Criterios de idoneidad epistémica para la enseñanza de las funciones: el caso de la función inversa en contexto de microenseñanza

Yocelyn Parra Urrea
yocelyn.parra@uss.cl
https://orcid.org/0000-0002-1880-5945
Universidad San Sebastián (USS)
Santiago, Chile.

Luis Pino-Fan
luis.pino@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408
Universidad de Los Lagos (ULAGOS)
Osorno, Chile.

Carlos Gallegos Lastra
carlos.gallegos@usach.cl
https://orcid.org/0009-0001-7230-2513
Universidad de Santiago de Chile (USACH)
Santiago, Chile.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

En esta investigación se presenta una herramienta teórico-metodológica que permite caracterizar el conocimiento matemático requerido por el profesorado de matemática para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre funciones. Se ejemplifica el uso de nuestra propuesta mediante el análisis de un proceso de instrucción desarrollado por un futuro profesor de matemática chileno sobre la noción de función inversa, en contexto de microenseñanza. La microenseñanza constituye un espacio de análisis y retroalimentación controlado y seguro que ofrece al profesor en formación una oportunidad de autobservarse y reflexionar sobre su práctica. Para el diseño de nuestra propuesta y los análisis del estudio, nos apoyamos en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) y en las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Como resultado del estudio se presentan criterios de idoneidad epistémica específicos para la enseñanza de funciones que constituyen una primera aproximación al conocimiento referencial de la dimensión matemática. Estos criterios nos permitieron analizar la riqueza matemática, valorar la práctica docente y reflexionar sobre ella para determinar acciones que mejoren los procesos de instrucción sobre la noción de función inversa.

Palabras clave: Función inversa. Conocimiento Didáctico-Matemático. Criterios de idoneidad. Faceta epistémica. Microenseñanza.

Critérios de adequação epistêmica para o ensino de funções: o caso da função inversa no contexto do microensino

Resumo

Esta pesquisa apresenta uma ferramenta teórico-metodológica que permite caracterizar os conhecimentos matemáticos requeridos pelos professores de matemática para administrar adequadamente o aprendizado sobre funções. O uso de nossa proposta é exemplificado através da análise de um processo de instrução desenvolvido por um futuro professor de matemática chileno sobre a noção de função inversa, no contexto do microensino. O microensino constitui um espaço de análise e *feedback* controlado e seguro que oferece ao professor em formação a oportunidade de auto observar-se e refletir sobre a sua prática. Para a concepção da nossa proposta e análise do estudo, contamos com o Modelo de Conhecimento Didático-Matemático (CDM) e com os instrumentos teóricos e metodológicos da Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (AOS). Como resultado do estudo, são apresentados critérios específicos da adequação epistêmica para o ensino de funções que constituem uma primeira aproximação ao conhecimento referencial da dimensão matemática. Esses critérios nos permitiram analisar a riqueza matemática, avaliar a prática docente e refletir sobre ela para determinar ações que melhorem os processos instrucionais sobre a noção de função inversa.

Palavras-chave: Função inversa. Conhecimento Didático-Matemático. Critérios de adequação. Faceta epistêmica. Microensino.

Epistemic suitability criteria for the teaching of functions: the case of the inverse function in the context of micro-teaching

Abstract

This research presents a theoretical-methodological tool that allows characterizing the mathematical knowledge required by mathematics teachers to properly manage learning about functions. The use of our proposal is exemplified through the analysis of an instruction process developed by a future Chilean mathematics teacher on the notion of inverse function, in the context of microteaching. Microteaching constitutes a controlled and safe space for analysis and feedback that offers the teacher in training an opportunity to self-observe and reflect on its practice. For the design of our proposal and the analysis of the study, we rely on the Didactic-Mathematical Knowledge Model (CDM) and on the theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematics Instruction (EOS). As a result of the study, specific epistemic suitability criteria are presented for the teaching of functions that constitute a first approximation to the referential knowledge of the mathematical dimension. These criteria allowed us to analyze the mathematical richness, assess the teaching practice and reflect on it to determine actions that improve the instructional processes on the notion of inverse function.

Keywords: Inverse function. Didactic-Mathematical Knowledge. Suitability criteria. Epistemic facet. Microteaching.

Introducción

Determinar el conocimiento requerido por los profesores para lograr, en sus estudiantes, una apropiación significativa de nociones matemáticas es una de las problemáticas más apremiantes de la comunidad investigadora en educación matemática (BALL, 2000; HILL; BALL; SCHILLING, 2008; SCHOENFELD; KILPATRIK, 2008; PINO-FAN, GODINO; FONT, 2018). La formación inicial y continua de profesores representa un campo de investigación fundamental dado que "el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes dependen de manera esencial de la formación de sus profesores" (PINO-FAN, 2014, p.5). Grossman y McDonald (2008) argumentan que los programas de formación inicial docente deben aproximarse a la práctica de manera que los futuros profesores puedan participar de situaciones intensivas centradas en la experimentación.

La microenseñanza es un método de enseñanza simulado cuyo propósito es proporcionar a los profesores la oportunidad de desarrollar la práctica docente en un contexto controlado y de complejidad reducida. Este tipo de metodologías no sustituye la práctica en contextos reales, pero ofrece ventajas como la retroalimentación, la oportunidad de autoevaluarse, explorar fortalezas, debilidades y proporciona una mayor comprensión de las interacciones en el aula (DONNELLY; FITZMAURICE, 2011). Se ha demostrado que el desempeño de los futuros profesores en entornos estandarizados de microenseñanza es transferible a situaciones reales de aula (SEIDEL et al., 2015). Además, los profesores que han sido formados mediante microenseñanza muestran un mejor desempeño que aquellos que no han participado de estas metodologías (SEIDEL et al., 2015).

Los profesores en formación deberían tener la oportunidad de experimentar la auténtica naturaleza de la enseñanza como un proceso dinámico e interactivo, sin estar expuestos a la exigencia que provoca un campo de acción real, la falta de consecuencias negativas otorga mayor seguridad en la aplicación de métodos o enfoques de enseñanza que le permiten integrar los conocimientos teóricos provenientes de las ciencias de la educación, la matemática y la didáctica de la matemática. Los futuros profesores deben tener la oportunidad de reflexionar intensamente sobre sus propias prácticas docentes y las de los demás. En la actualidad, son escasos los estudios que han aplicado entornos de microenseñanza para analizar sistemáticamente las prácticas de retroalimentación de los profesores en formación (HÖPPNER et al., 2019).

El proceso de instrucción sobre la noción de función ha sido objeto de múltiples investigaciones motivadas fundamentalmente por las dificultades que poseen los estudiantes para comprender y dar significado a dicho objeto matemático. Norman (1992), afirma que los profesores tienen dificultades en la conceptualización de las funciones, es decir, aprueban definiciones imprecisas consideradas útiles para la comprensión del objeto matemático. Asimismo, afirma que la familiaridad con las funciones interfiere en el desarrollo y aprehensión significativa de otras nociones matemáticas. La conceptualización que los profesores poseen en torno a las funciones debería contemplar: 1) la ejemplificación y caracterización de la noción de función desde una definición/significación personal y formal; 2) habilidad para relacionar la noción de función en diversos contextos (cotidianos, provenientes de otras ciencias, etc.); y 3) habilidad para interpretar, generalizar, y deducir relaciones funcionales en representaciones gráficas, algebraicas, tabulares y verbales (NORMAN, 1992; MAKONYE, 2014). En este mismo sentido, Even (1993) se refiere a dos rasgos esenciales de la noción de función: arbitrariedad y univalencia. En su estudio constata que la idea de función como correspondencia arbitraria está ausente. Además, los profesores tienen dificultades para explicar la condición de univalencia.

Las funciones admiten una variedad de representaciones (algebraicas, gráficas, tabulares, verbales) que otorgan información esencial del objeto matemático. Es decir, cada representación ilustra aspectos relevantes de una función, por ejemplo, las representaciones gráficas permiten visualizar la covariación. En contraste, las expresiones algebraicas y tabulares acentúan la idea de correspondencia (THOMPSON, 1994; CONFREY; SMITH, 1995 apud NITSCH et al., 2015). Según Panaoura et al., (2017) la falta de comprensión por parte de los profesores para transitar por las múltiples representaciones asociadas a las funciones podría obstaculizar la aprehensión de los estudiantes quienes podrían concebir las representaciones como entidades estáticas e independientes (WANG; BARMBY; BOLDEN, 2017).

Si bien diversos estudios se han referido a los procesos de instrucción sobre funciones, son escasas las investigaciones con ejemplos empíricos que orienten el desarrollo de una práctica docente eficiente que facilite el aprendizaje de los estudiantes sobre funciones inversas (PAOLETTI, 2020). De acuerdo con Even (1993) y Sintema y Marban (2021) los profesores en formación y profesores en ejercicio tienen dificultades para construir significados de funciones inversas, por ejemplo, confunden la composición de funciones con la multiplicación ordinaria y presentan inconvenientes para identificar situaciones de la vida real que podrían ser modeladas mediante funciones inversas. En este mismo sentido, Kontorovich (2017) afirma que la comprensión del símbolo polisémico del superíndice (-1), que se usa para indicar la inversa de una función y el recíproco de un número real, representa un gran problema para los profesores de matemáticas en formación. Esto ocurre particularmente porque la mayoría de ellos tratan el símbolo (-1) como un homónimo, es decir, al símbolo le asignan significados diferentes sin considerar el contexto, lo que se enfatiza en los errores de procedimiento en la determinación de funciones recíprocas (en términos multiplicativos) y funciones inversas.

La complejidad que subyace en los procesos de enseñanza y aprendizaje de funciones nos ha llevado a plantearnos las siguientes preguntas:

- ¿Qué componentes e indicadores representan un recurso orientador para alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones?
- ¿Cómo sistematizar y orientar la reflexión de la práctica docente que ejercen los futuros profesores cuando afrontan la enseñanza de funciones?

Para responder a estas preguntas, se propone una herramienta teórico-metodológica con criterios específicos para la enseñanza de las funciones, particularmente detallaremos aquellos que permiten alcanzar una alta idoneidad epistémica y forman parte esencial del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Se ejemplifica el uso de nuestra herramienta mediante el análisis de un proceso de instrucción sobre función inversa, desarrollado por un profesor chileno en formación, en contexto de microenseñanza. De este modo, nuestro estudio se sustenta en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), en las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y en los espacios de reflexión que ofrece la microenseñanza.

1. Marco Teórico

En esta investigación hemos adoptado el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que plantea tres dimensiones (Matemática; Didáctica; y Meta didáctico-matemática) para interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018). Cada dimensión considera subcategorías, que incluyen elementos teóricos para el análisis del conocimiento relativo a cada subcategoría. La *dimensión matemática* del CDM, constituye el conocimiento que le permite al profesor resolver una actividad matemática y vincularla con otros objetos matemáticos que se explicitan en el currículo escolar. Incluye dos subcategorías: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015). La dimensión matemática no es suficiente para alcanzar procesos de enseñanza y aprendizaje eficaces, es decir, se requiere conocimiento de otros aspectos que afectan la planificación, la gestión del aula y del contenido matemático. De este modo, la *dimensión didáctica* del CDM se refiere a conocimientos esenciales que el profesor debe movilizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, esto es, el conocimiento en profundidad de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos, afectivos, mediacionales, interaccionales y ecológicos. Por consiguiente, esta segunda dimensión incluye seis subcategorías: 1) faceta epistémica (conocimiento sobre las características esenciales de los objetos matemáticos; 2) faceta cognitiva (conocimiento sobre los aspectos cognitivos, conocimientos previos de los estudiantes, y sobre los errores y dificultades asociadas a una noción matemática); 3) faceta afectiva (conocimiento sobre los intereses, necesidades, actitudes y emociones de los estudiantes); 4) faceta interaccional (conocimiento sobre la capacidad de autonomía de los estudiantes y las interacciones que surgen en los procesos de instrucción); 5) faceta mediacional (conocimiento sobre los recursos materiales, las condiciones del aula y la temporalidad para promover el aprendizaje); y 6) faceta ecológica (conocimiento sobre el currículo escolar, la innovación didáctica y los aspectos socioculturales -contextuales, sociales, económicos- que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje) (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015). Las seis facetas de la dimensión didáctica del CDM pueden emplearse para examinar, describir y caracterizar el conocimiento de los profesores en cualquier fase del proceso de enseñanza: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación (PINO-FAN; GODINO, 2015).

La dimensión meta didáctico-matemática (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017) se refiere al conocimiento sobre las condiciones institucionales, normas y metanormas que regulan la gestión del aula y de los contenidos. Además, involucra criterios que permiten evaluar la idoneidad didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje para reflexionar sobre la práctica docente ejercida y determinar acciones que promuevan procesos adecuados de instrucción matemática (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018).

El CDM permite utilizar las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Onto-Semiótico (GODINO; BATANERO; FONT, 2019) para operacionalizar las dimensiones y subcategorías del conocimiento didáctico-matemático propuestas por el modelo. En este sentido, la noción de idoneidad didáctica propone criterios que representan un recurso orientador para la gestión efectiva en el aula y se define como la articulación coherente y sistémica de los siguientes seis componentes (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018):

- *Idoneidad epistémica* es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad ecológica* es el grado de adecuación del proceso de instrucción matemática a los lineamientos institucionales, curriculares y a las condiciones socioculturales de los estudiantes.
- *Idoneidad cognitiva* permite valorar tanto la relación entre los conocimientos previos de los estudiantes y el aprendizaje pretendido/implementado como la similitud de este último con el aprendizaje adquirido por parte del estudiante.
- *Idoneidad afectiva* permite valorar qué tan involucrado está el estudiante en el proceso de instrucción matemática.
- *La idoneidad interaccional* es el grado en que las interacciones (entre el docente y los estudiantes y entre estudiantes) favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje y permiten resolver las inquietudes y dificultades de los estudiantes.
- *La idoneidad mediacional* permite valorar la pertinencia de los recursos materiales y temporales en los procesos de instrucción matemática.

La formación de profesores (inicial y continua), debe promover espacios de reflexión de la práctica docente como una estrategia esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. El constructo de criterios de idoneidad (componentes y descriptores) puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión, guiar los procesos de instrucción matemática y valorar su implementación. En el siguiente apartado, se presentan criterios específicos de idoneidad epistémica para orientar y valorar clases sobre la noción de función.

1.1 Criterios de Idoneidad epistémica para la enseñanza de funciones

En este artículo se presentan criterios de idoneidad epistémica específicos para la enseñanza de funciones que constituyen una primera aproximación al conocimiento referencial de la dimensión matemática. Esta herramienta es resultado de una investigación más amplia que presenta criterios de idoneidad didáctica para cada una de las seis facetas de la dimensión didáctica del CDM (PARRA-URREA; PINO-FAN, 2022). En el apartado de resultados y análisis ejemplificaremos su uso, mediante un proceso de instrucción sobre función inversa, desarrollada por un profesor chileno en formación, en contexto de microenseñanza.

El diseño de nuestra herramienta teórico-metodológica se sustenta en la exhaustiva revisión de literatura científica, en el marco teórico propuesto por Nyikahadzoyi (2015) sobre el conocimiento de los profesores respecto a la noción de función, y en los resultados de un estudio histórico-epistemológico y curricular (PARRA-URREA, 2015) que permitió identificar los diversos significados que la noción de función ha adquirido a lo largo de su origen, evolución y formalización: (1) como correspondencia; (2) relación entre magnitudes variables; (3) como representación gráfica; (4) como expresión analítica; (5) como correspondencia arbitraria; y (6) función a partir de la teoría de conjuntos.

Los criterios de idoneidad epistémica que se presentan en este artículo buscan analizar la riqueza matemática, valorar la práctica docente y reflexionar sobre ella para determinar acciones que mejoren los procesos de instrucción sobre la noción de función.

Alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones requiere del diseño y selección apropiada de situaciones-problemas que involucren dicho objeto matemático y de la articulación de los diversos significados parciales asociados a la noción matemática (GODINO; WILHELMI; BENCOMO, 2006; NORMAN, 1992). Además, es fundamental movilizar las distintas representaciones del objeto función (algebraica, gráfica, tabular, verbal) (EVEN, 1993; NITSCH et al., 2015), esto dado que “la capacidad de coordinar dos o más representaciones es vista como un sello distintivo para el desarrollo de competencias matemáticas” (WILLS et al., 2014, apud AMAYA; CASTELLANOS; PINO-FAN, 2021, p.2). En este mismo sentido, se debe promover definiciones que consideren las características fundamentales de la noción de función (arbitrariedad, existencia, univalencia) (EVEN, 1993). Las tareas propuestas deben admitir diversas formas de resolución, por tanto, variados procedimientos que deben ser debidamente justificados. Es esencial evitar en el proceso de enseñanza-aprendizaje ambigüedades o creencias que conlleven a conceptualizaciones erróneas sobre funciones. Finalmente, es importante que la noción de función se vincule con otros objetos matemáticos de distintos niveles educativos para mostrar su carácter unificante y modelizador

(DEULOFEU, 2001). En la siguiente tabla (tabla 1) se describen aspectos esenciales para lograr una alta idoneidad epistémica.

Cuadro 1 – Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

Componentes	**Indicadores**
Situaciones Problemas	- Se presenta una muestra de problemas que movilizan todos los significados parciales de referencia de la noción de función. - Se presentan problemas para reforzar conocimientos previos relacionados con la noción de función. - Se presentan problemas para ejemplificar la definición de la noción de función. - Se presentan problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje sobre funciones. - Se presentan problemas contextualizados provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias para reforzar el aprendizaje sobre funciones.
Lenguajes	- Se movilizan todas las representaciones vinculadas a la noción de función (verbal, simbólica/algebraico, tabular, gráfica e icónica). - Se promueven tratamientos en los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ej. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$ se aplica un tratamiento de factorización para obtener la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)^2$ el tratamiento de la función original no debe alterar el dominio ni el rango de la función resultante, en caso contrario la función no es la misma. - Se promueven conversiones entre los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ej. Para acceder a la idea de continuidad es conveniente utilizar un registro gráfico; Para potenciar la idea de correspondencia es pertinente utilizar un registro algebraico.
Definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos	- Las definiciones y procedimientos consideran la arbitrariedad y univalencia como características claves de la noción de función. - Se presenta la noción de dominio y codominio como elementos inherentes a la definición de función. - Se promueve el significado de la noción de función pretendido por el currículo escolar para identificar y argumentar relaciones funcionales en sus diversas representaciones. - Se presentan enunciados y procedimientos fundamentales relativos a la noción de función adecuados al nivel educativo. - Se promueven situaciones en que los estudiantes deben justificar sus conjeturas y procedimientos. - Se identifican y articulan los diversos significados parciales de la noción de función, Es decir, la función como: correspondencia, relación entre magnitudes variables, representación gráfica, representación analítica, correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos.
Errores, ambigüedades y creencias	- El trabajo con funciones no se limita al uso de representaciones algebraicas para evitar que se perciban solo como fórmulas y regularidades. - Se evita la creencia que un cambio en la variable independiente implica necesariamente un cambio en la variable dependiente pues de lo contrario una función constante podría no ser considerada una relación funcional. - Se presentan relaciones funcionales que no son graficables para evitar la creencia que toda función admite una representación gráfica. - Se evita el error de utilizar curvas continuas para funciones discretas. - Se presentan relaciones funcionales que no tienen asociada una expresión algebraica, una fórmula o ecuación para evitar la creencia que toda función admite una representación algebraica.

	- Las funciones se presentan con dominios y codominios explícitos para evitar la creencia de que toda función tiene un dominio y codominio natural o real. - Se presentan gráficas 'irregulares' para evitar la creencia que toda función representada gráficamente tiene buen comportamiento (simétrica, regular, suave y continua)

Fuente: Parra-Urrea (2021, p.127-130)

2. Metodología

La siguiente investigación trata de un estudio cualitativo (CRESWELL, 2009) dado que estamos interesados en sistematizar estrategias y herramientas metodológicas para orientar el diseño y reflexión de los procesos de enseñanza sobre la noción de función. Inicialmente, en un estudio más amplio, se definen criterios de idoneidad didáctica, para cada una de las facetas de la dimensión didáctica, específicos para la enseñanza de funciones (PARRA-URREA; PINO-FAN, 2022). Sin embargo, dado que en este artículo no podemos ser exhaustivos por razones de espacio, nos centraremos en presentar componentes e indicadores para alcanzar una alta idoneidad epistémica cuando se afronta la enseñanza de funciones (ver tabla 1). Posteriormente ejemplificamos el uso de nuestra herramienta mediante el análisis y valoración de la faceta epistémica de un proceso de instrucción matemática sobre función inversa, desarrollado por un profesor chileno, en contexto de microenseñanza. Esto representa una contribución a la exigua investigación sobre experiencias prácticas en la formación profesional de los profesores (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

A nivel internacional, la microenseñanza es una metodología utilizada en la formación inicial de profesores dado que enfatiza la relación teórico-práctica y proporciona habilidades para desarrollar el conocimiento pedagógico del contenido (KARTAL; OZTURK; EKICI, 2012). Asimismo, otorga la posibilidad de realizar grabaciones audiovisuales sobre experiencias de enseñanza permitiendo la revisión, análisis y discusión de la práctica docente (ERÖKTEN; DURKAN, 2009). En este sentido, el objetivo principal de la microenseñanza es proporcionar a los profesores en formación la oportunidad de explorar el campo de la enseñanza, reflexionar sobre la práctica docente y adquirir conocimientos y habilidades que aumenten su eficacia como futuros profesores, (BENTON-KUPPER, 2001; HÖPPNER et al., 2019).

2.1 Sujetos y Contexto

Al momento de la experimentación, el profesor chileno en formación, que para efectos de este estudio llamaremos *Profesor B,* estaba cursando el sexto semestre de la carrera de Pedagogía de Educación Media en Matemática de una Universidad Chilena. La duración total de este programa de estudios es de ocho semestres. Algunas de las asignaturas que el Profesor B había cursado a lo largo de su formación profesional fueron: álgebra básica, álgebra de funciones, cálculo diferencial, cálculo integral, informática educativa, software matemático, entre otras. Cabe destacar, que el estudio de la noción de función inversa se realiza en Chile en segundo año medio (enseñanza escolar secundaria), es decir, con estudiantes de 15-16 años.

La clase sobre función inversa se desarrolló, en un contexto de microenseñanza, como una de las actividades exigidas en la asignatura de práctica progresiva III. Para ello, se filmó una clase simulada de 40 minutos, en que cinco profesores en formación de sexto semestre, a quienes llamaremos Estudiantes 1, 2, 3, 4 y 5, cumplieron el rol de estudiantes de segundo año medio. Luego de finalizar la clase sobre función inversa, desarrollada por el Profesor B, se efectuó una instancia de retroalimentación entre el formador de profesores y los profesores en formación, con el propósito de precisar ciertas nociones y elementos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre funciones. Además, se identificaron fortalezas, se exploraron debilidades y se proporcionó una mayor comprensión de las interacciones en el aula mediante la revisión de la videograbación. El formador de profesores facilitó el diálogo para el intercambio de ideas y comentarios sobre el desempeño docente. Todo lo anterior conllevó a que los futuros docentes lograrán reflexionar sobre la experiencia y determinarán acciones que mejoren el proceso de instrucción.

3. Análisis y Resultados

A continuación, se presenta el análisis de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función de inversa, desarrollado en el contexto de microenseñanza por un futuro profesor chileno (Profesor B).

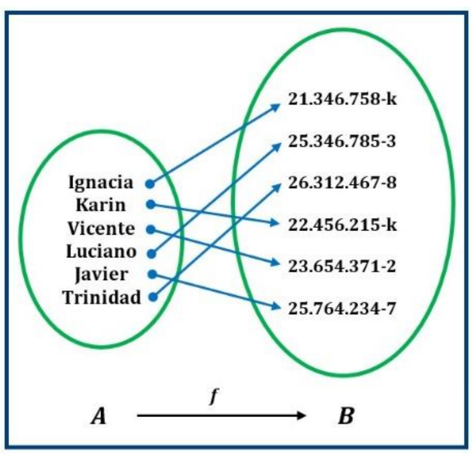
3.1 Descripción de la clase desarrollada por el Profesor B

El Profesor B inicia el proceso de enseñanza explicitando el objetivo de la clase: *"Reconocer y comprender la función inversa"*. Durante el inicio de la instrucción, intenta reforzar la noción de función y señala: *"Se definen todas las funciones a partir de dos conjuntos uno de inicio y otro de llegada"*. Inmediatamente, el Profesor B plantea la siguiente interrogante:

“¿Qué tipo de funciones conocemos?” Los estudiantes responden: “función exponencial, función lineal, función cuadrática”. Ante las respuestas dadas, el Profesor B señala: *“la clasificación de las funciones es inyectiva y sobreyectiva”* luego define dichas nociones: *“Definiremos las funciones inyectivas con dos conjuntos, a uno le llamaremos Q y llamaremos R al conjunto de llegada. Una función es inyectiva si tenemos un conjunto Q con los elementos $\{a; b; c\}$ y cada elemento del conjunto de partida va a tener una imagen en el conjunto de llegada y solamente una. El conjunto R lo vamos a conformar con los elementos* $\{1; 2; 3; 4\}$. *Es decir, esta función será inyectiva cuando a se relaciona con un elemento del conjunto de llegada y así cada elemento se relaciona con un solo elemento del conjunto de llegada. Es posible que sobren elementos en el conjunto de llegada, pero todos los elementos del conjunto de partida deben tener una imagen y solo una. Además, dos elementos del conjunto de partida no pueden tener la misma imagen en el conjunto de llegada”*.

Posteriormente, el Profesor B ejemplifica la definición dada señalando: *“Si definimos un primer conjunto, personas chilenas y el conjunto de llegada los RUN (Rol Único Nacional). Esto quiere decir, que cada persona tiene designado un número de RUN que es único para dicha persona, lo que no quita que existan más RUN que aún no son utilizados, pero toda persona tiene un RUN y dos personas chilenas no pueden tener el mismo RUN”* (ver figura 1).

Figura 1 – Diagrama referencial basado en lo propuesto por el Profesor B para la definición de función inyectiva



Fuente: Parra-Urrea (2021, p. 156)

Seguidamente, el Profesor B se refiere y define función sobreyectiva como: *"Dado dos conjuntos que llamaremos P y B, cada elemento del conjunto de partida P debe tener un elemento en el conjunto de llegada B al menos uno y todos los elementos del conjunto de llegada deben tener una preimagen en el conjunto de partida. En este caso es posible tener elementos del conjunto de partida con dos imágenes en el conjunto de llegada".*

Inmediatamente, el Profesor B plantea una situación para ejemplificar una función sobreyectiva y señala: *"Un ejemplo cotidiano serían los celulares y los números hay celulares a los que les corresponde un número telefónico. Sin embargo, existen celulares que pueden tener doble chip, por lo tanto, pueden tener asociado dos números; así un mismo celular puede tener asociado dos números telefónicos".*

Luego el Profesor B plantea a sus estudiantes: *"¿Recuerdan las funciones biyectivas?"* Un estudiante interviene: *"Profesor ¿Qué es una función?"* Ante la inquietud del estudiante, el Profesor B responde: *"Una función se define por ejemplo como $f(x) = x + 5$".* Luego señala: *"es un mecanismo que cuando un x entra en una función sale convertida dependiendo de la función que esté definida. Por ejemplo, si tenemos $f(x) = x^2$ entonces cuando entra un elemento a aplicado en la función queda $\mathrm{f}(a) = a^2$".*

Posteriormente, el Profesor B continúa con la idea de función biyectiva y explicita: *"se cumple cuando la función es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, ¿Cómo vamos a relacionar los elementos de dos conjuntos en una función biyectiva?"* (les consulta a los estudiantes). Dado que no hay respuestas por parte de los estudiantes, el Profesor B refuerza la noción de función inyectiva señalando: *"La función inyectiva es conocida como la función uno a uno, es decir, a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada y cada elemento del conjunto de llegada debe tener un solo elemento del conjunto de partida".*

Enseguida propone analizar una función y determinar cómo calcular la función inversa (objetivo de la clase). Para ello, señala: *"Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, para encontrar la función inversa de esta función f, realizaremos un proceso sencillo, recuerden que $f(x) = y$, entonces representaremos nuestra función como $y = \sqrt[3]{x-1}$, ahora cambiaremos los x por los y y los y por los x, es decir, obtendremos la siguiente expresión: $x = \sqrt[3]{y-1}$. Finalmente despejaremos y y obtendremos la función inversa".* Ante la interrogante de un estudiante: ¿Por qué se cambian las variables? El Profesor B responde: *"se cambian para encontrar la función* *inversa, como se trata de la función inversa y como su nombre lo indica vamos a asociar el conjunto de llegada como el conjunto de inicio y el de inicio como el conjunto de llegada, por eso cambiamos las variables para tener la función al revés".* Ante la actividad sugerida por el Profesor B, encontrar la función inversa $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, una estudiante obtiene como resultado $y = x^3 + 1$. Ante la respuesta de la estudiante el Profesor B afirma que la expresión $y = x^3 + 1$ representa la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Luego sugiere una estrategia para verificar si la función inversa encontrada es correcta. Antes de ello, plantea a sus estudiantes: *"¿Recuerdan composición de funciones?"* y señala: *"En la composición de funciones, f compuesta con g se representa como$f\big(g(x)\big)$, esto quiere decir, que una función está en relación de otra".* A modo de ejemplo plantea: Sea la función $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ y la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, luego $(f \circ g)(x)$ se calcula como:

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{\left(\frac{x+3}{x-2} - 1\right)}$$

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{x-2}\right)}$$

A partir de lo anterior, el Profesor B explicita: *"la función compuesta nos permite comprobar si la función inversa encontrada es correcta. Es decir, si calculamos $(f \circ f^{-1})(x)$ nos tiene que dar x, esto se conoce como la función identidad".* Un estudiante pregunta: ¿Para qué nos sirve todo esto? El Profesor B, responde: *"Es útil para contenidos que estudiaremos más adelante, quizás en la vida cotidiana no nos sirva de mucho, pero nos va a ayudar a comprender como funcionan algunas cosas".* Entonces, el Profesor B comprueba que la expresión $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, mediante el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$. Antes de continuar con el cálculo, el Profesor B hace una pausa para señalar que cometió un error en la actividad anterior (donde solicita calcular la función compuesta $(f \circ g)(x)$ entre f y g), y menciona que el procedimiento adecuado es reemplazar en la función g el $f(x)$: "*en donde aparezca las x de la función $g(x)$ reemplazamos la función $f(x)$*". Los estudiantes, dudosos, le comentan: Profesor, en otras oportunidades la estrategia que hemos usado para calcular una función compuesta es la que explicó en el primer ejercicio. El Profesor B, ante los comentarios de los estudiantes, persiste en que la segunda estrategia para el cálculo de la función compuesta es la apropiada, y continúa con el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$ utilizando la siguiente estrategia: "Si $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ y $f^{-1}(x) = x^3 + 1$, entonces:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right)$$

Luego

$$f(x^3+1) = \left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^3 + 1$$

$$f(x^3+1) = (x-1) + 1$$

$$f(x^3+1) = x$$

Por lo tanto,

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Con lo anterior, el Profesor B concluye que la función $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$". Antes de finalizar la clase, el Profesor B propone algunos ejercicios en los que solicita calcular la función inversa y comprobar que la solución es correcta, y da por terminada la clase.

3.2 Análisis y reflexión de la faceta epistémica: Práctica desarrollada por el Profesor B

A continuación, se analiza y valora la implementación de una clase sobre función inversa realizada por el Profesor B, en contexto de microenseñanza. Para ello, utilizamos nuestra propuesta de componentes y descriptores de idoneidad epistémica descritos en la tabla 1.

De acuerdo con Godino et al., (2013), los procesos instruccionales tienen mayor idoneidad epistémica en la medida que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan adecuadamente al significado holístico de referencia. El Profesor B en el desarrollo de su clase sobre función inversa, solo promueve la resolución de situaciones-problemas para reforzar conocimientos previos (e.g. función inyectiva, función sobreyectiva) y problemas en contextos puramente matemáticos, para explicar función inversa y composición de funciones. Durante la instrucción matemática, no se perciben *situaciones/problemas* que permitan movilizar los distintos significados asociados a la noción de función (PARRA-URREA, 2015), tampoco tareas matemáticas contextualizadas a la vida cotidiana o a otras ciencias para potenciar el aprendizaje de dicho objeto matemático y el interés de los estudiantes por el estudio de las funciones.

En cuanto a los *procedimientos* que utiliza el Profesor B para resolver las actividades o problemas matemáticos que propone, solo se identifican tareas 'clásicas' que requieren procedimientos algorítmicos y mecánicos. Esto se verifica cuando el Profesor B explica cómo determinar la inversa de una función dada y cómo calcular la composición de funciones. Cabe destacar que algunas de las técnicas y notaciones de resolución son erróneas, lo que se constata cuando el Profesor B desarrolla la composición de funciones $(f \circ f^{-1})(x)$ pero en realidad calcula $(f^{-1} \circ f)(x)$. Como obtiene la respuesta esperada (función identidad), el profesor no reflexiona in situ sobre su estrategia de resolución, aun cuando los estudiantes manifiestan inquietud y duda respecto del procedimiento sugerido.

En relación con el uso de *lenguajes*, el Profesor B no recurre a las diversas representaciones (tabular, gráfica, verbal) asociadas a la noción de función inversa. De manera muy sucinta utiliza representaciones algebraicas y en menor medida icónicas, como cuando el Profesor B emplea diagramas de conjuntos para explicar, por ejemplo, la relación de correspondencia entre personas chilenas y número de RUN. De este modo, se constata que el trabajo con funciones se limita al uso de representaciones algebraicas predominando la asociación función-fórmula. Según Artigue (1995), estos criterios conducen a rechazar relaciones funcionales y a admitir objetos no funcionales. Además, el uso limitado de representaciones no permite realizar conversiones entre registros de representación dejando de lado una de las actividades cognitivas fundamentales para lograr una correcta comprensión de la noción de función. Duval (2006), establece que el dominio de las diversos registros y las respectivas conversiones asociadas son el factor decisivo para el aprendizaje.

En el desarrollo de la clase no se perciben *justificaciones o argumentaciones* matemáticamente formales que respalden las heurísticas empleadas. Sin embargo, se valora la intención del Profesor B para dar respuesta a la pregunta ¿Por qué se cambian las variables? (intercambio de variables en el procedimiento para determinar la inversa de una función) ya que declara que los conjuntos de partida y llegada se intercambian, pero no explica el motivo de intercambio de variables. Se infiere que el Profesor B busca una relación (función inversa) donde x cumpla el rol de variable independiente e y de variable dependiente siendo esto una práctica usual en el estudio de funciones.

Por otro lado, el Profesor B no vincula la función inversa con objetos matemáticos de niveles anteriores o superiores y mayoritariamente propone tareas matemáticas usuales, en contextos intra-matemáticos, que requieren para su resolución procedimientos estándar (mecánicos y algorítmicos). Es fundamental que los profesores conozcan las características de las unidades didácticas formalistas (configuraciones epistémicas conjuntistas) específicas para funciones y no se restrinjan a hallar y conocer unidades didácticas inspiradas en instrumentalismo y procesos mecánicos. Estas unidades didácticas, refieren a una presentación descontextualizada de los conceptos y reglas matemáticas en tanto que los objetos matemáticos se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo (FONT et al., 2017).

En el desarrollo de la clase, se verifica que la *definición* sobre función inyectiva proporcionada por el Profesor B se aproxima a la definición formal del objeto matemático. Sin embargo, carece de rigurosidad, precisión y formalidad matemática (GONZÁLEZ, 2004). En cuanto a la noción de función sobreyectiva, se perciben inconsistencias y errores en la definición que propone el Profesor B. En la enunciación que plantea se observan tres ideas principales:

1) Dado dos conjuntos que llamaremos P y B, cada elemento del conjunto de partida P debe tener un elemento en el conjunto de llegada B al menos uno.
2) Todos los elementos del conjunto de llegada deben tener una preimagen en el conjunto de partida.
3) En este caso es posible tener elementos del conjunto de partida con dos imágenes en el conjunto de llegada.

La definición descrita por el Profesor B difiere significativamente de la definición matemáticamente formal (GONZÁLEZ, 2004). Se observa que la afirmación 2), dada por el Profesor B cuando define función sobreyectiva, corresponde a una adecuada idea de sobreyectividad. Sin embargo, en la afirmación 1) deja abierta la posibilidad de que la relación que se estudie no sea una función, mientras que en la afirmación 3) abiertamente permite una relación no funcional.

Durante el desarrollo de la clase, el Profesor B no define formalmente la noción de función inversa, aun cuando el objetivo de la clase era “reconocer y comprender la función inversa”. Ante la pregunta de un estudiante sobre ¿Qué es una función? el Profesor B no considera la arbitrariedad, existencia y univalencia como características claves de la noción de función. Otro aspecto relevante, es que durante el proceso de instrucción el profesor no se refiere al dominio y codominio de las relaciones que presenta, de este modo se asume que no percibe dichas nociones elementos inherentes a la definición de función.

En síntesis, de acuerdo con las situaciones-problemas, definiciones, representaciones, procedimientos y argumentos propuestos por el Profesor B, podemos señalar que el significado de la noción de función implementado no es representativo del significado holístico de referencia, pues el Profesor B se basa fundamentalmente en la acepción de función como expresión analítica, mientras que a partir de los ejemplos y definiciones que propone se percibe cierto acercamiento, aunque de manera poco consciente, al significado de función como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos.

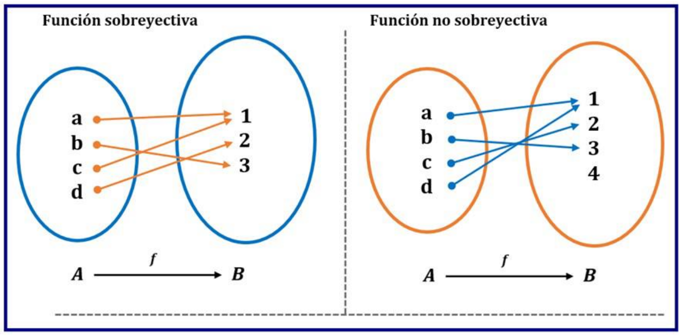
3.3 Dimensión Meta Didáctico-Matemática

En el episodio de microenseñanza sobre función inversa, se llevó a cabo una actividad de retroalimentación entre el formador de profesores y los futuros profesores. Se trató de un espacio reflexivo, posterior al desarrollo de la clase, en que también utilizamos nuestra propuesta de componentes y descriptores de idoneidad epistémica para la enseñanza de funciones. En este espacio se plantearon preguntas, comentarios, orientaciones y sugerencias que llevaron a precisar ciertas nociones y elementos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre función inversa. Asimismo, se analizó la videograbación para generar espacios de autobservación y autorreflexión de la labor ejercida por el Profesor B.

En esta instancia de retroalimentación, el Profesor B identifica aspectos que debe mejorar y corrige algunas de las definiciones que erradamente propone (e.g., la definición de función sobreyectiva). Sin embargo, no sugiere acciones inmediatas para enunciar con precisión procedimientos y definiciones introducidas en clases (e.g., definición de función, procedimiento para calcular composición de funciones, etc.). Al respecto se propició la siguiente discusión entre formador y profesores en formación.

> *Formador:* Si tuviese que volver a definir función sobreyectiva ¿Cuál sería la definición que proporcionaría?
> *Profesor B:* Mmm [...] cuando los elementos del conjunto de partida. Mmm [...] no, cuando los elementos del conjunto de llegada tienen un elemento en el conjunto de partida, es decir, un elemento como mínimo.
> *Estudiante 4:* Yo creo que lo mejor es explicar este tipo de funciones con diagramas, al menos eso haría yo. (El estudiante 4 dibuja en la pizarra dos diagramas como el que se presenta en la figura 2)

Figura 2 – Diagramas propuestos por el estudiante 4 (imagen adaptada)



Fuente: Parra-Urrea (2021, p.173)

Cabe destacar que, los diagramas propuestos por el estudiante 4, son similares a los que presenta González (2004) para ejemplificar funciones que son o no sobreyectivas. De este modo, el formador logra vincular las acepciones de los profesores en formación con la definición formal de función sobreyectiva. Otro de los aspectos sobre los que se reflexionó fue la conceptualización de la noción general de función, donde el Profesor B muestra no conocer con profundidad las matemáticas que debe enseñar (e.g., los diversos significados de la función, los objetos matemáticos primarios y secundarios vinculados a dicho objeto matemático, etc.), menos aún evidencia dominio de alguna herramienta que le permita proponer acciones para favorecer, desarrollar y evaluar la competencia matemática de sus estudiantes sobre la noción de función inversa. A partir de lo anterior, el formador refuerza los significados parciales de la noción de función y ejemplifica situaciones para ilustrar cada una de las acepciones de funciones (SIERPINSKA, 1992; BIEHLER, 2005; PINO-FAN; PARRA-URREA; CASTRO, 2019). El Profesor B aun cuando emplea parcialmente algunos de los significados de función (e.g., función como correspondencia, función como expresión analítica) y utiliza algunos elementos de la teoría de conjuntos, reconoce la importancia de abordar la función como representación gráfica y cree esencial emplear situaciones-problemas que refuercen el significado de función como relación entre magnitudes variables. Además, luego de la discusión, comprende y es consciente del significado de función como correspondencia arbitraria mediante la situación-problema que él mismo propone (relación entre personas chilenas y número de RUN). Luego del proceso de reflexión, el Profesor B considera pertinente enfatizar los conceptos claves de la noción de función (arbitrariedad, existencia y univalencia) y vincular dicho objeto matemático con situaciones de la vida cotidiana para captar la atención de los estudiantes y motivar el aprendizaje.

4. Conclusiones

En este estudio se evidencia cómo las orientaciones teóricas del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) y las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) proporcionan dimensiones/categorías y subcategorías del conocimiento del profesor que nos permiten caracterizar y analizar los conocimientos de profesores de matemática. A partir de lo anterior, nos propusimos responder la pregunta ¿Qué componentes e indicadores representan un recurso orientador para alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones? Para ello, diseñamos una herramienta teórico-metodológica (descrita en la tabla 1) que considera las recomendaciones de la literatura científica en torno a las dificultades que se suscitan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones y las orientaciones relativas al conocimiento requerido por los profesores para la enseñanza de funciones. Asimismo, nos interesamos por responder ¿Cómo sistematizar y orientar la reflexión de la práctica docente que ejercen los futuros profesores cuando afrontan la enseñanza de funciones? En este sentido, ilustramos el uso de los criterios de idoneidad epistémica específicos para la enseñanza y aprendizaje de las funciones en un contexto de microenseñanza sobre función inversa. Como resultado del análisis se evidencia que el profesor en formación (Profesor B) posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido, principalmente porque no logra dar respuestas adecuadas a más de una tarea que él mismo propone. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados, por lo tanto, no se percibe el dominio del conocimiento ampliado. De este modo, se constata que el grado de conocimiento manifestado por el Profesor B carece de aspectos relevantes sobre la matemática que debe enseñar. De acuerdo con Steele, Hillen, y Smith (2013), para fomentar en los estudiantes una comprensión conceptual rica de la noción de función, el profesor debe poseer un conocimiento profundo del contenido que le permita tomar decisiones sobre qué enseñar y cómo hacerlo.

En el desarrollo de la clase, el Profesor B proporciona definiciones poco precisas y ambiguas, además de no referirse a tres rasgos esenciales de la noción de función: arbitrariedad, existencia y univalencia, lo que es coherente con lo planteado por Even (1993). Si bien el Profesor B presenta actividades (e.g., relación entre el número de RUN y personas chilenas) que podrían promover uno de los significados parciales de la noción de función -función como correspondencia arbitraria- no es consciente de los beneficios que tiene para el aprendizaje el uso de dicho significado. Otro aspecto importante del conocimiento de los profesores es la capacidad de utilizar diversas representaciones (COONEY; BECKMANN; LLOYDET, 2011). En el caso de la clase desarrollada por el Profesor B se privilegia las representaciones simbólicas y en menor medida las representaciones icónicas. De acuerdo con Steele, Hillen, y Smith (2013), una clase que explora dominios y rangos de funciones compuestas podría beneficiarse mediante el empleo de diagramas de conjuntos. Para lograr una comprensión sólida de la noción de función en los estudiantes, el profesor debe poseer un amplio conocimiento de sus representaciones y debe promover actividades que permitan moverse con flexibilidad entre ellas (NITSCH et al., 2015). En relación con las situaciones problemas, tal como se ha descrito anteriormente, el Profesor B presenta mayoritariamente problemas para ejemplificar las definiciones que introduce y problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje de las funciones. De acuerdo con Tassara, Detzel y Ruiz (2004) “se debe considerar para la enseñanza de funciones situaciones-problemas en que las funciones sirven de modelo para el estudio del comportamiento de un fenómeno y aquellas en las que las funciones permitan expresar la dependencia entre las variables” (p.40).

Finalmente, respecto al proceso de retroalimentación, posterior al desarrollo de la clase y orientado por los criterios de idoneidad descritos en la tabla 1, se constata que los futuros profesores (Profesor B y quienes actuaron en el rol de estudiantes) logran reflexionar sobre los elementos que constituyen la faceta epistémica (situaciones problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, argumentos, errores, ambigüedades y creencias). Es decir, identifican errores e imprecisiones conceptuales e intentan, a partir de la discusión, precisar dichas definiciones y procedimientos. Además, con ayuda del profesor formador, se abordan los significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia de las funciones. Esto con el propósito de ampliar el conocimiento de los futuros profesores. Otro de los aspectos sobre los que se reflexionó, fue el tipo de situaciones problemas y la importancia de promover actividades que sean del interés para los estudiantes. Asimismo, se analizaron las distintas representaciones asociadas a la noción de función y se trabajó en el planteamiento de situaciones que ejemplificaran cada representación.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

AMAYA, T.; CASTELLANOS, A.; PINO-FAN, L. Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 2, p. 1-15, julio 2021. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

ARTIGUE, M. **La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos**. En: GÓMEZ, P. (ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 97-140.

BALL, D. L. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 51, p. 241-247, may 2000. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

BENTON-KUPPER, J. The Microteaching Experience: Student Perspectives. **Education**, [s.l], v. 121, n. 4, p. 830–835, june 2001.

BIEHLER, R. **Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. In Meaning in Mathematics Education.** In**:** KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. (eds.). Meaning in Mathematics Education. New York: Mathematics Education Library Springer, 2005. p. 61-81.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,** London, v. 13, n. 6, p. 1893-1918, june 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

COONEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. **Developing essential understandings of functions for teaching mathematics in grades 9-12**. Reston, VA: NCTM, 2011.

CRESWELL, J.W. **Research design. Qualitative, quantitative, and mixed method approaches**. United Kingdon; Publisher: Sage Publications, 2009.

DEULOFEU, J. Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación**.** En: **X JAEM**. Valencia, 2001.

DONNELLY, R.; FITZMAURICE, M. Towards productive reflective practice in microteaching. **Innovations in Education and Teaching International**, [s.l], v. 48, n. 3, p. 335–346, august 2011. DOI: https://doi.org/10.1080/14703297.2011.593709

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learnig of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, p. 103-131, february 2006.

ERÖKTEN, S.; DURKAN, N. Özel ögretim yöntemleri II dersinde mikro ögretim uygumalamari. In: **The First International Congress of Educational Research**. Canakkale, 2009.

EVEN, R. Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 24, n. 2, p. 94–116, march 1993. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.24.2.0094

FONT, V.; SALA, G.; BREDA, A.; SECKEL, M. Aspectos históricos presentes en las propuestas de innovación de profesores de básica de matemáticas. **Revista Brasileira de Ensino de Ciencia e Tecnologia**, Curitiba, p. 10, n. 3, p. 16-42, diciembre 2017. DOI: https://doi.org/10.3895/rbect.v10n3.7752

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n.1, p. 37–42, march 2019.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 46-74, julio 2013. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

GODINO, J.; WILHELMI, M.; BENCOMO, D. Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. En: **Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería**. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2006.

GONZÁLEZ, J. **Apunte de matemática discreta**. Cádiz España; Departamento de Matemática, Universidad de Cádiz, 2004.

GROSSMAN, P.; MCDONALD, M. Back to the Future: Directions for Research in Teaching and Teacher Education. **American Educational Research Journal**, Washington, v. 45, n. 1, p. 184–205, march 2008. DOI: https://doi.org/10.3102/0002831207312906

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston v. 39, n. 4, p. 372-400, july 2008.

HÖPPNER, C.; DOTZLER, C.; KÖRNDLE, H.; NARCISS, S. **Training mit Microteaching zur Entwicklung und zum Einsatz formativer Feedbackstrategien in Lehr-Lernsituationen**. In: UHDE G.; THIES, B. (eds.). Kompetenzentwicklung im Lehramtsstudium durch professionelles Training. Braunschweig: Technische Universität Braunschweig, 2019. p. 23-35. DOI: https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201901231138-0

KARTAL, T.; OZTURK, N., EKICI, G. Developing pedagogical content knowledge in preservice science teachers through microteaching lesson study. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, [s.l], v. 46, p. 2753 – 2758, december 2012.

KONTOROVICH, I. Students confusions with reciprocal and inverse functions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 48, n. 2, p. 278-284, february 2017.

MAKONYE, J. P. Teaching Functions Using a Realistic Mathematics Education Approach: A Theoretical Perspective. **International Journal of Educational Sciences**, Gurugram, v. 7, n. 3, p. 653–662, november 2014. DOI: https://doi.org/10.1080/09751122.2014.11890228

NITSCH, R.; FREDEBOHM, A.; BRUDER, R.; KELAVA, A.; NACCARELLA, D.; LEUDERS, T.; WIRTZ, M. Students competencies in working with functions in secondary mathematics education—empirical examination of a competence structure model. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 13, n. 3, p. 657–682, june 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-013-9496-7

NORMAN, A. **Teachers mathematical knowledge of the concept of function**. In: HAREL, G., DUBINSKY, E. (eds.). The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Publisher: Mathematical Association of America, 1992. p. 215-232.

NYIKAHADZOYI, M.R. Teachers' knowledge of the concept of a function: a theoretical framework. **International Journal of Science and Mathematics Education,** Taiwan, v. 13, n. S2, p. 261–283, may 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-013-9486-9

PANAOURA, A.; MICHAEL-CHRYSANTHOU, P.; GAGATSIS, A.; ELIA, I.; PHILIPPOU, A. A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 4, p. 723-740, april 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-016-9714-1

PAOLETTI, T. Reasoning about relationships between quantities to reorganize inverse function meanings: The case of Arya. **The Journal of Mathematics Behavior**, [s.l], v. 57, p. 100741, march 2020.

PARRA-URREA, Y.; PINO-FAN, L. Proposal to Systematize the Reflection and Assessment of the Teacher's Practice on the Teaching of Functions. **Mathematics**, Basilea, v. 10, n. 18, p. 3330, august 2022. DOI: https://doi.org/10.3390/math10183330

PARRA-URREA, Y. **Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de enseñanza media sobre la noción de función: una experiencia en contextos de microenseñanza.** Tesis (Doctoral). Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile, 2021.

PARRA-URREA, Y. **Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función**. 2015. Tesis de (Magíster). Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile, 2015.

PINO-FAN, L.; PARRA-URREA, Y.; CASTRO, W.F. Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. **Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación,** Bogotá**,** v. 11, n. 23, p. 201–220, enero 2019. DOI: https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

PINO-FAN, L.; GODINO, J.D.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivate. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam, v. 21, n. 1, p. 63-94, february 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

PINO-FAN, L.; ASSIS, A.; CASTRO, W.F. Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Techonology Education,** London, v. 11, n. 6, p. 1429–1456, september 2015. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, marzo 2015.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, abril 2015. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

PINO-FAN, L. **Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada**. Granada: Universidad de Granada, 2014.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. **Towards a theory of profiency in teaching mathematics**. In: TIROSH, D.; WOOD, T. L. (eds.). Tools and processes in mathematics teacher education. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 321-354.

SEIDEL, T.; STÜRMER, K.; SCHÄFER, S.; JAHN, G. How Preservice Teachers Perform in Teaching Events Regarding Generic Teaching and Learning Components. **Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie**, Göttingen, v. 47, p. 84-96, april 2015. DOI: https://doi.org/10.1026/0049-8637/a000125.

SIERPINSKA, A. **Understanding the Notion of Function. In y**. In: HAREL, A.; DUBINSKY, E. (eds.). **The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagog.** USA: Publisher: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

SINTEMA, E. J.; MARBAN, J. M. Preservice Teachers' Knowledge of Identifying and Clearing Pupils' Misconceptions about Inverse and Composite Functions via Vignettes. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 17, n. 1, january 2021. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/9378

STEELE, M. D.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam, v. 16, n. 6, p. 451–482, june 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-013-9243-6

TASSARA, A.; DETZEL, P.; RUIZ, M. El sentido de las funciones en la enseñanza. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 19, n. 2, p. 30–41, julio 2004.

WANG, Y.; BARMBY, P.; BOLDEN, D. Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 1, p. 131–153, january 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x

Autores

Yocelyn Parra Urrea

Profesora de Educación Media en Matemática, Universidad del Bío-Bío, Chile.

Doctora en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos, Chile.

Académica Facultad de Educación, Universidad San Sebastián, Chile.

E-mail: Yocelyn.parra@uss.cl

https://orcid.org/0000-0002-1880-5945

Luis Roberto Pino-Fan
Doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
Académico e Investigador, Universidad de Los Lagos, Chile.
E-mail: luis.pino@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408

Carlos Gallegos Lastra
Profesor de Educación Media en Matemática, Universidad del Bío-Bío, Chile.
Magíster en Cs. en la especialidad de Matemática, Universidad de Santiago de Chile, Chile.
Académico Universidad de Santiago de Chile, Chile.
E-mail: carlos.gallegos@usach.cl
https://orcid.org/0009-0001-7230-2513

Como citar o artigo:

PARRA-UREA, Y.; PINO-FAN, L.; GALLEGOS, C. L. Criterios de idoneidad epistémica para la enseñanza de las funciones: el caso de la función inversa en contexto de microenseñanza. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos;** junio de 2023 /427 - 452. DOI: 10.37618