# Conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros chilenos: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad en Educación Básica

**María del Mar López-Martín**
mdm.lopez@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-8677-9606
*Universidad de Almería*
Almería, España
**Carmen Gloria Aguayo-Arriagada**
cgaguayo@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-9576-2312
*Universidad de Almería*
Almería, España
**Claudia Vásquez**
cavasque@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-5056-5208
*Pontificia Universidad Católica de Chile*
Santiago, Chile
**María Burgos Navarro**
mariaburgos@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4598-7684
*Universidad de Granada*
Granada, España

**Recibido:** 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

## Resumen

Es claro que el futuro maestro debe tener un conocimiento del contenido matemático, que le permita resolver las tareas que propone a sus estudiantes. Pero también debe poseer un conocimiento didáctico del contenido que le permita interpretar de manera profesional las respuestas de los estudiantes, identificar las estrategias erróneas y tomar decisiones de acción efectivas para apoyar los procesos de enseñanza y ayudar a sus alumnos a progresar en sus aprendizajes. En el presente trabajo se evalúa el conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros chilenos de Educación Básica que optan a la mención en Matemática en relación con el razonamiento probabilístico. Haciendo uso de las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico, se ha diseñado un instrumento que considera los errores frecuentes que presentan los estudiantes de Educación Básica cuando resuelven problemas de probabilidades en un contexto de urnas y pretende valorar la competencia de futuros maestros para interpretar las respuestas de los alumnos y responder a sus estrategias erróneas. Los resultados obtenidos por medio del análisis de las respuestas revelan las limitaciones que presentan los futuros maestros cuando abordan tareas en las que tienen que poner en juego tanto su conocimiento matemático como su conocimiento didáctico. Por tanto, es necesario brindar oportunidades de aprendizaje que permitan que los futuros maestros desarrollen una comprensión en profundidad de las distintas facetas involucradas en el conocimiento didáctico-matemático en torno a la probabilidad.

***Palabras clave:*** Enfoque ontosemiótico, probabilidad, conocimiento didáctico-matemático, formación de profesores, razonamiento probabilístico.

## Conhecimento didático-matemático dos futuros professores chilenos: implicações para o ensino de probabilidade no ensino básico.


### Resumo

É evidente que o futuro professor deve ter conhecimento do conteúdo matemático, o que lhe permitirá resolver as tarefas que propõe aos seus alunos. Contudo, também, devem possuir conhecimentos didáticos dos conteúdos que lhes permitam interpretar as respostas dos alunos de uma forma profissional, identificar estratégias incorretas e tomar decisões de ação eficazes para apoiar os processos de ensino e ajudar os seus alunos a progredir na sua aprendizagem. Este documento avalia os conhecimentos didático-matemáticos de futuros professores chilenos de Educação Básica que optem por lecionar Matemática, em particular, o raciocínio probabilístico. Fazendo uso das ferramentas teórico-metodológicas da Abordagem Ontossemiótica, foi concebido um instrumento que considera os erros frequentes que os estudantes do Ensino Básico apresentam quando resolvem problemas de probabilidade num contexto de urnas eleitorais e visa avaliar a competência dos futuros professores para interpretar as respostas dos estudantes e responder às suas estratégias incorretas. Os resultados obtidos através da análise frontal das respostas revelam as limitações que os futuros professores apresentam ao abordar tarefas em que têm de colocar em prática, tanto os seus conhecimentos matemáticos, como os seus conhecimentos didáticos. Por conseguinte, é necessário proporcionar oportunidades de aprendizagem que permitam aos futuros professores desenvolver uma compreensão mais aprofundada das diferentes facetas envolvidas no conhecimento didático-matemático sobre probabilidade.

***Palavras chave:*** Abordagem Ontossemiótica, probabilidade, conhecimento didático-matemático, formação de professores, raciocínio probabilístico.

## Didactic-mathematical knowledge of future Chilean teachers: implications for the teaching of probability in basic education.


### Abstract

It is clear that the future teacher must have knowledge of the mathematical content, which will enable him/her to solve the tasks he/she proposes to his/her students. But they must also possess didactic knowledge of the content that allows them to interpret students' responses in a professional manner, identify erroneous strategies and take effective action decisions to support the teaching processes and help their students to progress in their learning.

This paper evaluates the didactic-mathematical knowledge of future Chilean teachers of Basic Education who opt for a degree in Mathematics in relation to probabilistic reasoning. Making use of the theoretical-methodological tools of the Ontosemiotic Approach, an instrument has been designed that considers the frequent errors that Basic Education students present when solving probability problems in a context of ballot boxes and aims to assess the competence of future teachers to interpret the students' answers and respond to their erroneous strategies. The results obtained by means of frontal analysis of the answers reveal the limitations that future teachers present when tackling tasks in which they have to bring into play both their mathematical knowledge and their didactic knowledge. Therefore, it is necessary to provide learning opportunities that allow prospective teachers to develop an-in-depth understanding of the different facets involved in didactic-mathematical knowledge about probability.

***Keywords:*** Ontosemiotic approach, probability, didactic-mathematical knowledge, teacher training, probabilistic reasoning.

## Introducción

Aun cuando la probabilidad es un tema relativamente reciente en la historia de la matemática (SHAUGHNESSY, 1992), su enseñanza ha comenzado a ganar terreno en los primeros niveles educativos de los currículos de matemática de diversos países (VÁSQUEZ; CABRERA, 2022). En la actualidad, el estudio, modelado y comprensión de la incertidumbre desde diversas perspectivas ha adquirido un importante papel. En numerosas situaciones de la vida cotidiana, es fundamental que los ciudadanos manejen adecuadamente los conceptos asociados a la incertidumbre, como la interpretación de pronósticos meteorológicos, la comprensión del nivel de peligro sísmico, el análisis de encuestas y predicciones económicas, y la interpretación de márgenes de error, entre otros. La capacidad de comprender y utilizar la incertidumbre no solo mejora nuestra habilidad para tomar decisiones informadas, sino que también nos ayuda a interpretar mejor el mundo que nos rodea. Es por ello por lo que es fundamental desarrollar el razonamiento probabilístico desde los primeros niveles educativos, para que los estudiantes adquieran habilidades críticas que puedan ser aplicadas en la toma de decisiones informadas en su vida cotidiana.

Fomentar el razonamiento probabilístico en las aulas permite a los estudiantes desarrollar un tipo de pensamiento que implica el uso de probabilidades para evaluar la incertidumbre, tomar decisiones, analizar datos y realizar predicciones. Para ello, es imprescindible que las personas responsables de su enseñanza posean un conocimiento del tema a abordar en el aula. No obstante, en muchas ocasiones, el profesorado deja la enseñanza de la probabilidad para el final del curso o bien la omite, pues su conocimiento matemático y didáctico es insuficiente (BATANERO; GODINO; ROA, 2004; BATANERO et al., 2012; GÓMEZ; BATANERO; CONTRERAS, 2014; VÁSQUEZ; ALSINA, 2015a, 2015b), lo que finalmente coarta las oportunidades del alumnado para desarrollar el razonamiento probabilístico.

De ahí la importancia de indagar en el conocimiento didáctico y matemático del profesorado tanto en ejercicio como en formación (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), especialmente en los primeros niveles educativos, en los que “los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas” (EVEN; BALL, 2009, p.1-2).

En Educación Matemática se han elaborado diversos modelos que permiten caracterizar los conocimientos y las competencias que debería tener un profesor de matemáticas (BLÖMEKE et al., 2016; DEPAEPE; VERSCHAFFEL; STAR, 2020). En estos modelos, la capacidad del docente para identificar los factores claves que afectan a los procesos de estudio, explicar y valorar los procesos instruccionales, así como tomar decisiones basadas en la reflexión sobre la práctica educativa se considera esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza de las matemáticas (GODINO et al., 2017).

En el marco del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2019) se propone el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM), que categoriza los conocimientos del profesor de matemáticas según tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática, considerando como competencias clave del profesor la competencia matemática y competencia de análisis e intervención didáctica (GODINO et al., 2017). En este modelo se asume que es necesario prestar atención no solo al conocimiento matemático del profesor sino también a su conocimiento especializado a fin de asegurar competencia profesional.

El conocimiento especializado incluye una comprensión de las diferentes teorías de aprendizaje, las metodologías de enseñanza más efectivas y cómo utilizar los diversos recursos y materiales para enseñar de manera efectiva. Además, sobre cada contenido matemático específico, el profesor debe tener un conocimiento didáctico-matemático de los diferentes aspectos que afectan a su enseñanza y aprendizaje: la diversidad de significados que se ponen en juego, cómo aprenden el contenido los estudiantes, qué dificultades o errores pueden cometer y cuál es su origen, así como de qué manera se deben gestionar las interacciones en el aula, incluida la retroalimentación por parte del profesor a las prácticas matemáticas de los estudiantes, para lograr un aprendizaje efectivo del mismo (GODINO et al., 2017).

Desde esta perspectiva, la finalidad de este estudio es analizar el conocimiento didáctico-matemático en las facetas epistémica (el contenido), cognitiva (el aprendizaje, los errores y dificultades), interaccional y mediacional (gestión de las interacciones y medios para lograr el progreso en el aprendizaje) vinculado al razonamiento probabilístico de 10 futuros maestros chilenos de Educación Básica. En la experiencia, los futuros docentes deben interpretar la comprensión de estudiantes (ficticios) cuando resuelven un problema de comparación de probabilidades en el contexto de urnas, dar respuesta a sus errores y decidir cómo ayudarles a superar sus dificultades. Los resultados de este estudio permitirán avanzar en la generación de nuevos conocimientos en torno al razonamiento probabilístico de los futuros maestros de

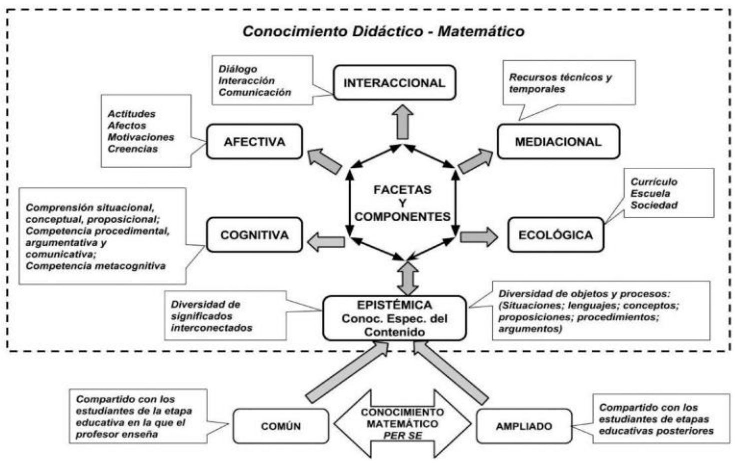
Educación Básica, y orientar el diseño de acciones formativas para el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas.

## 1. Perspectiva teórica y antecedentes

Desde el modelo CCDM se asume que el profesor debe disponer de los conocimientos matemáticos y didácticos que le permitan abordar los problemas que surjan en su práctica docente garantizando por un lado el desarrollo efectivo del proceso de instrucción, y por otro, la propuesta de acciones de mejora para futuras implementaciones (GODINO et al., 2017).

El modelo CCDM considera dos grandes categorías globales de los conocimientos del profesor de matemáticas que se articulan entre sí (Figura 1).

**Figura 1** – Facetas y Componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático




**Fuente**: Godino et al. (2017, p.96).

- El *conocimiento matemático per se* engloba el conocimiento común y el conocimiento ampliado. El primero corresponde al conocimiento del contenido matemático relativo al nivel educativo donde importante docencia el profesor, mientras que el segundo permite la conexión de los contenidos matemáticos con niveles educativos superiores u otros tópicos matemáticos.
- El *conocimiento especializado o didáctico-matemático* es el conocimiento del contenido que caracteriza y diferencia al profesor de otras personas que saben matemáticas. Este conocimiento se articula en torno  las diferentes facetas que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje: 1) *epistémica*, engloba a los significados institucionales del contenido y que el profesor debe poner en juego para resolver tareas en relación a un

tema específico de las matemáticas; 2) *cognitiva*, asociada a la comprensión del pensamiento del estudiante y cómo progresa su aprendizaje; 3) *ecológica*, que permite relacionar con otras disciplinas y orientar las tareas de acuerdo con el currículum institucional obligatorio; 4) *afectiva*, responde a las emociones, creencias y actitudes expresadas por los estudiantes; 5) *interaccional*, permite identificar y gestionar los conflictos y dificultades de los estudiantes; 6) *mediacional*, asociada a la elección de recursos apropiados que potencien el aprendizaje.

En esta dirección, durante las últimas décadas encontramos diversas investigaciones orientadas a profundizar en el conocimiento didáctico-matemático en torno a la probabilidad, que poseen tanto futuros maestros como maestros en activo. Dichas investigaciones ponen de manifiesto que tanto los profesores en formación como profesores en ejercicios poseen un conocimiento matemático y didáctico insuficiente para la enseñanza de la probabilidad (BATANERO et al., 2012; GÓMEZ; BATANERO; CONTRERAS, 2014; VÁSQUEZ; ALSINA, 2015a, 2015b; GEA; PARRAGUEZ; BATANERO, 2017; BEGOLLI et al., 2021;), en particular para interpretar y valorar correctamente las respuestas de alumnos (BATANERO et al., 2015). Recientemente, Burgos et al. (2022) evalúan los conocimientos y competencias de futuros maestros de primaria cuando interpretan las respuestas de estudiantes en tareas probabilísticas, así como estrategias incorrectas vinculadas con la comparación de probabilidades, en concreto con el razonamiento proporcional. A partir de los resultados se constata un razonamiento proporcional y probabilístico insuficiente que dificulta la toma de decisiones por parte de los futuros maestros.

En línea con estas investigaciones, el interés de este trabajo es indagar cómo futuros maestros chilenos de primaria dan sentido a situaciones de enseñanza que involucran al razonamiento probabilístico. Los futuros maestros deben interpretar las apreciaciones de alumnos (hipotéticos) a una situación de comparación de probabilidades, analizando cuál es el contenido matemático involucrado y qué posibles intuiciones motivaron su respuesta, para finalmente decidir cómo ofrecer una explicación a cada alumno que contribuya a su aprendizaje.

## 2. Metodología

Este estudio se centra en analizar el conocimiento didáctico-matemático vinculado al razonamiento probabilístico en futuros maestros de Educación Básica, por lo que se ha realizado bajo un enfoque metodológico cualitativo de tipo descriptivo (BISQUERRA, 2019) y empleando la técnica el análisis de contenido (KRIPPENDORFF, 2013).

**2.1 Contexto**

La muestra considerada es no probabilística y está compuesta por 10 futuros maestros chilenos de Educación Básica (en adelante FM) que se encuentran en su etapa final (octavo semestre) para optar a la especialidad en Educación Matemática. Todos ellos han aprobado con anterioridad un curso sobre conceptos básicos de estadística y probabilidad y dos cursos de didáctica de la matemática, en los que se explora y profundiza en el conocimiento didáctico-matemático que debe poseer el profesor que enseña matemáticas, con formación explícita en el modelo CCDM, y sus facetas (GODINO et al., 2017).

Para el proceso de recolección de datos, se aplicó una tarea que involucra aspectos del razonamiento probabilístico. Dicha tarea fue desarrollada de forma individual, disponiendo de un tiempo máximo de respuesta de 90 minutos. Estos FM habían resuelto con anterioridad tareas similares a la presentada y además contaban con un temario de contenidos y referencias bibliográficas mínimas a estudiar.

**2.2. Instrumento para la recolección de datos**

La tarea ha sido diseñada por el equipo investigador teniendo como base el trabajo de Burgos et al. (2022) en el que las autoras evalúan las competencias de FM de Educación Primaria para interpretar las respuestas de los estudiantes en tareas relacionadas con la comparación de probabilidades, identificar estrategias equivocadas y reconocer el razonamiento proporcional en la actividad matemática. La tarea presentada en la Figura 2 tiene como objetivo hacer que los FM reflexionen sobre la adecuación de las respuestas de los estudiantes ficticios a una tarea de probabilidad (ítem 1) (faceta cognitiva) y la identificación de los contenidos matemáticos que se pone en juego al dar respuesta a la tarea (ítem 2), con el fin de evaluar su conocimiento en la faceta epistémica. Además, se les pide que, en los casos de respuestas incorrectas, identifiquen las intuiciones o estrategias que han llevado a esa respuesta incorrecta (ítem 3) (faceta cognitiva) e indiquen las acciones que tomarían para explicar y corregir los errores de los estudiantes (ítem 4), con el objetivo de evaluar las facetas interaccional y mediacional.

**Figura 2 –** Formulación del instrumento propuesta

**Tarea.** En la caja A se han metido 12 fichas negras y 4 fichas blancas. En la caja B se han metido 20 fichas negras y 10 fichas blancas. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?

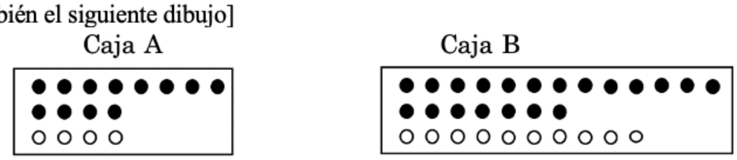
Respuestas estudiantes:

**Emilia:** "en la caja A porque hay pocas fichas blancas y la caja B tiene más fichas blancas"

**Belén:** "sacaría de la caja A porque cada 3 negras hay una blanca y en la caja B cada dos negras hay una blanca. Así que tengo más probabilidades de ganar si saco de la caja A"

**Pedro:** "elegiría la caja B porque tiene más fichas negras que la caja A y hay más probabilidad que salga en la B una ficha negra"

**Lucas:** "yo elegiría la caja B ya que hay el doble de bolas negras que blancas" [En su respuesta añade también el siguiente dibujo]




En base a las respuestas dadas de los estudiantes, se pide responder de manera justificada a las siguientes cuestiones:

**Ítem 1.** Para cada uno de los estudiantes:

a) ¿Crees que ha seleccionado la caja correcta?

b) ¿Crees que ha justificado correctamente su elección?

**Ítem 2.** ¿Qué contenido(s) matemático(s) se está(n) abordando en la tarea propuesta? Señale al menos 4 ideas clave necesarias para aprender y enseñar ese contenido.

**Ítem 3.** En aquellos casos en los que se ha realizado una selección errónea de la caja y/o se ha justificado incorrectamente la elección, señala las posibles intuiciones o estrategias que han llevado al estudiante a realizar dicha selección y/o justificación.

**Ítem 4.** Para cada justificación incorrecta:

a) ¿Cómo explicarías a cada alumno el error que ha cometido?

b) ¿Cómo ayudarías a cada alumno a superar las dificultades que han motivado dichos errores?

**Fuente**: Elaboración propia.

### *2.2.1. Análisis a priori del instrumento*

La resolución del ítem 1 (faceta cognitiva) conlleva identificar la caja en la que es más probable obtener una ficha negra. En la Tabla 1 se identifican el número de casos favorables, desfavorables y posibles asociados a ambas cajas.

**Tabla 1 –** Datos asociados a la Tarea

| Tipos de casos | Caja A | Caja B |
|---|---|---|
| Favorables (fichas negras) | 12 | 20 |
| Desfavorables (fichas blancas) | 4 | 10 |
| Posibles (total de fichas) | 16 | 30 |

**Fuente**: Elaboración propia

A partir de la información descrita se tiene, aplicando la Regla de Laplace, que la probabilidad de obtener una ficha negra en la Caja A y B es, $12/16$ y $20/30$ o equivalentemente $3/4$ y $2/3$, respectivamente, comparando ambas fracciones se observa que es más probable obtener una ficha negra en A que en B. De igual forma, se puede llegar a la misma conclusión comparando la razón existente entre fichas negras y blancas en ambas cajas, es decir, en la Caja A se tiene que por cada tres fichas negras hay 1 blanca (3:1), mientras que en B esa relación es 2 negras por cada blanca (2:1). Alternativamente, también se obtiene el mismo resultado si se realiza el estudio atendiendo a los casos desfavorables, puesto que en la Caja B estos presentan una probabilidad o razón entre fichas blancas y negras superior que en la Caja A entonces es menos probable extraer una ficha negra.

Atendiendo a las resoluciones mostradas anteriormente, podemos afirmar que Belén es la única alumna que selecciona y justifica correctamente la tarea, pues establece correctamente la razón entre fichas negras y blancas, seleccionando por tanto la caja adecuada. Mientras que, en los casos restantes, se observan estrategias aditivas o univariadas. Así, en el caso de Emilia, se observa que, aunque esta indica que extraería la ficha de la Caja A, su justificación se basa en el número de casos desfavorables no teniendo en cuenta su relación con los casos favorables o posibles de cada caja. Este tipo de razonamiento se observa también en la respuesta de Pedro, pero centrándose en el número de casos favorables. Por tanto, Emilia y Pedro usan una estrategia aditiva, la primera sobre los casos desfavorables y el segundo sobre los favorables. Dado que este argumento solo conduce a una respuesta correcta cuando los casos favorables (en el caso de Emilia) y los desfavorables (en el caso de Pedro) coinciden, puede ser adecuado observar este hecho, modificando las composiciones de las cajas, y reforzar la relación de proporcionalidad en la base de la comparación de probabilidades.

Por último, Lucas, aunque establece correctamente la razón entre fichas negras y blancas en la Caja B, no establece la relación entre las cajas. A partir de esta respuesta podemos intuir que el estudiante selecciona la caja incorrecta porque no tiene en cuenta el papel que juega la Caja A, por lo que deberemos guiar nuestra actuación con objeto de que identifique la relación entre negras y blancas de dicha caja y que posteriormente identifique.

En cuanto a las ideas clave o contenidos matemáticos abordados en la tarea (ítem 2) (faceta epistémica), estos se enmarcan en el bloque de números, concretamente dentro del conjunto de los números fraccionarios, y del bloque de estadística y probabilidad. Específicamente, en el cálculo de probabilidades haciendo uso del enfoque clásico, o laplaciano, que pone en juego los tipos de sucesos (posibles, favorables y/o desfavorables) y a la misma vez la idea de espacio muestral y equiprobabilidad. Recordemos que la Regla de Laplace solamente tiene sentido en aquellos casos en los que los distintos elementos del espacio muestral (finito) son equiprobables, es decir, donde todos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Teniendo en cuenta la expresión correspondiente al enfoque clásico surge el concepto de fracción como parte-todo. De igual forma, emerge la razón de proporcionalidad.

El análisis de los ítems anteriores nos permite intuir los posibles errores o estrategias que han cometido los estudiantes al dar una respuesta o justificación incorrecta a la tarea (ítem 3) (faceta cognitiva).

Por último, en el ítem 4 (faceta interaccional y mediacional) se solicita a los futuros maestros que indiquen cómo ayudarían a los estudiantes que o bien han seleccionado la caja incorrecta o que su justificación no es adecuada. En el caso de Emilia y Pedro, para analizar el impacto del número de fichas en el cálculo de probabilidades o razones de proporción, sería recomendable realizar una modificación en el número de fichas en ambas cajas. De esta manera, se podría observar, de manera más precisa, el papel que juega el todo y las distintas partes en estos cálculos. Respecto a Lucas, se debería reforzar la idea de razón proponiendo en primer lugar situaciones similares a la Caja B para luego proceder a variar el número de fichas y que de este modo reconozca la relación de proporcionalidad entre ellas. También sería recomendable proponer situaciones en los que se modifique el número de fichas y que la respuesta correcta corresponda a una caja con un número menor de fichas, de esta forma se reforzaría la idea de que un mayor número de fichas no tiene por qué suponer una mayor probabilidad.

### 2.3. Procedimiento de análisis

Para la valoración del grado de corrección de las respuestas dadas por los FM se consideró la variable "grado de corrección", asignando los valores: "1" cuando la respuesta es correcta, "0" si la respuesta es incorrecta y "NR" si no responde. Los criterios para definir a cuál de estas categorías pertenece la respuesta otorgada por los FM, se desprenden a partir del análisis a priori del instrumento.

## 3. Resultados

Para exponer los resultados de este estudio, presentamos en primer lugar, un análisis del conocimiento didáctico-matemático desde la faceta epistémica; y, en segundo lugar, el análisis del conocimiento didáctico-matemático desde las facetas cognitiva, interaccional y mediacional.

### *3.1. Análisis conocimiento didáctico matemático desde la faceta epistémica*

#### *3.1.1 Análisis ítem 2*

En este ítem se solicita a los FM que indiquen ¿qué contenido(s) matemático(s) se está(n) abordando en la tarea propuesta? Señalando al menos cuatro ideas clave necesarias para aprender y enseñar ese contenido.

Tras examinar las respuestas de los participantes respecto a los contenidos presentes en la resolución de la tarea propuesta, se observa que la mayoría menciona de manera genérica el bloque de Estadística y Probabilidad. En algunos casos, los conocimientos matemáticos previos necesarios para afrontar tareas de probabilidad se han considerado como contenidos específicos de esta, tal y como se aprecia en la respuesta proporcionada por FM4:

> Los contenidos matemáticos abordados en este problema son el cálculo de probabilidades, división, razones, fracciones (FM4).

Estas respuestas reflejan las limitaciones que enfrentan los futuros maestros al determinar de manera precisa los contenidos matemáticos que deben ser abordados en tareas, actividades o problemas.

En la Figura 3 se presenta una nube de palabras con los términos propuestos por los participantes en relación con las ideas clave para el aprendizaje y la enseñanza de los contenidos abordados en la tarea. Es importante destacar que nueve de los diez participantes ofrecieron una variedad de términos, sólo FM6 no respondió a la consigna pertenecientes al ámbito de la probabilidad, la estadística y la proporcionalidad.

**Figura 3** – Nube de palabras de las ideas clave


**Fuente:** Elaboración propia.

Como se puede observar en la figura, los términos propuestos están relacionados con la comprensión de conceptos básicos, como probabilidad, azar, espacio muestral y casos favorables y posibles, así como con habilidades y estrategias relacionadas con el ámbito de la aritmética.

Es importante destacar que algunos participantes, como por ejemplo FM2, no parecen haber diferenciado las ideas clave involucradas en la tarea. Este hecho puede sugerir una posible falta de comprensión en la identificación de los conceptos matemáticos fundamentales necesarios para abordar satisfactoriamente las tareas que pueden surgir en su desempeño como docentes. La falta de una comprensión sólida de estos conceptos puede incidir en la calidad de la enseñanza, lo que a su vez puede limitar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Un ejemplo de esto es la siguiente respuesta:

> Plantear el problema […] ¿Cómo puedo responder la pregunta? […] (¿Qué debemos medir y cómo? […]. […] saber cómo recolectar los datos (forma y registro de la información) para luego llegar al análisis en donde se ordenan los datos, se buscan patrones y así llegamos a la conclusión en donde se interpreta y comunican sus conclusiones generando nuevas preguntas, aquí responden la pregunta de interés, realizan inferencias y predicciones (FM2).

A pesar de que los términos relacionados con el razonamiento proporcional aparecen con menor frecuencia que conceptos como la probabilidad o el espacio muestral, algunos de los participantes resaltan la importancia de estos para una comprensión adecuada de la resolución de la tarea, tal y como se puede ver en la siguiente respuesta:

> De este contenido, 4 ideas claves necesarias para enseñarlo son el concepto de probabilidad, espacio muestral, razones y proporciones (Batanero y Godino, 2002). Estas ideas son clave para la enseñanza y aprendizaje de este contenido ya que permitirán que los y las estudiantes comprendan el razonamiento que existe detrás de las probabilidades y cómo funcionan. De esta forma, cuando deban trabajar en la realidad las matemáticas (tal como sucede en el caso anterior), sabrán como relacionar el problema con el contenido que ya conocen (FM3).

Para responder correctamente al ítem 1, los FM deben disponer del conocimiento matemático para resolver el problema, pero también deben disponer del conocimiento didáctico-matemático del contenido.

### *3.2. Análisis del conocimiento didáctico-matemático desde las facetas cognitiva, interaccional y mediacional*

#### *3.2.1 Análisis ítem 1*

A partir de las respuestas dadas por los futuros maestros al ítem 1 podemos acceder a aspectos de la faceta cognitiva, en particular, aquellos asociados a la comprensión del pensamiento de los estudiantes y cómo progresa su aprendizaje.

A) <u>Análisis del ítem 1a)</u>

Así pues, se observa que para la pregunta planteada en el ítem 1a) (¿crees que ha seleccionado la caja correcta?), un 90% de los FM logra identificar que Emilia y Belén han seleccionado la caja correcta, reconociendo que estas logran establecer la razón entre fichas negras y fichas blancas. A modo de ejemplo, FM2 señala:

> Emilia y Belén han seleccionado la caja correcta ya que hay un 75% de probabilidades de sacar una bola negra en la caja A, en cambio en la caja B hay más bolas, pero la probabilidad de sacar una negra es de un 66% (FM2).

Por otro lado, solo uno de los FM señala que:

> Belén y Pedro han seleccionado la respuesta correcta, ya que la caja A tiene más fichas negras en proporción que la caja B (la cantidad de fichas totales que tiene la ficha A es de 16, de las cuales 12 son negras, obteniendo una frecuencia relativa de 0,75. En cambio la caja B tiene 30 fichas, de las cuales 20 son fichas negras, obteniendo una frecuencia relativa de 0.666…En conclusión la caja A, tiene más probabilidad de salir una ficha de color negro) (FM 10).

Este tipo de respuesta la hemos valorado como correcta, pues aun cuando selecciona equivocadamente como correcta la respuesta dada por Pedro, cuya justificación se centra en el número de casos favorables, si logra identificar a Belén como uno de los estudiantes que ha seleccionado la caja correcta.

B) <u>Análisis del ítem 1b)</u>

En lo que respecta al ítem 1b) (¿crees que ha justificado correctamente su elección?), a partir de la información recogida en la Tabla 2, observamos que los FM logran identificar qué estudiantes han dado o no una justificación adecuada en la realización de la tarea. Para ello, se centran en las justificaciones y argumentaciones dadas por Emilia, Belén, Pedro y Lucas. Nótese que todos los FM identifican correctamente que la justificación de Belén es la acertada; recordemos que de todos los estudiantes es la única que selecciona y justifica satisfactoriamente la tarea propuesta. Asimismo, se observa que, ante la respuesta dada por Emilia, ocho de los FM identifican que la justificación de su respuesta es errónea, pues se centra en el número de casos favorables y, solo el FM2 la considera correcta señalando:

> Emilia: Su justificación está correcta si analiza solo el dibujo, aquí se podría retroalimentar y hacerle más preguntas y lograr que no solo tome un color como referencia si no que tome ambos.

Por otro lado, en lo que respecta a la justificación de Pedro, ocho de los FM identifican que la justificación de este es incorrecta pues su razonamiento se centra únicamente en el número de casos favorables, conduciéndole a seleccionar la caja incorrecta. Ejemplo de esto es la siguiente respuesta:

Pedro: No hay una buena justificación, porque solo está considerando las fichas de color negro por lo cual no considera las fichas de color blanca que influye al momento de realizar la extracción de una ficha y con la probabilidad de que esta sea de color negro (FM7).

**Tabla 2** – Valoración numérica sobre el grado de corrección al ítem 1b)

| | Emilia | Belén | Pedro | Lucas |
|---|---|---|---|---|
| FM1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| FM2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| FM3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| FM4 | 1 | 1 | NR | NR |
| FM5 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| FM6 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| FM7 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| FM8 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| FM9 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| FM10 | NR | 1 | NR | NR |

**Fuente:** Elaboración propia.

En lo que respecta a Lucas, siete de los FM identifican el error en la justificación de Lucas, señalando que aun cuando logra determinar correctamente la razón entre fichas negras y blancas en la Caja B no llega a establecer la relación entre ambas cajas. A modo de ejemplo:

Para el caso de Lucas, la representación que realiza esta acorde a la tarea matemática planteada, pero al igual que Pedro se dejó llevar por su percepción, haciendo alusión a que en la caja B hay el doble de fichas negras que blancas, sin considerar que en la caja A, hay el triple de fichas negras que blancas, olvidando, al igual que Pedro, las proporciones que permiten verificar que hay mayor probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A que de la B (FM1).

Sin embargo, sólo el FM6 identifica a la justificación de la respuesta de Lucas como correcta, señalando:

Lucas: La justificación de su respuesta se encuentra bien ya que plantea que en la caja B hay el 2 doble de negras que de blancas. Guiándose con su dibujo (FM6).

Por último, llama especialmente la atención la alta tasa de no respuesta (NR) de FM4 y FM10.

*3.2.2 Análisis ítem 3*

Al igual que para el ítem 1, a partir del ítem 3 los FM deben poner en juego aspectos de la faceta cognitiva para identificar las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a Emilia, Pedro y Lucas a realizar una selección errónea de la caja y/o han justificado incorrectamente la elección, señalando las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a los estudiantes a realizar dicha selección y/o justificación.

Así, a partir del análisis de las respuestas dadas por los FM, hemos detectado las siguientes categorías:

- *Estrategia intuitiva.* En esta categoría las observaciones de los FM se centran en la idea que los alumnos ficticios dan una justificación de su elección de la Caja A o B, desde su intuición. Por ejemplo: FM1 señala "Pedro y Lucas, quienes justificaban su elección basándose en sus propias percepciones (intuición), considerando dobles o cantidades mayores".
- *Estrategia univariada.* Se contempla en esta categoría aquellas justificaciones donde sólo se toman en cuenta los casos desfavorables. Por ejemplo, FM4 señala: "uno de los posibles razonamientos de la estudiante se centra en la cantidad de fichas blancas que hay en cada caja, dejando a un lado la cantidad de fichas negras"; o bien solo en los favorables ("eligen mal la respuesta debido a que creen que, por haber una mayor cantidad de pelotas negras, existirá una mayor probabilidad de sacarlas", FM5), sin existir una relación entre ambos (BURGOS et al., 2022).

En el análisis *a priori* se pone de manifiesto que la respuesta y justificación de Belén es la correcta, por lo tanto, en este ítem 3 ninguno de los FM alude a las estrategias o intuiciones de esta respuesta. Como se muestra en la Tabla 3, llama la atención que, si bien la mayoría de los FM reconocen que las justificaciones de Emilia, Pedro y Lucas son incorrectas, en este apartado la mitad de los FM no otorga una respuesta para el caso de Pedro y Lucas, y para el caso de Emilia son siete los FM que no contestan.

**Tabla 3** – Categorías y frecuencias en la descripción de estrategias erróneas de Emilia, Pedro y Lucas

| Categorías | Emilia | Pedro | Lucas |
|---|---|---|---|
| Estrategia visual | 0 | 2 | 3 |
| Estrategia univariada | 3 | 3 | 2 |
| No contesta | 7 | 5 | 5 |

**Fuente**: Elaboración propia.

Estos resultados pueden ser producto de limitaciones de los FM a la hora de identificar los errores o las dificultades que han tenido los estudiantes ficticios de la tarea (Emilia, Pedro y Lucas) para identificar la caja correcta.

Por otro lado, se puede observar que la estrategia que los FM consideran más representativa para el caso de Emilia y Pedro se basa en la idea de no establecer una relación entre los casos favorables y desfavorables, por lo tanto, se centran en uno de ellos, reconociendo, implícitamente, la estrategia univariada en Emilia y Pedro. Ejemplo de esto se refleja en la respuesta de FM4 quien señala:

> Emilia: Uno de los posibles razonamientos de la estudiante se centra en la cantidad de fichas blancas que hay en cada caja, dejando a un lado la cantidad de fichas negras. En cuanto a Pedro, su razonamiento era similar al de Emilia, debido a que consideró solo la cantidad de fichas negras (lo contrario a Emilia) (FM4).

Para el caso de Lucas, 3 de los 5 FM que contestaron consideran que la justificación es incorrecta, porque este alumno ficticio se deja llevar por la representación pictórica que hizo de las cajas, donde se puede apreciar que en la Caja B se ven más bolas que en la Caja A, por lo tanto, lo hace intuir que donde hay más bolas existe mayor probabilidad. Esta situación se puede observar en la respuesta de FM3

> En el caso de Lucas, la respuesta es similar a la de Pedro y es factible que el razonamiento de este estudiante haya sido similar al del estudiante anterior, guiándose por sus percepciones e ideas previas, utilizándolas para poder resolver el problema que se le presentó, aquí el alumno dice que escogería la caja B porque hay el doble de bolas negras que blancas, ignorando sus proporciones y solo guiándose del número mayor en la cantidad de objetos que hay en las cajas.

Así, a partir de las respuestas dadas por los FM al ítem 1 y al ítem 3, se infiere que estos FM cuentan con conocimiento especializado vinculado a la faceta cognitiva, pues logran identificar y describir configuraciones cognitivas ante respuestas ficticias a una tarea de probabilidad. Sin embargo, presentan una mayor dificultad al momento de identificar posibles conflictos de aprendizaje que pueden presentar los estudiantes en relación con la tarea propuesta.

### *3.2.3 Análisis del ítem 4*

El ítem 4, requiere que una vez que el FM ha identificado el conflicto semiótico, decida cómo responder a él haciendo uso de sus conocimiento didáctico-matemático asociado a las facetas interaccional y mediacional. Para ello, se solicita a los FM que señalen, por un lado, ¿cómo explicaría a cada alumno el error que ha cometido? y, por otro lado, ¿Cómo ayudaría a cada alumno a superar las dificultades que han motivado dichos errores?

A) <u>Análisis del ítem 4 a)</u>

En el ítem 4 a) los FM debían describir como explicarían el error cometido por Emilia, Pedro y Lucas al justificar la elección de la caja, para este caso se describen y ejemplifican las siguientes categorías, tomadas de Burgos et al. (2022):

- *Uso de materiales manipulativos.* Sugieren que el uso de material manipulativo ayuda a los alumnos a entender los errores cometidos. Ejemplo, FM7 señala: “utilizaría material concreto para que de esta manera puedan observar lo que van a manipular para poder evidenciar la probabilidad; y recordar que al tener dos cajas se debe evaluar ambas para ver la probabilidad mayor”.
- *Uso de representaciones.* Se considera que el uso de representaciones puede facilitar la identificación de los casos favorables y posibles (“le explicaría de manera pictórica, donde podrá observar que el aumento también es de bolas blancas”, FM9). Asimismo, destacan que la utilización de representaciones simbólicas solventaría los errores (“les propondría que lo escribiéramos de manera simbólica para que comprendan cómo se escribe”, FM5).
- *Empleo de nuevos ejemplos o contraejemplos.* Se considera que proponer más ejemplos o usar nuevas situaciones, permite a los alumnos comprender por qué su estrategia no siempre funciona. Ejemplo, FM2 menciona:” le daría más ejemplos para que el descubra que puede haber casos en los que tengamos más cantidad de bolitas en un objeto que en otro pero la probabilidad no siempre se basa en la cantidad del objeto que se pide”.
- *Afianzar conceptos.* En esta categoría tienen en cuenta que el explicar nuevamente algunos conceptos claves es necesario para que los alumnos se den cuenta de sus errores (explicarle nuevamente lo que es una probabilidad, FM1).

De este modo, a partir de la Tabla 4, en primer lugar, es importante destacar que dos de los diez participantes no dieron respuesta. De los ocho que sí respondieron, ninguno supo cómo abordar las dificultades de los tres estudiantes ficticios. Es decir, solo dos participantes (FM1 y FM8) dieron una explicación para el error de Emilia, mientras que FM2 y FM10 dieron una respuesta diferente para el caso de Pedro y Lucas, el caso contrario son cinco participantes que propusieron la misma solución para ambos. Esta situación muestra cierta complejidad para los FM, ya que consideran que los errores cometidos por Pedro y Lucas son similares y requieren la misma forma de actuación para solucionarlos. Por otra parte, solo FM7 ofreció una respuesta general para los tres casos, considerando que todos los estudiantes cometieron el mismo error y que la solución debe ser la misma para todos.

**Tabla 4** – Categorías y frecuencias en las explicaciones a los errores de Emilia, Pedro y Lucas

| Categorías | Emilia | Pedro | Lucas | General |
|---|---|---|---|---|
| Uso de materiales manipulativos | 0 | 1 | 1 | 1 |
| Uso de representaciones | 0 | 2 | 2 | 0 |
| Empleo de nuevos ejemplos o contraejemplos | 0 | 2 | 0 | 0 |
| Afianzar conceptos | 2 | 3 | 5 | 1 |
| No contesta | 8 | 2 | 2 | 8 |

**Fuente**: Elaboración propia.

De igual manera, al observar la Tabla 4 y teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, sobre la cantidad de respuestas, se puede apreciar que en algunos casos las explicaciones a los errores cometidos que proponen los FM pueden estar incluidas en varias de las categorías planteadas. Por este motivo, se aprecia que el FM7 considera que usar material manipulativo y afianzar conceptos es la forma de explicar a los tres alumnos ficticios su error. En el caso las otras respuestas, la que tiene mayor presencia es la de explicar nuevamente los conceptos que se ponen en juego al resolver la tarea, por ejemplo, FM8 plantea:

> Emilia: Si bien has llegado al resultado correcto, debes tomar en cuenta el espacio muestral completo que corresponde a todos los posibles resultados del experimento.

Seguidamente la explicación que los FM consideran más apropiada es el uso de representaciones, como lo expone FM9:

> A Pedro y Lucas le explicaría de manera pictórica, donde podrán observar que el aumento también es de bolas blancas y por tanto ir haciendo una representación de árbol en conjunto con los casos posibles.

B) Análisis ítem 4 b)

En este ítem se solicitaba a los FM que explicasen cómo ayudarían a cada alumno a superar las dificultades que los han motivado a cometer errores, es importante recordar que según lo establecido en el análisis a priori Emilia, Pedro y Lucas eran los que cometían algún tipo de error. Después de analizar las nueve respuestas, ya que el participante FM6 no contesta a este apartado, llama la atención que solamente FM10 propone situaciones personalizadas de cómo ayudar a Pedro y Lucas, enfocadas al uso de diferentes representaciones para ayudar a los alumnos a darse cuenta de sus errores, por ejemplo:

> Pedro: primero que nada, realicemos un modelo matemático para que nos pueda ayudar a identificar y solucionar el problema. Para ello dibuja 2 cajas en proporción, te sugiero que uses los cuadrados de tu cuaderno, así es más fácil. En la caja A hace una caja con 16 cuadrados y en cada una de ellas primero pinta las negras y luego la blanca (te sugiero también que sea de 4x4), una vez que termines, dibuja la caja B con 30 cuadrados y pintas en cada cuadrado primero las negras y después las blancas (te

> sugiero que sea 5x6). Con el dibujo que ves de ambas cajas, cual se observa que tiene más probabilidad (sin que cuentes las fichas, solo mira). Si yo doblara la hoja en 2 partes iguales, como se ve la caja B al doblar la hoja…podrías evidenciar más fácil que tiene más o menos posibilidades (FM10).

En el caso de FM9, su propuesta se centra en ayudar en forma conjunta a Pedro y Lucas con ejemplos parecidos a la tarea, utilizando representaciones con material concreto y pictórico con el objetivo que los estudiantes hagan comparaciones y se puedan dar cuenta del error que cometieron. Finalmente, las otras 7 respuestas a este apartado se plantean de modo general, es decir, para Emilia, Pedro y Lucas, centrándose en estrategias pedagógicas para abordar el trabajo en el aula de clase. Por ejemplo, FM2 propone:

> Utilizaría la técnica de compartir estrategias ya que a través de las respuestas compartidas resuelven el desafío primero de manera individual, luego comparten sus respuestas en donde como docente seremos moderadores ante estas, así más que darle información de como si se resuelve serán descubridores de esta enseñanza en forma colectiva.

## 4. Consideraciones finales

Es fundamental que los futuros maestros posean un adecuado conocimiento del contenido matemático y del conocimiento didáctico del contenido para garantizar un proceso óptimo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, el conocimiento del contenido matemático permite al maestro comprender la complejidad de las prácticas que propone a sus estudiantes, en términos de los conceptos, propiedades y procedimientos que se pondrán en juego. Este conocimiento es la base para tomar conciencia de posibles dificultades que puedan encontrar sus estudiantes. Pero esta previsión puede quedarse muy corta, por lo que es necesario poder interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes identificando sus intuiciones y estrategias, correctas o no. Este conocimiento especializado de los factores que afectan al aprendizaje de los alumnos es imprescindible para planificar convenientemente las trayectorias didácticas y tomar decisiones de acción durante la práctica docente que involucre técnicas y estrategias, con las que satisfacer las necesidades de cada estudiante (GODINO et al., 2017).

Según la investigación llevada a cabo, se ha constatado que, en general, los futuros maestros poseen un conocimiento adecuado sobre las tareas probabilísticas que implican comparación de probabilidades en urnas. Esto les permite resolver la tarea propuesta con eficacia y precisión, identificando las respuestas correctas e incorrectas dadas por los estudiantes ficticios. No obstante, es importante destacar que los participantes muestran ciertas dificultades cuando tienen que delimitar tanto los contenidos matemáticos específicos como las ideas clave implicadas en la resolución de la tarea, ya que los términos propuestos son muy generales, como, por ejemplo, considerar la Estadística y la Probabilidad como contenidos específicos. Estos resultados son similares a los obtenidos en investigaciones previas en las que se evidenció la falta de conocimiento común y específico sobre tareas de probabilidad en futuros maestros y su incapacidad para identificar los objetos matemáticos en tareas probabilísticas, incluso cuando estos utilizaron dichos objetos para resolver correctamente los problemas planteados (BATANERO et al., 2015; VÁSQUEZ; ALSINA, 2019).

Los resultados obtenidos evidencian un conocimiento didáctico-matemático que requiere de mayor desarrollo, pues presenta ciertas debilidades. Aun cuando los FM cuentan con ciertos conocimientos vinculados a la faceta epistémica, presentan debilidades en lo que respecte a las facetas instruccional y mediacional.

Específicamente, el análisis del ítem 3 (faceta cognitiva) y el ítem 4 (faceta interaccional y mediacional) indican que estos FM tienen dificultades para identificar los errores que impiden a los estudiantes resolver o justificar adecuadamente la tarea sobre urnas. De igual forma, se evidencia, a partir de sus respuestas, que las estrategias descritas son demasiado genéricas y no diferencian concretamente cómo actuar en base al tipo de error cometido, lo que limita la propuesta de actuaciones en el proceso de instrucción. Es importante destacar que la detección del error juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que permite al docente reflexionar sobre cómo actuar ante diversas situaciones y, al mismo tiempo, explicar al estudiante los motivos por los que ha cometido el error. La concepción didáctica basada en los errores cognitivos y sus causas es un desafío pedagógico que debe ser considerado uno de los ejes conceptuales del diseño, desarrollo y evaluación de la clase (FERNÁNDEZ-PERÓN; BRITO-MELGAREJO, 2018).

Este hallazgo sugiere que a pesar de que el profesor de matemáticas tiene un buen dominio conceptual y técnico de los contenidos disciplinares, a menudo tiene dificultades para comprender cómo enseñarlos a un nivel más básico para que los estudiantes puedan entenderlos mejor en el contexto escolar (LEÓN-GÓMEZ; BARA; AZOCAR, 2013). Por tanto, surge la necesidad de mejorar la formación de los futuros maestros en cuanto a su conocimiento didáctico del contenido matemático, y proporcionarles herramientas y estrategias pedagógicas específicas que les permitan identificar y abordar adecuadamente los errores cometidos por los estudiantes durante el proceso de aprendizaje.

Aunque la muestra con la que se ha llevado a cabo el estudio es limitada, el instrumento utilizado nos brinda información valiosa sobre el nivel de conocimiento de los estudiantes de una universidad chilena al finalizar la parte general de su formación como futuros maestros, y puede servir, con las adaptaciones oportunas a nuevos contextos y contenidos. Es importante destacar que, aunque los resultados de esta investigación no pueden ser generalizables, debido al tamaño muestral, nos proporcionan información útil para mejorar la formación de los docentes que deciden especializarse en matemáticas, buscando un equilibrio entre su conocimiento matemático y didáctico.

La presente investigación puede ser un punto de inicio que permita el diseño de tareas enfocadas, por ejemplo, en un análisis más profundo de las facetas epistémica y cognitiva, interaccional y mediacional en las que se resalte, por ejemplo, la identificación de los objetos matemáticos que intervienen en esta. De igual forma, enfrentar a futuros maestros a tareas que desarrollen su conocimiento didáctico-matemático desde la faceta cognitiva, brindará oportunidades para la identificación y gestión de errores y dificultades en torno al aprendizaje de la probabilidad. Asimismo, es importante valorar, en la formación de futuros maestros, así como el papel que juega el error en el proceso de instrucción, pues el trabajo a partir de este ayuda a progresar en el conocimiento de la comprensión de la probabilidad, entre otros.

En estudios posteriores será necesario abordar de forma más precisas las características de tareas a proponer al profesorado en formación, que contribuya a desarrollar en ellos la confianza y las habilidades necesarias para comprender de una forma significativa las matemáticas y así promover el razonamiento probabilístico orientado a la resolución de problemas. Pero, sobre todo, ser capaz de usar el error de los alumnos como fuente de aprendizaje, ya que es fundamental para una enseñanza de calidad de la probabilidad.

## Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España) y como parte del proyecto FONDECYT nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

**Referencias**

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 59, n. 5, p.389–407, 2008. DOI: https://doi.org/ 10.1177/0022487108324554

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Journal of statistics Education**, Alexandria, v. 12, n. 1, 2004 DOI: https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715

BATANERO, C.; GÓMEZ-TORRES, E.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ-BATANERO; C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. **Praxis educativa**, Ponta Grossa, v. 10, n. 1, p.11–34, 2015. DOI: https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

BATANERO, C.; GÓMEZ, E.; SERRANO, L.; CONTRERAS, J. M. Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. **Redimat**, Barcelona, v. 1, n. 3, p.222–245, oct., 2012. DOI: https://dx.doi. org/10.4471/redimat.2012.13

BEGOLLI, K. N.; DAI, T.; MCGINN, K. M.; BOOTH, J. L. Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. **Instructional Science,** [s.l], v. 49, p.441–473, jul., 2021. DOI: https://doi. org/10.1007/s11251-021-09550-9

BISQUERRA, R. **Metodología de la Investigación Educativa**. España: La Muralla. 2019.

BLÖMEKE, S.; BUSSE, A.; KAISER, G.; KÖNIG, J.; SUHL, U. The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. **Teaching and Teacher Education**, [s.l], v. 56, p.35–46, may., 2016. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.02.003

BURGOS, M.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; AGUAYO-ARRIAGADA, C.; ALBANESE, V. Cognitive analysis of probability comparison tasks by preservice primary school teachers. **Uniciencia**, Heredia, v. 36, n. 1, p.1–24, nov., 2022. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.36-1.38

DEPAEPE, F.; VERSCHAFFEL, L.; STAR, J. Expertise in developing students' expertise in mathematics: Bridging teachers' professional knowledge and instructional quality. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 52, n. 2, p.179–192, may., 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-020-01148-8

EVEN, R.; BALL, D. L. (2009). **The professional education and development of teachers of mathematics**. New York: Springer, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8

FERNÁNDEZ-PERÓN, M.; BRITO-MELGAREJO, R. P. Los errores cognitivos y sus causas: una mirada desde la didáctica de las ciencias exactas. **Transformación**, Camagüey, v. 14, n. 1, p.81–89, 2018. Disponível em: http://scielo.sld.cu/pdf/trf/v14n1/trf08118.pdf

GEA, M.M.; PARRAGUEZ, R.; BATANERO, C. Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. In: **Investigación en educación matemática XXI**. Actas de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Zaragoza, 2017. Disponível em: https://cutt.ly/ eRfVp0C. Acesso em: 15 dic. 2022.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, [s.l], v. 39, n. 1, p.38–43, mar., 2019. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/26742011

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p.90–113, abr., 2017. DOI: https:// doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

GÓMEZ, E.; BATANERO, C.; CONTRERAS, C. Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p.209–229, abr., 2014. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

KRIPPENDORFF, K. **Content Analysis. An Introduction to Its Methodology** (3rd ed.). Sage Publications: California, CA, USA, 2013.

LEÓN GÓMEZ, N.; BARA, M.; AZOCAR, K. Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente. **Paradigma**, Caracas, v. XXXIV, n. 2, p.177–200, dic., 2013. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2013.p177-200.id524

SHAUGHNESSY, J. M. Research in probability and statistics: Reflections and directions. In: Grows, D. A. (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992, p.465–494.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre probabilidad: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p.681–703, ag., 2015a. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, [s.l], v. 7, p.27–48, mar., 2015b. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem. v1i7.104

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**, Granada, v. 23, n. 1, p.393–419, mar., 2019. DOI: https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i1.9160

VÁSQUEZ, C.; CABRERA, G. La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. **Revista Educación Matemática**, Guadalajara, v. 34, n. 2, p.245–274, ag., 2022. DOI: https://doi.org/10.24844/EM3402.09

## Autores

**María del Mar López-Martín**

Doctora en Didáctica de la Matemática y Doctora en Técnicas Avanzadas en Gestión Empresarial. Profesora Titular de Universidad en el Área de Didáctica de la Matemática del

Departamento de Educación de la Universidad de Almería. Las líneas de investigación son estadística aplicada, didáctica de la estadística, y en la formación de profesores.
mdm.lopez@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-8677-9606
**Carmen Gloria Aguayo-Arriagada**
Doctora en Didáctica de la Matemática y Licenciada en Educación Primaria. Profesora de la Universidad de Almería en el Área de Didáctica de la Matemática del Departamento Educación. Las líneas de investigación son Formación del Profesor, específicamente de Educación Primaria y su conocimiento Didáctico-Matemático.
cgaguayo@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-9576-2312
**Claudia Vásquez Ortiz**
Doctora por la Universidad de Girona y Licenciada en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesora Asociada de planta ordinaria del Campus Villarrica de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación se centran en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad desde las edades tempranas, y en la formación del profesorado.
cavasque@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-5056-5208
**María Burgos Navarro.**
Doctora en Matemáticas por la Universidad de Almería y Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Profesora Titular de Universidad en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. Investigadora Principal del Proyecto de Investigación PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033. Sus líneas de investigación son el razonamiento proporcional y algebraico y la formación de profesores.
mariaburgos@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

**Como citar o artigo:**
LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; AGUAYO-ARRIAGADA, C. G.; VÁSQUEZ, C.; BURGOS, M. Conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros chilenos: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad en Educación Básica. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos;** junio de 2023 / 170 – 193 DOI: 10.37618