Mac OS. Son TIC amigables, producen resultados válidos, son versátiles y tienen un sistema robusto. En ambos softwares se han desarrollado investigaciones sobre el TFC u objetos matemáticos que lo componen (PEÑALOZA; SUAREZ; ROA, 2013; HOHENWARTER et al., 2008; MIKE; ANNEKE, 2017). Tomando todo lo anterior en cuenta, se eligen los softwares GeoGebra, que permite realizar y comparar gráficas de manera simultánea y dinámica (siendo óptimo para el argumento de Newton que se mostrará) y, Microsoft Excel por la versatilidad y sencillez para describir el argumento que se trabajará de Leibniz.

2.2 Metodología de búsqueda de los argumentos históricos del TFC

Se utiliza en esta parte la metodología de la historiografía en matemáticas. Esto es, un estudio de argumentos u objetos matemáticos en un periodo de la historia en textos o escritos que traten del tema en cuestión. En una instancia inicial, se analizan las fuentes primarias disponibles, y luego se estudian aquellos trabajos realizados por expertos en esa materia. Para el estudio de la obra de Newton, es posible hacer un análisis cronológico de distintas *versiones* del TFC a partir de 1665 hasta 1704 (MUÑOZ VILLATE, 2022), porque se tiene acceso a manuscritos que hacen parte de su fuente primaria (NEWTON, 1704; ILIFFE, 2011, 2012). Como fuentes secundarias se tienen trabajos reconocidos por la comunidad internacional (WHITESIDE, 1961; GUICCIARDINI, 1990; PANZA, 2005; SCRIBA, 2014). Para el estudio de Leibniz este trabajo requiere más cuidado, porque no hay un escrito suyo en este momento donde se encuentre un teorema análogo exacto del TFC. No obstante, es posible aproximarse desde tres puntos de vista: como la relación inversa entre los operadores diferencial e integral (el que se desarrollará en este escrito), desde un argumento geométrico (MUÑOZ; LEON, 2023), y desde el trabajo de 1693 como el movimiento de tracción, a partir de un artículo del *Acta Eruditorum* (BLÅSJÖ, 2015; SWETZ, 2015). Para realizar investigaciones sobre los estudios de Leibniz puede consultarse la Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek[2] de Alemania, o lo realizado por el grupo Mathesis Project[3] en Francia.

Esta metodología de la historiografía se usó en este artículo para indagar escritos que contengan argumentos de lo que se reconoce actualmente como TFC. Para Newton se analizaron las Proposiciones 7[4] y 8 donde ya está la estructura del TFC (PANZA, 2005; MUÑOZ VILLATE, 2022). En el caso de Leibniz se mostrará el triángulo diferencial (LEIBNIZ, 1846) que puede consultarse también en algunas fuentes secundarias (KATZ, 1993; REMAKI, 2021).

3. Análisis de Resultados

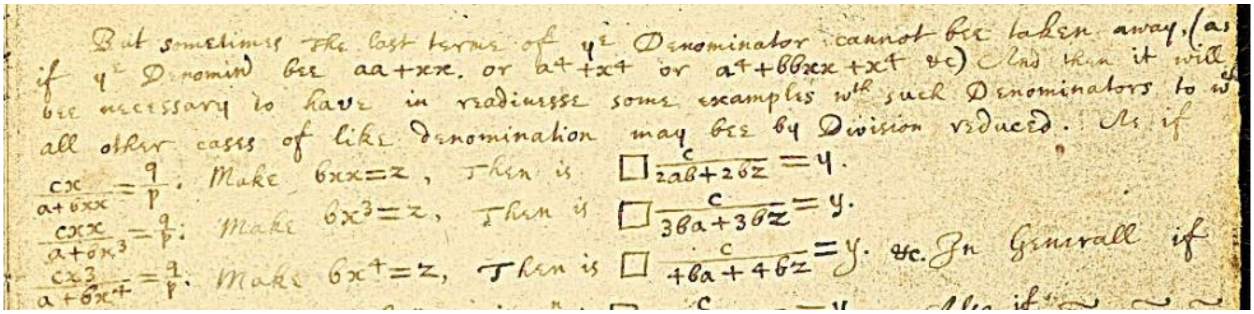
3.1 Disposición del argumento históricos de Newton en GeoGebra.

La Figura 1, muestra ejemplos que planteó Newton tras haber demostrado las proposiciones 7 y 8 en su manuscrito The Tract of Fluxions de 1666. En este año, Newton representaba la integral con el símbolo de un cuadro $\square$ pero también era la notación utilizada para representar el logaritmo.

En el ejemplo 2 está escrito $\frac{cxx}{a+bx^3}=\frac{q}{p}$ Luego Newton sugiere una sustitución $bx^3 = z$ para determinar al final que la solución es $\square\ \frac{c}{3ba+3bz} = y$, ver Figura 1.

[2] https://www.gwlb.de/home
[3] http://mathesis.altervista.org/
[4] Puede verse el texto original en https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/93

Figura 1 – Ejemplos de la Proposición 7 y 8 de Newton, 1666.


But sometimes the last terms of ye Denominator cannot bee taken away, (as if ye Denomin' bee $aa+xx$, or a^4+x^4 or $a^4+bbxx+x^4$ &c) & then it will bee necessary to have in readinesse some examples wth such Denominators to wch all other cases of like denomination may bee by Division reduced. As if
$\frac{cx}{a+bxx}=\frac{q}{p}$. Make $bxx=z$, Then is $\square\frac{c}{2ab+2bz}=y$.
$\frac{cxx}{a+bx^3}=\frac{q}{p}$: Make $bx^3=z$, Then is $\square\frac{c}{3ba+3bz}=y$.
$\frac{cx^3}{a+bx^4}=\frac{q}{p}$. Make $bx^4=z$, Then is $\square\frac{c}{4ba+4bz}=y$. &c. In Generall if

Fuente: Imagen original tomada de *The Tract of Fluxions* (ILIFFE, 2011)[5]

El cociente $\frac{q}{p}$ fue el que utilizó Newton para referirse a la relación entre las velocidades generadas por dos objetos que se mueven A y B, en la Proposición 7. La igualdad $\square\frac{c}{3ba+3bz}=y$, se explica a continuación:

Se debe tener en cuenta que para Newton $\square\frac{1}{m}$ representa para lo que en tiempos modernos es $\ln m$. Luego si se hace la sustitución que él propone, $z=bx^3$ se obtiene que $dz=3bx^2dx$, la integral a resolver queda como:

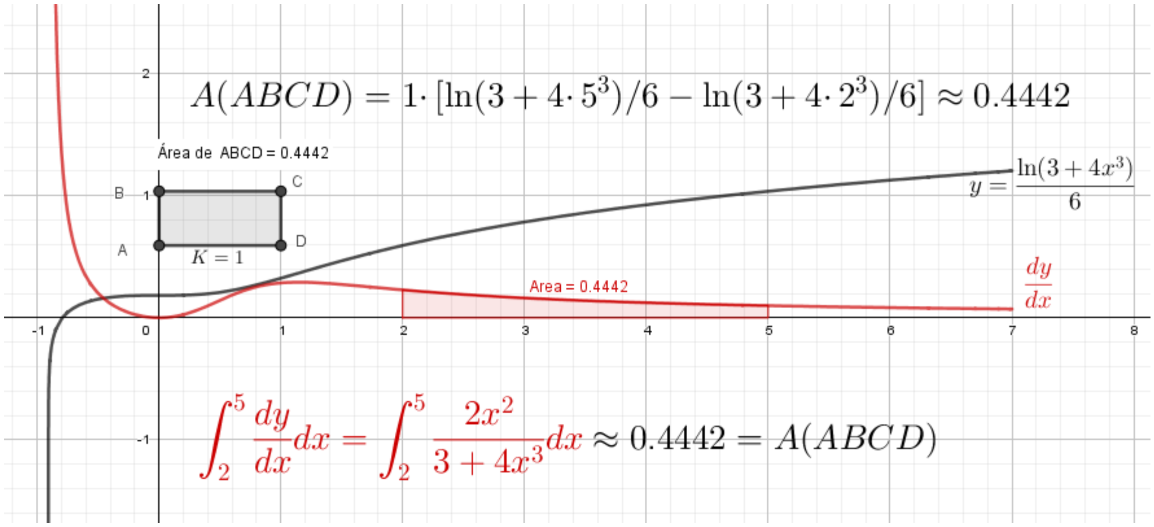
$$\int\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{cx^2}{a+bx^3}dx=\frac{c}{3b}\int\frac{dz}{a+z}=\frac{c}{3b}\ln(a+z)$$

Para Newton $\frac{c}{3b}\ln(a+z)=\frac{c}{3b}\square\frac{1}{a+z}=\square\frac{c}{3ba+3bz}$ es la solución que él plantea correctamente.

Para visualizar lo anteriormente escrito, se realizará un ejemplo puntual en el software GeoGebra. Es decir, si se eligen las constantes como $a=3, b=4, c=2$ y se usa la notación moderna, se tendría entonces la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{3+4x^3}$. Si se toma la condición inicial $y(4)=\frac{\ln 259}{6}$ y se grafica la solución a esta ecuación diferencial sobre el intervalo $[2,5]$ se genera el resultado que muestra la Figura 2.

[5] https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/95

Figura 2 – GeoGebra y un ejemplo de Newton de 1666



Fuente: Imagen propia

¿Qué resultados se obtuvieron?

Primero, se recupera la forma algorítmica en la cual Newton trabaja con los logaritmos. Claramente, la solución de $\int \frac{2x^2}{3+4x^3} dx = \frac{\ln(3+4x^3)}{6} + C$, es igual a la respuesta de Newton. Esto es uno de los puntos claves al estudiar documentos históricos, representar en los términos actuales una idea de siglos atrás sin que ésta se modifique o altere.

Segundo, el argumento que está de fondo, y que se pretende recuperar, es que la idea de Newton era calcular el área bajo una curva al relacionarla con el área de un rectángulo con uno de sus lados es una constante K, esto es, $\int_a^b f'(x)dx = K.[f(b) - f(a)]$. Se evidencia que en la Figura 2 se tomó $K = 1$. Este es el argumento que emergió en los trabajos de Newton al basarse en los estudios de Hendrick van Heuraet (PANZA, 2005; SCRIBA, 2014; MUÑOZ VILLATE, 2022).

Tercero, el software GeoGebra resulta idóneo para la visualización de este argumento, porque permite ver tanto la gráfica de dy/dx como la gráfica de y en el mismo plano cartesiano. También, permite construir la cuadratura de la curva que se muestra en rojo como un rectángulo en gris, y verificar que ambas áreas obtenida son iguales. Este trabajo se puede hacer dinámico en la medida en que se declare, por ejemplo, el límite superior como un n y se cree un deslizador que generará áreas más grandes o más pequeñas según quiera el usuario.

Cuarto, se está optimizando la forma de enseñar la parte evaluativa del TFC por cuanto se ofrece una nueva herramienta a la comunidad académica para abordar el problema de visualizar el área bajo una curva como aquella que se relaciona con el área de un rectángulo.

3.2 Disposición del argumento históricos de Leibniz en Microsoft Excel

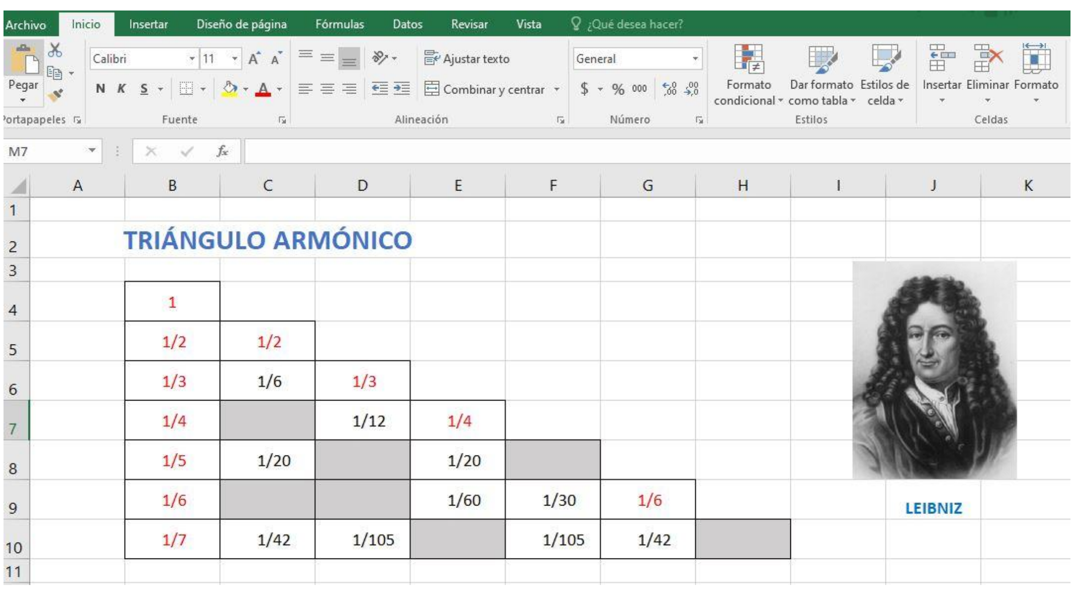
Leibniz desde el comienzo de sus estudios en matemáticas había abordado el problema de las sumas y las diferencias como relaciones inversas (KATZ, 1993). Desde una ecuación sencilla como:

$$A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0$$

$$E - A = -A + B - B + C - C + D - D + E$$

Para *A*, *B*, *C*, *D* y *E* constantes cualesquiera. En términos usados por el profesor Carlos E. Vasco, la diferencia entre los valores extremos sería equivalente a la suma de los detrimentos de los números intermedios. La Figura 3 muestra el ejercicio que se puede plantear para que los usuarios de una plantilla sencilla en Excel, completen los números faltantes en el triángulo.

Figura 3 – Adaptación del triángulo armónico de Leibniz



Fuente: Figura propia.

La solución de este ejercicio muestra entonces que, por ejemplo, los extremos de los números de la primera columna de la Figura 3 satisfacen que $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ que es exactamente igual a tener la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{6}{7}$. Estos resultados no eran exactamente nuevos, pero hicieron que Leibniz se diera cuenta de que la forma de las sucesiones hechas por diferencias y las sucesiones de sumas, son operaciones mutuamente inversas (GRATTAN-GUINNESS, 1980). Este argumento fue la semilla de lo que en 1680 resultó notándose como $\int dy = y$ (CHILD, 2005), esto es la primera parte del TFC.

¿Qué resultados se obtuvieron?

Primero, si una institución o un profesor quieren enseñar el TFC como la relación inversa entre la derivada y la integral, puede enriquecer esa presentación con un software que es de uso común, Microsoft Excel.

Segundo, Leibniz trabajó la relación inversa entre la suma y la resta desde el comienzo de sus estudios matemáticos (KATZ, 1993; REMAKI, 2021), así que visto desde esta perspectiva, la primer parte del TFC resulta ser evidente.

Tercero, se puede abordar un objeto matemático difícil como es el TFC a partir de ejercicios aritméticos sencillos siguiendo la génesis de este teorema en los trabajos leibnizianos.

Cuarto, la relación entre el área bajo una curva y el área de un rectángulo, también pueden verse en los trabajos de Leibniz (LOPEZ, 2011; MENA, 2014; BLÅSJÖ, 2015; MUÑOZ VILLATE, 2021).

4. Conclusiones

La historia de las matemáticas sigue siendo una fuente rica en recursos que pueden ser aprovechados para la enseñanza, en particular para mejorar la idoneidad epistémica de ciertos procesos de instrucción. El TFC no es ajeno a dicha condición, y al indagar por la génesis de ciertos argumentos históricos que integran este gran y complejo objeto matemático, se obtienen argumentos históricos que permiten abarcar mejor la complejidad de este teorema.

Por otra parte, la incorporación de estos argumentos es posible gracias a su visualización en la medida en que se utilicen las herramientas tecnológicas adecuadas. En esta investigación se muestra que esto es posible gracias a la implementación de un software de graficación y otro que permite crear una tabla donde sus entradas sean dinámicas. Ambos softwares están al acceso de cualquier persona.

La propuesta que se hace aquí de la recuperación de argumentos históricos gracias a los recursos tecnológicos permite, a priori, diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del TFC que mejoran la idoneidad epistémica y mediacional de las que se implementan habitualmente en las universidades de Colombia. Esta suposición a priori se debe de confirmar en las implementaciones que incorporan esta propuesta, más allá de los primeros pilotajes que hasta el momento están empezando a realizar los autores de este escrito.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Escuela de Ciencias Básicas de la Universidad de La Salle; al proyecto ACACIA: Centros de Cooperación para el Fomento, Fortalecimiento y Transferencia de Buenas Prácticas que Apoyan, Cultivan, Adaptan, Comunican, Innovan y Acogen a la comunidad universitaria con el Centro Acacia UDFJC; y al Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el que se desarrolló el proyecto de investigación titulado "Articulación de aspectos del Teorema Fundamental del Cálculo de Newton y de Leibniz en la formación de ingenieros" del cual hacen parte los resultados aquí presentados.

Referencias

BARBIN, E. Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement. **Trema**, [s.l], v. 26, p. 20-28, 2006. Disponível em: https://journals.openedition.org/trema/64

BLÅSJÖ, V. **The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus.** The Best Writing on Mathematics 2016, p. 249-260. Princeton: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400885602-023

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BRESSOUD, D. M. Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. **American Mathematical Monthly**, v. 118, n. 2, p. 99–115, 2011. DOI: https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

CHEMLA, K.; CHORLAY, R.; RABOUIN, D. **The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences.** Paris: Oxford University Press, 2016.

CHILD, J. M. **The early mathematical manuscripts of Leibniz**. [s.l.] Dover Publications, 2005. v. 4

DUNHAM, W. **The Calculus Gallery: Masterpieces. From Newton to Lebesgue.** New Jersey: Princeton University Press, 2005.

FERRARA, F.; PRATT, D.; ROBUTTI, O. The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**, p. 237–273, 2019.

GODINO, J. **Didáctica de la matemática para maestros**. Granada: Edumat-maestros, 2004. v. 62

GODINO, J. et al. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 34, n. 2, p. 167–200, 2014.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D.; BATANERO, C. El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. **Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaíso, v. 12, n. 2, p. 47–59, 2020. DOI: https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

GORDILLO, W.; PINO-FAN, L. R. Una Propuesta de Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada. In: XIV CIAEM Mexico, Tuxtla. **Anais**... Tuxtla: 2015.

GRATTAN-GUINNESS, I. **From the Calculus to Set Theory 1630-1910.** [s.l: s.n.]

GUICCIARDINI, N. **The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800**. [s.l: s.n.]

GUICCIARDINI, N. **Newton**. Roma: Carocci Editore, 2011.

HOHENWARTER, M. et al. Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. **11th International Congress on Mathematical Education**, p. 1–9, 2008.

ILIFFE, R. **The October of 1666 Tract on Fluxions.** Disponível em: <http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00100>.

ILIFFE, R. **De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas**. Disponível em: <http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204>.

KATZ, V. **Using the History of Calculus to Teach Calculus**. p. 243–249, 1993.

LEIBNIZ, G. W. **Historia et origo calculi differentialis**. [s.l.] Im Verlage der Hahn'schen Hofbuchhandlung, 1846.

LOPEZ, J. Reflexions On Leibniz' Proof Of The Fundamental Theorem Of Calculus. **Research Gate**, 2011. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/275768886>.

MCDOUGALL, A. et al. **Researching I.T. in education: Theory, practice and future directions.** 1. ed. New York: Routledge, 2010.

MENA, R. **The Fundamental Theorem of Calculus**, 2014. . Disponível em: <http://web.csulb.edu/~rmena/410/Section8.pdf>.

MIKE, M.; ANNEKE, B. **Business Calculus with Excel.** Disponível em: <https://mathstat.slu.edu/~may/ExcelCalculus/sec-7-8-BusinessApplicationsIntegral.html>.

MUÑOZ-VILLATE, W. Relations between history of mathematics and training of engineers. **Revista Vision Electrónica**, Bogotá, v. 15, n. 1, 2021. Disponível em: https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/visele/article/view/17471.

MUÑOZ VILLATE, W. Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas**. Ciencia y Educación**, Holguín, v. 5, n. 1, p. 189–204, 2021.

MUÑOZ VILLATE, W. Elementos para un argumento didáctico desde el estudio histórico del Teorema Fundamental del Cálculo en Newton**. Ciencia e Interculturalidad,** Managua, v. 30, n. 1, p. 26–39, 2022. Disponível em: https://www.camjol.info/index.php/RCI/article/view/14241/16787.

MUÑOZ, W. Argumentos de Newton y Leibniz relativos al Teorema Fundamental del Cálculo mediados por software (P. Perry, Ed.) In: Memorias 25 encuentro de geometría y sus aplicaciones**.**, **Anais**...Universidad Pedagógica Nacional., 2022. Disponível em: <http://encuentrodegeometria.upn.edu.co/memorias.html>.

MUÑOZ, W.; LEON, O. L. Significados Parciales de la Integral Definida desde un estudio histórico en Newton y en Leibniz**.** In: XVI CIEAM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), Lima**. Anais**... Lima: 2023. Disponível em: <https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1481/1288>.

NEWTON, I. **Tractatus De Quadratura Curvarum.** [s.l: s.n.]

PANZA, M. **Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666.** Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 2005.

PEÑALOZA, W.; SUAREZ, S.; ROA, S. El Teorema Fundamental del Calculo: Escenarios para su comprension. **Revista Científica**, Bogotá, , p. 660–664, 2013.

REMAKI, A. **L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz 1672-1680**. 2021. Université de Paris, 2021.

ROBLES, M.; TELLECHEA, E.; FONT, V. Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. **Educación matemática**, Guadalajara, v. 26, n. 2, p. 69-109, 2014.

SCRIBA, C. Method The Inverse of Tangents : A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). In: **Archive for History of Exact Sciences**. [s.l: s.n.]2p. 113–137.

SQUIRES, D.; MCDOUGALL, A. **Choosing and using educational software: A teachers' guide**. 1. ed. [s.l: s.n.]

SWETZ, F. **Mathematical Treasure: Leibniz's Papers on Calculus**. Disponível em: <https://www.maa.org/book/export/html/641727>.

TALL, D. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus**. Visualization in Mathematics,** n. 19, p. 105–119, 1991.

THOMPSON, P.; DREYFUS, T. A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials**. Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline**, p. 355–359, 2016. Disponível em: <http://pat-thompson.net/PDFversions/2016Thompson-Dreyfus.pdf>.

WHITESIDE, D. T. Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century. **Archive for History of Exact Sciences**, [s.l], v. 1, n. 3, p. 179–388, 1961. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00327940

Autores

Weimar Muñoz Villate

Candidato a doctor en Educación con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Matemático, Universidad Nacional de Colombia. Especialista en Matemáticas Aplicadas y Magister en Docencia e Investigación Universitaria. Es profesor de la Universidad de la Salle y actualmente es coordinador del área de matemáticas de la Escuela de Ciencias Básicas de dicha universidad. Posee experiencia en investigaciones en las líneas de: ecuaciones en diferencia y teoría de Galois; sistemas dinámicos; e historia del teorema fundamental del cálculo. https://orcid.org/0000-0002-4947-5600.

Olga Lucía León Corredor

Doctora en Educación, Universidad del Valle. Matemática, Universidad Nacional de Colombia. Es profesora de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el Doctorado Interinstitucional de Educación y en la Maestría en Educación. Posee amplia experiencia en la coordinación y el desarrollo de investigaciones en las líneas de: lenguaje y construcción de conocimiento matemático; formación de educadores matemáticos; didáctica del lenguaje y la matemática; argumentación y semiosis en didáctica de las matemáticas. Coordinador general de los proyectos ALTER-NATIVA de la convocatoria ALFA III 2009 y Acacia en Erasmus + 2015-2018. Actual directora del Centro Acacia y coordinadora de la Red de instituciones de Educación Superior con Centro Acacia. https://orcid.org/0000-0003-4373-8630

Cómo citar el artículo:

MUÑOZ, W. V.; LEÓN, O. L. C. Uso de argumentos históricos para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con recursos tecnológicos. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos;** junio de 2023 / 374 - 389 DOI: 10.37618