Desafíos experimentados al detallar el análisis de las conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde una visión ontosemiótica

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto
crodrigu79@cuc.edu.co
http://orcid.org/0000-0001-9922-4079
Universidad de la Costa (CUC)
Barranquilla, Colombia.

Vicenç Font Moll
vfont@ub.edu
http://orcid.org/0000-0003-1405-0458
Universidad del Barcelona (UB)
Barcelona, España.

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez
flor.rodriguez@uagro.mx
http://orcid.org/0000-0002-9596-4253
Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro)
Chilpancingo, México.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Desde una visión ontosemiótica se analizaron las conexiones matemáticas y etnomatemáticas a partir de tres desafíos. Teóricamente se usó la articulación entre la Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) y el Enfoque Ontosemiótico (EOS). La metodología fue cualitativa donde participaron estudiantes universitarios de licenciatura en matemáticas, un artesano de cometas y un profesor de matemáticas en servicio. Los datos se recolectaron a través de cuestionarios, producciones escritas, entrevistas semiestructuradas y la observación participante. El análisis de datos se entiende a manera de tres desafíos: en el primero se analizaron las conexiones matemáticas de los estudiantes cuando resuelven problemas sobre la recta tangente y derivada; en el segundo desafío se analizaron las conexiones etnomatemáticas evidenciadas en la elaboración de cometas por un artesano que usa unidades de medidas convencionales y no convencionales y nociones geométricas; en el tercer desafío se analizaron las conexiones etnomatemáticas y matemáticas activadas por el profesor en servicio cuando construye la cometa y la usa para explicar la existencia de triángulos isósceles y ángulos opuestos por el vértice. Cabe destacar que las conexiones se detallaron en términos de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas.

Palabras clave: Conexiones matemáticas y etnomatemáticas. Enfoque ontosemiótico. Recta tangente. Cometas.

Desafios vivenciados ao detalhar a análise das conexões matemáticas e etnomatemáticas a partir de uma perspectiva ontossemiótica

Resumo

A partir de uma perspectiva ontossemiótica, as conexões matemáticas e etnomatemáticas foram analisadas a partir de três desafios. Teoricamente, foi utilizada a articulação entre a Teoria Expandida das Conexões (TAC) e a Abordagem Ontossemiótica (OSA). A metodologia foi qualitativa com a participação de universitários formados em matemática, artesão de pipas e um professor de matemática em serviço. Os dados foram coletados por meio de questionários, produções escritas, entrevistas semiestruturadas e observação participante. A análise dos dados é compreendida na forma de três desafios: no primeiro, foram analisadas as conexões matemáticas dos alunos ao resolverem problemas de retas tangentes e derivadas; No segundo desafio, foram analisadas as conexões etnomatemáticas evidenciadas na elaboração de pipas por uma artesã que utiliza unidades de medida convencionais e não convencionais e noções geométricas; no terceiro desafio, foram analisadas as conexões etnomatemáticas e matemáticas ativadas pelo professor em serviço quando constrói a pipa e a utiliza para explicar a existência de triângulos isósceles e ângulos opostos ao vértice. Deve-se notar que as conexões foram detalhadas em termos de práticas, processos, objetos e funções semióticas.

Palavras chave: Conexões matemáticas e etnomatemáticas. Abordagem Ontossemiótica. Reta tangente. Pipa.

Challenges experienced when detailing the analysis of mathematical and ethnomathematical connections from an onto-semiotic perspective

Abstract

From an onto-semiotic perspective, mathematical and ethnomathematical connections were analyzed based on three challenges. Theoretically, the articulation between the Extended Theory of Connections (ETC) and the Onto-semiotic Approach (OSA) was used. The methodology was qualitative with the participation of university students with a degree in mathematics, a kite craftsman and an in-service mathematics teacher. Data was collected through questionnaires, written productions, semi-structured interviews, and participant observation. Data analysis is understood in the form of three challenges: in the first, the students' mathematical connections were analyzed when they solve problems on the tangent and derivative lines; In the second challenge, the ethnomathematical connections evidenced in the elaboration of kites by an artisan who uses conventional and non-conventional units of measurement and geometric notions were analyzed; In the third challenge, the ethnomathematical and mathematical connections activated by the teacher in service when he builds the kite and uses it to explain the existence of isosceles triangles and angles opposite by the vertex were analyzed. It should be noted that the connections were detailed in terms of practices, processes, objects, and semiotic functions.

Keywords: Mathematical and ethnomathematical connections. Onto-semiotic approach. Tangent line. kites.

Introducción

En la investigación en Educación Matemática se vienen desarrollando trabajos relacionados con la articulación de teorías, lo cual permite mejorar los análisis realizados a fenómenos o problemáticas de teorías o bien, de estudiantes y/o profesores en el aula de clases de matemáticas (BIKNER-AHSBAHS, 2022; PREDIGER et al., 2008; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023). Además, se reconoce que debido a las diferentes problemáticas y complejidad de los objetos matemáticos es que han emergido muchos enfoques, modelos y marcos teóricos para analizar y dar respuestas coherentes a dichas problemáticas, asumiendo que, en algunos casos es imprescindible analizar desde dos o más lentes teóricos (FONT, 2016; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a).

Estructurar y desarrollar articulaciones teóricas (*en inglés: networking of theories*) es un gran desafío porque inicialmente el investigador o los investigadores deben comprender las teorías como un primer par de estrategias del proceso, luego, transitar por tres pares de estrategias referidas a comparar y contrastar, coordinar y combinas e integrar y sintetizar (KIDRON; BIKNER-AHSBAHS, 2015). Con estas redes teóricas se han suministrado ejemplos importantes donde se discuten los beneficios, posibles dificultades y limitaciones de un enfoque multiteórico (BIKNER-AHSBAHS; VOHNS, 2019).

En este contexto, en la extensa agenda de investigación se han realizado articulaciones teóricas, entre las que se destacan los aportes de Boero et al. (2002) quienes mencionaron que, el interés por hacer networking of theories se debe a dos complejidades: 1) de los objetos matemáticos y 2) su enseñanza y aprendizaje. Otros investigadores argumentan que, otro interés por articular teorías es que los datos recolectados por algún investigador en algunos casos se vuelven difíciles de analizar con una sola mirada teórica (ARZARELLO; OLIVERO, 2006; FONT, 2016). Por su parte, Radford (2008) manifestó que, antes de articular las teorías es importante saber qué es y cómo se estructura una teoría como una visión tripartita referida a principios teóricos, metodologías y preguntas de investigación.

También, se ha reconocido que varios investigadores han contribuido a la literatura con los pares de estrategias que deben seguirse para hacer networking of theories, el primer par de estrategias se refiere a la comprensión de las teorías y la interpretación y la lectura profunda es muy común cuando los investigadores son principiantes, de lo contrario es más rápido encontrar conexiones. El segundo par de estrategias es la comparación entre teorías desde sus principios hasta las preguntas paradigmáticas. El tercer par de estrategias permite buscar lo más común entre las teorías que conduce a la coordinación o complementariedad. Finalmente, el cuarto par de estrategias (integración (local) y síntesis (local)) se enfoca en el equilibrio entre teorías, reducción de herramientas (partes de la teoría) para consolidar aquellas que se articulan y funcionan consistentemente (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010; 2014; KIDRON; BIKNER-AHSBAHS, 2015). Bosch et al. (2017) vincularon diálogos entre la teoría antropológica de la didáctica y la teoría APOE para analizar la noción de praxeología. Bikner-Ahsbahs (2022) investigó sobre la instrucción adaptativa por medio de una lección para promover le razonamiento covariacional en estudiantes y considerando simultáneamente una estructura de argumentación colectiva.

Específicamente las articulaciones teóricas con el Enfoque Ontosemiótico, se han desarrollado en Font et al. (2011) quienes integraron el EOS, la teoría APOE y la Ciencia Cognitiva de las Matemáticas para usar de forma mejorada la noción de objeto porque la asumen de manera similar. Drijvers et al. (2013) articularon las herramientas teóricas y metodológicas del EOS con la Teoría de la Génesis Instrumental para detallar el análisis de un episodio sobre álgebra computacional para el aprendizaje del concepto de parámetro. Font et al. (2016) articularon la teoría APOE con el EOS para contrastar y refinar la noción de objeto, es decir, primero propusieron una descomposición genética de la derivada y luego, la analizaron por medio de los principios teóricos y metodológicos del EOS. En otra investigación se consideraron importantes las representaciones de los objetos matemáticos y Pino-Fan et al. (2017) articularon la teoría de registros de representación semiótica (TRRS) con el EOS para analizar la actividad matemática asociada a la resolución de problemas la derivada de la función valor absoluto, enfatizando en los procesos de tratamientos y conversiones entre los registros de representación.

Con base en los resultados de Font et al. (2016), otros investigadores como Borji et al. (2018) y Borji et al. (2019) usaron de forma combinada las herramientas del EOS y la teoría APOE para detallar la noción de la gráfica de la derivada y el tratamiento de las coordenadas polares. Godino et al. (2020) exploraron las complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el EOS, las cuales comparten en que es importante destacar los principios teóricos y socioculturales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, trabajaron la noción de gráfico cartesiano. Ledezma et al. (2022) articularon el ciclo de modelación matemática y el EOS donde encontraron que ambos marcos se complementan para analizar en profundidad los procesos de modelado matemático de un sujeto, especificando que con el EOS se evidencian las fases en que se mueve el ciclo de modelación como un conglomerado de prácticas matemáticas, procesos/objetos primarios desencadenados en la actividad matemática. Para mayor profundidad sobre las investigaciones sobre articulaciones teóricas, se invita a consultar la revisión de la literatura sobre dicha temática desde el 2002 hasta el 2022 (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022b).

Es oportuno mencionar que, en esta investigación el interés es el análisis de conexiones matemáticas que en algunas investigaciones se habían trabajado como categorías consideradas en un análisis temático inductivo y deductivo (CAMPO-MENESES; GARCÍA-GARCÍA, 2020; DOLORES-FLORES; GARCÍA-GARCÍA, 2017; GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019; MHLOLO et al., 2012; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2020). Pero, realizando algunas discusiones teóricas entre investigadores especialistas del enfoque ontosemiótico y las conexiones matemáticas se llegó al consenso de que las conexiones matemáticas deberían ser detalladas minuciosamente en cuanto a su conformación, debido a que no solo es mencionar el tipo de conexión sino de dónde provienen y cómo se constituyen de acuerdo con la actividad matemática donde emergen objetos matemáticos que se relacionan. Además, en Rodríguez-Nieto et al. (2020) se identificaron ambigüedades para analizar las conexiones referidas a: 1) en un extracto de la transcripción se pueden visualizar varios tipos de conexiones simultáneamente y 2) en algunos extractos de entrevistas no se identificaba alguna categoría de conexión, sino que se requería de una categoría de conexión. Por ello, surgieron algunas investigaciones de carácter teórico prácticas fundamentadas en el networking of theories para solucionar dicha problemática y conformar la Teoría Ampliada de las Conexiones matemáticas (TAC) (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022b; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023).

A pesar de que se han realizado investigaciones previas para mejorar el análisis de las conexiones matemáticas y etnomatemáticas (RODRÍGUEZ-NIETO; ESCOBAR-RAMÍREZ, 2022; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023), en la presente investigación se reportan los principales desafíos experimentados para analizar conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde la articulación de la TAC y el EOS.

1. Fundamentación teórica

1.1 Teoría Ampliada de las Conexiones

Las conexiones matemáticas no son una temática nueva y se han venido estudiando desde hace varios años para mejorar los procesos de comprensión matemática (HIEBERT;

CARPENTER, 1996; NCTM, 2000). Businskas (2008) en su tesis doctoral las define como “una relación verdadera entre dos ideas matemáticas, A y B” (p. 18). En otras investigaciones se han entendido como “un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real” (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2018, p. 229). Las conexiones matemáticas se clasifican en dos grandes grupos: las conexiones extramatemáticas e intramatemáticas (DOLORES-FLORES; GARCÍA-GARCÍA, 2017, p. 161). En este trabajo solo se describen las conexiones intramatemáticas (Tabla 1).

Tabla 1 - Descripción de las categorías de conexiones matemáticas de la TAC

Categoría de conexión	**Descripción**
Modelado	Son relaciones entre las matemáticas y la vida real y se evidencian cuando el sujeto resuelve problemas no matemáticos o de aplicación donde tiene que plantear un modelo o expresión matemática (EVITTS, 2004).
Representaciones diferentes	Se identifican cuando el sujeto representa los objetos matemáticos usando representaciones equivalentes y alternas. Las equivalentes son transformaciones de representaciones de un mismo registro y las alternas se refieren a representaciones de un mismo objeto donde se cambia el registro en el cual fueron formadas (BUSINSKAS, 2008).
Procedimental	Se identifican cuando un sujeto usa reglas, algoritmos o fórmulas para o resolver una tarea matemática. Son de la forma: A es un procedimiento para trabajar con un concepto B (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019).
Parte-todo	Se presenta cuando el individuo realiza alguna de las siguientes relaciones lógicas: 1) La relación de generalización es de la forma A y es una generalización de B y B es un caso particular de A (BUSINSKAS, 2008); 2) La relación de inclusión viene dada cuando un concepto matemático está contenido en otro.
Implicación	Se identifica cuando un concepto P conduce a otro concepto Q por medio de una relación lógica ($P \rightarrow Q$) (BUSINSKAS, 2008).
Característica	Se identifica cuando la persona expresa algunas características de los conceptos o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que lo hacen diferentes o similar a los otros.
Reversibilidad	Se presentan cuando un sujeto empieza desde un concepto A para obtener un concepto B e invierte el proceso, es decir, empieza desde B para obtener A (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019).
Significado	Se identifica cuando un sujeto da sentido a un concepto matemático, es decir, el sujeto menciona lo que significa para él el concepto. Incluye aquellos casos en los que un estudiante da una definición que ha construido para un concepto (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019).
Metafórica	Se entienden como la proyección de las propiedades, características, etc. Un dominio conocido para estructurar otro dominio menos conocido o abstracto (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2020).

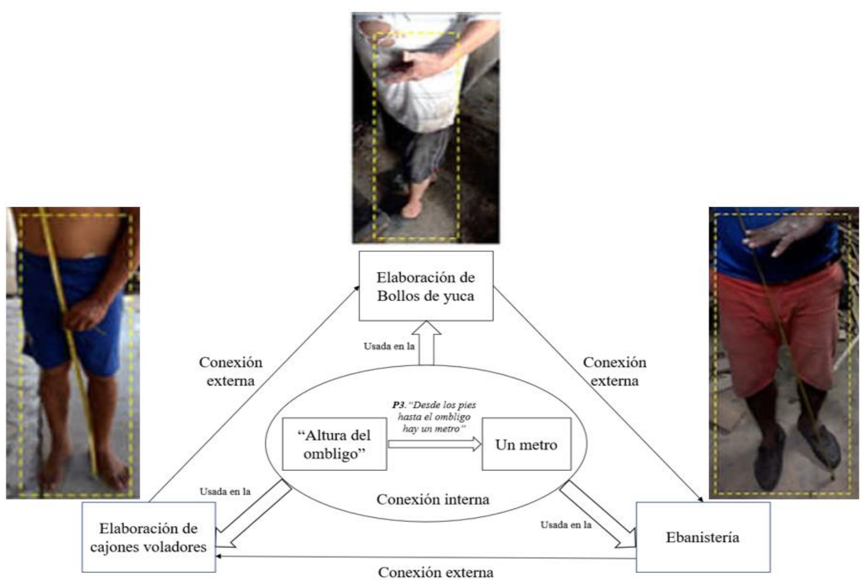
Fuente: Elaboración basada en Evitts (2004), Businskas (2008), García-García; Dolores-Flores (2019) y Rodríguez-Nieto et al. (2020).

1.2 Conexiones etnomatemáticas

La conexión etnomatemática se entiende como la relación entre los conocimientos matemáticos usados por las personas en las prácticas cotidianas y las matemáticas institucionalizadas o públicas que se encuentran en los libros de texto y conocidas científicamente (RODRÍGUEZ-NIETO, 2021). Este tipo de conexiones etnomatemáticas se han clasificado en internas, externas y de significado etnomatemático (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023). La conexión interna se refiere a "las relaciones que hace un sujeto entre unidades de medidas (convencional o no convencional) de un mismo sistema de medida usado en una práctica cotidiana, considerando equivalencias y conversiones" (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, p. 12), y una conexión externa "se promueve cuando una unidad de medida (convencional o no convencional) es usada de manera similar en diferentes sistemas de medidas de prácticas cotidianas distintas" (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, p. 26).

La conexión de significado etnomatemático se identifica cuando una persona atribuye un sentido a un concepto matemático u objeto haciendo una relación de expresión-contenido, emitiendo lo que significa para él un objeto cultural o artefacto, una medida, un diseño, entre otras actividades universales, en función de la práctica cotidiana (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020). En la Figura 1 se presentan las conexiones internas y externas realizadas por personas que elaboran bollos, muebles y cajones (prácticas diferentes – conexión externa) y usan de manera similar una medida de la altura del ombligo equivalente a un metro (conexión interna).

Figura 1 - Ejemplo de conexiones internas y externas.



Fuente: Tomado de Rodríguez-Nieto (2020, p. 27).

Las conexiones etnomatemáticas favorecen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde tres aspectos:

> 1) Las conexiones etnomatemáticas son relevantes porque primero se valora la matemática en la práctica diaria que realiza una persona y luego el investigador identifica la conexión y la vincula con la matemática institucionalizada. 2) Las conexiones etnomatemáticas pueden favorecer la comprensión de conceptos matemáticos considerando que el estudiante resuelve problemas matemáticos basados en la vida real y, a su vez, se comparten las sugerencias sobre conexiones de los organismos curriculares (…). 3) Las conexiones etnomatemáticas no solo pueden reconocerse en una sola práctica cotidiana, sino en varias, del mismo contexto sociocultural o de diferentes pueblos, regiones o países, evitando el aspecto local de las etnomatemáticas cuando se enfatiza en una sola práctica cotidiana (RODRÍGUEZ – NIETO; ESCOBAR-RAMÍREZ, 2022, p. 998-999).

1.3 Enfoque Ontosemiótico

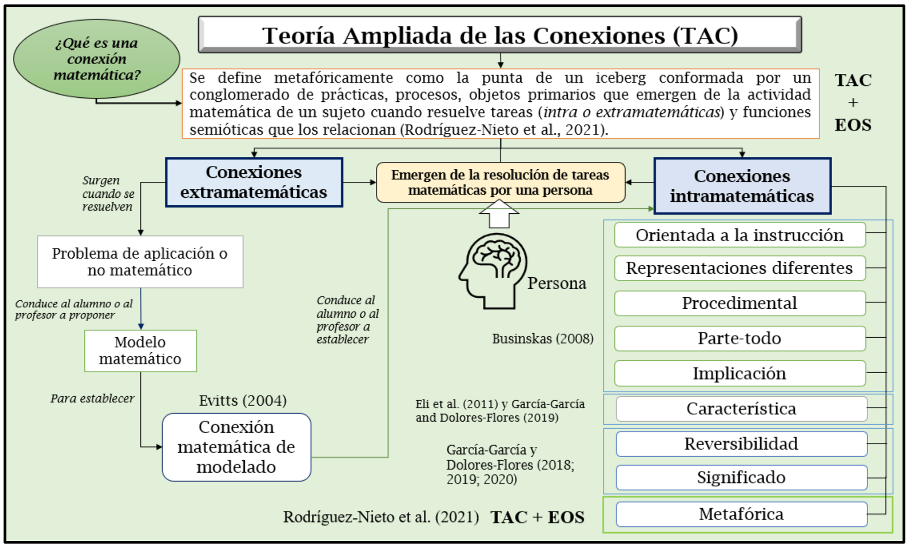
Una de las acciones fundamentales del EOS es describir la *actividad matemática* desde una perspectiva institucional o personal, la cual se modela en términos de prácticas y de configuración de *objetos primarios* y procesos que son activados en dichas prácticas (FONT et al., 2013). Tales prácticas, que en adelante llamaremos *prácticas matemáticas*, son aquellas situaciones o expresiones (verbal, gráfica, simbólica) que un individuo realiza para resolver algún problema matemático, comunicar la solución que obtuvo, así como validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (GODINO; BATANERO, 1994).

En las *prácticas matemáticas* intervienen seis *objetos primarios*: 1) situaciones problemas, 2) elementos lingüísticos, 3) conceptos/definiciones, 4) proposiciones/propiedades, 5) procedimientos y, 6) argumentos. Además, los *objetos primarios* que emergen pueden ser de tipo personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, intensivos o extensivos y de contenido o expresión, es decir, pertenecer a alguna de las cinco dualidades (GODINO et al., 2007). La *configuración de objetos primarios* se conforma de las conexiones entre *objetos primarios* y puede ser institucional (*epistémica*) o personal (*cognitiva*). La *configuración epistémica* es el sistema de objetos primarios que, desde una perspectiva institucional están involucrados en las prácticas matemáticas llevadas a cabo para resolver un problema específico y la *configuración cognitiva* es el sistema de objetos matemáticos primarios que un sujeto moviliza como parte de las prácticas matemáticas desarrollas para resolver un problema específico (GODINO et al., 2019).

A través de la activación de procesos matemáticos primarios como la comunicación, el planteamiento de problemas, la definición, la enunciación, la elaboración de procedimientos (algoritmos, rutinas, ...) y la argumentación, es que emerge el conjunto de objetos primarios. Tales procesos matemáticos se derivan de la aplicación de la perspectiva proceso-producto a dichos objetos primarios, es decir, se derivan al aplicar la dualidad proceso producto a las cinco dualidades, de tal forma que se obtienen las siguientes relaciones: personalización-institucionalización; síntesis-análisis; representación-significado; materialización-idealización; generalización-particularización (FONT et al., 2013; FONT et al., 2016; GODINO et al., 2007). De acuerdo con Godino et al. (2007), la resolución de problemas y el modelado matemático deben considerarse más bien como “hiperprocesos” matemáticos que combinan algunos de los procesos mencionados.

Finalmente, se debe considerar la noción de *función semiótica*, la cual permite asociar las prácticas con los objetos y procesos que se activan y admite construir una noción operativa del conocimiento, significado, comprensión y competencia (GODINO et al., 2007). Font (2007) caracteriza una *función semiótica* como una relación triádica entre un antecedente (expresión/objeto inicial), un consecuente (contenido/objeto final) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Las *funciones semióticas* se infieren cuando se mira la actividad matemática desde la dualidad expresión/contenido. La noción de *función semiótica* (EOS) es más general que la noción de conexión matemática (TAC), dado que las conexiones se consideran casos particulares de *funciones semióticas* de carácter personal o institucional. En la TAC la conexión matemática puede ser verdadera o no, dejando ver desde la perspectiva del EOS que, cuando un sujeto hace una conexión correcta coincide con la institucional y cuando es incorrecta es de tipo personal (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a). En la Figura 2 se presenta la síntesis de la TAC y las aportaciones de las herramientas del EOS.

Figura 2 - Síntesis y funcionamiento de la TAC.



Fuente: Tomado de Rodríguez-Nieto et al. (2022b).

2. Metodología

Esta investigación es cualitativa (COHEN et al., 2018) motivada por mostrar los desafíos afrontados para detallar el análisis de conexiones matemáticas y etnomatemáticas. Además, se desarrolló en tres etapas de la siguiente manera: 1) se seleccionaron tres tipos de participantes para explicar los desafíos, específicamente, futuros profesores de matemáticas que cursaban la asignatura de Didáctica del Cálculo, un artesano que elabora cometas y un profesor de matemáticas. 2) la recolección de datos se desarrolló en tres momentos, uno por cada participante. En el primero se implementó una tarea para que los estudiantes la resolvieran a lápiz y papel o en algún tablero digital; en el segundo se hizo una entrevista semiestructurada al artesano y en el tercer momento se realizó una observación participante al profesor en el aula de clases. En la etapa 3 se analizaron los datos por participante siguiendo el método de análisis propuesto en el networking entre la TAC y el EOS (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a).

2.1 Participantes y contexto

En esta investigación se presentan contextos de reflexión donde participaron veintinueve futuros profesores de matemáticas (quince hombres y catorce mujeres con edad promedio de 20 años) que cursaban la asignatura de Didáctica del Cálculo (correspondiente al octavo semestre de diez en total) en una Universidad pública del norte de Colombia. Estos futuros profesores fueron seleccionados porque en su formación académica habían cursado Cálculo diferencial e integral, geometría analítica y ecuaciones diferenciales, lo cual es evidencia de que ellos podrán resolver la tarea planteada. Además, se seleccionó un artesano que elabora cometas o papalotes con 66 años y 48 años de experiencia laboral. Es una persona que se dedica a la carpintería y es cocinero. Por último, participó un profesor de matemáticas con 28 años quien trabaja las conexiones etnomatemáticas en el aula de clases.

2.2 Recolección de datos

Para recolectar los datos se consideraron tres momentos para cada uno de los participantes: *Momento 1*: el primer autor de la investigación implementó una tarea a los estudiantes que consistió en: a) hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 5x + 2$ en el punto de con abscisa *x=-1*, b) dibujar la gráfica de la función $f(x)$ y de la recta tangente. A los futuros profesores se les sugirió resolver la tarea en papel y lápiz o usando algún tablero digital como *metamoji note lite*, *jamboard* o herramientas como *power point*, *word*, *Excel*, *etc.*, debido a que en esa época (inicios del año 2021) la pandemia generada por la COVID-19 condicionó a que las clases se desarrollaran de manera virtual por meet (Figura 2a). *Momento 2*: Se realizó una entrevista semiestructurada a un artesano del municipio de Baranoa, Atlántico, Colombia que construye cometas para diversión, quien explicó paso a paso para la elaboración de una cometa de tres varillas o cañas donde se evidenció un potencial matemático y geométrico (Figura 2b). *Momento 3*: A través de la observación participante (COHEN ET AL., 2018) se videograbó una parte de la clase de un profesor de matemáticas del municipio de Baranoa, Atlántico, Colombia que implementa las conexiones etnomatemáticas en la elaboración de cometas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación secundaria (Figura 2c).

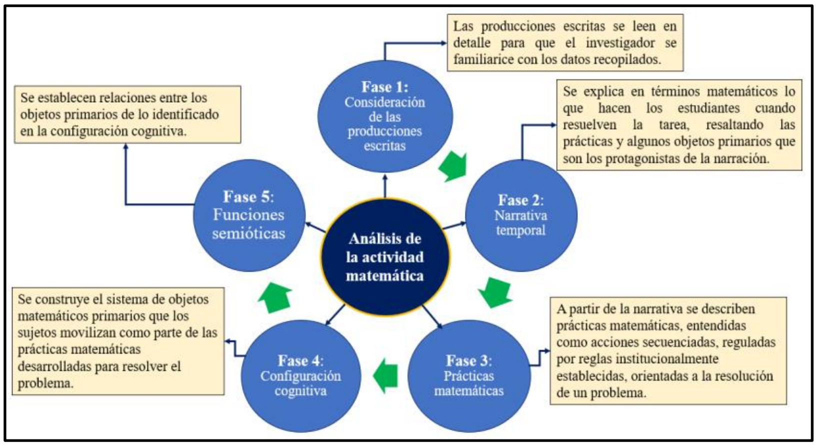
Figura 1 - Evidencia de los participantes de la investigación.

Fuente: Elaboración de los autores.

2.3 Análisis de datos

Los datos obtenidos en los tres momentos de recolección fueron analizados por medio del uso del método de análisis que resultó de la articulación entre la TAC y el EOS (GODINO et al., 2019; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a), ver Figura 3. Cabe destacar que, cada uno de los análisis que se presentarán en la sección de resultados revelan los desafíos experimentados para analizar conexiones en tres contextos diferentes.

Figura 2 - Fases para analizar la actividad matemática.



Fuente: Elaboración de los autores.

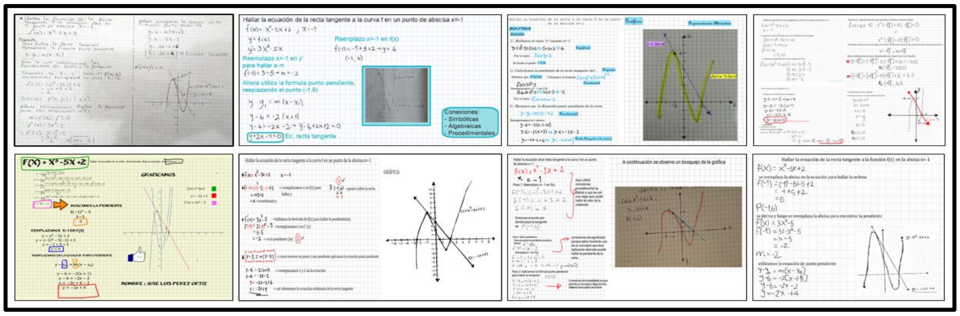
En la Fase 5 del análisis presentado en la Figura 3 se observan las conexiones matemáticas establecidas por los estudiantes, pero después se detallan en términos de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas. De igual manera se analizaron los datos suministrados por el artesano de cometas y el profesor de matemáticas.

4. Resultados

4.1 Primer desafío

En el primer momento se organizaron y leyeron las producciones escritas con el fin de comprender la información o respuestas de los participantes a la tarea propuesta (Figura 4).

Figura 3 - Organización y lectura de algunas respuestas de los futuros profesores.



Fuente: Elaboración de los autores.

A partir de las producciones escritas se construyen las narrativas temporales de los participantes. En este caso, solo se presentará la narrativa de los futuros profesores (E1 y E2) en una sola redacción porque coinciden en la mayor parte del procedimiento implementado y también por limitaciones de espacio y contenido.

Narrativa temporal de E1 y E2

Se le propuso la tarea a E1 y E2 donde se le pidió encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = -1$. E1 y E2 leyeron y comprendieron la tarea y primero escribieron que utilizarán la ecuación punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) como requisito fundamental. Luego, encontraron la ordenada (y) evaluando la función f en $x = -1$ y haciendo operaciones aritméticas y algebraicas equivalentes, obteniendo $y = 6$ y simultáneamente escribió que el punto $P(x_0, y_0)$ "de tangencia" es igual a $P(-1, 6)$. Después E1 y E2 manifestaron que se debe hallar la pendiente m y para ello, derivaron la función f usando implícitamente la fórmula para derivar la función potencia $(x^n)' = nx^{n-1}$ consiguiendo $f'(x) = 3x^2 - 5$ que les fue útil para reemplazar $x = -1$ en f' para hallar $m = -2$. Siguiendo el proceso de resolución, E1 y E2 reemplazaron el valor de la pendiente y las coordenadas del punto $P(-1, 6)$ en la fórmula punto-pendiente $y - 6 = -2(x + 1)$ y aplicando la propiedad distributiva obtuvieron la expresión equivalente $y - 6 = -2x - 2$ a la cual aplicaron el despeje de la variable y (que implícitamente es aplicar el inverso aditivo de -6), para conseguir la ecuación de la recta en su forma explícita: $y = -2x + 4$. Seguidamente, E1 y E2 representaron la función gráficamente con el objetivo de verificar el procedimiento algebraico. En este contexto, E1 y E2 dibujaron un plano de coordenadas cartesianas y construyeron dos tablas de valores una para f y otra para la ecuación de la recta tangente $y = -2x + 4$.

Posteriormente, dibujaron la gráfica de f y de la recta tangente con los puntos obtenidos en la tabla de valores. Por último, concluyeron que encontraron la ecuación de la recta tangente.

Prácticas matemáticas (Pm) de E1 y E2

Se caracterizan por ser las acciones secuenciadas realizadas por la persona (E1 y E2 en este caso), las que se describen a continuación.

Pm1. E1 y E2 leyeron y comprendieron la tarea propuesta.

Pm2. Mencionaron que usan la ecuación punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) para buscar la ecuación de la recta tangente a la curva.

Pm3. Encontraron la ordenada (y) evaluando la función f en $x = -1$ y haciendo operaciones aritméticas y algebraicas equivalentes, obteniendo $y = 10$.

Pm4. Escribieron que el punto (de tangencia) $P(x_0, y_0)$ es igual a $P(-1, 6)$.

Pm5. Derivaron la función f usando implícitamente la fórmula para derivar la función potencia $(x^n)' = nx^{n-1}$ consiguiendo $f'(x) = 3x^2 - 5$.

Pm6. Sustituyeron $x = -1$ en f' para hallar $m = -2$.

Pm7. Utilizaron la fórmula punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) para obtener la ecuación de la recta. Para ello, sustituyeron los valores de $x_0 = -1$, $y_0 = 6$ y la pendiente $m = -2$ en la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Pm8. Realizaron operaciones algebraicas para obtener expresiones equivalentes (aplicación de inversos aditivos) y hallar la ecuación de la recta en su forma explícita: $y = -2x + 4$.

Pm9. Posteriormente, E1 y E2 dibujaron un sistema de coordenadas cartesianas.

Pm10. Construyeron una tabla de valores para hallar los puntos y, para ello, sustituyeron valores de x en f para obtener la coordenada en y.

Pm11. Construyeron una tabla de valores para hallar los puntos y, para ello, sustituyó valores de x en $y = -2x + 4$ para obtener la coordenada en y.

Pm12. Ubicaron los puntos proporcionados en la tabla de f.

Pm13. Dibujaron la gráfica de f.

Pm14. Ubicaron los puntos proporcionados en la tabla de $y = -2x + 4$.

Pm15. Dibujaron la gráfica de $y = -2x + 4$.

Pm16. Dado que la recta tangente se aproxima mucho a la gráfica de la función o pasa por el punto (-1, 6), concluyeron que han calculado la ecuación de la recta tangente.

Configuración de objetos primarios

Teniendo en cuenta las acciones secuenciadas realizadas por E1 y E2, se construye la configuración cognitiva de objetos primarios (ver Tabla 2).

Tabla 2 - Estructura de la Configuración cognitiva de E1 y E2.

Situación problema/Tarea

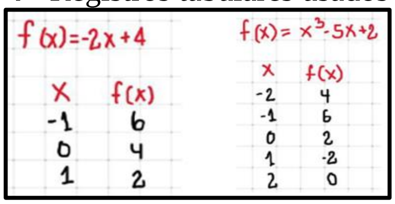
T1: a) hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x + 2}$ en el punto de con abscisa $\boldsymbol{x = -1}$.
T2: b) dibujar la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)}$ y la recta tangente.

Elementos lingüísticos

Verbal: punto, punto de tangencia, función, línea recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, derivada en un punto, ecuación punto-pendiente…

Tabular: con los registros tabulares los estudiantes construyen las gráficas tanto de la función como de la derivada (ver Figura 5).

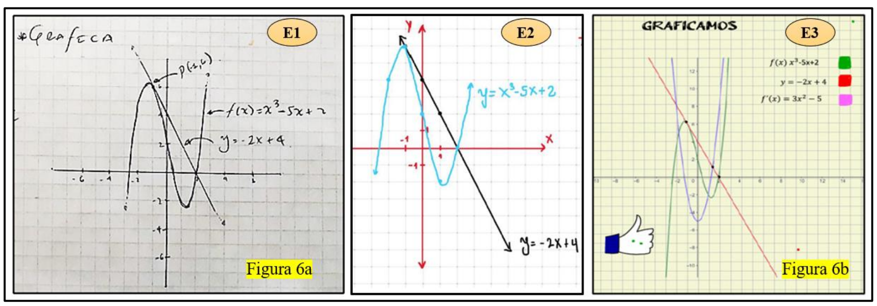
Figura 4 - Registros tabulares usados por P2.



Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfico: ver Figura 6a en Figura 6.

Figura 5 - Representación gráfica de la función y la ecuación de la recta tangente.



Fuente: Elaboración de los autores.

De igual manera, los otros participantes como E3 hicieron representaciones gráficas y simbólicas, pero con el software GeoGebra (Figura 6b en Figura 6).

Simbólico: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x + 2}$, $\boldsymbol{x = -1}$, $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 5}$, $\boldsymbol{x = -1}$; $\boldsymbol{y = 6}$, $\boldsymbol{P = (x_0, y_0) = (-1, 6)}$, $\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$, $\boldsymbol{m = f'(x_0) = f'(-1)}$, $\boldsymbol{f(-1) = 3(-1)^2 - 5}$, $\boldsymbol{m = -2}$, entre otros.

Conceptos/Definiciones

Conceptos previos: punto, recta, gráfica, función, ecuación, recta tangente, derivada, derivada en un punto, punto de tangencia, …
D1: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.
D2: la recta tangente es la recta que un entorno del punto de tangencia más se aproxima a la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$.

Proposiciones/Propiedades

Proposiciones previas: afirmaciones sobre el uso de propiedades asociativa, distributiva y conmutativa del álgebra.
Pr1: el punto $\boldsymbol{P = (x_0, y_0) = (-1, 6)}$ es el punto de tangencia.
Pr2: la derivada en $\boldsymbol{x = -1}$ es igual a -2.
Pr3: la pendiente de la recta tangente es $\boldsymbol{m = -2}$.
Pr4: la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $\boldsymbol{x = -1}$ es $\boldsymbol{y = -2x + 4}$.

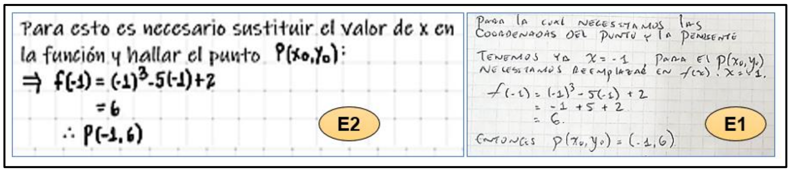
Procedimientos

Procedimiento principal: Cálculo de la ecuación de la recta tangente a la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x + 2}$ en un punto.

Procedimientos auxiliares:

Pc1: Evaluar la función $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x = -1}$ y haciendo operaciones aritméticas y algebraicas equivalentes, para obtener $\boldsymbol{y = 10}$ (ver Figura 7).

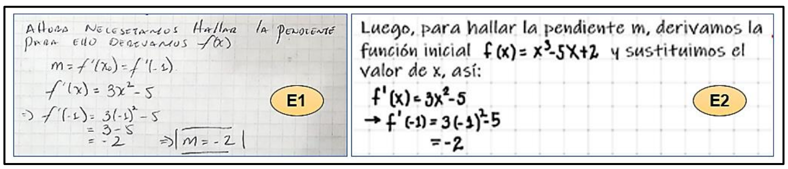
Figura 6 - Evidencia de la evaluación de la función para encontrar el punto de tangencia y la pendiente.



Fuente: Elaboración de los autores.

Pc2: Calcular la derivada de una función de tercer grado (ver Figura 8).

Figura 7 - Evidencia escrita del cálculo de la derivada.

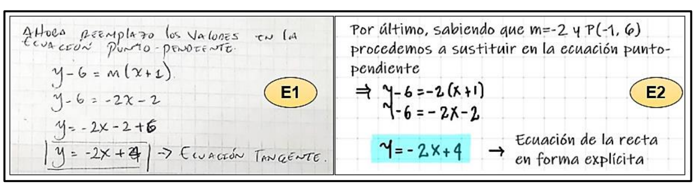


Fuente: Elaboración de los autores.

Después de hallar la derivada se realizan otros procedimientos importantes para encontrar la ecuación de la recta tangente.

Pc3: Encontrar la ecuación de la recta utilizando la fórmula punto pendiente ($\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$) (ver Figura 9).

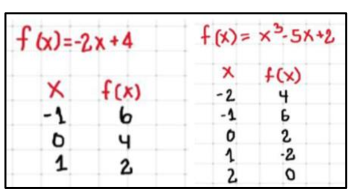
Figura 8 - Evidencia escrita del cálculo de la pendiente usando la ecuación punto pendiente, la pendiente y el punto de tangencia.



Fuente: Elaboración de los autores.

Pc4. Representación de una función a partir de una tabla de valores (ver Figura 10).

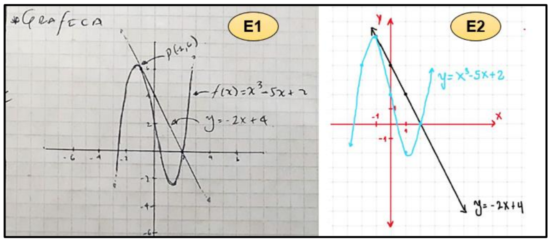
Figura 9 - Representación de la función a través de una tabla de valores y puntos.



Fuente: Elaboración de los autores.

Pc5. Representación gráfica de la función y de la recta tangente (ver Figura 11).

Figura 10 - Representación gráfica de la función y recta tangente.



Fuente: Elaboración de los autores.

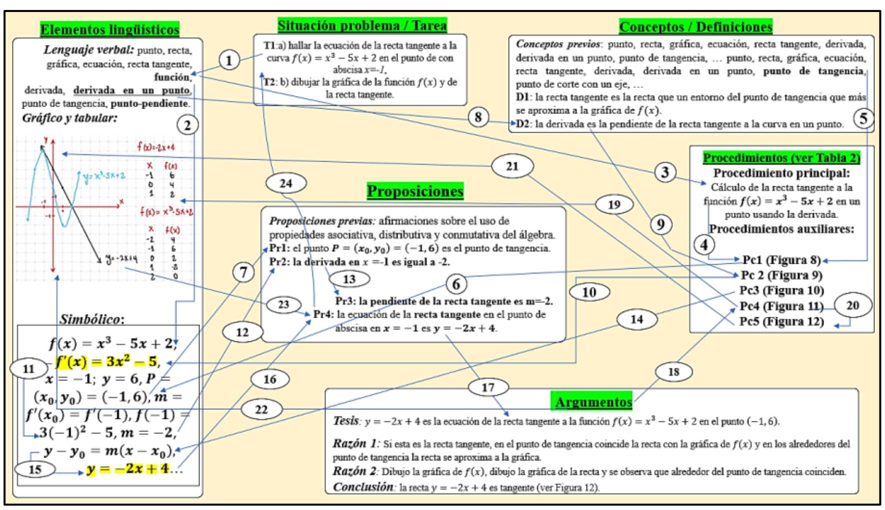
Cabe destacar que, los estudiantes usan conexiones de representación diferentes alternas (gráfico-simbólica) cuando asumen que $\boldsymbol{y = -2x + 4}$ y $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x + 2}$ tienen sus gráficas asociadas.

Argumentos

Tesis: $\boldsymbol{y = -2x + 4}$ es la ecuación de la recta tangente a la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x + 2}$ en el punto $\boldsymbol{(-1, 6)}$.
Razón 1: Si esta es la recta tangente, en el punto de tangencia coincide la recta con la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ y en los alrededores de dicho punto la recta se aproxima a la gráfica.
Razón 2: Dibujo la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$, dibujo la gráfica de la recta y se observa que alrededor del punto de tangencia coinciden.
Conclusión: la recta $\boldsymbol{y = -2x + 4}$ es tangente (ver Figura 11).

Luego de elaborar la configuración cognitiva de E1 y E2, se usa la herramienta de función semiótica (FS) para visualizar las relaciones entre los objetos primarios de dicha configuración (Figura 12).

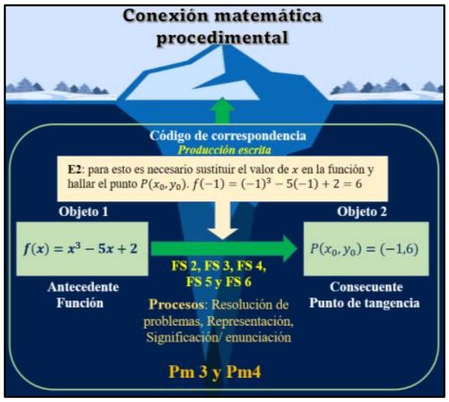
Figura 11 - Funciones semióticas y/o relaciones entre objetos primarios.



Fuente: Elaboración de los autores.

En la Figura 12 se expresan las secuencias las FS enumeradas del 1 al 24 que evidencian las conexiones matemáticas hechas por E2 al resolver la tarea. En este contexto, la Figura 13 se usa como un organizador de los elementos que constituyen a las conexiones matemáticas (en este caso la procedimental) y demostrar la operatividad de la definición de conexión plasmada en el marco teórico donde se dice que una conexión es como la punta de un iceberg.

Figura 12 - Conexión matemática procedimental desde la articulación TAC-EOS.



Fuente: Elaboración de los autores

3.2 Segundo desafío

La TAC fue una motivación sustancial porque permitió dar otra mirada al análisis de los trabajos realizados bajo el programa Etnomatemática (D'AMBROSIO, 2001), porque realmente la etnomatemática es un tipo de conexión entre la cultura y las matemáticas formales o abstractas. Ante esta reflexión (leer con más detalles en RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, 2021), emergió la conceptualización de conexión etnomatemática entendida como la relación entre las matemáticas practicadas por grupos culturales y las matemáticas institucionales o públicas (RODRÍGUEZ-NIETO, 2021). En esta ocasión se muestra una síntesis del análisis ontosemiótico de la práctica cotidiana de una persona que elabora cometas, donde se describen prácticas etnomatemáticas (Pem) como las acciones secuenciadas que realiza el artesano donde involucra sus conocimientos culturales, significados etnomatemáticos relacionados con la matemática institucional. A continuación, se evidencian las Pem seguidas por el artesano.

Pem1: el artesano se propone hacer una cometa de tres varillas.
Pem2: empareja la caña con una cinta y una segueta, teniendo en cuenta la medida a la que se desee hacer la cometa (se mide con un metro o con la cuarta).
Pem3: sacar o cortar las tres cañas (varillas) que conforman una cometa (dos largas o parales), una varilla central. Se miden cinco cuartas para definir el tamaño de la cometa equivalentes a 110 centímetros.
Pem4: enuncia que la cuarta es la medida que uno hace en la cometa, "longitud del dedo pulgar al meñique" abierta la mano.

Pem5: las varillas se redondean y se verifican según su medida. Las dos varillas largas deben tener igual medida, la varilla central debe tener menor medida. Mencionó que después de cortar una varilla larga, esta le sirve para medir la otra y quedan de igual medida (es decir, funciona como patrón de medida).
Pem6: amarra las varillas largas de la cometa ubicando el nudo en la mitad de ellas. Para ellos usó la medida de la pitica o patrón y aseguró que la mitad de la varilla debe medir dos cuartas y media.
Pem7: Para saber para saber cuánto media la cuarta, el artesano tomó la cuarta y la marcó en la varilla, luego tomó la misma medida de la cuarta con la pita y luego, la dobló por la mitad para hallar la media cuarta.
Pem8: ubicó la varilla del centro sobre el nudo de la mitad de las varillas largas y la amarró.
Pem9: Amarró la cometa con pita o nylon verificando que los lados de la cometa tuviesen igual medida, formándose seis triángulos isósceles con dos lados iguales y uno diferente, tres en la parte superior y tres en la parte inferior de la cometa. Para ello usó la medida de la pita.
Pem10: Luego, concluyó que la cometa tiene seis lados y forma un hexágono.
Pem11: Mencionó que para forrar la cometa requiere de papeles, pegante y una tijera.
Pem12: Por último, presentó una comenta haciendo figuras geométricas para adornar el forrado.

Configuración cognitiva basada en la etnomatemática

En esta configuración cognitiva se muestran los objetos primarios que emergieron en las Pem realizadas por el artesano (ver Tabla 3).

Tabla 3 – Configuración cognitiva de objetos primarios emergentes en la elaboración de cometas

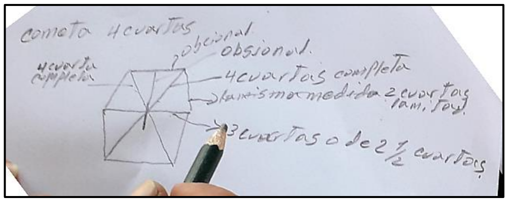
Situación problema/tarea
T: Elaborar una cometa de tres varillas.
Elementos lingüísticos
Verbal: varilla o caña, cuarta, jeme, dedo, metro, pita, cometa, triángulo isósceles, patrón, punto medio, hexágono…
Gráfico: representaciones de la cometa y las medidas (ver Figura 14).

Figura 13 - Representaciones de la cometa y las unidades de medidas.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Simbólico: 5 cuartas, 4 cuartas, 3 cuartas, $2\frac{1}{2}$ cuartas (ver Figura 15).

Figura 14- Representación simbólica de las medidas de las varillas.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Conceptos/Definiciones

Conceptos previos: medir, contar, estimar, figuras geométricas…

D1: Cuarta: es la medida desde el dedo pulgar al dedo meñique

D2: Triángulo isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno diferente

D3: Patrón de medida: unidad de medida que se repite de manera reiterada.

D4: Punto medio: mitad de la varilla donde se ubica el nudo.

D5: Hexágono: figura geométrica plana cerrada conformada por seis lados.

Otros conceptos: pita, cometa, jeme, dedo, metro, …

Proposiciones/propiedades

Proposiciones previas: afirmaciones sobre el uso de unidades de medida y procesos de conteo.

Proposición 1 (Pr1): la medida de las varillas largas de la cometa es de 110 centímetros.

Pr2: el nudo representa la mitad de la varilla larga.

Pr3: En la cometa se evidencian seis triángulos isósceles.

Pr4: la cometa representa un hexágono.

Procedimientos

Procedimiento general: construcción de la comenta con tres varillas.

Procedimiento principal 1 (Pcp1): Encontrar la medida de las varillas.

Procedimiento auxiliar 1 (Pca 1): empareja la caña y luego mide cinco cuartas.

Pcp2: encontrar la mitad de la varilla larga.

Pca2: medir la varilla con una pita y luego, doblarla por la mitad.

Pcp3: estructurar triángulos isósceles en la cometa.

Pca3: al amarrar y unir los extremos de las varillas, simultáneamente se debe verificar que vayan quedando triángulos isósceles (ver Figura 16).

Figura 15 - Conformación de triángulos isósceles medidos con la pitica.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Pcp4: Estructurar la cometa y constituir un hexágono (ver Figura 14).

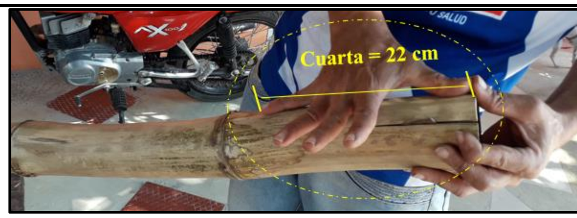
Argumentos

Argumento 1 (A1)

Tesis: las varillas largas de cinco cuartas de la cometa miden 110 centímetros.

Razón 1: Si una cuarta mide 22 centímetros, entonces las varillas de la cometa miden 110 centímetros (ver Figura 17).

Figura 16 - La cuarta es igual a 22 centímetros.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

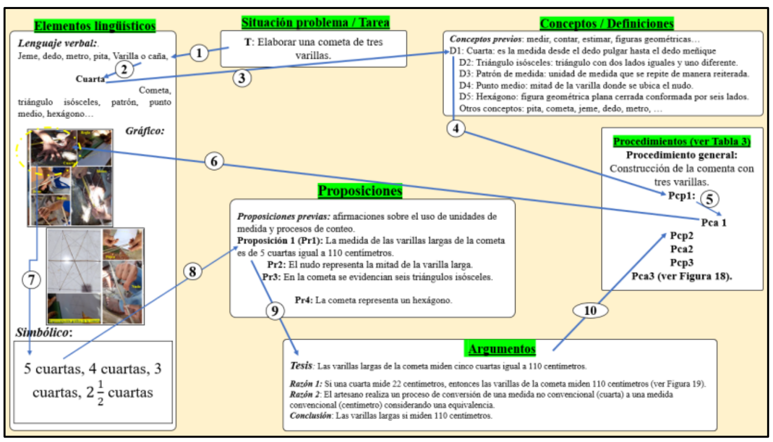
Razón 2: El artesano realiza un proceso de conversión de una medida no convencional (cuarta) a una medida convencional (centímetro) considerando una equivalencia.

Conclusión: Las varillas largas si miden 110 centímetros.

Fuente: Elaboración de los autores

Después de realizar la configuración de objetos primarios del artesano, se procede a relacionar los objetos por medio de funciones semióticas como se presenta en la Figura 18.

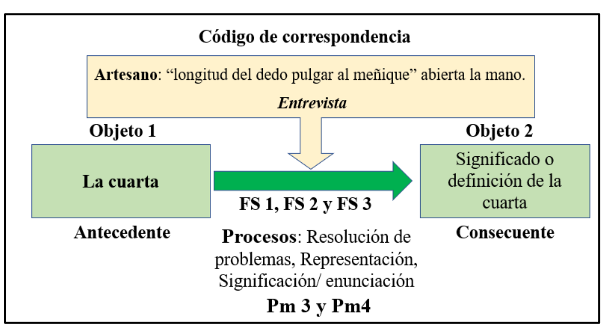
Figura 17 - Funciones semióticas establecidas entre los objetos primarios.



Fuente: Elaboración de los autores

En la Figura 19 solo se consideraron algunas funciones semióticas para evidenciar la relación entre los objetos primarios detallados en la configuración cognitiva. A continuación, se muestra el funcionamiento de la conexión de significado etnomatemático (ver Figura 21).

Figura 18 - Conexión de significado etnomatemático de la cuarta.



Fuente: Elaboración de los autores

3.3 Tercer desafío

Este desafío consiste en el análisis de la práctica de un profesor de matemática que establece conexiones matemáticas y etnomatemáticas en el aula de clases cuando construye cometas con sus estudiantes para trabajar conceptos geométricos. A diferencia de los desafíos anteriores, en el presente desafío se reflexiona en torno a las conexiones matemáticas y etnomatemática simultáneamente porque el profesor participante se ha dedicado a llevar y desarrollar resultados de investigaciones etnomatemáticas con los estudiantes en el aula de clases para obtener una mejor comprensión de los objetos matemáticos a través de artefactos y prácticas cotidianas. Seguidamente se presentan las prácticas etnomatemáticas (Pem) y matemáticas (Pm) del profesor (se omite la narrativa temporal por cuestiones de espacio).

Prácticas etnomatemáticas (Pem)

Pem1: El profesor asume la tarea de explicar la construcción de la cometa.
Pem2: Corta y empareja las varillas (popularmente llamados palitos de chuzo) quintándole las puntas con una tijera.
Pem3: El profesor midió las varillas largas de una cuarta más cuatro dedos y la varilla central una cuarta.
Pem4: Obtiene la varilla central midiendo con los cuatro dedos de la mano, marcó con un lápiz y cortó con la tijera para conseguir la varilla de una cuarta.
Pem5: Mide las varillas largas con una pitica o hilo, lo dobla por la mitad para encontrar el punto medio y nuevamente en la varilla marca con un lápiz.
Pem6: Amarra las varillas largas por la mitad dando veinte vueltas de hilo.
Pem7: Abre las varillas y luego por la mitad amarra la varilla del centro dando diez vueltas de hilo.
Pem8: Amarra las puntas de las varillas y simultáneamente verifica con la pitica que los triángulos formados sean isósceles.
Pem9: el profesor manifiestó a los estudiantes que la cometa representa un hexágono.

Prácticas matemáticas (Pm)

Por medio de la cometa, el profesor de matemáticas explica algunos conceptos geométricos evidenciando las siguientes prácticas matematicas:

Pm1: Explicar que en las cometas existen ángulos opuestos por el vértice.
Pm2: El profesor manifiesta que las cometas son representaciones de hexágonos, es decir, se establece una conexión entre la cometa y el hexágono.
Pm3: Enuncia que en la cometa hay otras figuras geométricas como el triángulo isósceles.
Pm4: Representa la cometa en el tablero y la relaciona con triángulos, por ejemplo, el triángulo AOB con vértices A, O y B y el triángulo EOD con vértices E, O y D.

Pm5: Afirma que la medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales porque son ángulos opuestos por el vértice.
Pm6: Explicó que en la cometa no solo se pueden trabajar ángulos y triángulos sino área, perímetro, entre otros conceptos geométricos.

Una vez se hallan identificado las Pem y Pm, se procede a construir la configuración cognitiva de objetos primarios (ver Tabla 4).

Tabla 4 – Configuración cognitiva de objetos primarios emergentes en la elaboración y explicación de cometas por el profesor

Situación problema/tarea	
T: Elaborar una cometa de tres varillas (prácticas etnomatemáticas).	T: Explicar que en las cometas existen ángulos opuestos por el vértice (prácticas matemáticas).
Elementos lingüísticos	
Verbal: varilla o caña, cuarta, dedo, pita, cometa, triángulo isósceles, punto medio, hexágono…	*Verbal*: varilla o caña, cuarta, dedo, cometa, triángulo isósceles, punto medio, hexágono, vértice, ángulo opuesto por el vértice.
Gráfico: representaciones de la cometa y las medidas (ver Figura 20a).	*Gráfico*: representaciones de las cometas como artefacto y representación del hexágono en la pizarra (ver Figura 20b).
Simbólico: una cuarta, 4 dedos.	*Simbólico*: $m\measuredangle AOB = m\measuredangle EOD$ $\angle AOB \cong \angle EOD$; vértices: A, B, C, E, D y O (ver Figura 20b).
Conceptos/Definiciones	
Conceptos previos: medir, contar, estimar, figuras geométricas…	Conceptos previos: medir, contar, estimar, figuras geométricas…
D1: Cuarta: es la medida desde el dedo pulgar al dedo meñique.	D1: Cuarta: es la medida desde el dedo pulgar al dedo meñique.
D2: Triángulo isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno diferente	D2: Triángulo isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno diferente
D3: Punto medio: mitad de la varilla donde se ubica el nudo.	D3: Punto medio: mitad de la varilla donde se ubica el nudo.
D4: Hexágono: figura geométrica plana cerrada conformada por seis lados.	D4: Hexágono: figura geométrica plana cerrada conformada por seis lados.

Figura 19 - Representaciones de la cometa.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Otros conceptos: pita, cometa, dedo, …	D6: Ángulo opuesto por el vértice: son ángulos opuestos entre sí donde se cruzan dos varillas o líneas rectas. Otros conceptos: pita, cometa, dedo, …
Proposiciones/propiedades	
Proposiciones previas: afirmaciones sobre el uso de unidades de medida y procesos de conteo. Proposición 1 (Pr1): La medida de las varillas largas de la cometa es de una cuarta más cuatro dedos. La varilla central mide una cuarta. Pr2: El nudo representa la mitad de la varilla larga. Pr3: En la cometa se evidencian seis triángulos isósceles. Pr4: La cometa representa un hexágono.	*Proposiciones previas:* afirmaciones sobre el uso de unidades de medida, ángulos, triángulos y procesos de conteo. Pr1: En la cometa se evidencian seis triángulos isósceles. Pr2: La medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales y congruentes. Pr3: La cometa representa un hexágono.
Procedimientos	
Procedimiento general: construcción de la comenta con tres varillas. Procedimiento principal 1 (Pcp1): Encontrar la medida de las varillas. Procedimiento auxiliar 1 (Pca 1): Corta los palillos y luego mide una cuarta y cuatro dedos. Pcp2: Encontrar la mitad de la varilla larga. Pca2: Medir la varilla con un hilo y luego, doblarla por la mitad. Pcp3: Estructurar triángulos isósceles en la cometa. Pca3: Al amarrar y unir los extremos de las varillas, simultáneamente se verifica que vayan quedando triángulos isósceles.	Procedimiento general: Explicar que en las cometas existen ángulos opuestos por el vértice. Pcp1: El profesor manifiesta que las cometas son representaciones de hexágonos. Pca: menciona que la cometa tiene seis lados. Pcp2: Encuentra que en la cometa hay otras figuras geométricas como el triángulo isósceles. Pcp3: Representa la cometa en el tablero y la relaciona con triángulos AOB y EOD. Pcp4: Afirma que la medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales y a su vez son congruentes.
Argumentos	
Argumento 1 (A1) *Tesis*: Las varillas largas de la cometa miden una cuarta más cuatro dedos. *Razón 1*: usa medidas no convencionales como la cuarta y los dedos. *Conclusión*: Las varillas largas si miden cuatro cuartas más cuatro dedos.	Argumento 4 (A4) *Tesis*: La medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales y congruentes. Razón 1: Son ángulos opuestos entre sí donde se cruzan dos varillas o líneas rectas. Razón 2: Los ángulos AOB y EOD son opuestos por el vértice. Conclusión: Los ángulos AOB y EOD tienen medidas iguales y son congruentes.

Fuente: Elaboración de los autores

4. Discusión y conclusiones

En el presente artículo se muestra el potencial y desafíos para analizar las conexiones matemáticas y etnomatemáticas en tres contextos de reflexión diferentes con base en el enfoque ontosemiótico. Se resalta que, en el primer análisis o desafío se enfatizó en solo conexiones matemáticas en la resolución de una tarea donde emergieron conexiones intramatemáticas (e.g procedimental, característica, representaciones diferentes, significado, entre otras). En el segundo desafío fue un análisis más centrado en la actividad matemática desencadenada al desarrollar una práctica cotidiana como la elaboración de cometas por un artesano, quien hizo conexiones de significado etnomatemático, luego se visualizaron conexiones de representaciones diferentes, características (de los triángulos y hexágono), procedimental, etc. Por último, se encuentra un contexto de reflexión donde se analizó la práctica de un profesor en el aula de clases, donde enseña contenido de geometría con base en la elaboración de cometas, iniciando con el establecimiento de conexiones etnomatemáticas en la construcción del artefacto y posteriormente, hizo conexiones matemáticas para explicar los ángulos opuestos por el vértice.

A diferencia de otras investigaciones (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2020), en el presente trabajo se muestra un análisis ontosemiótico de las conexiones no solo matemáticas sino también las etnomatemáticas por separado y simultáneamente cuando el profesor las usa en el aula de clases de matemáticas. Además, en este estudio se proponen las prácticas etnomatemáticas para cuando se analicen las matemáticas en las prácticas cotidianas y las conexiones se expresen en términos de prácticas, objetos, procesos y funciones semióticas.

Referencias

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F. Theories and empirical researches: towards a common framework. **Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**, 2006.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. Networking theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), **Theories of mathematics education. Advances in mathematics education**, pp. 589–592, 2010. New York: Springer.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (Eds). **Networking of theories as a research practice in mathematics education.** Dordrecht: Springer, 2014.

BIKNER-AHSBAHS, A.; VOHNS, A. Theories of and in Mathematics Education. In **Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research**, pp. 171-200, Cham: Springer, 2019.

BIKNER-AHSBAHS, A. Adaptive teaching of covariational reasoning: Networking “the way of being” on two layers. **The Journal of Mathematical Behavior**, London, 67, 2022, p. 1-13, 2022. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100967

BOERO, P.; DREYFUS, T.; GRAVEMEIJER, K.; GRAY, E.; HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B.; SIERPINSKA, A.; TALL, D. Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures. In: A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), **Proceedings of the 26th**

international conference on the psychology of mathematics education, v. 1, pp. 111–138. Norwich: East Anglia University/PME, 2002.

BORJI, V.; FONT, V.; ALAMOLHODAEI, H.; SÁNCHEZ, A. Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v.14, n. 6, p. 2301-2315, 2018. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

BORJI, V.; ERFANI, H.; FONT, V. A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, p. 1-19. 2019, DOI; https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1578904

BOSCH, M.; GASCÓN, J.; TRIGUEROS, M. Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: The case of APOS and the ATD. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 95, n.1, p. 39-52, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3

BUSINSKAS, A. M. **Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections**. 2008. PhD Thesis-Simon Fraser University. Canada.

CAMPO-MENESES, K.; GARCÍA-GARCÍA, J. Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 32, n. 3, p. 209-240, 2020. DOI: https://doi.org/10.24844/em3203.08

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. London and New York: Routledge, 2018.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad. Colección: Tendencias en educación matemática**. Belo Horizonte: Autêtica, 2001.

DOLORES-FLORES, C.; GARCÍA-GARCÍA, J. Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de Cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. **Bolema: Mathematics Education Bulletin**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 158–180, 2017. Available in: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 23–49, 2013. Available in: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8

EVITTS, T. **Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula**. 2004. PhD Thesis-Pennsylvania State University College of Education. EE. UU.

FONT, V. Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: Particular/general, representación, metáfora y contexto. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 19, n. 2, p. 95–128, 2007.

FONT, V.; TRIGUEROS, M.; BADILLO, E.; RUBIO, N. Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 91, n. 1, 107–122, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

FONT, V.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, 2013, v. 82, p. 97-124. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

FONT, V. Coordinación de Teorías en Educación Matemática: el caso del enfoque ontosemiótico. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 9, n. 20, 2016.

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES, C. Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 49, n. 2, p. 227–252, 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994.

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES, C. Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. **Mathematics Education Research Journal**, [s.l], 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM–The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J.; D., BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 37- 42, 2019.

GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P.; BURGOS, M. Concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico. **Revista Colombiana de Matemática Educativa**, Bogotá, v. 5, n. 2, p. 51-66, 2020.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.14, n. 3, p. 325-355, 1994.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research of mathematics teaching and learning**, pp. 65–79, Macmillan, 1992.

KIDRON, I.; BIKNER-AHSBAHS, A. Advancing research by means of the networking of theories. In A. Bikner-Ahsbahs, Ch., Knipping, & N. Presmeg (Eds.), **Approaches to qualitative methods in mathematics education—Examples of methodology and methods**, pp. 221–232. New York: Springer, 2015.

LEDEZMA, C.; FONT, V.; SALA, G. Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. **Mathematics Education Research Journal**, [s.l], p. 1-27, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

MHLOLO, M. K. Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, London, v.16, n. 2, p. 176–191, 2012. DOI: https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PINO-FAN, L.; GUZMÁN, I.; FONT, V.; DUVAL, R. Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. **PNA**, Granada, v. 11, n. 2, p. 97-124, 2017. DOI: https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6076

PREDIGER, S.; BIKNER-AHSBAHS, A.; ARZARELLO, F. Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. **ZDM-The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 40, n. 2, p. 165–178, 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. **ZDM-The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 40, p. 317–327, 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Explorando las conexiones entre sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas en el municipio de Baranoa. **IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH**, Chihuahua, v. 857, n. 11, p. 1-31, 2020.

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Conexiones etnomatemáticas entre conceptos geométricos en la elaboración de las tortillas de Chilpancingo, México. **Revista de investigación desarrollo e innovación**, Tunja, v. 11, n. 2, p. 273-296, 2021. DOI:

https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n2.2021.12756

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; ALSINA, Á. Networking Between Ethnomathematics, STEAM Education, and the Globalized Approach to Analyze Mathematical Connections in Daily Practices. **Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education**, London, v. 18, n. 3, p. 2-22, 2022. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/11710

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; CERVANTES-BARRAZA, J. A.; FONT, V. Exploring mathematical connections in the context of proof and mathematical argumentation: A new proposal of networking of theories. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 19, n. 5, p. 1-20, 2023. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/13157

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; ESCOBAR-RAMÍREZ, Y. Conexiones Etnomatemáticas en la Elaboración del Sancocho de Guandú y su Comercialización en Sibarco, Colombia. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, p. 971-1002, 2022. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a02

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; FONT, V.; BORJI, V.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M. Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 53, n. 9, p. 2364-2390, 2022a. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; FONT, V.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M. Literature review on networking of theories developed in mathematics education context. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,** London, v. 18, n. 11, p. 1-25, 2022b. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/12513

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F.; FONT, V. A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 53, n. 6, p. 1231-1256, 2020. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Autores

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto

Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa y Maestro en Ciencias Área Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero.

Profesor adscrito a la Universidad de la Costa en Colombia.

Línea de investigación: Conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde el enfoque ontosemiótico.

crodrigu79@cuc.edu.co

http://orcid.org/0000-0001-9922-4079

Universidad de la Costa (CUC)

Barranquilla, Colombia.

Vicenç Font

Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad de Barcelona (UB). Profesor adscrito al Departamento de Educación Lingüística, Literaria y Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemáticas de la Universidad de Barcelona (UB).

vfont@ub.edu

http://orcid.org/0000-0003-1405-0458

Universidad del Barcelona (UB)

Barcelona, España.

Línea de investigación: Análisis de la actividad matemática desde el enfoque ontosemiótico

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez
Doctora en Matemática Educativa por la Universidad de Salamanca, Maestra en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Licenciada en Matemáticas por la Universidad Veracruzana.

Profesora adscrita a la Universidad Autónoma de Guerrero.

Línea de investigación: Didáctica de la Matemática.

flor.rodriguez@uagro.mx

http://orcid.org/0000-0002-9596-4253

Como citar o artigo:

RODRIGUEZ-NIETO, C. A; FONT, V.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M. Desafíos experimentados al detallar el análisis de las conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde una visión ontosemiótica. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Questões e Métodos;** junio de 2023 / 509 – 538 DOI: 10.37618