

Análisis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre clasificación de poliedros con futuros maestros de educación primaria

Juan Pablo Vargas Herrera

jvargahe9@alumnes.ub.edu

<https://orcid.org/0000-0001-5127-4931>

Universitat de Barcelona

Barcelona, España.

Yuly Vanegas

yuly.vanegas@udl.cat

<https://orcid.org/0000-0002-8365-1460>

Universitat de Lleida

Lleida, España.

Joaquín Giménez

quimgimenez@ub.edu

<https://orcid.org/0000-0003-4609-1596>

Universitat de Barcelona

Barcelona, España.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

En el contexto de la Educación Matemática, se reconoce que el conocimiento estrictamente matemático no es suficiente para la enseñanza de las matemáticas. Diversas investigaciones se han orientado a caracterizar el conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores y en educación secundaria. Sin embargo, en el contexto de la formación de futuros docentes de educación primaria se encuentra en un menor nivel de exploración. El objetivo de este artículo es describir los conocimientos didáctico-matemáticos sobre la clasificación de poliedros de un grupo de futuros maestros de educación primaria. Se presenta una investigación de carácter mixto. Se usan herramientas del enfoque Onto-semiótico para analizar las respuestas de los participantes a una tarea profesional que involucra el uso de material manipulativo. Se encuentra que los futuros maestros identifican y construyen figuras prototípicas. Sus criterios de clasificación están orientados por elementos perceptivos como la forma, el tamaño y el color; algunos realizan clasificaciones dicotómicas (regulares-irregulares), asignando en ocasiones la categoría de forma equivocada y en algún caso se alude a la simetría como elemento a considerar en una clasificación. Se identifica en el conocimiento de los futuros maestros, errores típicos del aprendizaje de la geometría como el uso de estructuras de 2D para referir a objetos en 3D, así como la denominación incorrecta de figuras geométricas y sólidos. Se propone una discusión en torno a los planteamientos de los programas de formación inicial sobre la educación geométrica de los futuros maestros.

Palabras clave: Clasificación. Educación Primaria. Formación de maestros. Poliedros. Tipos de conocimiento.

Análise dos conhecimentos didático-matemáticos sobre a classificação dos poliedros de futuros professores do ensino primário.

Resumo

No contexto da Educação Matemática, reconhece-se que o conhecimento estritamente matemático não é suficiente para o ensino da matemática. Várias pesquisas têm sido orientadas para a caracterização dos conhecimentos didático-matemáticos necessários para ensino da matemática, tanto no ensino superior, como no secundário. No entanto, no contexto da formação de futuros professores do ensino primário, dita caracterização encontra-se a um nível baixo de exploração. O objetivo deste artigo é descrever os conhecimentos didático-matemáticos sobre a classificação dos poliedros realizado por um grupo de futuros professores de escolas primárias. É apresentada uma investigação mista. Ferramentas da Abordagem Ontossemiótica são utilizadas para analisar as respostas dos participantes sobre uma tarefa profissional. Verifica-se que os futuros professores identificam e constroem figuras prototípicas. Os seus critérios de classificação são guiados por elementos perceptuais tais como forma, tamanho e cor; alguns fazem classificações dicotômicas (regular-irregulares), atribuindo, por vezes, a categoria de forma incorreta, e em alguns outros casos a simetria é aludida como um elemento a ser considerado no processo de classificação. No conhecimento dos futuros professores, são identificados erros típicos da aprendizagem da geometria, tais como a utilização de estruturas 2D para se referir a objetos 3D, bem como a designação incorreta de figuras geométricas e sólidos em geral. É proposta uma discussão sobre as implicações dos programas de formação e a sua responsabilidade na formação geométrica dos futuros professores.

Palavras-chave: Classificação. Ensino básico. Formação de docentes. Poliedros. Tipos de conhecimentos.

Analysis of didactic-mathematical knowledge on classification of polyhedral in prospective elementary school teachers.

Abstract

In the context of mathematics education, it is recognized that strictly mathematical knowledge is insufficient for teaching mathematics. Several investigations have been oriented to characterize the mathematical didactic knowledge necessary for teaching mathematics at higher and secondary education levels. However, in the context of training prospective elementary school teachers, it is at a lower level of exploration. This article aims to describe the didactic-mathematical knowledge about the classification of a polyhedron in a group of prospective elementary school teachers. Research on mixed characters is presented. Tools of the Onto-semiotic approach are used to analyze participants' responses to a professional task. It is found that future teachers identify and construct prototypical figures. Their classification criteria are oriented by perceptual elements such as shape, size and color; some make dichotomous classifications (regular-irregular), sometimes assigning the wrong shape category and in some other cases symmetry is alluded to as an element to be considered in classification. The knowledge of prospective teachers identifies typical errors in the learning of geometry, such as the use of 2D structures to refer to 3D objects, as well as the incorrect naming of geometric figures and solids in general. A discussion is proposed on the implications of training programs and their responsibility in the geometric training of prospective teachers.

Keywords: Classification. Primary education. Polyhedron. Teachers' training. Types of knowledge,

Introducción

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas. Diversas investigaciones han identificado y definido componentes para caracterizar este tipo de conocimiento (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BESWICK; CHAPMAN, 2012; CARRILLO et al., 2017, entre otros). A partir de su esquematización se busca describir, analizar, aportar elementos y promover acciones para mejorar la práctica del profesor y el aprendizaje de los estudiantes.

Existen modelos tradicionales para el estudio de conocimientos requeridos en la enseñanza de las matemáticas los cuales, han generado diferentes líneas de análisis e investigación (SHULMAN, 1986,1987; FENNEMA; FRANKE, 1992; BALL, 2000). Actualmente, se cuenta con una variedad de modelos que complementan o sugieren elementos para este tipo de estudio, entre los que se analizan, por ejemplo, el impacto de ser aprendiz en su propio proceso de aprendizaje (LLINARES; KRAINER, 2006); las creencias y el afecto en el proceso de formación docente (PHILLIPP, 2007) y las relaciones entre las creencias y los conocimientos (SULLIVAN; WOOD, 2008). Otro modelo para el estudio de conocimientos ha sido desarrollado por Ball y su equipo (BALL, THAMES; PHELPS, 2008), en éste se definen seis subdominios del conocimiento, como una evolución de lo descrito por Shulman (1986) y se entiende el conocimiento especializado del profesor de matemáticas como aquel tipo de conocimiento que lo diferencia de la gente del común y, por tanto, le es necesario y, a su vez, le permite desarrollar su labor como profesor de matemáticas.

En esta misma línea, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática, propone el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas - CCDM (PINO-FAN; GODINO, 2015; GODINO et al., 2016). Desde el CCDM se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Así, el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático de los objetos no es suficiente para una práctica adecuada del profesor de matemáticas (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015).

En el CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer, por un lado, conocimientos sobre las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza y, por otra parte, conocimientos sobre elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el “conocimiento del contenido matemático per-se”. Éste se divide en dos tipos: conocimiento matemático común y extendido.

Ahora bien, al referir a los conocimientos del profesor que deben estar presentes para enseñar geometría, el panorama es bastante diverso. A pesar del convencimiento que los estudios sobre conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas son un asunto relevante y actual de la didáctica de las matemáticas, la investigación existente está centrada mayoritariamente en el profesorado de educación secundaria en formación o en servicio (GARCIA-GARCIA, 2019), y no así en el nivel inicial o de educación primaria. Adicionalmente, es un hecho ampliamente reconocido que la geometría de los sólidos se ha descuidado en muchos planes de estudios, y su enseñanza recibe poca atención en las aulas de educación primaria (BADIA; CANO, 2013; ESCRIVÁ; JAIME; GUTIÉRREZ, 2018, GUTIÉRREZ; JAIME, 2015, entre otros).

La mayor parte de las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría reportados a la fecha, se han orientado al estudio de formas, en ellos se analiza cómo estudiantes de diversas etapas identifican las propiedades que subyacen a dichas formas y si ello les sirve para clasificarlas (GUILLÉN, 2000; PATKIN, 2015). De acuerdo con Vinner, (1991) y Fujita, (2012) cuando los estudiantes deciden si un objeto pertenece o no a una determinada categoría, pueden dar respuestas sesgadas porque, en su decisión, se privilegian formas prototípicas o comunes. Por otra parte, usando el modelo de Van Hiele, varias investigaciones han reconocido que lo prototípico genera dificultades para pasar de un nivel a otro. Y ello se cumple tanto en el estudio de figuras de la geometría plana como en el de la geometría de los sólidos (ABD et al., 2017; CARREÑO; CLIMENT, 2010; entre otros).

Copley (2000) señala que muchos de los docentes introducen los conceptos geométricos en la clase con un enfoque en el que se privilegia la memorización de nombres y algunas características de las figuras. Adicionalmente, el trabajo geométrico desarrollado en la etapa de 6-12 años mayoritariamente se focaliza en el estudio de figuras planas y no tanto en figuras tridimensionales. En este sentido, Sinclair; Bruce (2015) señalan que pocas investigaciones se han centrado en el pensamiento geométrico de los niños en relación con este tipo figuras.

Dado el panorama actual, se considera que la relevancia de este estudio radica, por una parte, en que se profundiza un tema clave para el estudio de la geometría como lo es la clasificación de sólidos y la geometría 3D, objeto matemático y rama de la geometría que, además, no se aborda regularmente en las aulas de clase (GUILLÉN, 2000; VIEIRA; SANTOS, 2018; GUTIÉRREZ; JAIME, 2015; entre otros). Por otra parte, porque los estudios relativos a los conocimientos y competencias permiten nutrir los espacios y propuestas de formación en que están insertas las diferentes comunidades con las que se trabaja, como en este caso, el grupo de futuros maestros participantes de la investigación.

En esta línea, el presente estudio se plantea la pregunta de investigación ¿cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que evidencian futuros docentes respecto a la clasificación de sólidos geométricos? Se pretende que a partir de la caracterización de estos conocimientos, se diseñen propuestas para la formación docente en las que se consideren las necesidades y retos de las matemáticas escolares, particularmente de la educación geométrica. Para dar respuesta a dicha pregunta, el objetivo de este artículo es caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que evidencia un grupo de futuros maestros de educación primaria cuando abordan una tarea de construcción, análisis y clasificación de sólidos mediante el uso de material manipulativo. Para el logro de este objetivo, se consideran herramientas definidas en el modelo CCDM y se presenta un esquema general de los conocimientos de futuros maestros de primaria. Se plantea una discusión sobre la necesidad de ampliar dichos conocimientos y buscar estrategias para el avance de los programas de formación de profesores para los niveles iniciales.

1. Referentes Teóricos

Se abodarán en este apartado dos elementos fundamentales para la caracterización del conocimiento de futuros maestros. En primer lugar, aspectos referidos a la clasificación de sólidos como parte del conocimiento didáctico-matemático y, posteriormente elementos relativos al Enfoque Ontosemiótico (herramientas de análisis y antecedentes investigativos).

1.1. Aspectos relativos a la geometría de los sólidos

El proceso geométrico de clasificar puede ser entendido como ordenar o disponer por clases algo; se entiende en general, como el agrupamiento de elementos u objetos de acuerdo con la coincidencia que exista entre alguna de sus características, lo cual puede estar pre-establecido o bien, definido mediante la inspección y determinación de alguna particularidad.

Arnas; Aslam (2010) indican que explorar cómo los niños reconocen y clasifican formas geométricas y los criterios que ellos usan en la clasificación, es un elemento fundamental en la determinación del contenido de la educación matemática temprana. Clements et al. (1999) investigaron los criterios que usan los niños en edad preescolar para distinguir miembros de una clase de formas de otras figuras, evidenciando que la primera forma de clasificar es mediante el listado de características reconocibles de forma visual y que, mientras los esquemas se van desarrollando, los niños dependen principalmente de la correspondencia visual.

Por otra parte, Scaglia; Moriena (2005) enuncian que, en el proceso de clasificar figuras en clases establecidas, el uso de figuras prototípicas supone ciertas limitaciones al proceso. Tsamir; Tirosh; Levenson (2008) evidencian que los niños normalmente logran distinguir unas figuras geométricas mejor que otras cuando las agrupan con figuras prototípicas, pero tienen dificultades cuando se trabaja con ejemplos no usuales o al presentar contraejemplos.

Un modelo utilizado en la educación geométrica que brinda herramientas para entender los diferentes tipos de razonamiento es el modelo de Van Hiele. Este modelo explica cómo se produce el desarrollo y evolución del pensamiento geométrico en estudiantes y lo caracteriza utilizando cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales deben ser transitados por los estudiantes para el logro de cada aprendizaje nuevo. Diversas investigaciones han utilizado el modelo de Van Hiele en distintos contextos para el estudio de objetos geométricos y procesos (CONTRERAS; BLANCO, 2002; SCAGLIA; MORIENA, 2005; GUALDRÓN; GUTIÉRREZ, 2007, entre otros). En términos generales, actualmente se sabe que la mayoría de los estudiantes que trabajan en geometría están entre los niveles 0 y 1 (Visualización y de análisis), de igual forma, existe un amplio consenso en que la apariencia de las figuras y su representación gráfica es un criterio predominante a la hora de estudiar la geometría de las figuras y los sólidos, particularmente en lo concerniente a las definiciones y clasificación de estos.

Finalmente, y con el objetivo de aportar a la caracterización de los conocimientos de futuros profesores de matemáticas, se encuentra la idea de hipótesis de conexión y complejización, según Muñoz et al. (2013). Esta hipótesis consiste en una serie de relaciones entre unos y otros contenidos matemáticos que se desean enseñar. Por una parte aquellos que son base o sustento del proceso de construcción de conocimientos, y por otra, aquellos que se

corresponden con elementos más avanzados del nivel en que se da aquel proceso, es decir, de la progresión educativa que se desea alcanzar.

Según Muñoz et al. (2013) al trabajar con figuras planas en nivel de educación infantil, se identifican cinco etapas respecto a la clasificación: identificación, comparación, clasificación, elección y ordenación. desde esta investigación, se sabe que los alumnos en primaria tienen características propias de su edad como una mejor percepción, estructuras más analíticas y estudio de elementos más formales y abstractos. La idea de hipótesis de conexión y complejización, plantea una serie de recomendaciones para la formación de futuros maestros, como el conocimiento profundo de los objetos a enseñar, el uso de conexiones entre conceptos y el diseño de actividades que permitan descubrir elementos en geometría, como propiedades o relaciones entre figuras, etc.

1.2. Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor

En el marco del Enfoque Onto Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2007; GODINO; et al., 2017) se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas denominado modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas del profesor (CCDM) (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018; PINO-FAN; GODINO, 2015). En este modelo, los conocimientos del profesor de matemática se organizan considerando tres dimensiones: matemática, didáctica, y meta-didáctico-matemática. En el CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina el “conocimiento matemático per se”. La dimensión matemática refiere, por tanto, a dos tipos de conocimientos que debe tener un profesor de matemática: el conocimiento matemático común y conocimiento matemático extendido (PINO-FAN; GODINO, 2015). El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente se asocia al nivel en que se enseña. El segundo se refiere a que el docente, además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado, debe poseer conocimientos más avanzados, que hacen parte de niveles superiores.

Dado que se entiende que el conocimiento meramente matemático de los contenidos no es suficiente para la práctica docente (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015), se hace necesario que el profesor conozca, además, los diversos factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de tales contenidos matemáticos. En este sentido, la dimensión didáctica del modelo CCDM contempla seis facetas para este tipo de conocimiento (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018):

- Faceta epistémica: Referida al conocimiento especializado de la dimensión matemática. En el contexto de este estudio, referirá a los argumentos, estrategias de resolución de tareas/problemas, y de significados parciales que tienen los futuros maestros, respecto de los sólidos y su clasificación.
- Faceta cognitiva: Hace referencia al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Se tienen en cuenta aquellos elementos que el profesor prevé durante la planificación que resultarán en su posterior implementación, incluye posibles respuestas, dificultades o errores de los estudiantes al enfrentar las tareas/problemas propuestos.
- Faceta interaccional: Refiere al conocimiento sobre las interacciones que se dan en el aula, esto implica la preparación del docente para responder a interacciones de tipo profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-recursos y profesor-recursos-estudiantes.
- Faceta mediacional: Incluye el conocimiento de los recursos y medios que puedan mejorar el aprendizaje de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza. En este caso, el estudio que acá se presenta aborda el uso de material tangible (medios cubos) la riqueza de dicho material para el logro de las clasificaciones de los sólidos logrados por los futuros maestros sería un elemento de tipo mediacional.
- Faceta afectiva: En esta faceta se incluyen los conocimientos sobre aspectos afectivos, emocionales, y actitudinales de los estudiantes. Este tipo de conocimiento apunta a la idea de que el docente debe prever las sensaciones y experiencias de sus estudiantes ante una determinada actividad o tarea matemática.
- Faceta ecológica: Se refiere al conocimiento de otros aspectos que influyen en la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se incluyen conocimientos sobre el currículo, los contextos donde se desarrolla la actividad matemática, la sociedad y sus conexiones con la tarea matemática, problemas económicos y demás elementos tanto

intra como extra-matemáticos que aporten o influyan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La dimensión meta-didáctico-matemática del modelo CCDM contempla el conocimiento del profesor necesario para sistematizar la reflexión sobre su propia práctica, lo cual le permite ser capaz de valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos implementados, realizar juicios sobre estos procesos, y llevar a cabo propuestas de rediseño para su mejora en futuras implementaciones (PINO-FAN; CASTRO; FONT, 2022).

Dentro de la literatura en Didáctica de la Matemática se han reportado diversas investigaciones en donde se utiliza el modelo CCDM para estudiar los conocimientos y competencias de profesores de matemática en formación y en servicio, así como en diferentes contextos. Es así como en Gonzato; Godino; Neto (2011) se analizaron los conocimientos didáctico matemáticos que presentaba un grupo de profesores en formación sobre la visualización de objetos tridimensionales, a partir del análisis de diversas investigaciones, contenidos en libros de texto y revisión de varios currículos escolares; se construyen categorías para tareas sobre visualización de objetos tridimensionales y se diseña un cuestionario que permite la detección de dichos conocimientos en alumnos en formación. Por otra parte, en Cruz; Gea; Giacomone (2017) se presenta el diseño de criterios de idoneidad didáctica para lograr caracterizar el conocimiento matemático-didáctico sobre la geometría espacial que se dan en los primeros años escolares.

En Godino et al. (2018) se trabaja con profesores en formación y se analiza su competencia de análisis e intervención didáctica, en esta ocasión se aborda una actividad orientada al desarrollo de dicha competencia mediante la explicación y valoración de conocimientos puestos en juego en una clase grabada, en la cual un profesor enseña la semejanza de triángulos a un grupo de estudiantes de secundaria.

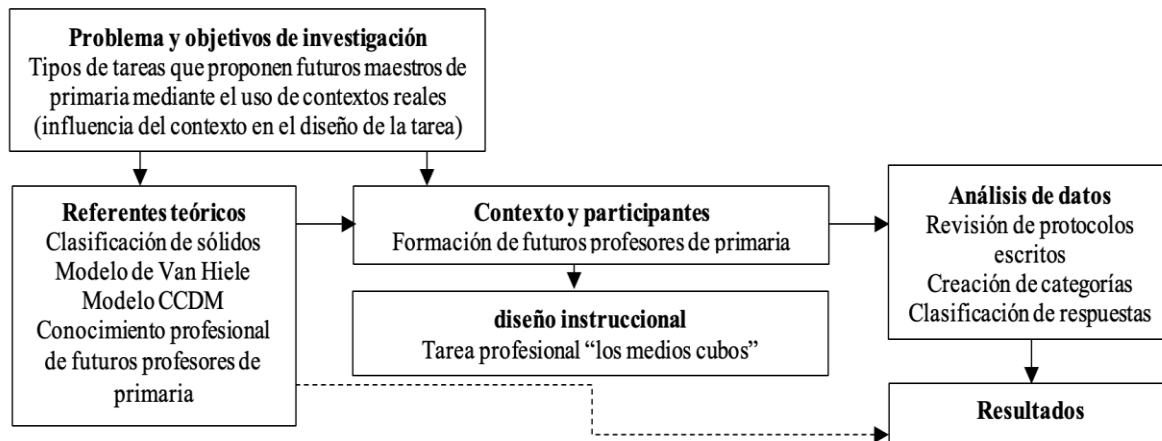
Tomando en cuenta la amplitud de temas que abordan los estudios realizados con el modelo CCDM, resulta interesante profundizar en los conocimientos y competencias de futuros maestros de educación primaria, abordando un tema que, hasta el momento, no ha sido estudiado con este constructo teórico, como es el caso de la clasificación.

2. Metodología

La presente investigación, es una investigación basada en el diseño (KELLY; LESH; BAEK, 2008). Se analiza el aprendizaje en contexto a través del diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza. En el esquema

presentado en la Figura 1, se muestran las etapas seguidas en la implementación de una tarea profesional en torno a la idea de clasificación de sólidos y el análisis posterior de las respuestas dadas por un grupo de estudiantes del grado de educación primaria.

Figura 1 – Estructura general de la investigación, basado en Molina et al. (2011).



Fuente: Elaborado por los autores.

2.1. Contexto y participantes

La tarea profesional fue implementada en el grado de educación primaria, participaron 148 estudiantes organizados en 32 grupos (de 3, 4 o 5 personas). Los participantes cursaban el segundo año de su programa. La asignatura en la cual se llevó a cabo la implementación se denomina “Espacio y forma”. Esta asignatura es la única relativa a geometría y su didáctica dentro de su programa de formación, por lo que los conocimientos previos de los futuros maestros son únicamente los que poseen de su formación en la educación básica y media.

Los datos de la investigación son las producciones escritas de los diferentes grupos a la tarea profesional. Se recolectan y sistematizan un total de 32 protocolos escritos a través de la plataforma Moodle. El desarrollo de la tarea profesional se realizó en modalidad online, el trabajo fue sincrónico con la profesora. Se hace una primera entrega preliminar (la cual no tuvo retroalimentación) y días después la entrega final, posterior a lo cual se realiza el análisis de la tarea en conjunto y los futuros maestros reciben la retroalimentación y correcciones de sus entregas. Cabe mencionar que en los protocolos se requerían fotografías de las construcciones solicitadas, así como dibujos o representaciones con softwares graficadores.

2.2. Diseño instruccional

El diseño instruccional de esta investigación consistió en una tarea profesional (compuesta por cuatro actividades) diseñada por una de las autoras de este artículo, quien también realizó la implementación de la misma. Para su desarrollo, se solicitó a los futuros maestros elaborar físicamente y haciendo uso de cartulina, cuatro medios cubos, (sólido resultante al realizar un corte diagonal a un cubo, ver Figura 2); las producciones obtenidas con los materiales se constituían en elementos clave para la solución de toda la tarea profesional, por lo que luego de realizar alguna de las actividades, debían hacer un registro fotográfico de las construcciones obtenidas.

Figura 2 – Medio Cubo



Fuente: Elaborado por los autores

En la primera actividad, se solicitaba definir un medio cubo; posteriormente los futuros maestros debían construir sólidos mediante diferentes composiciones utilizando dos medios cubos y luego tres medios cubos. Se solicitó, además, asignar un nombre a cada uno de los sólidos construidos. En la segunda actividad se debían construir sólidos usando cuatro medios cubos, asignar un nombre a cada uno y detallar sus características. También se debía proponer una clasificación de los sólidos obtenidos y enunciar los criterios de clasificación considerados. En la tercera actividad se pregunta qué sólidos no es posible construir con los cuatro medios cubos y se solicita una definición de poliedro y una posible clasificación de los diferentes poliedros existentes. Finalmente, en la última actividad se pide buscar y añadir la imagen de edificios y/o construcciones arquitectónicas en las que se puedan identificar poliedros. Se solicita que se describan sus elementos y que se justifique el porqué de la elección. Dada la extensión de este artículo y los objetivos propuestos, se analizan tres preguntas (ver Cuadro 1) de la segunda actividad.

2.3. Análisis de datos

Para responder al objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que evidencia el grupo de futuros maestros se utilizaron herramientas de análisis del modelo CCDM. Se asume como plantean Pino-Fan; Godino (2015) que la dimensión matemática refiere a dos

tipos de conocimientos. Así, en este estudio se identifican aspectos del conocimiento común del contenido relacionados con los sólidos, sus definiciones y su clasificación. Inicialmente, se utilizó la pregunta 1 (ver Cuadro 1), que indaga sobre los poliedros que pueden construirse con los cuatro medios cubos, así como la denominación y caracterización que realizaron los futuros maestros. Se revisaron y clasificaron los nombres asignados a cada sólido.

Cuadro 1 – Preguntas, tipo de conocimiento e intencionalidad

Nº	Pregunta	Tipo de Conocimiento	Intencionalidad
1	Construye todos los poliedros que se pueden formar con cuatro piezas (medios cubos). Haz una tabla donde presentes su representación gráfica, su nombre y sus características.	Común	Obtener figuras a través de la composición. Identificar variedad de figuras Conocer lenguaje específico para describir figuras
2	Define criterios y clasifica las figuras que has obtenido en el apartado b. Explica que has tenido en cuenta para definir los criterios	Extendido	Generar categorías a partir de características de diferentes figuras.
3	¿Por qué consideras que cuando estudiamos varios tipos de figuras un proceso fundamental a trabajar es la clasificación?	Conocimiento Extendido y Meta-Didáctico	Promover actitud de Indagación. Reconocer las intenciones y motivaciones de una tarea de clasificación.

Fuente: Elaborada por los autores

Posteriormente, se identificaron aquellos conocimientos propuestos en el currículo y/o los libros de texto en educación primaria (por ejemplo, en un curso de geometría a nivel escolar y las conexiones entre los sólidos geométricos y la construcción de edificios en la actualidad). Se identificaron definiciones, propiedades y características que listaron los futuros maestros, se realizan agrupaciones y se definen unas categorías emergentes.

Para identificar aspectos del conocimiento ampliado del contenido, se analizan las respuestas dadas a la pregunta 2 (ver Cuadro 1) por los futuros maestros. Cabe mencionar que este tipo de conocimiento es aquel que deberían tener los futuros maestros, sobre los objetos matemáticos, de modo que, además de permitir su enseñanza en un momento puntual (como los sólidos en un curso de educación primaria), sirvan de base para el tratamiento y enseñanza de otros conocimientos matemáticos de niveles educativos superiores (por ejemplo, criterios de clasificación de sólidos y condiciones suficientes y necesarias para su diferenciación). En la pregunta 2 se solicita a los futuros maestros crear criterios de clasificación para los sólidos que han construido y explicar qué elementos fueron determinantes para la creación de dichas clasificaciones. Las respuestas dadas fueron categorizadas considerando elementos en común,

así como patrones. Dado que en esta pregunta se solicitaban explicaciones, fue posible identificar aspectos que en la pregunta anterior no habían emergido.

Finalmente, para abordar el Conocimiento Extendido y Meta-Didáctico, se utilizó la pregunta 3 (ver Cuadro 1) que indagaba sobre la importancia de la clasificación como proceso geométrico. El análisis de esta pregunta se realizó mediante la clasificación de las respuestas en tres categorías que refieren a las relaciones que hay entre las figuras geométricas que se están analizando, la comparación y determinación de semejanzas y diferencias entre las figuras y finalmente en la organización como actividad geométrica. La clasificación de las respuestas se realizó directamente reconociendo elementos micro y macro en las justificaciones dadas por los futuros maestros, tales como objetos geométricos, procesos enunciados, definiciones utilizadas y criterios evidenciados para la construcción de cada justificación.

A partir de estos análisis, se logró describir dificultades, errores y justificaciones presentes en el conocimiento común del contenido que poseen los futuros maestros en relación con las figuras 3D y su clasificación. Para sistematizar las respuestas dadas a la pregunta sobre clasificación, se realiza una lectura inicial. Esta lectura permite la identificación de elementos que se contrastan con diferentes referentes teóricos, lo que permite que la determinación de categorías emergentes como las que se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2 – Aspectos del conocimiento común

Fragmentos de respuesta de los FM	Categoría emergente
Establecen una tabla agrupando según el número de vértices. [Identifican que las figuras construidas tienen 8 vértices. La mayoría tienen entre 6 y 12 vértices. Ninguna tiene 11...]. (Grupos 22, 25)	Apariencia perceptiva
“Las figuras cubo, octaedro y prisma triangular se pueden clasificar dentro de un mismo grupo ya que son poliedros regulares, mientras que las figuras 4,5, 6 son totalmente irregulares, y por lo tanto no tienen todas las caras iguales. Así, tenemos dos grupos, las regulares e irregulares”. (Grupo 16)	Tentativa de clasificación por agrupación de características conocidas en 2D (regulares, irregulares) pero con errores.
“Hemos tenido en cuenta el tipo de poliedro según sus bases, la regularidad, el número de caras (bases y lados) la forma de sus bases” (Grupo 12)	Reconocimiento correcto de características 2D aplicadas a 3D.
“Hemos considerado si es cóncavo o convexo, la cantidad de vértices y aristas, y la simetría.” (Grupo 3)	Características de observación global de figuras 3D.

Fuente: Elaborada por los autores

Para sistematizar la mirada a los objetos matemáticos y el conocimiento extendido y meta-didáctico se registran los argumentos usados para valorar el proceso de clasificación. Se categorizan las respuestas como se muestra en el Cuadro 3.

Cuadro 3 – Categorías de argumentos dados al valor de la clasificación

Ejemplo de argumento enunciado	Categoría emergente
“...permite a los niños pueden agrupar los objetos según sus semejanzas y diferencias, en función de diferentes criterios: forma, color, tamaño ... Estas relaciones sirven de base para la construcción del pensamiento lógico-matemático. Piaget considera que estas relaciones lógicas son la base de la clasificación, seriación, noción del número y representación gráfica” (Grupo 23)	Permite establecer relaciones lógicas y descubrir nuevos conceptos
“El hecho de clasificar, permite comparar y ver diferencias de otras agrupaciones. También nos permite buscar regularidades entre formas y sus propiedades, comparar semejanzas y diferencias utilizando el vocabulario adecuado, comprender relaciones entre diferentes figuras de tres dimensiones, utilizando propiedades que las definen y buscar con criterio las regularidades y cambios que se producen en una colección o una secuencia” (Grupo 17)	Permite comparar, reconocer características comunes, mediante semejanzas y diferencias
“Es importante porque permite ordenar u organizar las figuras en grupos siguiendo criterios comunes, lo que facilita el desarrollo de la lógica” (Grupo 22)	Permite una organización

Fuente: Elaborada por los autores

3. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos organizados de acuerdo a cada una de las preguntas de la tarea profesional analizadas.

Pregunta 1
Haz una tabla donde presentes la representación gráfica, el nombre y las características de todos los poliedros (diferentes) que se pueden formar con las cuatro piezas

Esta pregunta tenía como intención que los futuros maestros reconocieran diferentes construcciones que se pueden lograr con cuatro medios cubos; que determinaran cuáles de ellas corresponden a poliedros, los nombraran y los describieran. La mayoría de los grupos construyó un Prisma triangular (56,2% de los grupos), Un 46,8% construyó un Hexaedro – Prisma trapezoidal y el mismo porcentaje de grupos construyó un Prisma rectangular. Otros poliedros obtenidos y correctamente nombrados se listan en la Tabla 1.

Tabla 1 – Poliedros construidos por los FM – Pregunta 1

Nombre asignado al poliedro construido	Cantidad de grupos	Porcentaje
Hexaedro - prisma trapezoidal	15	46,8%
Prisma rectangular	15	46,8%
Prisma triangular	18	56,2%
Octaedro	1	3,1%
Cubo	8	25%

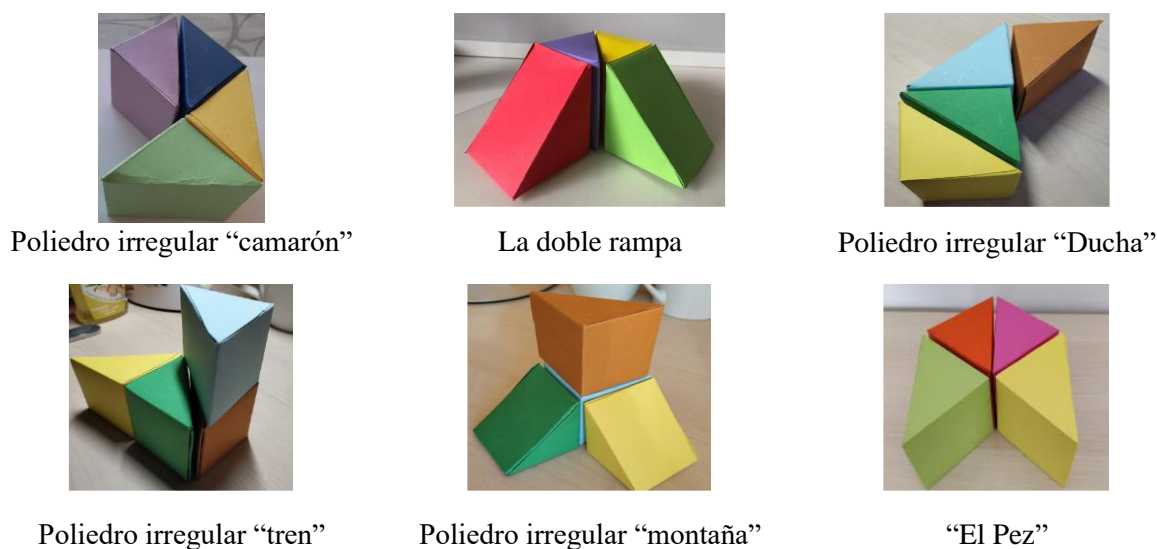
Paralelepípedo	4	12,5%
Prisma tetraédrico	1	3,1%
Prisma tetraédrico irregular	1	3,1%
Ortoedro	2	6,25%

Fuente: Elaborada por los autores

También se encontró que los futuros maestros construyeron una serie de sólidos no poliédricos (32 sólidos). Los hemos denominado “figuras en conexión” pues todos los grupos que los construyeron asignaron nombres de la cotidianidad a dichas estructuras; por ejemplo, un puente, una silla, una mesa. Sin embargo, en muchos de estos sólidos, los medios cubos se presentan separados unos de otros, o coincidiendo únicamente en un vértice. En la Figura 3, se muestran algunos ejemplos de los sólidos y los nombres asignados por los futuros maestros.

Llama la atención que el 76,3% de los grupos nombrase los sólidos como resultado del conteo de sus caras, aun cuando el sólido ya tiene un nombre establecido en geometría, o en algunos otros casos, cometiendo errores en su nominación; en este sentido, se llama prisma hexaedro a un cubo u octaedro a cualquier sólido con ocho caras.

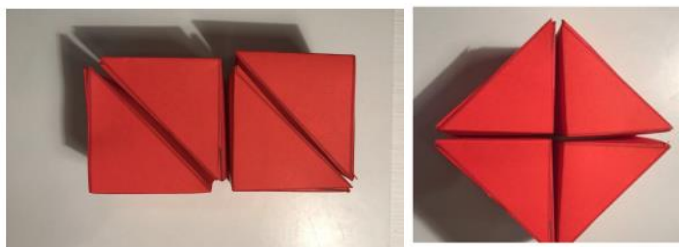
Figura 3 – Figuras en conexión construidas por los futuros maestros



Fuente: Elaborada por los autores

Dentro de las descripciones de los sólidos, la mayoría de los grupos (87,2%) usa el término igualdad para referir situaciones de congruencia. Adicionalmente, una serie de grupos utiliza de manera equivocada términos de la geometría plana para referir a la geometría del espacio; error asociado a la definición de los sólidos en 3D y figuras en 2D, así como a la idea de igualdad que tienen los futuros maestros, indistintamente de la dimensión (Figura 4).

Figura 4 – Sólidos denominados como rectángulo y rombo



Fuente: Elaborada por los autores

Hay una proporción de grupos (15,6%) que identifica sólidos, únicamente en su posición usual, de manera que, de los 18 grupos que identifican un prisma triangular, 5 de ellos, proponen “otro” sólido denominado “carpa”, el cual corresponde al mismo prisma triangular, pero en una posición diferente (base no usual) como se muestra en la Figura 5.

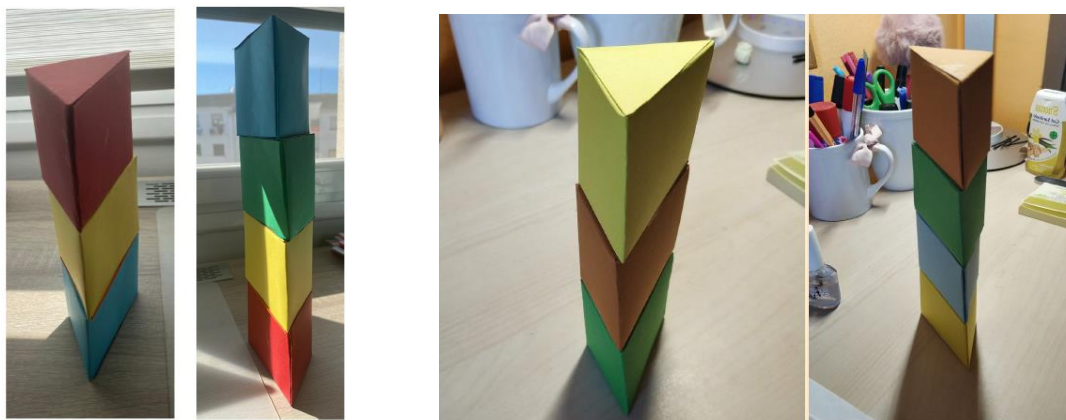
Figura 5 – Sólidos denominados “carpa”



Fuente: Elaborada por los autores

El 42,5% de los grupos considera la longitud como un elemento diferenciador de los sólidos, así, por ejemplo, un prisma triangular construido con dos medios cubos lo asumen diferente a un prisma triangular construido con tres medios cubos y lo constituye como una característica diferenciadora y clasificadora (Figura 6).

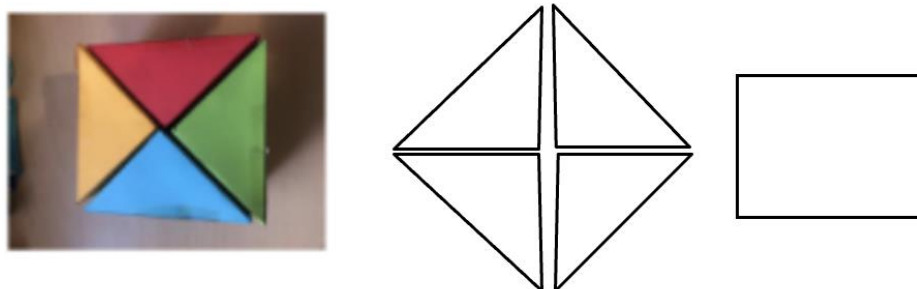
Figura 6 – Prismas triangulares clasificados en diferentes grupos.



Fuente: Elaborada por los autores

Finalmente, entre los errores más usuales en el desarrollo de esta pregunta, encontramos ocho grupos que forman, con los cuatro medios cubos, un sólido que identifican con un cubo, pero que no lo es. En efecto, con cuatro medios cubos, nunca podemos obtener un cubo. Eso muestra una dificultad asociada a la visualización, porque al unir los cuatro medios cubos, se obtiene un prisma rectangular con dos caras cuadradas y cuatro caras rectangulares como se muestra en la Figura 7. Sólo en algún caso evidencian que no es así, diciendo que se trata de un prisma de base cuadrada, pero con altura menor que el lado del cuadrado.

Figura 7 – Falso cubo, formado por 4 medios cubos



Fuente: Elaborada por los autores

Otro error, resulta al nombrar una de las figuras construidas como octaedro, ya que, al combinar los cuatro medios cubos, nunca podemos obtener una cara que sea un triángulo equilátero. En este caso, sólo hay un grupo cometiendo este error.

La Pregunta 2 tenía la intención de identificar el tipo de características, que reconocieron y utilizaron los futuros maestros para clasificar sólidos.

Pregunta 2

Define criterios y clasifica las figuras que has obtenido en el apartado b. Explica que has tenido en cuenta para definir los criterios

La mayoría de los criterios de clasificación dependen de una mera descripción del objeto, es decir que no abordan algún elemento teórico más avanzado, sino que, se queda en un proceso de verificación visual; únicamente un grupo logra rescatar elementos del origen del medio cubo como sección del cubo y de la configuración de las figuras 2D al ubicarse para construir un cuerpo en 3D. Dado que esta pregunta apunta a un tipo de conocimiento extendido, esperábamos que los estudiantes lograran una clasificación, por ejemplo, relacionada con la teoría de los poliedros e incluyeran características heredadas de la configuración y construcción del medio cubo, como una porción de un cubo.

Tabla 2 – Respuestas a la Pregunta 2

Alusiones en la clasificación	Apariencia perceptiva	Características Simetría	Otras clasificaciones	Mirada global	Ninguno
Cantidad de grupos	18	1	9	3	1
Porcentaje	56,25 %	3,12 %	28,12%	9,37 %	3,12%

Fuente: Elaborada por los autores

En general en esta pregunta (ver tabla 2), es posible reconocer que la mayoría de los grupos (56,25%) apuntan a elementos de carácter visual y descriptivo para clasificar los sólidos. Hacen mención, por ejemplo, al número de caras, vértices, lados y bases que tienen los poliedros que lograron construir. En estos casos, clasifican considerando dichos atributos. Si bien otros grupos aluden a características globales (9,37%) proponiendo una clasificación de las figuras como poliedros regulares e irregulares, lo hacen de forma equivocada, ya que ninguna de las figuras construidas es un poliedro regular. Otros grupos (28,12%) al hacer la clasificación hablan de figuras que no son posibles de obtener con los medios cubos, como las pirámides. Algunos otros refieren a prismas como poliedros convexos, lo cual es correcto; en este sentido, un grupo utiliza la idea de ángulo interior para definir convexidad y concavidad, pero no hace un nexo con el criterio de clasificación y la funcionalidad de dicho elemento.

Finalmente, únicamente un grupo (3,12%) estudia elementos de un nivel más avanzado, como lo es la composición de figuras 3D a partir de las condiciones y características propias de

figuras en 2D que permiten su construcción, como el contacto entre las caras, dando una idea de concavidad y simetría. En esta categoría clasificaron aquellas figuras que se forman al unir por un vértice o una arista dos cuerpos, pero que no corresponden con poliedros. Es relevante el hecho que casi todos los grupos construyeron sólidos con dicha característica, pero ninguno los clasificó en algún grupo.

En la Pregunta 3 pretendíamos detectar la relevancia de la clasificación como proceso geométrico dentro de los conocimientos que tienen los futuros maestros y, en particular, conocer su pensamiento en torno a dicho proceso.

Pregunta 3

¿Por qué consideras que cuando estudiamos varios tipos de figuras un proceso fundamental a trabajar es la Clasificación?

Algunas respuestas de los futuros maestros resaltan elementos como el desarrollo de procesos mentales:

“Realizar una clasificación es muy importante, ya que permite a los niños pueden agrupar los objetos según sus semejanzas y diferencias, en función de diferentes criterios: forma, color, tamaño ... Estas relaciones sirven de base para la construcción del pensamiento lógico-matemático. Piaget considera que estas relaciones lógicas son la base de la clasificación, seriación, noción del número y representación gráfica” (Respuesta pregunta 3, Grupo 12).

Mientras que otros apuntaban a elementos de tipo cognitivo, particularmente, la construcción de algún objeto geométrico:

“Porque antes que nada tenemos que clasificar los elementos para saber de dónde partimos. El proceso de clasificación representa los primeros pasos hacia el aprendizaje de conceptos matemáticos más complejos. La clasificación genera una serie de relaciones mentales a través de las cuales los niños/as agrupan los objetos según su semejanza o diferencia, en función de los distintos criterios: forma, color, tamaño...” (Respuesta pregunta 3, Grupo 22).

Únicamente un grupo presentó evidencia de incluir elementos externos propios del contexto donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje para referir a la importancia de la clasificación:

“Primeramente, para los niños el hecho de poder distinguir entre los diversos polígonos o figuras geométricas que forman un poliedro (rectángulo, cuadrado, triángulo), le proporciona muchas facilidades a la hora de poder relacionarse con su entorno más cercano. Además, tanto de forma directa como indirecta, las figuras están presentes en su día a día y este hecho hace que a través de las agrupaciones de las diferentes formas puedan relacionar y descubrir nuevos conceptos” (Respuesta pregunta 3, Grupo 27).

En general, la importancia otorgada al proceso de clasificación por parte de los futuros maestros se centra en aspectos como el establecimiento de relaciones; la identificación de propiedades; el reconocimiento de características comunes y no comunes o la idea de clasificación como agrupación. Como puede verse en la Tabla 3, todos los grupos centran la importancia de la clasificación, en que permite distinguir atributos basados en la comparación. Otros simplemente aluden a la clasificación como separación, planteando agrupaciones dicotómicas simples, pero sin una apropiación adecuada de las características de las figuras.

Tabla 3 – Elementos valorados como importantes en el proceso de clasificación

Categorías de explicación	Cantidad de grupos
Permite establecer relaciones lógicas y descubrir nuevos conceptos	17
Permite comparar, reconocer características comunes, mediante semejanzas y diferencias	32
Permite una organización	4

Fuente: Elaborada por los autores

Después de lo observado, podemos decir que la mayoría de los grupos identifican como un gran valor de la clasificación el reconocimiento de características comunes, pero en el momento de clasificar no plantean explícitamente los criterios, sino que enfatizan en el nombre dado a un grupo de figuras como evidencia de la clasificación.

En general, los resultados encontrados evidencian los conocimientos presentes y ausentes en los futuros maestros; respecto a los conocimientos de la dimensión matemática del modelo CCDM, un primer aspecto a destacar es la ausencia de conocimiento teórico sobre la clasificación de sólidos y la falta de criterios de diferenciación de posibles agrupaciones. Tal como se muestra en las tablas 1 y 2 hay conocimiento común sobre los sólidos (poliedros), pero es bastante limitado y en ocasiones erróneo, se manifiesta en las clasificaciones e identificaciones logradas por los futuros maestros; sin embargo, el conocimiento presente en varias ocasiones es erróneo o resulta de características y propiedades desconocidas por los futuros maestros, como se evidencia en las Figuras 3 a la 8.

Como equipo de investigadores, esperábamos encontrar algunas clasificaciones e identificaciones diferentes de los hallazgos presentados anteriormente, llama la atención que ningún grupo indicó que con los medios cubos era imposible lograr conos o esferas lo que, acompañado de las dificultades para identificar poliedros, sus agrupaciones y las implicaciones

de la clasificación en elementos de mayor complejidad y mayor nivel escolar en geometría, se constituye en una evidencia más de la falta de conocimiento ampliado sobre las figuras 3D.

Con respecto a los conocimientos de la dimensión didáctica del modelo CCDM, un segundo aspecto a destacar es que el diseño de esta tarea profesional refería principalmente a las facetas, epistémica, mediacional y ecológica; de acuerdo con los resultados encontrados, los futuros maestros reconocen principalmente elementos de la faceta mediacional y aprovechan el uso de material manipulable para lograr conclusiones; sin embargo, el desconocimiento de elementos de la faceta epistémica (conocimiento de los sólidos, sus propiedades y la geometría 3D), les impide avanzar en la adquisición de nuevos conocimientos. Un elemento que es importante resaltar es que a pesar de que varias de las respuestas presentadas por los futuros maestros fueran incorrectas, la faceta ecológica que no se desarrolló en este documento, pero que vale la pena mencionarla) fue fácilmente identificable en sus conocimientos; al solicitar que justificaran la importancia de la clasificación como proceso geométrico y posteriormente pedirles que buscaran poliedros en su entorno, fueron rápidamente identificadas asociaciones y conexiones que realizaron con diversos edificios y construcciones.

4. Discusión y conclusiones

En relación con el conocimiento común, en este estudio se constata que la apariencia perceptual domina sobre ciertos aspectos conceptuales (BERNABEU; LLINARES; MORENO, 2017; GONZATO; GODINO; NETO, 2011). Los futuros maestros identifican básicamente argumentos visuales, semejantes a los que usan los propios niños en las primeras edades. No se observa una aplicación del conocimiento matemático supuesto de las clasificaciones conocidas de las figuras en el plano en el caso de los prismas. Siguiendo la idea de hipótesis de conexión y complejización presentada en Muñoz et al. (2013), es posible identificar las etapas por las cuales avanzan los futuros maestros. En un primer momento, coinciden con la primera etapa de identificación de atributos; en este caso, identifican atributos tanto de tipo global, como particular, pero no son suficientemente claros como para permitir el reconocimiento de particularidades de cada uno de los sólidos encontrados.

Respecto a la etapa de comparación, es posible evidenciar que los futuros maestros intentan reconocer atributos de nuevos sólidos a través de lo que saben sobre otros; sin embargo, no hay un valor asociado a la justificación de dichas semejanzas o diferencias, lo que permite

que lleguen a conclusiones erróneas, en tanto la comparación como proceso de reconocer aquellos elementos en común supone un primer paso hacia la comprensión de clasificaciones inclusivas (MUÑOZ et al., 2013). La etapa de clasificación evidenció el uso de criterios no simultáneos y agrupaciones disjuntas en la mayoría de los casos; coincidimos plenamente en que dado el poco nivel de profundidad que presentan los futuros maestros en cuanto a la geometría 3D, las clasificaciones logradas son básicas y con muy bajo nivel de dificultad; los criterios que seleccionaron normalmente, son necesarios pero no suficientes para el logro de clasificaciones correctas, lo que además deja abierto el camino a futuras dificultades y errores en la enseñanza de dichos objetos geométricos.

Coincidimos en que el proceso de clasificación depende de la habilidad de identificar semejanzas y diferencias entre figuras y explicar por qué una cierta figura es un ejemplo de dicha clase (WALCOTT; MOHR; KASTBERG, 2009). A pesar de esto, los resultados evidencian que, al describir elementos de la clasificación, los futuros maestros suelen mostrar los ejemplos y características, pero no tanto los criterios comunes y de distinción, aunque se estén valorando como importantes. Del mismo modo, constatamos que les cuesta reconocer cómo ciertos elementos de visualización se asocian a representaciones que permiten identificar propiedades. Por ejemplo, esperábamos que hubiese propuestas de clasificación donde se consideraran el número de concavidades o de simetrías.

Ahora bien, respecto al conocimiento ampliado, la investigación constata que la falta de conocimientos comunes no permite el avance a otros niveles y estadios del conocimiento; en este sentido, se identifica ausencia de elementos necesarios para la identificación de conocimiento ampliado en los futuros maestros, de ahí que no pudieran establecer criterios de clasificación que dieran paso a clasificaciones inclusivas correctas. De igual manera, el hecho que la riqueza de la clasificación esté dada por la posibilidad de generar comparaciones, identificar elementos en común y diferentes en los sólidos obtenidos, es una evidencia de la falta de conocimiento ampliado sobre la geometría 3D.

El análisis realizado nos permite reiterar que hay un dominio perceptivo en la caracterización de figuras 3D y un nivel bajo de estructuración a partir de propiedades. Las argumentaciones dadas por los futuros maestros sobre el valor de la clasificación están en un nivel inicial, lo que es, además, un indicio sobre cómo podrían a futuro tratar este proceso en la clase de matemáticas en la educación primaria. El resolver la propia pregunta llevó a los futuros

maestros a cuestionarse sobre los modelos de clasificación que aparentemente habían aprendido en su etapa escolar, pero al no tener una apropiación amplia de los atributos de los sólidos, no fueron capaces de reconocer propiedades generalizables que les permitirían hacer clasificaciones más ricas.

El lenguaje que se establece en el grupo de estudiantes para maestro es mayoritariamente de naturaleza descriptiva y sugiere que sus miembros se encuentran en el segundo nivel de Van Hiele (GUTIÉRREZ; JAIME, 1998). Podemos decir que interpretamos nuestros resultados en el sentido de mostrar la dificultad en relacionar la comprensión de las figuras geométricas, con la coordinación de dos sistemas semióticos de representación. El discursivo (oral o escrito) y el no discursivo (dibujos, fotos de las figuras) (DUVAL, 2017). En efecto, a pesar de tener los elementos manipulativos los estudiantes no son capaces de formular explicaciones matemáticamente bien formuladas.

Respecto a los conocimientos didácticos-matemáticos y la riqueza del uso del material manipulable, si bien los futuros maestros logran sorprenderse de la gran variedad de figuras que se pueden construir con el material indicado, no parece suficiente para reconocer, por ejemplo, que se pueden obtener diferentes tipos de prismas, y que esta variedad, posibilita proponer diversos tipos de clasificaciones, iniciando con aquellas en las que se privilegia un tipo de atributo, para dar paso luego a unas más complejas donde haya combinación de atributos.

Esto nos lleva a pensar que, el uso de material manipulativo como mediador de las observaciones y respuestas permitió oportunidades de reflexión sobre la congruencia de figuras que se pueden observar en distintas posiciones. Pero no es suficiente para un conocimiento matemático común adecuado, porque muchos grupos no son capaces de sistematizar el proceso de construcción de figuras, y se conforman con haber encontrado unas cuantas.

Consideramos que este tipo de estudios son relevantes, en tanto la determinación de los conocimientos que se han descrito, sirve como punto de partida para propuestas de mejora en torno a los procesos formativos, así como también, desarrollan en los participantes de la investigación, conocimientos nuevos, competencias y procesos que normalmente no se desarrollan en modelos clásicos para la enseñanza de la geometría.

Finalmente, respecto a las herramientas del Enfoque Ontosemiótico y su relación con el diseño de tareas profesionales para la formación de futuros maestros, coincidimos con Godino et al. (2016), en que la mirada a nivel macroscópico de la práctica docente debe constituirse en

una competencia del profesor de matemáticas y, por tanto, ser la base para el diseño de acciones formativas. Así es que, “el profesor de matemática debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente” (GODINO et al., 2016, p.282). En este sentido, proponer tareas profesionales a los futuros maestros que aborden conocimientos y competencias en torno a objetos geométricos y pongan en evidencia las dificultades o ausencias de conocimientos permite la discusión con ellos y su formación permanente en torno a dichos elementos. De igual manera, el análisis de la idoneidad didáctica permite una mirada global al proceso de enseñanza y aprendizaje y pone de manifiesto para los futuros docentes, la necesidad de tener en cuenta los diferentes factores que están involucrados en dicho proceso, no solamente lo epistémico y cognitivo como tradicionalmente se ha venido haciendo.

Agradecimientos

Este estudio fue desarrollado en el marco de los proyectos: 72200072 financiado por ANID/PFCHA Chile; PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por “FEDER Una manera de hacer Europa” y PID2019-104964GB-I00 MICINN.

Referencias

- ABD, R.; ABDULLAH, A.; MOKHTAR, M.; ATAN, N.; ABU, M. Evaluation by experts and designated users on the learning strategy using sketchup make for elevating visual spatial skills and geometry thinking. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 819–840. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a15>
- ARNAS, Y. A.; ASLAM, A. G. D. Children’s classification of geometric shapes. **Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Derogase**, Çukurova, v.19, n.1, p. 254–270. 2010
- BADIA, A.; CANO, M. **Dificultades de aprendizaje de contenidos curriculares**. 1 ed. Barcelona: Ed. UOC, 2013.
- BALL, D. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 51, p. 241–247, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1177/0022487100051003013>
- BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special? **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

- BERNABEU, M.; LLINARES, S.; MORENO, M. Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI** (pp. 157–166). Zaragoza: SEIEM, 2017.
- BESWICK, K.; CHAPMAN, O. Discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. Conducted at the **12th International Congress on Mathematics Education** held in Seoul, South Korea, 2012.
- CARREÑO, E.; CLIMENT, N. Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas. **PNA**, Granada, v. 5, n. 1, p. 183–195, 2010.
- CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; RIBEIRO, C. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. **RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education**, [s.l], v. 7, n. 2, p. 88–107, 2017.
- CLEMENTS, D.; SWAMINATHAN, S.; HANNIBAL, M.; SARAMA, J. Young children's concepts of shape. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s.l], v. 30, p. 192–212, 1999. DOI: <https://doi.org/10.2307/749610>
- COPLEY, J. **The young child and mathematics**. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children, 2000.
- CONTRERAS, L.; BLANCO, L. Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.), **Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente** (pp. 93–124). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 2002.
- CRUZ A.; GEA M.; GIACOMONE B. Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), **Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**, 2017.
- DUVAL, R. **Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations**. Cham: Springer, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- ESCRIVÁ, M.; JAIME, A.; GUTIÉRREZ, Á. Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. **Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia**, Valladolid, v. 7, n. 1, p. 42–62, 2018. DOI: <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.42-62>
- FENNEMA, E.; FRANKE, M. Teachers' knowledge and its impact. In A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics** (pp. 147–164). New York, NY, England: Macmillan, 1992.
- FONT, V.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97–124, 2013. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>

- FUJITA, T. Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. **The Journal of Mathematical Behavior**, [s.l], v. 31, n. 1, p. 60–72, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>
- GARCÍA-GARCÍA, J. Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. **Números: Revista de didáctica de las matemáticas**, Canarias, v. 100, p. 129–133, 2019.
- GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. The Onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM**, Hamburgo, v. 39, n. 1, p. 127–135, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V.; GIACOMONE, B. Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (eds.), **Investigación en educación matemática XIX** (pp. 272–285). Málaga: SEIEM. 2016.
- GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, [s.l], n. 13, p. 63 – 83, 2018. DOI: <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224>
- GONZATO, M.; GODINO, J.; NETO, T. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 23, n. 3, p. 5–37, 2011. DOI: <https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1984>
- GUALDRÓN, E.; GUTIÉRREZ, A. Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XI** (pp. 369–380). Tenerife, España: Caja Canarias y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. 2007.
- GUILLÉN, G. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 18, n. 1, p. 35–53, 2000. DOI: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4055>
- GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, v. 20, n. 2&3, p. 27–46, 1998.
- GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. **PNA**, Granada, v. 9, n. 2, p. 53–83, 2015.
- KELLY, A.; LESH, R.; BAEK, J. **Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching**. New York, NY: Rotledge, 2008.
- LLINARES, S.; KRAINER, K. Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. in A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future** (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers. 2006.

- MOLINA, M.; CASTRO, E.; MOLINA, J.; CASTRO, E. Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 29, n. 1, p. 75–88, 2011. DOI: <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- MUÑOZ-CATALÁN, M.; MONTES, M.; CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS-GONZÁLEZ, L.; AGUILAR-GONZÁLEZ Á. **La clasificación de las figuras planas en primaria: Una visión de progresión entre etapas y ciclos**. Universidad de Huelva Servicio de Publicaciones, 2013.
- PATKIN, D. Various ways of inculcating new solid geometry concepts. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, Turquía, v. 3, n. 2, p. 140–154, 2015. DOI: <https://doi.org/10.18404/ijemst.99466>
- PHILIPP, R. Mathematics teachers' beliefs and affect. In F.K. Lester (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Pub. 2007.
- PINO-FAN, L.; ASSIS, A.; CASTRO, W. Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. **EURASIA J. Math. Sci. Technol. Educ**, London, v. 11, p. 1429–1456, 2015. DOI: <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a>
- PINO-FAN, L.; CASTRO, W.; FONT, V. A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. **Int. J. Sci. Math. Educ**, Turquía, v. 20, p. 1–26, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- PINO-FAN, L.; GODINO, J. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87–109, 2015.
- PINO-FAN, L.; GODINO, J.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. **J. Math. Teach. Educ**, [s.l], v. 21, p. 63–94, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8>
- SCAGLIA, S.; MORIENA, S. Prototipos y estereotipos en geometría. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 17, n. 3, p. 105–120, 2005.
- SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, [s.l], v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.
- SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge v. 57, n. 1, p. 1–22, 1987.
- SINCLAIR, N.; BRUCE, C. New opportunities in geometry education at the primary school. **ZDM**, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 319–329, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4>
- SULLIVAN, P.; WOOD, T. (Eds.) **The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development**. Rotterdam: Sense Publishers. 2008.
- TSAMIR, P.; TIROSH, D.; LEVENSON, E. Intuitive nonexamples: The case of triangles. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, n. 2, p. 81–95, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5>

- VIEIRA, P.; SANTOS, L. Compreensão da Representação Bidimensional de Policubos por Alunos do 6o ano em Tarefas de Avaliação Externa. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 847–868, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05>
- VINNER, S. The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991.
- WALCOTT, C.; MOHR, D.; KASTBERG, S. Making sense of shape: An analysis of children's written responses. **Journal of Mathematical Behavior**, [s.l], v. 28, p. 30–40, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.001>

Autores

Juan Pablo Vargas Herrera

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Magister en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile y Estudiante del Doctorado en Didáctica de las ciencias, las artes y las humanidades de la Universidad de Barcelona. Ha desarrollado docencia en diversas instituciones de educación secundaria y superior y estudia la formación de futuros maestros de matemáticas, el desarrollo del pensamiento geométrico y los fenómenos asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde el Enfoque Ontosemiótico.

Jvargahe9@alumnos.ub.edu

<https://orcid.org/0000-0001-5127-4931>

Yuly Vanegas

Doctora en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Barcelona. Profesora Lectora Serra Húnter del Departamento de Matemáticas de la Universitat de Lleida. Miembro del grupo de investigación: Práctica Educativa y Actividad Matemática – GIPEAM. Actualmente coordina el grupo IEMI de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades, la formación de profesores y el aprendizaje interdisciplinar a través de las matemáticas.

yuly.vanegas@udl.cat

<https://orcid.org/0000-0002-8365-1460>

Joaquín Giménez

Doctor en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona. Profesor Catedrático de Didáctica de las matemáticas en la Universidad de Barcelona. Miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Educación Matemática (CIEAEM), así como de otras redes nacionales e internacionales de investigación en educación matemática. Miembro del grupo de investigación: Grupo de Investigación Enseñanza y Aprendizaje Virtual - GREAV. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes etapas y en la formación del profesorado.

quimgimenez@ub.edu

<https://orcid.org/0000-0003-4609-1596>

Como citar o artigo:

VARGAS J.; VANEGAS, Y.; GIMÉNEZ J. Análisis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre clasificación de poliedros en futuros profesores de educación primaria. **Revista**

Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos; junio de 2023 / 293 – 320 DOI: [10.37618](https://doi.org/10.37618)