Conocimiento didáctico-matemático de profesores colombianos sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas

Cristian Camilo Fúneme Mateus
cristian.funeme@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-9158-427X
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Uptc)
Bogotá, Colombia.
Leidy Julieth Linares Beltrán
leidy.linares@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-8220-9814
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Uptc)
Bogotá, Colombia.
Leidy Milena Cáceres Carreño
leidymilena.caceres@uptc.edu.co
https://orcid.org/0009-0001-9591-5566
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Uptc)
Tunja, Colombia.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Este artículo presenta la caracterización del conocimiento de treinta profesores de educación básica sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. Para dicho fin, se acude a las categorías de análisis del modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (CDM) propuesto en el Enfoque ontosemiótico del aprendizaje y la instrucción matemática (EOS). Es decir, se retoman las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica para identificar qué elementos de ellas se hacen presentes en el análisis que realizan los profesores sobre situaciones de aprendizaje relacionadas con los procesos de generalización y particularización. El diseño metodológico adoptado es el cualitativo, orientado por los momentos del estudio de caso y el análisis mediante categorías. En los resultados obtenidos se muestra que para los profesores es de gran dificultad relacionar los factores afectivos y cognitivos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes; además, los docentes conciben el desarrollo de sus configuraciones didácticas únicamente mediante la interacción profesor-estudiante. Se encuentra también en los profesores un conocimiento común sobre los procesos matemáticos analizados y dificultad para establecer conexiones intra e interdisciplinares. Estos aspectos evidencian el predominio de visiones cognitivistas sobre la educación matemática en el grupo de profesores participantes.
Palabras clave: Conocimiento del Profesor. Generalización. Enfoque Ontosemiótico. Particularización. Resolución de problemas.

Conhecimento didático-matemático dos professores colombianos sobre os processos de generalização e particularização na resolução de problemas

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma caracterização do conhecimento de trinta professores de educação básica sobre os processos de generalização e particularização na resolução de

problemas. Para este fim, são utilizadas as categorias de análise do conhecimento didático-matemático do modelo do professor (CDM) proposto pela Abordagem Ontosemiótica da aprendizagem e da instrução matemática (AOS). Em outras palavras, as facetas epistêmica, cognitiva, afetiva, de meios, de interação e ecológica são retomadas a fim de identificar quais elementos delas estão presentes na análise do professor sobre situações de aprendizagem relacionadas com os processos de generalização e particularização. O desenho metodológico adotado é qualitativo, orientado pelo estudo de caso e análise de categorias. Os resultados obtidos mostram que é muito difícil para os professores relacionar fatores afetivos e cognitivos no processo de aprendizagem dos alunos; além disso, os professores concebem o desenvolvimento de suas configurações didáticas somente através da interação professor-estudante. Verifica-se também que os professores têm um conhecimento comum dos processos matemáticos analisados e dificuldade em estabelecer conexões intra e interdisciplinares. Estes aspectos mostram a predominância de visões cognitivistas sobre a educação matemática no grupo de professores participantes.
***Palavras chave*:** Conhecimento do professor. Generalização. Abordagem Ontosemiótica. Particularização. Resolução de problemas.

Didactic-mathematical knowledge of Colombian teachers about the processes of generalization and particularization in problem solving

Abstract

In this paper we report a characterization of the knowledge of thirty basic education teachers about the processes of generalization and particularization in problem solving. For this purpose, the categories of analysis of the didactic-mathematical knowledge model of the teacher (CDM) proposed in the Ontosemiotic approach to learning and mathematical instruction (EOS) are used. That is, the epistemic, cognitive, affective, mediational, interactional, and ecological facets are taken up to identify which elements of them are present in the analysis made by teachers of learning situations related to the processes of generalization and particularization. The methodological design adopted is qualitative, oriented by the moments of the case study and the analysis through categories. The results obtained show that it is very difficult for teachers to relate affective and cognitive factors in the students' learning process; in addition, teachers conceive the development of their didactic configurations only through teacher-student interaction. Common knowledge about the mathematical processes analyzed and difficulty in establishing intra- and interdisciplinary connections are also found in the teachers. These aspects show the predominance of cognitivist views on mathematics education in the group of participating teachers.
Keywords: Teacher knowledge. Generalization. Ontosemiotic approach. Particularization. Problem solving.

Introducción

A lo largo del desarrollo de la historia de la humanidad el conocimiento matemático ha emergido como el resultado de la interacción del ser humano con un mundo en el que las formas, las cantidades, las incógnitas, las regularidades y los patrones, entre otros, han marcado su necesidad de superar los límites de la intuición para pasar a la constitución de certezas y generalidades a través de un ejercicio constante de creatividad que conecta al corazón, la razón y el mundo sensorial (ZALAMEA, 2020).

En este sentido, al analizar el surgimiento de las ideas de la matemática, diversos autores han propuesto que la naturaleza del aprendizaje de esta ciencia está fuertemente relacionada con la posibilidad que se otorgue a las personas de explorar el mundo que las rodea y problematizar sobre él (POINCARÉ, 1910; MALASPINA et al., 2019; GODINO, 2022). De esta forma, la resolución de problemas se convierte en un eje fundamental a considerar en las planificaciones y desarrollos de las clases de matemáticas en el ámbito escolar (LILJEDAHL, 2019).

Ahora bien, la incorporación del trabajo con problemas en las clases de matemáticas no es algo trivial, por el contrario, implica diferentes competencias, conocimientos y habilidades tanto del profesor como del estudiante (POLYA, 1945; SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008; FELMER et al., 2016). Precisamente la falta de conciencia sobre esta necesidad de considerar los diversos factores que están en torno a la resolución de problemas ha llevado a que los estudiantes tengan dificultad al trabajar con ellos y sobre todo al abordarlos cuando se les evalúa su conocimiento, de forma que la incorporación de la resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha resultado en gran medida ineficaz (MACIEJEWSKI, 2019).

Las posibles causas de la dificultad que enfrentan los estudiantes al resolver problemas de matemáticas ha sido explorada desde diferentes puntos de vista, por ejemplo, para Santos (2020) hay que iniciar por considerar que en la sociedad se ha asociado a la matemática con un carácter de complejidad y por esto es usual que los estudiantes asuman ante un problema de matemáticas que ellos no cuentan con los conocimientos, herramientas o competencias necesarias para resolverlo, desligándose de él o simplemente dando respuestas apresuradas.

Al indagar por las razones por las cuales los estudiantes lleguen a ideas como las mencionadas antes, se encuentran explicaciones como la dada por Brousseau (1986), quien sostiene que las dinámicas de la clase suelen llevar al estudiante a considerar que su actividad en el proceso de aprendizaje de la matemática se debe limitar a responder aquello que el profesor espera, es decir, lo importante es obtener cierta aprobación del profesor. Lo anterior, lleva a que los docentes tengan la ilusión de que el estudiante le ha comprendido y a que los estudiantes cuenten con la tranquilidad de no ser expuestos desde sus dificultades, errores y obstáculos.

En atención a lo anterior, en las últimas décadas en diversos lugares e instituciones se ha intentado implementar técnicas y modelos como los propuestos por Polya (1945), Schoenfeld

(1985) y Mason (2016), entre muchos otros, para el aprendizaje de la matemática desde la resolución de problemas, sin embargo, las dificultades siguen haciendo presencia en los salones de clase (POPKEWITZ, 2004; RADFORD, 2017). Es entonces cuando aparecen los interrogantes de ¿por qué si existen tanto desarrollos teóricos y metodológicos para la implementación de la resolución de problemas en las clases de matemáticas, las dificultades no desaparecen? Interrogantes como este son complejos de responder, por lo que requieren de un esfuerzo amplio y constante que la comunidad de la didáctica de la matemática ha desarrollado; no obstante, se requiere de mayor profundidad en diversos elementos que aún no han sido analizados globalmente (CAMACHO; SANTOS, 2015), entre ellos, el papel que tiene la comprensión del profesor sobre los procesos matemáticos que desarrolla un estudiante ante la resolución de un problema (FONT; RUBIO, 2016).

Más aún, en la resolución de problemas existe una amplia indagación de los momentos, estrategias, dificultades, errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes al resolver problemas (LILJEDAHL; SANTOS, 2019); sin embargo, no existen mayores evidencias de qué grado de conciencia tiene el profesor sobre aquello que está pasando con los estudiantes al momento de vivir cada uno de esos aspectos (TORREGROSA; CALLEJO, 2011).

De hecho, en los programas de formación de profesores de matemáticas se suelen dar a conocer las teorías y autores más conocidos en la resolución de problemas, pero pocas veces se prepara al profesor para analizar el tipo de actividad matemática que desarrolla el estudiante y menos la forma en que emergen procesos matemáticos específicos (D’AMORE, 2017).

De esta forma, surge el interés por indagar respecto al conocimiento didáctico-matemático de profesores respecto a procesos matemáticos que aparecen en la resolución de problemas. En particular, se indaga por un proceso matemático que ha sido considerado como el corazón del pensamiento matemático por muchos autores, el proceso de generalización (STEINBRING, 2006; RADFORD, 2015).

1. Referencial teórico

En esta sección se abordan los aspectos conceptuales relativos a los procesos de generalización y particularización, resaltando inicialmente diversas posiciones sobre ellos en el ámbito de la didáctica de la matemática y finalizando con la postura propia del Enfoque ontosemiótico, en donde se toma la relación que tienen dichos procesos con el conocimiento didáctico-matemático.

1.1 Elementos de la resolución de problemas en la didáctica de la matemática

La naturaleza histórica que envuelve a la matemática revela su relación con el planteamiento y resolución de problemas. Son numerosos los ejemplos que se podrían citar para mostrar la forma en que el conocimiento matemático ha surgido de la mano de la resolución de problemas, tal es el caso de la cuadratura del círculo, el último teorema de Fermat, la hipótesis de Riemann, entre muchos otros (KRANTZ, 2006).

Es por lo anterior, que con el surgimiento de la didáctica llegaron diferentes reflexiones filosóficas sobre la naturaleza del conocimiento matemático, en ellas se ha vinculado a la resolución de problemas como eje central de la actividad que posibilita su aprendizaje (FELMER et al., 2019). Sin embargo, la relación entre el aprendizaje de la matemática y la resolución de problemas se ha explorado por diferentes caminos, entre los cuales se pueden determinar dos grandes categorías: (1) la adquisición de heurísticas o esquemas para resolver problemas como camino para el aprendizaje, es decir, la resolución de los problemas en sí mismo es la finalidad; y (2) la resolución de problemas como eje que moviliza la actividad matemática, es decir, la resolución de un problema solo es un medio para aprender.

En la visión de establecer heurísticas para la resolución de problemas el trabajo de Polya plasmado en su libro *How to Solve It* (1945) ha sido de gran resonancia en el mundo. La propuesta de Polya se fundamenta en que la actividad de la resolución de problemas atraviesa cuatro momentos: comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás. En cada uno de ellos, se hace necesario poner en marcha heurísticas que permitan solucionar el problema, como, por ejemplo, mirar hacia atrás, hacer analogías, resolver un problema más sencillo, trabajar hacia atrás, entre otras.

Aunque la propuesta de Polya movilizó la generación de propuestas de enseñanza de la matemática desde la resolución de problemas, emergieron otras posiciones teóricas al considerar que Polya desconocía muchos elementos, entre ellas, el trabajo de Schoenfeld es quizá la respuesta más famosa. Para Schoenfeld (1985) las propuestas previas para considerar la resolución de problemas estaban pensadas desde un punto de vista teórico, por lo cual estudió esta temática desde lo práctico y lo empírico.

Según Schoenfeld (1982) el proceso de resolución de problemas debe ser entendido como un diálogo entre el conocimiento previo del sujeto, sus intentos de soluciones y sus pensamientos a lo largo de ellos. De forma que, no considera que las heurísticas deban ser dadas al estudiante como algo a replicar, en su lugar propone que la forma de solucionar un problema es un proceso emergente y contextualmente dependiente (LILJEDAHL, 2019).

Como consecuencia de su posicionamiento, Schoenfeld (1982) sostiene que en la resolución de problemas lo primero a considerar son los recursos, entendidos como los conocimientos previos del estudiante y las habilidades con las cuales cuenta. Luego propone las circunstancias estereotípicas, en donde enmarca aquellos procedimientos que el sujeto reconoce de inmediato ante un problema, más allá de que conozca como se realizan o no. También considera los recursos defectuosos, como aquellos conocimientos y estrategias equivocadas que posee el estudiante.

Teniendo en cuenta lo anterior, Schoenfeld (1985) propone cuatro momentos a considerar en la resolución de problemas: entendimiento del problema, consideración de varias formas de solucionarlo y elección de una de ella, monitoreo del proceso, llevar a cabo el proceso y revisión de su solución. Agregando, que la actividad grupal es de gran ayuda para interiorizar y comprender las ideas que se desarrollan al solucionar un problema.

Por su parte, Perkins (2000) sostiene que tanto Polya como Schoenfeld habían omitido que al hablar de la resolución de un problema es necesario clarificar qué se considera como problema, pues de hecho la naturaleza de los problemas matemáticos es variable y por ende no se pueden establecer diseños fijos para su resolución. Por esta razón, Perkins (2000) clarifica que existen problemas que no se pueden solucionar y problemas razonables e irrazonables. Los dos últimos son de tipo solucionables, pero los razonables puede resolverse mediante razonamientos directos, es decir, si un problema lleva al estudiante a una solución directa en la que no se requiere de un esfuerzo cognitivo mayor, entonces es razonable y en caso contrario irrazonable. De forma que esta caracterización no depende del problema es si mismo sino del sujeto que lo resuelve.

Es así, como Perkins (2000) propone considerar solución de problemas irrazonables, esto a través de lo que denomina pensamiento innovador. Este pensamiento emerge cuando el estudiante debe afrontar alguno de cuatro tipos de problemas: desierto de posibilidades, meseta sin pistas, cañón angosto de exploración y oasis de falsas promesas. Los primeros relacionados con problemas en los que hay muchos elementos por explorar y muy pocos de ellos permiten dar solución, los segundos son aquellos en que se requiere dar pistas al estudiante, los terceros son aquellos en los que existen restricciones que limitan los posibles caminos de solución y el último tipo se refiere a problemas en los que la solución parece inmediata, pero al verificarla se encuentra que no es así.

Para cerrar, Mason et al. (1982) reconocen nuevamente que los problemas no implican siempre un proceso de solución mecánico, por ello propone unas fases que realiza una persona: entrada o abordaje en donde se involucra con el problema mediante el uso de lo que se conoce inmediatamente al respecto; ataque, donde se pone en marcha las ideas previas para plantear hipótesis, probar estrategias de solución, realizar deducciones, etc.; revisión, donde se hace una exploración de lo realizado para verificar que sea correcto.

Ahora bien, todo lo mencionado corresponde a una visión que se centra en como orientar o precisar el tipo de actividad que debe desarrollar el estudiante al resolver un problema; sin embargo, en paralelo se desarrolló una visión distinta, en la cual se considera que la resolución de problemas es fundamental al aprender matemáticas, pero no se toma como eje central el establecer modelos, heurísticas o esquemas para dicha resolución. Esta visión considera que lo importante es comprender que la resolución de los problemas posibilita el aprendizaje y que el ser humano es el resultado de un proceso histórico, social y cultural que hace que el conocimiento tenga componentes objetivos y subjetivos que generan que cada persona viva una experiencia diferente y única de aprendizaje.

En esta última corriente aparecen aportes como la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), quien sostiene que el problema es un elemento particular de una concepción más amplia como lo es la situación, término entendido como un modelo de interacción entre un sujeto, un medio y un conocimiento. De forma que, el problema no es en sí mismo el que conduce al conocimiento, sino aquel que activa las acciones de los estudiantes para desarrollar a través de elementos de su lenguaje, del lenguaje de la matemática, de la interacción con sus compañeros y de un proceso de adaptación y enculturación (BROUSSEAU, 2007). Considerando entonces que los problemas son esenciales en el aprendizaje de la matemática, pero que esto no implica que existan modelos fijos, rígidos o universales que expliquen la forma en que el estudiante lo afrontará (BROUSSEAU et al., 2012).

También Radford (2018) en su teoría de la objetivación destaca la importancia de la resolución de problemas, al sostener que el plantearse, reconocer y buscar las soluciones de problemas teóricos, sociales, científicos o culturales el sujeto inicia el desarrollo de una actividad de la cual emergerá su conocimiento. Sin embargo, aclara que la resolución del problema en sí mismo no es la que genera un aprendizaje, por ende, no es preciso dar heurísticas de solución de problemas, pues el aprendizaje en la actividad matemática está enmarcado como un proceso social de objetivación en el cual el estudiante tiene un encuentro con los demás, con su entorno y allí reconocerá formas, estrategias, instrumentos y demás elementos que requiere para la solución de los problemas.

Aunque existen más teorías que consideran la resolución de problemas como eje para el aprendizaje de la matemática, se cierra esta sección con la postura teórica que se adopta en la investigación, esta es la postura del Enfoque Ontosemiótico del aprendizaje y la instrucción matemáticos (EOS), en el cual Godino (2022) precisa que la resolución de problemas es el principal desencadenante de la actividad matemática y que solo a través de ellos emergen todos los objetos matemáticos que conoce el estudiante y que podrá aprender. Aunque aclara también, que la actividad matemática está cargada de elementos semióticos, epistémicos, cognitivos, culturales e históricos que llevan a entender que la autonomía del estudiante en la búsqueda de cómo resolver el problema es lo que genera el aprendizaje.

Dicha postura implica que el profesor debe presentar al estudiante las situaciones, prever lo que puede ocurrir con ella, ofrecer los medios necesarios para que sea posible la búsqueda de la solución, más no debe interferir en su proceso induciendo a seguir modelos, enfoques o heurísticas específicas, por el contrario, se propone que la estrategia desarrollada por el estudiante es única para él, dado que se enmarca en un juego de interpretaciones semióticas que es específico de su cognición, de su interacción con la situación, con el medio y con los demás que están involucrados (GODINO et al., 2020).

En relación con la creación de problemas con fines didácticos, en el marco del EOS, se considera que es particularmente importante que el profesor identifique los objetos matemáticos primarios que emergen en la solución de un problema y también que establezca interrelaciones entre ellos; es decir, entre la situación-problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Así, se tendrán redes de objetos que intervienen y emergen, que se denominan configuraciones epistémicas (CE) cuando son consideradas desde una perspectiva institucional y configuraciones cognitivas (CC) cuando son consideradas desde una perspectiva personal (MALASPINA et al., 2019).

El análisis de estas configuraciones (CE y CC) permite adquirir información acerca de la anatomía de la solución de un problema y permite, entre otros aspectos, crear nuevos problemas por variación de los dados inicialmente, o bien crear nuevos problemas directamente para que en su solución se tenga que utilizar un determinado objeto primario (o varios). Esta manera de entender la creación de problemas usando herramientas del EOS se ha incorporado al enfoque de creación de problemas desarrollado por Malaspina y colaboradores, siendo usado en diversas experiencias didácticas en el Perú, Ecuador y España (TORRES, 2020).

1.2 La generalización y la particularización

La generalización es un proceso que se ha considerado como el corazón de la matemática y característico especialmente del pensamiento algebraico (MASON, 1996). Al pensar qué es en concreto este proceso, desde el punto de vista didáctico, se encuentra la conceptualización de Polya (1945) quien propuso que la generalización se puede entender como el proceso en el cual se pasa de la concepción de un objeto a la concepción de un conjunto de objetos, es decir, a través de él se experimenta la extensión o ampliación de objetos matemáticos.

Posteriormente, aparece la visión de Dörfler (1991) quien asume una visión operativa de la generalización, agregando que en este proceso un paso fundamental es establecer invariantes y relaciones que luego deben ser simbolizadas. Ellis (2007) se apoya en esta idea para ampliar los tipos de actividades mentales asociadas a la generalización, diferenciándolas en tres clases: asociaciones entre objetos matemáticos o situaciones, buscar o repetir acciones para identificar invariantes y extender la idea que se identifica a una estructura general.

Las actividades mentales descritas por Ellis (2007) fueron consideradas por Mason et al. (1982) para destacar la importancia de la resolución de problemas en el desarrollo de la generalización por parte de estudiantes, indicando que este proceso, desde un punto de vista del aprendizaje de la matemática, puede ser visto como el descubrimiento de leyes generales que permiten al estudiante realizar conjeturas a partir de lo que observan en el problema, justificar dichas conjeturas y finalmente transferir la ley determinada a nuevos problemas o contextos.

Las posturas anteriores son retomadas y profundizadas por Sabena et al. (2005) quienes sostienen que el punto central en la conceptualización de la generalización es entender que consiste en la percepción de algo que es válido en algunos objetos para luego pasar al establecimiento de la permanencia de lo identificado en todos los elementos de estudio. Está visión otorga elementos de tipo didáctico de gran importancia en la generalización, estos son: la necesidad de la percepción de aquello que se generalizará, la interpretación de lo percibido y la continuidad de los dos elementos anteriores en la actividad matemática del estudiante.

En esta misma dirección, Radford (2015) retoma las ideas de Kant (1800/1974) quien plateó que la generalización se basa en sintetizar tanto las semejanzas como las diferencias entre objetos diferentes y objetos semejantes. Es decir, se reconoce que es parte de la naturaleza humana el percibir aspectos de semejanza o diferencia en objetos y situaciones, dicha capacidad adquiere un carácter más sofisticado e incluso complejo cuando llega a adquirir un estatus de general. Es decir, para Radford (2010) la generalización es un proceso de tres componentes básicas: notar similitudes, formar un concepto general y establecer un esquema. Este proceso está sujeto a los estímulos visuales (números, formas, etc.) que son continuamente transformados por un proceso interpretativo y contextual intencional que depende directamente de nuestra vida personal, cultural e histórica (RADFORD, 2006).

Ahora bien, las definiciones de generalización que se han presentado contienen un elemento común, la necesidad de observar, percibir o analizar objetos particulares para luego pasar a la generalidad. Por esta razón se considera a la particularización y generalización son procesos fundamentales en el aprendizaje de la matemática que, como lo expresa Mason (1996), se distinguen en que la generalización es mirar a través de y la particularización es mirar en, dicho de otra forma, ver una generalidad a través de lo particular y ver lo particular en lo general.

En términos de Kant (1800/1974), la generalización es un proceso que va en búsqueda de lo que permanece invariante y libre de lo efímero, mientras que la particularización escapa de lo ideal para abordar lo concreto, lo momentáneo y propio de una situación en un contexto específico. De esta forma la particularización es un proceso en el que se abordan aspectos delimitados en condiciones muy precisas.

Una conceptualización precisa del proceso de particularización emergente en el ámbito de la matemática es: “pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño, o incluso de un solo objeto, contenido en el conjunto dado” (POLYA, 1945, p. 138). Esta posición es un antecedente de particular interés porque permite ver como la particularización ha sido incorporada por algunas corrientes de la didáctica de la matemática, centradas en enfoques de la resolución de problemas, como un elemento esencial en las estrategias para abordar heurísticas de solución.

La relación entre la generalización y la particularización es entendida en el EOS como de carácter dual, lo que implica que son de relación directa y mutuamente dependientes (FONT; RUBIO, 2016). Más precisamente, son dos procesos de carácter dual extensivo-intensivo, la particularización correspondiente al proceso que se desarrolla a través de casos concretos (extensivo) y la generalización el proceso de la actividad matemática que se desarrolla en el ámbito de las clases de objetos (intensivo) (FONT; CONTRERAS, 2008).

1.3 El modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM)

El Enfoque ontosemiótico del aprendizaje y la instrucción matemáticos (EOS) es un sistema teórico que ha sido desarrollado durante las tres últimas décadas principalmente en España, pero con un gran impacto en Latinoamérica (GODINO, 2022). Este sistema teórico aborda diferentes aspectos de la didáctica de la matemática al retomar aportes de las teorías más importantes que se han desarrollado, pero hace énfasis en la necesidad de avanzar hacia un carácter prescriptivo en esta ciencia (GODINO et al., 2020).

En atención a lo anterior, el EOS ha desarrollado diferentes nociones teóricas que buscan aportar en el impacto que tengan la didáctica de la matemática en el quehacer diario de los docentes y en el aprendizaje de los estudiantes, entre ellas el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) (CARPES; BISOGNIN, 2021).

El CDM es planteado a partir del estudio de los modelos de más impacto en la didáctica de la matemática a nivel mundial, como por ejemplo, el Conocimiento Base para la Enseñanza (CBE) de Shulman (1986; 1987), de quien se reconoce la importancia de entender el conocimiento del profesor en múltiples dimensiones; el Conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching o MKT) desarrollado por Ball (2000; 2004), adoptando su propuesta de considerar que además de múltiples dimensiones, también hay tipologías: conocimiento del contenido (común, especializado y horizonte), así como el conocimiento pedagógico (estudiantes, enseñanza y currículo); entre otros, como el *modelo de conocimiento del profesor* de Grossman (1990) y el *cuarteto del conocimiento* (KQ) desarrollado por Rowland et al. (2005).

En específico, el CDM estructura su modelo de conocimiento del profesor a través de las seis facetas que se consideran en el EOS: epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, ecológica y afectiva (PINO-FAN et al., 2014). En la faceta epistémica se considera si existe relación entre los significados de referencia que existen en la comunidad matemática para el objeto que se pretende enseñar y los significados que se desarrollan en el aula (GODINO et al., 2021). En concreto, el conocimiento del profesor respecto a la significatividad de dicha relación se puede explorar a través de los indicadores del Cuadro 1.

Cuadro 1 – Indicadores del CDM para faceta epistémica.

Conocimiento del Contenido	
Faceta epistémica	**Indicadores**
Conocimiento común	Resuelve la tarea.
Conocimiento especializado:	Puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas.
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
Lenguajes	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado: Conexiones.	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Fuente: Godino (2009).

En cuanto a las facetas cognitiva y afectiva, hacen referencia a la relación entre los significados de los objetos matemáticos y el desarrollo cognitivo de quienes aprenden, así como la forma en que se implican los estudiantes en las trayectorias de aprendizaje, respectivamente (GODINO et al., 2021). En esta dirección, el CDM propone los indicadores del Cuadro 2 para evaluar el conocimiento del profesor en estas facetas.

Cuadro 2 - Indicadores del CDM para facetas cognitiva y afectiva.

Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	
Faceta cognitiva y afectiva	**Indicadores**
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones, …).	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones.	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes.	Explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas o contenidos.
Actitudes, emociones, creencias, valores.	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas.

Fuente: Godino (2009).

Para la faceta interaccional se aborda la resolución de conflictos cognitivos de los estudiantes cuando aprenden los objetos matemáticos. En la faceta mediacional tiene en cuenta que tipos de recursos materiales y temporales se llevan al proceso de instrucción (GODINO et al., 2021). Aspectos que llevaron a los indicadores que se exponen en el Cuadro 3.

Cuadro 3 - Indicadores del CDM para facetas interaccional y mediacional.

Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza	
Faceta interaccional y mediacional	**Indicadores**
Configuración didáctica: Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido. Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos. Recursos materiales. Tiempo asignado.	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas).	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Fuente: Godino (2009).

Finalmente, en la faceta ecológica se apunta a reconocer la importancia del diseño curricular, de los factores sociales y del contexto en que está el estudiante. Es así, como el CDM propone los indicadores que se presentan en el Cuadro 4 para evaluar esta faceta a través de las conexiones que se pueden establecer con los objetos matemáticos tanto en el ámbito matemático como al relacionarlos con otras disciplinas (PINO-FAN et al., 2014).

Cuadro 4 - Indicadores del CDM para faceta ecológica.

Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares	
Faceta ecológica	**Indicadores**
Orientaciones curriculares.	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intradisciplinares.	Explica conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea,
Conexiones interdisciplinares.	Explica conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea.
Otros factores condicionantes.	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Fuente: Godino (2009).

Para evaluar estos indicadores, el CDM propone que el profesor de matemáticas sea expuesto a situaciones en las que: se evidencie el ajuste de sus significados personales a significados de referencia, deba expresarse a través de diferentes tipos de representaciones y que pongan en juego el conocimiento común (resolver la situación), conocimiento especializado (mostrar múltiples soluciones) y conocimiento ampliado (generalización de las soluciones) (CASTRO et al., 2013). Además, el docente debe proponer tareas, analizar prácticas didácticas y la actividad matemática de los estudiantes al resolver problemas, todos estos aspectos son descritos con precisión en el trabajo de Pino-Fan et al. (2022).

2. Metodología

Dado que la intención de la investigación en profundizar en la naturaleza del conocimiento de profesores, el enfoque seleccionado es el cualitativo con un alcance exploratorio-descriptivo, considerando que se busca identificar, describir y categorizar elementos del fenómeno sin análisis numéricos o generalizantes, lo que si se desarrolla es un análisis concreto y profundo de acciones y conductas humanas dentro de un contexto educativo particular (BAENA, 2017).

El tipo de investigación desarrollado corresponde a un estudio de caso, dado que, como lo expone Bernal (2006), la preocupación es analizar en profundidad y gran detalle una unidad de análisis especifica que está sujeta a diferentes delimitantes, entendiendo a esta unidad de análisis como un sistema que tiene interacciones particulares con un contexto que la define. Para el caso de la presente investigación, ese caso específico corresponde al conocimiento didáctico-matemático de un grupo de profesores, es decir, se analiza el conocimiento de dichos sujetos sin querer generalizar lo que sucede con ellos a todos los profesores colombianos. Es así, como la investigación se desarrolla bajo las etapas correspondientes al estudio de caso que exponen Torres et al. (2016):

- Etapa de diseño. En esta fase se desarrolló todo el estudio teórico de los procesos de generalización y particularización. Luego, se determinaron los instrumentos a implementar y la unidad de análisis que se observa.

- Implementación. Consistió en la solución del conjunto de situaciones y problemas que configuran los instrumentos de la investigación por parte de los profesores que conforman la unidad de análisis.

- Análisis e interpretación. Para este momento, se toma la información otorgada por la unidad de análisis, se sistematiza, describe y estructura para configurar los datos del fenómeno de estudio; es decir, para establecer el conocimiento didáctico-matemático de cada profesor.

Para este trabajo se decide, de manera intencional y no probabilística, indagar por el conocimiento didáctico-matemático de profesores de matemáticas que se desempeñan en educación básica primaria en el departamento de Boyacá, Colombia. El número de profesores participantes es treinta. En específico, el criterio de selección de estos profesores corresponde únicamente a que se desempeñaran en el nivel educativo y el lugar geográfico especificados, además de que aceptaran su participación a través de un acuerdo de confidencialidad.

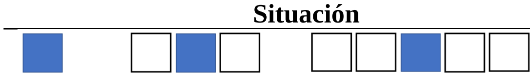
La técnica de estudio empleada es el análisis mediante categorías preestablecidas, entendidas como la toma de elementos de interés para una postura teórica, en este caso las facetas del conocimiento didáctico-matemático del CDM, para analizar de manera deductiva la información que se obtiene de los sujetos observados.

Para este análisis deductivo lo que se realiza es una codificación abierta de los datos, buscando rasgos de cada categoría en las expresiones de los profesores. Luego, se toma la codificación abierta y se sistematiza en lo que se conoce como codificación axial, es decir, se identifican todos los códigos que pertenecen a la misma categoría y se observan sus relaciones. Finalmente, se toman los resultados de las codificaciones para analizar las relaciones entre las diferentes categorías, esto se conoce como codificación selectiva (BONILLA; LÓPEZ, 2016).

3. Análisis y Resultados

Mediante un cuestionario se propuso a los profesores participantes resolver una situación en la que emergen los procesos de particularización y generalización. A continuación, se presenta la situación, las soluciones de los profesores y una descripción de ellas en relación con las categorías de análisis. La situación propuesta y los interrogantes que se formularon en ella se relacionan con las categorías del conocimiento didáctico-matemático que se presentan en el Cuadro 5.

Cuadro 5 - Relación entre situación y categorías de análisis.

Situación	Preguntas y facetas que se aborda
 **Figura 1** **Figura 2** **Figura 3** Un profesor pidió a sus alumnos que continuaran la secuencia anterior hasta: a) La quinta figura. b) La séptima figura. Utilizando la secuencia hasta la séptima figura: c) ¿Cuántos cuadrados azules hay en cada figura? d) ¿Cuántos cuadrados blancos hay a la derecha del cuadro azul en cada figura? e) ¿Cuántos cuadrados blancos hay a la izquierda del cuadro azul en cada figura? f) ¿Cuántos cuadrados blancos hay en total en cada figura? g) ¿Cuántos cuadrados hay en total en cada figura? A continuación, les solicitó decir cuántos cuadrados en total habrá en la figura: h) 32. i) 500. j) expresa en palabras: cómo se puede calcular el número total de cuadrados en cualquier figura.	**Faceta epistémica:** 1) Resuelva el problema planteado por el profesor. Explique su respuesta. (Conocimiento común). 2) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta? (Conocimiento especializado). 6) ¿Con cuáles conceptos previos y más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema? (Conocimiento avanzado). **Facetas cognitiva y afectiva:** 3) Describa las posibles dificultades que pueden llevar a los alumnos a responder de manera errónea. **Faceta mediacional e interaccional:** 4) ¿Qué estrategias utilizaría usted como profesor para orientar a aquellos alumnos que no logran resolver el problema? Explique en detalle su respuesta. **Faceta ecológica:** 5) ¿Para cuál o cuáles cursos considera usted pertinente este problema, de acuerdo con el currículo actual?

Fuente: Elaboración propia.

Las respuestas otorgadas por los profesores se clasifican por tipologías y se presentan ejemplos de ellas, destacando lo que estas revelan del conocimiento de los profesores respecto a los elementos abordados en cada faceta.

3.1 Faceta epistémica

En el caso de las respuestas a los interrogantes abordados en esta faceta se encontraron dos categorías (Cuadro 6), las cuales se derivan de la forma en que se dio solución a la pregunta 1 pues allí se encontraron marcadas diferencias. En el tipo A se agruparon las soluciones dadas por el 40% de los profesores quienes abordaron de forma adecuada la particularización en casos perceptibles (preguntas a-g de la situación 1); sin embargo, no lograron expresar soluciones a los interrogantes de particularizaciones no perceptibles (h-i), ni tampoco acertaron en la pregunta correspondiente a la generalización (j). La razón de por qué no otorgaron estas respuestas se evidencia en argumentos como "debe sumar dos a la figura anterior", en donde se revela que identificaron un aspecto de variación, pero al no ser generalizado no logran dar respuesta a casos particulares en los que no es posible realizar la construcción de las figuras.

Cuadro 6 - Ejemplo de respuestas en faceta epistémica.

Tipo	Pregunta	Respuesta
A	1	a) Quinta figura  b) La séptima figura.  c) En todas las figuras hay 1 cuadrado azul d) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 e) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 f) F1= 0 F2= 2 F3= 4 F4= 6 F5= 8 F6= 10 F7= 12 g) F1=1 F2= 3 F3= 5 F4= 7 F5= 9 F6= 11 F7= 13 h) No responde. i) No responde. k) Para calcular el número total de cuadrados de cualquier figura se debe sumar el número con el número anterior.
	2	Identifica patrones en secuencias aditivas o multiplicativas y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas. Secuencias con patrón de suma. Ecuaciones.
	3	Planteamiento de Ecuaciones.
B	1	a) Quinta figura  b) La séptima figura.  c) En todas las figuras hay 1 cuadrado azul d) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 e) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 f) F1= 0 F2= 2 F3= 4 F4= 6 F5= 8 F6= 10 F7= 12 g) F1=1 F2= 3 F3= 5 F4= 7 F5= 9 F6= 11 F7= 13 h) X= 63 i) X= 999 j) Para calcular el número total de cuadrados se debe recurrir al uso de una regla general.
	2	Patrón, secuencia, ecuación, formas geométricas y figuras, simbología matemática, lenguaje matemático, operaciones básicas.
	3	Secuencia, patrón, formas geométricas y figuras.

Fuente: Transcripción propia de respuestas de profesores participantes.

En el tipo B se encontraron un 60% de los profesores los cuales respondieron todas las preguntas de carácter numérico de forma correcta, sin embargo, no expresaron la forma en que se pueden establecer dichos cálculos en la pregunta j; es decir, identificaron la generalización inmersa en la situación, pero no llegaron a comprender la naturaleza de ella.

En cuanto a la identificación de procesos y propiedades presentes, todos profesores enfocaron sus respuestas a la presencia de secuencias, operaciones básicas como la adición y sustracción, el reconocimiento de figuras y las ecuaciones. Es decir, cada uno de ellos contempló una cantidad limitada de objetos matemáticos y dicha limitación se ratifica con la solución del interrogante 6, pues allí ninguno de los docentes conecta la situación con una gama amplia de objetos que están ligados al pensamiento algebraico.

3.2 Facetas cognitiva y afectiva

En la exploración de las facetas cognitiva y afectiva se esperaba el reconocimiento de obstáculos, errores, dificultades y demás, que fueran propias del razonamiento algebraico como no observar elementos variantes e invariantes, no pasar del ámbito de lo particular a lo general. Además, se esperaba expresiones referentes a la dimensión afectiva como la desmotivación, frustración, ansiedad, miedo o cualquier otra emoción negativa asociada a la necesidad.

Al reunir las respuestas de los profesores se encuentra que todos hicieron alusión a que la principal dificultad para resolver la situación estaría en que los estudiantes no podrían comprenderla e interpretarla, acompañando este aspecto con la falta de dominio de objetos matemáticos necesarios para resolver las preguntas, señalando a la adición, sustracción, multiplicación, sucesor y antecesor de un número como objetos que representan dificultad.

Cuadro 7 - Ejemplo de respuestas en las facetas cognitiva y afectiva.

Respuesta
Una de las principales dificultades que se les puede presentar a los estudiantes es la comprensión del problema, también la ubicación de los cuadrados dependiendo del número de cuadrados y la figura que pidan y/o no conocer el antecesor de un número.
Se pueden presentar dificultades de reconocimiento selectivo (visualización), para interpretación la información y consolidar el patrón de secuencia. Dificultad para abordar el problema (análisis). Dificultad para determinar el proceso (formulación de la operación/operaciones).
Falta de análisis e interpretación. No saber plantear ecuaciones. No desarrollar correctamente operaciones básicas (adición y sustracción). No saber las tablas de multiplicar.

Fuente: Transcripción propia de respuestas de profesores participantes.

Un aspecto que destaca significativamente es que todas estas respuestas hacen alusión al aspecto cognitivo, pero ninguna de ellas incluye aspectos afectivos. Además, todas las respuestas dadas por los profesores hacen alusión al estudiante como único responsable de las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje.

3.3 Facetas mediacional e interaccional

El interrogante asociado a estas facetas buscaba que los docentes hicieran explícitos elementos relacionados con la forma en que consideran la relación entre los estudiantes, profesor y los procesos de generalización y particularización. Ante lo planteado se generaron dos tipologías de soluciones las cuales se presentan en el Cuadro 8.

En el tipo A, donde se ubicó los aportes del 80% de los profesores, se encuentran respuestas relacionadas con la atención de las dificultades que emergen en un proceso de aprendizaje a partir de la mediación, específicamente de la acción del profesor a través de nuevos ejemplos en los que la "dificultad" sea menor, como por ejemplo con secuencias numéricas sencillas. En el tipo B el 20% de los profesores dieron soluciones asociadas a la interacción, planteando acciones de comunicación y gestión de las interpretaciones de los estudiantes al trabajo con secuencias numéricas.

Cuadro 8 - Ejemplo de respuestas en facetas mediacional e interaccional.

Profesor	Respuesta
Tipo A	Ubicación de números en la recta numérica. Explicación del procedimiento para efectuar adiciones. Explicar secuencias más sencillas (con figuras geométricas, colores, números).
Tipo B	Partiendo de una presentación de secuencias numéricas sencillas que permitan a los estudiantes interpretar y distinguir las características y patrones; por ejemplo, si son de aumento o disminución. Permitir la participación de los estudiantes desde su visualización de la situación y confrontar su saber mediante preguntas para llevarlos a desequilibrar su saber o consolidarlo paso a paso. La intención es lograr la visualización del problema despejando la información necesaria y la distractora del problema para tomar los datos válidos y necesarios. Determinar con los estudiantes los posibles patrones y poniéndolos a prueba para descartar el uso inadecuado de los procesos matemáticos.

Fuente: Transcripción propia de respuestas de profesores participantes.

Un contraste importante que sobresale en estas facetas es que los docentes asumen la responsabilidad de abordar las dificultades, esto a pesar de que en la faceta cognitiva indicaron que la emergencia de estas tiene origen en el estudiante y ninguna en las acciones de los docentes. Adicionalmente, a pesar de que previamente indicaron que las dificultades radicaban en objetos matemáticos mal comprendidos en procesos de aprendizaje anteriores, ninguno de ellos consideró acciones enfocadas a la gestión de los conocimientos previos.

3.4 Faceta ecológica

En búsqueda de determinar la manera en que relacionan los profesores la presencia de los procesos de generalización y particularización en las directrices curriculares colombianas, se planteó un interrogante cuya respuesta esperada era que la situación propuesta es posible trabajarla en cualquier nivel a partir de grado tercero de educación básica primaria.

Los profesores participantes indicaron tres soluciones distintas, el 10% señaló que la situación podría proponerse en grado quinto de básica primaria, un 20% expresó que en grado sexto y el 70% restante identificó al grado octavo, en ambos casos de la educación básica secundaria. Estas respuestas indican dos aspectos llamativos, el primero de ellos, que ningún profesor recurrió a las directrices nacionales para identificar el grado en que se indica el inicio de trabajo con situaciones como la propuesta; el segundo aspecto, es que ningún profesor consideró la posibilidad de trabajar este tipo de problemas en múltiples grados.

3.5 Clasificación del conocimiento

Con la descripción de las respuestas otorgadas por los profesores, se hace posible la clasificación del conocimiento de cada uno de ellos respecto a los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. Esta valoración se presenta mediante una clasificación de nivel nulo (0), nivel bajo (1), nivel medio (2), nivel alto (3) y nivel avanzado (4) de cada uno de los indicadores de las seis facetas propuestas por CDM.

Para iniciar, de la valoración de los indicadores propios de la faceta epistémica se encuentra que un 60% de los profesores expresan un conocimiento común alto, considerando que lograron solucionar la mayoría de los aspectos de las situaciones planteadas. El 40% restante evidenciaron rasgos de un conocimiento común de nivel medio, dado que, solo abordaron las situaciones en el ámbito de lo particular.

Respecto al conocimiento especializado, el mismo 60% mostraron un nivel alto al dar explicaciones de la forma en que pasaron de lo particular a lo general en la solución de las situaciones, no obstante, no lograron otorgar diferentes formas de solucionar el problema, ni identificaron una gama amplia de los objetos matemáticos presentes en ellas. El otro 40% de los profesor se ubican en conocimiento especializado bajo, ya que sus soluciones carecen de justificaciones, explicaciones, diversidad de formas de solución y representación, además de que no expresaron una variedad considerable de objetos matemáticos asociados a cada situación.

Para cerrar esta faceta, en el conocimiento ampliado todos los profesores se ubican en el nivel bajo, dado que, ninguno de ellos logró pasar de la identificación de objetos presentes en la solución de las preguntas, a la conexión con otros objetos propuestos por el currículo. Además, en las explicaciones de situaciones con las cuales asociaban el problema planteado, omitieron por completo expresiones alusivas a planteamientos que incorporaran elementos del proceso de generalización.

En cuanto a la valoración de las facetas cognitiva y afectiva, el conocimiento de los profesores se clasificó en un nivel bajo, siendo la mayor dificultad que experimentan, el describir con precisión el tipo de actividad cognitiva que desarrollan los estudiantes. En este caso, no logran identificar cómo se desarrollan los procesos de particularización y generalización, así como las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en su actividad matemática. Además, en las respuestas de los profesores se identificó total omisión de factores afectivos y de estrategias para involucrar a los estudiantes en la situación propuesta.

En las facetas mediacional e interaccional un 80% de los profesores tienen una clasificación de conocimiento bajo, esto debido a que ninguno de ellos logró describir cómo harían uso de las situaciones para solucionar las dificultades que de ellas emergen, es decir, lograron identificar otro tipo de situaciones que podrían vincular para ayudar a los estudiantes en su comprensión, más no identificaron los elementos de la generalización y particularización que hay en cada situación y cómo ellos permiten una gestión didáctica de lo que ocurre en el aula. En cuanto al 20% adicional, alcanza un nivel intermedio pues lograron mayor detalle de cómo utilizarían la actividad de los estudiantes en la solución de los problemas para, a través de ello, avanzar en la superación de dificultades y obstáculos; sin embargo, no lograron precisión respecto a factores como la naturaleza de las interacciones en sus estrategias, ni la gestión de recursos temporales y materiales.

Finalmente, en la faceta ecológica la valoración de todos los profesores es de un nivel de conocimiento bajo, pues intentaron identificar un grado en el que podrían aplicar las situaciones, más no lograron dar explicaciones de por qué sería adecuado en dichos grados, ni tampoco lograron establecer temas, objetos, grados o conexiones con aspectos tanto del contexto intra como del extra-matemático, para poder ubicar curricularmente este tipo de problemas de generalización y particularización.

4. Consideraciones finales

Para iniciar, en la faceta epistémica se encuentra como aspectos de relevancias que las dificultades identificadas en el conocimiento de los profesores tienen origen en la falta del hábito de justificar y argumentar su propia actividad matemática, esto revela la necesidad que existe de incorporar en los programas de formación docente espacios de reflexión sobre las prácticas docentes, pues a través de ello se adquiere la capacidad de describir con profundidad la labor docente (LLINARES; FERNÁNDEZ, 2021; BUFORN et al., 2022).

Otro aspecto encontrado fue la falta de competencia para proponer diversas soluciones a un problema. Esto ocurre, según Clemente y Llinares (2015), debido a que en los profesores predominan estructuras cognitivas que son independientes del tipo de problema y por ende se da preferencia al desarrollo de esas formas cognitivas en la actividad del estudiante; razón por la cual, más allá de que la naturaleza de los problemas ofrece múltiples formas de pasar de la particularización a la generalización, los profesores los acomodan a la forma de solución en la que predomina su estructura cognitiva y omiten otras posibilidades. En particular, en los profesores prevalece la estructura cognitiva algebraica y por ende no consideran otras formas de abordar los problemas como, por ejemplo, el razonamiento deductivo o inductivo (BURGOS; GODINO, 2022).

Ahora, en las facetas cognitiva y afectiva se encontró que las dificultades que emergen con la generalización y la particularización son atribuidas por los profesor a los estudiantes y su falta de comprensión, más no vinculan al docente en la emergencia de ellas. Esto revela, que al considerar que los estudiantes no pueden comprender problemas de generalización, el profesor hace explícito una creencia sobre el aprendizaje de la matemática, y es que dicho proceso no es posible de lograr en todos los estudiantes a través de la resolución de problemas, sino que es el docente quien debe ofrecer el conocimiento, este tipo de creencias son de fuerte arraigo en muchos docentes (BOHÓRQUEZ; D’AMORE, 2019) y consolidan un obstáculo en la ampliación de conocimiento.

Ahora, en cuanto por qué ninguno profesor llegó al nivel avanzado en esta faceta, se encuentra que en los profesores está fuertemente establecido que la generalización es un proceso matemático de naturaleza estrictamente simbólica. Todos los profesores de manera explícita o implícita consideraron que el objetivo de proponer situaciones de generalización o particularización es alcanzar expresiones algébricas, pero ninguno reflexionó sobre aquella forma de pensar que se desarrolla en los estudiantes con este tipo de actividades; es decir, omitieron por completo que la generalización también tiene una naturaleza factual y contextual que permite a los estudiantes desarrollar desde edades tempranas el pensamiento algebraico (RADFORD, 2010), para llegar en momentos más avanzados de su formación a la generalización simbólica.

Por otra parte, las facetas mediacional e interaccional, se encontraron rasgos del efecto Topaze identificado por Brousseau (1986), debido a que en los profesores existe la fuerte creencia de que la forma de mediar y relacionarse con los estudiantes ante una dificultad en el proceso de aprendizaje es disminuyendo la dificultad de la situación que se trabaja, por esta razón la propuesta de acciones de los profesores se centró en cambiar las situaciones por situaciones de generalización más sencillas, pero ninguno de ellos manifestó hacer uso de los elementos propios de la particularización y la generalización que eran los procesos matemáticos que estaba desarrollando el estudiante y de los que se necesitaba gestión por parte de ellos.

Como lo explica D'Amore et al. (2010), este fenómeno no es evidente para el profesor y para que él sea consciente de la forma en que esto afecta el aprendizaje de los estudiantes se requiere de un proceso extenso de análisis y reflexión de diversas situaciones de aprendizaje, por esta razón se encuentra como factor importante a considerar en el diseño de programas de formación docente el análisis y reflexión sobre el papel de la mediación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Finalmente, en la exploración de la faceta ecológica, se encontraron falencias respecto a los niveles escolares a los que se atribuye la presencia de situaciones propias del razonamiento algebraico, esto posiblemente ocurrió debido a lo que Kieran et al. (2016) proponen como un miedo instaurado en el docente respecto a la naturaleza del pensamiento algebraico, pues existe una creencia fuertemente establecida en muchos profesores, respecto a que el álgebra es una forma de pensamiento avanzado que se escapa del razonamiento en edades tempranas.

Referencias

BAENA, G. **Metodología de la investigación**. Ciudad de México: Grupo editorial patria. 2017.

BALL, D. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 51, n. 1, 241-247. 2000. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

BALL, D. **What are teachers learning?** Philadelphia: National Council of Supervisors of Mathematics. 2004.

BERNAL, C. **Metodología de la investigación. Para administración, economía, humanidades y ciencias sociales**. Ciudad de México: Pearson Educación. 2006.

BOHÓRQUEZ, L.; D'AMORE, B. Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. **Avances de investigación en educación matemática**, Alicante, v. 13, n. 1, p. 85-103, 2019. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.228

BONILLA, M.; LÓPEZ, A. Ejemplificación del proceso metodológico de la teoría fundamentada. **Cinta moebio**, Santiago de Chile, v. 57, n. 1, p. 305-315. 2016. DOI: https://doi.org/10.4067/S0717-554X2016000300006

BROUSSEAU, G. Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. **Recherches en didactique des mathematiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Inicio al estudio de la teoría de situaciones didácticas**. Buenos aires: Libros del zorzal. 2007.

BROUSSEAU, N.; WARFIELD, V.; BROUSSEAU, G. **Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment**. Dordrecht: Springer. 2012.

BUFORN, À.; LLINARES, S.; FERNÁNDEZ, C.; COLES, A.; BROWN, L. Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taipei, v. 53, n. 2, p. 425-443, 2022. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

BURGOS, M.; GODINO, J. Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taipei, v. 20, n. 1, p. 367-389, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

CAMACHO, M.; SANTOS, L. Aportes sobre la resolución de problemas, tecnología y formación de profesores de matemáticas. In PLANAS, N. (Coord.), **Avances y realidades de la educación matemática**, p. 113-130. Barcelona: Graó. 2015.

CARPES, G.; BISOGNIN, E. A Formação Continuada de Professores na perspectiva dos Conhecimentos Didáticos Matemáticos. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, n. 1, p. 1-23, 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202111

CASTRO, W.; PINO-FAN, L.; VELÁSQUEZ, H. El conocimiento didáctico-matemático: una propuesta de evaluación de tres de sus facetas. **Revista científica**, Bogotá, v. 2, n. 1, p. 461-465, 2013. DOI: https://doi.org/10.14483/23448350.6561

CLEMENTE, F.; LLINARES, S. Pre-service primary teachers' ways of discourse and configural reasoning in solving geometrical problems. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 33, n. 1, p. 9-27, 2015. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

D'AMORE, B. La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**, p. 43-64. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2017.

D'AMORE, B.; FANDIÑO, M. I.; MARAZZANI, I.; SARRAZY, B. **Didattica della matematica Alcuni Effetti del «contrato»**. Bologna: Archetipolibri. 2010.

DÖRFLER, W. Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop, A.; Mellin, S.; Dormolen, J. (Eds.), **Mathematical knowledge: Its growth through teaching**, p. 63-85. Dordrecht: Kluwer academic publishers. 1991.

ELLIS, A. A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. **Journal of the Learning Sciences**, London, v. 16, n. 2, p. 221–262, 2007. DOI: https://doi.org/10.1080/10508400701193705

FELMER, P.; LILJEDAHL, P.; KOICHU, B. **Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development**. Switzerland: Springer. 2019.

FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives**. Switzerland: Springer. 2016.

FONT, V.; CONTRERAS, A. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, n. 1, p. 33-52. 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

FONT, V.; RUBIO, N. Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. **La matematica e la sua didattica**, Bologna, v. 24, n. 1-2, p. 97-123, 2016.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Andújar, v. 5, n. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J. D. Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. **Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)**, Maracaibo, v. 2, n. 2, p. 1-24, 2022. DOI: https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25

GODINO, J. D.; BATANERO, C; FONT, V. El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. **Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaíso, v. 12, n. 2, p. 3-15, 2020.

GODINO, J.; BATANERO, C.; BURGOS, M.; GEA, M. Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, n. 1, p. 1-30, 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202107

GROSSMAN, P. **The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education**. New York and London: Teachers College Press. 1990.

KANT, I. **Logic**. Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company. 1974. (Original Publicado en 1800).

KIERAN, C.; PANG, J.; SCHIFTER, D.; FONG, S. **Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching**. Hamburg: Springer. 2016.

KRANTZ, S. **An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving**. Saint Louis: American Mathematical Society. 2006.

LILJEDAHL, P. Conditions for Supporting Problem Solving: Vertical Non-permanent Surfaces. In LILJEDAHL, P.; SANTOS, M. (Eds.), **Mathematical Problem Solving**, p. 289-310. Hamburg: Springer. 2019.

LILJEDAHL, P.; SANTOS, L. **Mathematical Problem Solving**. Hamburg: Springer. 2019.

LLINARES, S.; FERNÁNDEZ, C. Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. **Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española**, Madrid, v. 24, n.1, p. 185-205, 2021.

MACIEJEWSKI, W. Future-Oriented Thinking and Activity in Mathematical Problem Solving. In LILJEDAHL, P.; SANTOS, M. (Eds.), **Mathematical Problem Solving**, p. 21-40. Hamburg: Springer. 2019.

MALASPINA, U.; TORRES, C.; RUBIO, N. How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. In LILJEDAHL, P.; SANTOS, M. (Eds.), **Mathematical Problem Solving**, p. 133-154. Hamburg: Springer. 2019.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.), **Approaches to algebra perspectives for research and teaching**, p. 65-86. Dordrecht: Kluwer academic publishers. 1996.

MASON, J. When is a problem…? "When" is actually the problem! In FELMER, P; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.), **Posing and solving mathematical problems**, p. 263–283. Switzerland: Springer. 2016.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking mathematically**. London: Pearson Prentice Hall. 1982.

PERKINS, D. **Archimedes' bathtub: The art of breakthrough thinking**. Nueva York: W.W. Norton and Company. 2000.

PINO, L.; CASTRO, W.; FONT, V. A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taipei, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6.

PINO, L.; FONT, V; GODINO, J. **El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: Pautas y criterios para su evaluación y desarrollo**. Granada: Universidad de Granada. 2014.

POINCARÉ, H. Mathematical creation. **The Monist**, Oxford, v. 20, n. 3, p. 321-335, 1910. DOI: https://doi.org/10.5840/monist19102037

POLYA, G. **How to solve it**. Nueva Jersey: Princeton University Press. 1945.

POPKEWITZ, T. The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. **American Educational Research Journal**, Washington, v. 41, n. 1, p. 3-34, 2004. DOI: https://doi.org/10.3102/00028312041001003

RADFORD, L. How to look at the general through the particular: Berkeley and Kant on symbolizing mathematical generality. In SBARAGLI, S. (Ed.), **La matematica e la sua didattica: vent'anni di impegno**, p. 245-248. Roma: Carocci. 2006.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, 2010.

RADFORD, L. Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. **PNA**, Granada, v. 9, n. 3, p. 129-141, 2015.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**, p. 137-161. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2017.

RADFORD, L. On theories in mathematics education and their conceptual differences. In SIRAKOV, B.; DE SOUZA, P.; VIANA, M. (Eds.), **Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. 4**, p. 4055-4074. Singapore: World Scientific Publishing Co. 2018.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Switzerland, v. 8, n. 3, 255-281, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

SANTOS, L. M. Problem-solving in mathematics education. In LERMAN, S. (Ed.), **Encyclopedia of mathematics education**, p. 686-693. Dordrecht: Springer. 2020.

SCHOENFELD, A. Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In LESTER, F.; GAROFALO, J. (Eds.), **Mathematical problem solving: Issues in research**, p. 27–37. Pennsylvania: Franklin Institute Press. 1982.

SCHOENFELD, A. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academic Press. 1985.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In WOOD, T.; TIROSH, D. (Eds.), **International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education**, p. 321-354. Leiden: Sense Publishers. 2008.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington D. C., v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. DOI: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

SHULMAN, L. Knowledge, and teaching: Foundations of the new reform. **Educational Review**, London, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987. DOI: https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

STEINBRING, H. What makes a sign a mathematical sign? – an epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v. 61, n. 1. p. 133-162, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

TORRES, C. (2020). Developing teachers' didactic analysis competence by means of a problem-posing strategy and the quality of posed mathematical problems. In VILLALBA-CONDORI, K.; ADÚRIZ-BRAVO, A.; GARCÍA-PEÑALVO, F. LAVONEN, J.; WONG, L.; WANG, T. (Eds.). **Education and Technology in Sciences. First International Congress, CISETC 2019 Arequipa, Peru**, **Revised Selected Papers**, p. 88-100. Cham: Springer. 2019.

TORREGROSA, G.; CALLEJO, M. Procesos matemáticos en la educación secundaria. In GOÑI, J. (Coord.), **Matemáticas, complementos de formación disciplinar**, p. 29-55. Barcelona: Graó. 2011.

TORRES, R.; BLÁSQUEZ, L.; LÓPEZ, I. **Guía para la investigación cualitativa: etnografía, estudio de caso e historia de vida**. Bogotá: Casa abierta el tiempo. 2016.

ZALAMEA, F. Creativity Between Experience and Cosmos: CS Peirce and AN Whitehead on Novelty. Transactions of the Charles S. **Peirce Society**, Bloomington, v. 56, n. 4, p. 631-634, 2020. DOI: https://doi.org/10.2979/trancharpeirsoc.56.4.08

Autores

Cristian Camilo Fúneme Mateus
Licenciado en matemáticas y Magister en educación matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Magister en Ciencias-Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Actualmente profesor de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
Correo electrónico: cristian.funeme@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-9158-427X

Leidy Julieth Linares Beltrán
Licenciada en educación básica de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Especialista en informática y multimedia en Educación de la Universidad Los libertadores. Magister en didáctica de la matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Actualmente profesora del Colegio Distrital el Porvenir de Bogotá, Colombia.
Correo electrónico: leidy.linares@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-8220-9814

Leidy Milena Cáceres Carreño
Licenciada en educación básica, Especialista en Didáctica de la matemática y Magister en didáctica de la matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Actualmente profesora de la Institución Educativa Paz y Libertad del municipio San Mateo, Colombia.
Correo electrónico: leidymilena.caceres@uptc.edu.co
https://orcid.org/0009-0001-9591-5566

Como citar o artigo:

FÚNEME, C. C.; LINARES, L. J.; CÁCERES, L. M. Conocimiento didáctico-matemático de profesores colombianos sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos;** junio de 2023 / 194 - 220 DOI: