

## **Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora**

**Maria Alice Veiga Ferreira de Souza**

alicevfs@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

*Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)*

Vila Velha, Brasil.

**Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues**

polianacar@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0002-2385-1727>

*Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)*

Vila Velha, Brasil.

**Camila Augusta do Nascimento Amaral**

cam.amaral@yahoo.com.br

<http://orcid.org/0000-0002-5721-7783>

*Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)*

Vila Velha, Brasil.

**Recebido:** 05/03/2023

**Aceito:** 17/04/2023

## **Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora**

### **Resumo**

Esse trabalho discute principais contribuições, limitações e desafios demonstrados por professores em formação, nos diferentes conteúdos matemáticos e pedagógicos à luz do Lesson Study (LS) no Grupo Colabora. Especificamente, nos propusemos a conhecer conteúdos matemáticos e pedagógicos que foram apropriados, refinados ou refutados pelos membros do Colabora em edições do LS, e identificar insumos que foram destaque para contribuições, limitações e desafios para as formações de professores ao longo dos 10 anos de estudos e práticas. O aporte teórico foi baseado em autores japoneses sobre LS; Shulman, Ball, Thames, Phelps, Hill, Carrillo-Yañez e colegas para a Formação de Professores de Matemática. A pesquisa configurou-se como qualitativa, com apoio documental e bibliográfico. As contribuições residiram na ampliação de estratégias de ensino e possibilidades pedagógicas diversificadas. Houve aprofundamento, construção e reconstrução de diferentes conceitos matemáticos, a exemplo de frações e volume que se configuraram como limitações superadas por meio dos planejamentos em LS.

**Palavras-chave:** Colabora. Conhecimento do Professor. Lesson Study. Formação de professores.

## **Contenidos matemáticos y pedagógicos: contribuciones, limitaciones y desafíos en las ediciones de Lesson Study en el Grupo Colabora**

### **Resumen**

Este trabajo discute los principales aportes, limitaciones y desafíos demostrados por los docentes en formación, en los diferentes contenidos matemáticos y pedagógicos a la luz del Lesson Study (LS) en el Grupo Colaborativo. Específicamente, nos propusimos conocer contenidos matemáticos y pedagógicos que fueron apropiados, refinados o refutados por los integrantes de la Colabora en ediciones de la LS e identificar insumos que se destacaron por aportes, limitaciones y desafíos para la formación de docentes a lo largo de los 10 años. de

estudios y prácticas. El soporte teórico se basó en autores japoneses en LS; Shulman, Ball, Thames, Phelps, Hill, Carrillo-Yañez y colegas de Formación de profesores de matemáticas. La investigación se configuró como cualitativa, con sustento documental y bibliográfico. Los aportes residieron en la ampliación de estrategias didácticas y posibilidades pedagógicas diversificadas. Se profundizó, construyó y reconstruyó diferentes conceptos matemáticos, como fracciones y volumen, que se configuraron como limitaciones superadas a través de la planificación en LS.

**Palabras-clave:** Grupo Colabora. Conocimiento del profesor. Lesson Study. Formación de Profesores.

### **Mathematical and pedagogical contents: contributions, limitations and challenges in Lesson Study editions in the Collaborative Group**

#### **Abstract**

This work discusses the main contributions, limitations, and challenges demonstrated by teachers in training in the different mathematical and pedagogical contents in the light of Lesson Study (LS) in the Collaborative Group. Specifically, we proposed to know mathematical and pedagogical contents that were appropriated, refined, or refuted by the members of the Collabora in editions of the LS and to identify inputs that were highlighted for contributions, limitations, and challenges for the formation of teachers throughout the ten years of studies and practices. Theoretical support was based on Japanese authors in LS; Shulman, Ball, Thames, Phelps, Hill, Carrillo-Yañez, and colleagues for Mathematics Teacher Training. The research was configured as qualitative, with documentary and bibliographic support. The contributions resided in the expansion of teaching strategies and diversified pedagogical possibilities. There was a deepening, construction, and reconstruction of different mathematical concepts, such as fractions and volume, configured as limitations overcome through planning in LS.

**Keywords:** Colabora Group. Knowledge of teacher. Lesson Study. Instruction of teachers.

#### **Introdução**

*A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.  
(Paulo Freire)*

A construção de aulas de matemática à luz do Lesson Study (LS) foi inaugurada no Brasil em 2010 (<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4412>) Mais tarde, surgiram trabalhos envolvendo a formação de professores que ensinam matemática baseados nesse *modus vivendi* japonês, com maior ênfase a partir de 2014 (RODRIGUES; AMARAL; SOUZA, 2023, no prelo).

Especificamente, no âmbito do Grupo de Pesquisa em Formação Colaborativa de Professores – Colabora, do qual somos parte ao lado de professores e pesquisadores da Educação Matemática, o desenvolvimento de aulas apoiadas no LS teve início em meados de 2013, visando, principalmente, à formação e à aprendizagem ampla e profunda de conteúdos matemáticos e pedagógicos.

Embora o Colabora trabalhe com LS há mais de dez anos, a apreensão dos insumos desse modo japonês de formar professores foi sendo incorporado e praticado em

investigações na medida das captações de informações, assimilações e compreensões emersas de estudos e diálogos com educadores japoneses. Como consequência, podemos dizer que as primeiras investigações no Colabora foram revestidas de características do LS, e não propriamente e integralmente fiel a tudo o que é indicado ser parte de um LS genuíno japonês (e.g., FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004; FUJII, 2014; TAKAHASHI; MCDUGAL, 2014; TAKAHASHI; YOSHIDA, 2004; TAKAHASHI, 2006; SOUZA; POWELL, 2023).

Essa trajetória de apropriação e refinamento de conhecimentos do LS sobre os diversos temas matemáticos e pedagógicos desenvolvidos no Colabora foi marcada por acertos e equívocos sobre a aprendizagem de professores e alunos que, após dez anos de estudos e práticas, nos habilitam reconhecê-los. Nem todos esses acertos e equívocos estão divulgados em canais escolares, acadêmicos e científicos, pelas limitações de tempo e espaço que a vida profissional nos impõe. Pela importância do tema para a comunidade da Educação Matemática e, especialmente, para a formação de professores, importa responder quais conteúdos matemáticos e pedagógicos foram apropriados, refinados ou refutados por membros do Colabora, em edições do LS, e identificar insumos que foram destaque para contribuições, limitações e desafios ao longo de dez anos de estudos e práticas no Colabora. Os insumos a que nos referimos têm a ver com idiossincrasias que educadores japoneses informam como característicos do LS e, portanto, são importantes serem mencionados. Optamos por não apenas sinalizar esses pontos característicos, mas informá-los como são nomeados na língua japonesa entre parênteses (e.g., *kyozaiikenkyu*, *bansho*, *shidosha*, etc.), visando a familiarizar e comunicar o leitor sobre termos tão comuns em textos escritos por autores japoneses.

As respostas emergiram de um empenho metodológico baseado em apoio documental e bibliográfico, a partir de 14 trabalhos investigativos realizados no seio do Colabora e apresentados no Quadro 1 nos itens: tema motivador; quantidade de professores-formadores (PF) e professores em formação (alunos-professores-AP); ano de início e; duração do LS em semanas. A pesquisa bibliográfica apoiou-se em fontes científicas com propósitos específicos (GIL, 2021). No nosso caso, o esteio veio, nomeadamente, de livros e artigos científicos. O lado documental se valeu de toda sorte de registros sonoros, pictóricos, escritos e não escritos que trouxeram ao primeiro plano dados para a investigação. As categorias de análise foram elencadas com base nos conteúdos matemáticos e pedagógicos codificados e emersos de registros verbais e escritos em áudios, vídeos e

planejamentos nas edições de LS. Três pesquisadoras – autoras deste artigo – codificaram os dados e os discutiram, cuja concordância culminou nos resultados apresentados adiante.

**Quadro 1** – Trabalhos investigativos do Colabora

Item	Tema motivador	PF	AP	Início (ano)	Tempo (sem.)
1	Problema: Idade do avô	5	9	2014	15
2	Problema: Escada rolante	5	9	2014	15
3	Problema: Pilhas	5	9	2014	15
4	Problema: Formiga	5	9	2014	15
5	Problema: Café com leite	5	12	2016	8
6	Conceito de área e perímetro	4	2	2017	6
7	Algoritmo da operação de divisão	4	3	2017	6
8	Problema: Geometria do táxi	5	17	2017	9
9	Problema: Peixes para contar e estimar	5	17	2018	5
10	Problema: Canil	2	7	2018	5
11	Conceito de volume	1	8	2018	12
12	Conceito de fração pela perspectiva de medição	5	4	2019	15
13	Conceito de fração pela perspectiva de medição	2	10	2020	12
14	Matemática na Astronomia	1	8	2020	41

**Fonte:** Dados da pesquisa, 2023.

De modo geral, as primeiras motivações para as edições de LS foram marcadas pela constatação de pouca experiência de alunos (do básico e superior) com resolução de problemas de matemática. Essa principal motivação foi gatilho para oito dos 14 LS no Colabora. Os problemas não eram triviais por serem considerados mal estruturados (STERNBERG, 2000; SOUZA, 2012), ou seja, quando não se sabe imediatamente a sequência de ações para solucioná-los, devendo o resolvidor lançar mão de todo o arcabouço de sua estrutura cognitiva para resolvê-lo. Todas as outras edições de LS foram motivadas por alguma dificuldade com conteúdo matemático e(ou) pedagógica quando de sua condução com alunos. Os encontros presenciais para planejamentos oscilavam entre duas e três horas, complementados com muitas interações por e-mails, WhatsApp, ligações telefônicas, etc.

Ademais, frequentemente, algumas edições de LS contaram com apoio e experiência de colegas professores de outras universidades quanto ao conteúdo e prática de ensino (*e.g.*, Ufes, Ufscar, Uesb, Unesp, Rutgers University) em edições construídas presencialmente e apenas uma a distância – a matemática na Astronomia. Além disso, nem todas as edições foram divulgadas em revistas, congressos ou outros meios rotineiros de divulgação para comunidade científica específica pelas limitações temporais. Deveriam ter sido, como o fazem educadores japoneses, vez que a popularização das aulas são uma maneira de contribuir com aprimoramento das aulas. Os teores dos LS poderiam alimentar ou subsidiar outros fóruns de formação de professores quanto aos conteúdos matemáticos e(ou) pedagógicos, cujas especificidades teóricas importam destacar no próximo tópico.

## **Formação de Professores: conhecimentos pedagógicos e de conteúdos matemáticos**

*Educação, não há nada maior no mundo. A educação moral de uma pessoa se estende a 10 mil pessoas. A educação de uma geração se expande por uma centena de gerações.*  
(Jigoro Kano)

É notório o interesse em âmbito nacional e internacional de pesquisadores e grupos de formadores de professores em entender e discutir questões relacionadas ao conhecimento profissional do professor de Matemática. Essas questões versam, principalmente, sobre o desenvolvimento de estudos associados ao reconhecimento e identificação do conhecimento do professor de Matemática de forma a impactar na melhoria da qualidade do ensino (SCHEINER *et al.*, 2017).

A atividade de ensinar matemática exige do professor conhecimento do conteúdo a ser ensinado e conhecimento pedagógico – temas da teoria do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo de Shulman (1986, 1987). Contudo, mesmo ciente de que o domínio do conteúdo é indispensável à formação do professor, a atividade de ensinar exige atenção especial para aspectos do saber pedagógico do conteúdo (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2015; BISOGNIN, 2021; SOUSA; COUTO, 2021).

Nos estudos de Shulman (1986, 1987) são apresentados três domínios que caracterizam os conhecimentos dos professores, com especial ênfase no conteúdo específico, cujas siglas e termos são mantidas originais na língua inglesa: (1) *subject matter content knowledge* (SMCK) – esses conhecimentos referem-se à compreensão de aspectos relacionados a conceitos e procedimentos, em que o professor deve ser capaz de relacionar verdades (proposições) em sala de aula e explicá-las teórica e experimentalmente. O professor precisa compreender o porquê das proposições para que possam ser justificadas; (2) *pedagogical content knowledge* (PCK) – esse conhecimento está ancorado em aspectos do conteúdo associados à forma de ensinar, e (3) *curricular knowledge* (CK) – pertence ao campo dos conhecimentos ligados a programas e materiais instrucionais disponíveis para cada nível de ensino, de forma que os professores sejam capazes de analisar sua indicação e contraíndicação de uso em cada situação proposta em sala de aula.

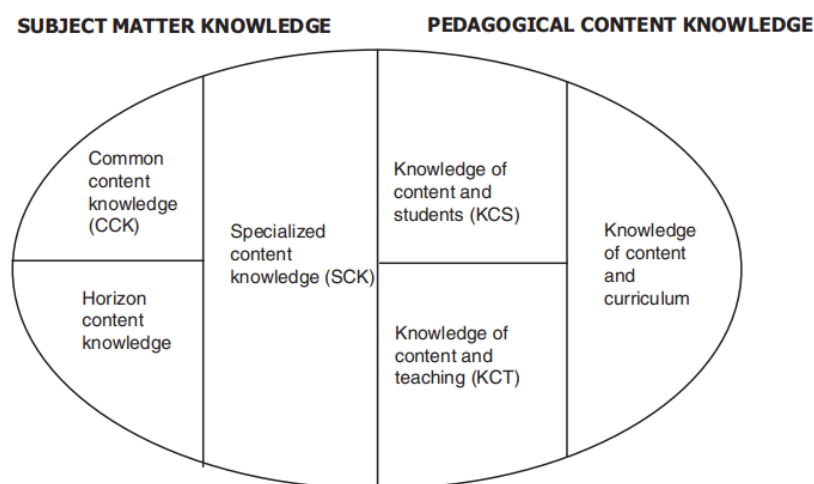
Shulman (1986), ao discutir os conhecimentos docentes, apresenta elementos para essa reflexão, entre eles: o conjunto de habilidades didáticas, a compreensão do conteúdo, os valores e as ações de docentes em sala de aula. A reunião desses elementos compõe a formação do professor na perspectiva desse autor. Quanto à formação do professor, Shulman (2014) declara que acontece por meio: (1) de formação acadêmica formal; (2) de materiais

e entorno educacional; (3) de formação acadêmica na área de conhecimento; e, (4) na sabedoria da prática.

A formação acadêmica do professor para Shulman (2014) importa: (1) no estabelecimento de processos de ensino e de aprendizagem ao desenvolver sua ideia de como seria uma educação de qualidade; (2) no material e no entorno educativo que dizem respeito ao currículo e às determinações dos processos educacionais, de modo a estabelecerem elementos para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem; e (3) na formação acadêmica na área de conhecimento que envolve o conteúdo a ser ensinado como fonte primária. Por fim, a sabedoria da prática são conhecimentos adquiridos nas ações do dia a dia, com observações e ideias compartilhadas.

A discussão de Shulman (1986) é compreendida por Ball, Thames e Phelps (2008), Hill *et al.* (2008) e Hill *et al.* (2011) como conhecimentos e habilidades essenciais para favorecer e complementar a atuação do professor. De forma geral, Ball, Thames e Phelps (2008) desenvolveram, a partir de estudos de Shulman (1986, 1987), o modelo de conhecimento de professores conhecido como *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Para Ball, Thames e Phelps (2008), os conhecimentos necessários ao professor são divididos em dois domínios e cada um deles subdividido em três subdomínios: (1) *subject matter knowledge* – (1.1) *common content knowledge* (CCK); (1.2) *horizon content knowledge*; (1.3) *specialized content knowledge* (SCK) e; (2) *pedagogical content knowledge* – (2.1) *knowledge of content and students* (KCS); (2.2) *knowledge of content and teaching* (KCT) e (2.3) *knowledge of content and curriculum* (vide Figura 1).

**Figura 1** – Domínios do MKT



**Fonte:** Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

Ball, Thames e Phelps (2008) definem o *common content knowledge* (CCK) como aqueles utilizados em contextos que não são exclusivos do ensino, assumem um caráter mais utilitário (e.g., como foi o caso do LS de área e perímetro, cujos estudos ampliaram a compreensão sobre esses conceitos para polígonos não retangulares). O *horizon content knowledge* está relacionado ao currículo, com uma visão referente à evolução dos conceitos matemáticos ao longo dos anos escolares (e.g., no LS de divisão, mesmo no ensino médio, a professora apresentou demanda referente ao conteúdo de forma evolutiva relacionada ao nível de conhecimento da turma).

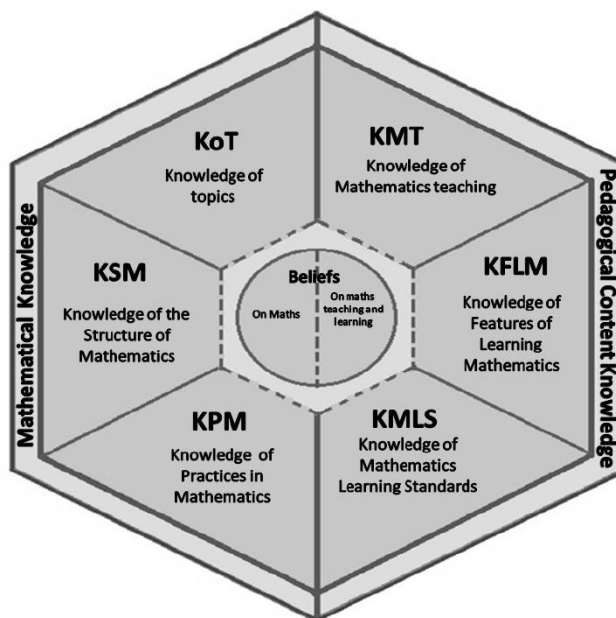
O *specialized content knowledge* (SCK) requer apropriação mais ampla e profunda de conceitos matemáticos, os quais instrumentalizam o professor em aspectos mais internos da matemática (e.g., identificar perspectivas alternativas da partição para o ensino de frações). Pelo lado do *pedagogical content knowledge*, Ball, Thames e Phelps (2008) definiram como a maneira de os conteúdos serem construídos e articulados – explicações, exemplos, demonstrações – considerando as experiências e bagagens cognitivas dos alunos. O conhecimento denominado por esses autores como *knowledge of content and students* (KCS) combina conhecimentos da matemática com a maneira como os alunos aprendem. O professor deve então, se preparar para esclarecer possíveis dúvidas, equívocos e reações dos alunos (e.g., no LS de frações foi necessário que os professores revissem seus conhecimentos matemáticos e redesenhassem suas práticas para serem capazes de preparar para o LS).

Além disso, o *knowledge of content and teaching* (KCT) deve considerar o conteúdo associado ao ensino e vincular a matemática às estratégias de abordagem (e.g., membros do Colabora tiveram oportunidade de desenvolver e aplicar o LS de fração utilizando as barras de Cuisenaire que será descrito nos resultados). Por fim, o *knowledge of content and curriculum* completam o conhecimento pedagógico ao equivalerem à construção das ideias matemáticas em consonância com as que foram construídas durante a escolaridade.

Ao corroborarem com os seis conhecimentos essenciais à profissão de professor, Hill *et al.* (2008) definem o Conhecimento Matemático para Ensinar não somente como a associação entre o conhecimento da matemática e o que apoia o ensino, mas acrescentam que a qualidade da matemática no ensino inclui analisar o processo pedagógico na construção de conceitos, visto que para o êxito da aprendizagem importa pouco ter uma preocupação singular com estratégias pedagógicas se a essência das explicações for confusa, distorcida ou com mínima substância matemática. Os estudos de Hill *et al.* (2008) e Hill *et al.* (2011) também destacam a relevância de um olhar cuidadoso sobre o processo de ensino.

Estudos dos autores antes citados inspiraram novas pesquisas em Educação Matemática preocupadas com o desenvolvimento e melhoria da Educação e do Ensino. Nessa seara, destacamos o estudo de Carrillo-Yañez *et al.* (2018) que apresenta um modelo intitulado *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), que considera os conhecimentos do professor de forma holística, ou seja, considera relevantes o estudo dos saberes e como o professor os coloca em prática. Para isso, Carrillo-Yañez *et al.* (2018) subdividem os conhecimentos em dois domínios: *Mathematical Knowledge* – MK e *Pedagogical Content Knowledge* – PCK. Cada domínio é subdividido em três dentro de uma perspectiva de crenças dos professores sobre a matemática (Figura 2). Segundo Carrillo-Yañez *et al.* (2018), as crenças são representadas no centro da figura hexagonal para destacar a relação entre elas e os conhecimentos apresentados.

**Figura 2** – Domínios e subdomínios do MTSK



Fonte: Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 6).

O hexágono da Figura 2 subdivide o MTSK em dois domínios de conhecimento e cada um subdividido em três. O domínio (1) *Mathematical Knowledge* (MK), tem subdomínios: (1.1) *Knowledge of Topics* (KoT) – esse conhecimento se refere aos componentes específicos da matemática, de acordo com o currículo de cada país; está associado aos conhecimentos dos conteúdos, como teoremas e conceitos (*e.g.*, fração, volume, perímetro, área – temas abordados em LS no Colabora apresentado em mais detalhes na próxima seção). A preocupação do KoT é com o conhecimento teórico do professor. Ele deve ser capaz de saber fazer (resolver) e contempla também o conhecimento



relacionado a diferentes formas de representar a matemática nos diferentes tipos de registros, como gráfico e pictográfico (e.g., o LS sobre o problema do Café com Leite).

O subdomínio (1.2) *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) diz respeito ao conhecimento das conexões que devem ser estabelecidas entre os itens da matemática. Esse subdomínio considera somente as relações sequenciais matemáticas, não priorizando relações curriculares. Carrillo-Yañez *et al.* (2018) estabelecem uma conexão interconceitual no KSM, considerando uma sequência de conteúdos matemáticos a partir de relações de aumento de complexidade ou simplificação.

Ao descreverem o subdomínio (1.3) *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM), Carrillo-Yañez *et al.* (2018) definem ‘prática’ mediante diferentes usos do termo pelos pesquisadores da área de Educação Matemática. Nesse subdomínio, o objeto da ‘prática’ é a própria matemática, e, por conseguinte, o cerne do estudo está no processamento da matemática e não na maneira como ela será ensinada. Aqui interpretamos a inteligência de Carrillo-Yañez *et al.* (2018) como o conhecimento do professor em saber demonstrar, justificar, dar exemplos (e.g., no LS de frações houve um momento de discussão e aprendizagem referente ao processo de ensino de frações por medição).

Carrillo-Yañez *et al.* (2018), concordam com Shulman (1986, 1987) sobre o domínio *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), e avançam com ideias sobre questões mais relacionadas à prática em sala de aula. Carrillo-Yañez *et al.* (2018) enfatizam que os conhecimentos para o ensino precisam de estar a todo momento articulados com o MK. Assim sendo, eles (2018, p.18, tradução nossa) não discutem nesse domínio “conhecimentos pedagógicos gerais aplicados a contextos matemáticos, mas apenas àqueles conhecimentos cujo conteúdo matemático determina o ensino-aprendizagem que se realiza.”

O domínio (2) PCK é subdividido por Carrillo-Yañez *et al.* (2018) em (2.1) *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) – nesse subdomínio os autores consideram os conhecimentos com foco no conteúdo escolar matemático. Aqui é considerada como fonte de conhecimento a experiência dos professores adquirida ao longo dos anos. O professor deve estar atento como os alunos pensam e constroem o conhecimento, e, com isso, “levam em consideração o conhecimento do professor sobre a maneira de raciocinar e proceder em matemática de seus alunos (em particular, seus erros, áreas de dificuldades e equívocos)” (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018, p. 19, tradução nossa). O KFLM abrange o entendimento dos alunos relacionados a dificuldades e facilidades que, por ventura, possam ter relação aos conteúdos. No KFLM é possível discutir aspectos

emocionais da aprendizagem – o que motiva um aluno, quais são seus interesses –, e também discussões sobre procedimentos e diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas matemáticos.

O subdomínio (2.2) *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) se conecta a saberes teóricos relacionados ao ensino de matemática adquiridos por meio de investigação (e.g., Lesson Study, Engenharia Didática), ou mesmo saberes pessoais incorporados pela experiência pessoal. Esse subdomínio também contempla conhecimentos de recursos e materiais didáticos. Carrillo-Yañez *et al.* (2018) destacam que, além da discussão sobre a importância da utilização dos recursos e materiais didáticos, esse subdomínio sublinha como eles podem ser potenciais para o ensino, minimizando possíveis dificuldades.

No subdomínio (2.3) *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), o professor adquire conhecimento curricular (conhecimento necessário para a primeira etapa do ciclo do LS) dos conteúdos matemáticos a serem ensinados. De acordo com Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 22, tradução nossa), o conhecimento do professor inclui “tudo o que o aluno deve ou é capaz de alcançar em determinado nível, em combinação com o que o estudante tem previamente estudado e as especificações para níveis subsequentes.”

A Figura 2 ainda introduz crenças e concepções relacionadas aos conhecimentos do professor. Carrillo-Yañez *et al.* (2014), convencidos pelos resultados de diversas investigações, ressaltam a importância das concepções. Essas investigações apontam deficiências em saberes específicos, a partir do que o pesquisador considera como conhecimento necessário, fundamental ou desejável para o professor de matemática. Dessa forma, as “concepções de matemática do pesquisador, seu ensino e aprendizagem influenciam constantemente o processo de tomada de decisão e a análise e interpretação das produções que compõem suas pesquisas” (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2014, p. 88, tradução nossa). Acreditamos, ao lado de Carrillo-Yañez *et al.* (2014), que as concepções do professor sobre a matemática e sua prática de ensino se conectam diretamente com o conhecimento que ele estabelece em cada um dos domínios e subdomínios do conhecimento do professor.

Esse arcabouço teórico subsidiou o processo de coleta de dados e posterior análise das edições de LS no Colabora (Quadro 1), que inaugura a próxima seção.

## **Resultados**

*Se você quer melhorar a educação, reúna professores para estudar os processos de ensino e aprendizagem na sala de aula.  
(James W. Stigler)*

A motivação para planejamentos de aulas baseadas em problemas mal estruturados repousava em argumentos de que os alunos deveriam desenvolver mais experiência com o processo de solução e desafio de situações às quais não estavam habituados. A resolução de problemas parecia tomar lugar como uma atividade complementar na disciplina de Matemática. Embora as alegações para esse desenvolvimento estivessem voltadas para os alunos, os professores mostraram necessidades de ampliação e refinamento de estratégias e do modo de condução dessas aulas. Esse fato ocorreu em todas as edições de LS baseadas em problemas mal estruturados (Quadro 1: itens 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10) (KFLM). Nenhum dos oito problemas tinham objetivo imediato de aprendizagem de algum conteúdo matemático. Ao contrário, por serem problemas mal estruturados, requeriam dos resolvidores consultas mentais a tudo o que aprenderam durante sua escolaridade e que poderiam auxiliá-los para pavimentação de um ou mais caminhos para solução.

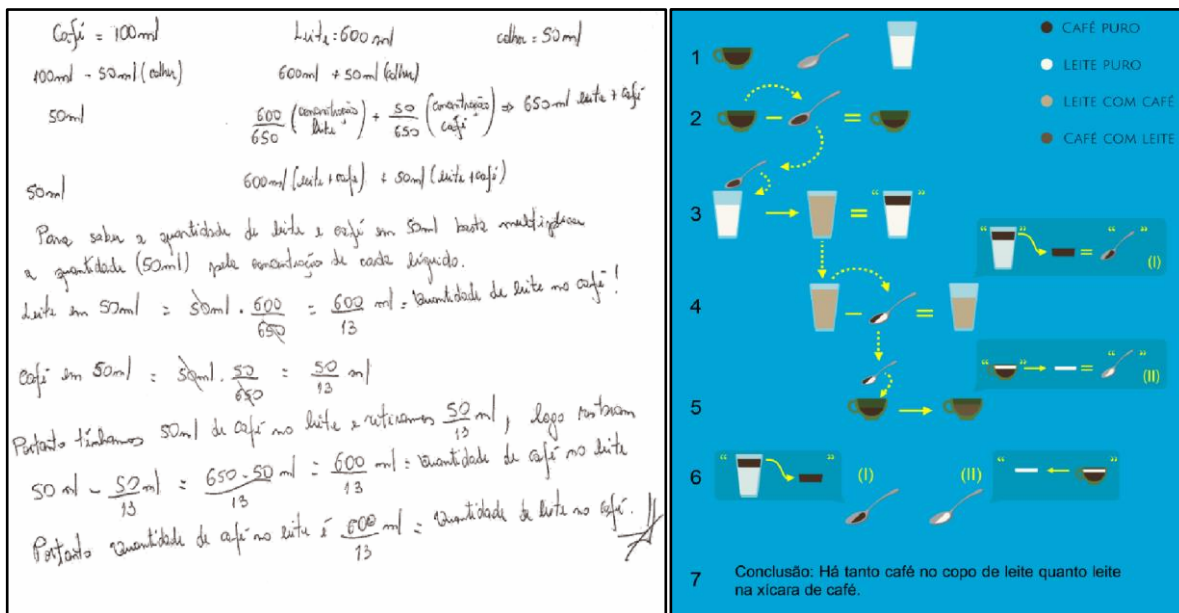
Em todos os problemas, houve intenso investimento colaborativo no Grupo para compreensão do problema, sobretudo o que não estava totalmente explícito no texto. Vejamos o problema do Café com Leite (SOUZA; WROBEL, 2017, p. 23)

Suponha que você tenha uma xícara cheia de café do respectivo e saborosíssimo líquido negro e um copo alto cheio de leite, cerca de 6 vezes o tamanho da xícara. Mergulhe uma colher de chá na xícara de café e despeje o seu conteúdo no copo de leite. Depois, volte a mergulhar a mesma colher no copo que agora tem a mistura e devolve-a à xícara de café. Completada essa operação, qual destas afirmações está certa? 1) Há mais café no copo de leite do que leite na xícara de café. 2) Há tanto café no copo de leite quanto leite na xícara de café. 3) Há mais leite na xícara de café do que café no copo de leite.

Nesse problema, as maiores dúvidas foram: “A altura ou volume do copo e da xícara fazem diferença?”; “Ao mergulharmos a colher de chá na xícara, o líquido vai transbordar?”; “Importa que o copo tenha cerca de 6 vezes o tamanho da xícara?”. Essas e outras dúvidas foram preocupação do Grupo e alimentaram o planejamento visando a conduzir o raciocínio dos alunos em suas reações por meio de questionamentos. A diversidade de estratégias (KMT) também foi objeto de atenção. Cada membro apresentou seu modo de raciocinar. Independentemente de estarem equivocados ou não, o fato é que o Grupo apresentou diversidade de visões: uso de porcentagens, atribuição de valores numéricos, álgebra considerando o copo seis vezes o tamanho da xícara, álgebra considerando o copo “A” vezes o tamanho da xícara, uso de analogia discreta e por meios pictóricos. Após, muito esforço e

dedicação, o Grupo reuniu diversos modos de resolvê-lo. Duas estratégias estão expostas na Figura 3.

**Figura 3** – Duas estratégias para resolução do problema do Café com Leite: Atribuição de valores numéricos (à esquerda) e pictórico (à direita)



Fonte: Souza e Wrobel (2017, p. 44 e 76, respectivamente).

Essa experiência fez com que os alunos-professores vivessem a formação e não apenas recebessem passivamente informação. Em termos de conteúdo, as edições de LS baseadas em problemas mal estruturados trouxeram diversidade de modos de raciocinar matematicamente (SCK). Não exatamente em conteúdo específico, mas vislumbrando e ampliando possibilidades outras trazidas por diferentes membros. Foi válido, no caso do Café com Leite, iniciar por atribuição de valores numéricos ou percentuais, como apoio inicial, mas todos sabiam que não poderíamos nos contentar com pouco, era preciso avançar para soluções genéricas, o que ocorreu a partir da intensa colaboração entre os membros.

Em termos pedagógicos, o Grupo planejou o uso da lousa (em japonês, a organização e disposição da produção de conhecimentos da aula na lousa é nomeada por *bansho*) e viveu as dificuldades de formulação de questionamentos (em japonês, a condução de aulas por questionamentos é nomeada de *hatsumon*) como principal condução do raciocínio e de respostas às reações e investidas dos alunos. Perguntar “O que você entendeu?” para alunos, dificilmente os leva a raciocinar. Ao contrário, perguntar “Quais são os dados do problema?” e “O que se quer como resposta?” ajuda muito mais. Além disso, os protocolos dos professores demonstraram exercício de auto policiamento para não responderem às próprias perguntas em sala de aula.

Sabíamos que deveríamos reservar momentos finais da aula para a síntese pelos alunos (em japonês, *neriage* significa a síntese da aprendizagem dos alunos ao final de uma aula), mas esse item foi precariamente levado a efeito, pois o tempo de aula foi insuficiente. Em outras palavras, o controle do tempo de aula para as ações não foi bem conduzido pelo Grupo. Faltou experiência!

A resolução de problemas não foi abandonada em edições sobre algum conteúdo específico, mas imersa em atividades que priorizassem alguma matemática específica. O uso de problemas ou de situações problemas não foram explicitamente e formalmente dispostos como nas oito edições com problemas mal estruturados, mas sempre estiveram presentes, como defendem autores e educadores japoneses (SHIMIZU, 1996; ISODA; OLFOS, 2009). Os LS sobre área e perímetro (MELLO; SOUZA; WROBEL, 2022), operação de divisão (CAMPOS *et al.*, 2021), volume (WANDERLEY; SOUZA, 2020), frações (AMARAL, 2021; AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021) e matemática na Astronomia (MENEGHEL *et al.*, no prelo) são exemplos.

Especificamente os LS sobre área, perímetro e volume contaram com aprendizagens originadas de artigos científicos e dissertações (em japonês, *kyozaikenkyu* tem a ver com estudo do material para a aula, de modo amplo) que ensinaram que esses temas deveriam seguir uma sequência de ensino por comparação, medição e produção (MELLO, 2018; WANDERLEY, 2019) (KMT). Curiosamente, o aprofundamento no estudo do conteúdo veio a reboque da pedagogia do tema. Em outras palavras, a compreensão dos conteúdos ocorreu com a aprendizagem de suas pedagogias (KCT). Essa experiência deixa a mensagem de que um LS não é engessado ou necessariamente sequencial em seus insumos, mas podendo acontecer de diferentes modos, desde que haja aprendizagem de conteúdos curriculares e de sua prática de ensino. Mais ainda, LS não dissocia a experiência formativa (que lhe é nuclear), da investigativa (o professor se torna um “pesquisador de aulas” e isso é diferente de como geralmente é concebido um professor-pesquisador pela comunidade científica da Educação).

No caso do LS sobre área e perímetro (MELLO; SOUZA; WROBEL, 2022), o Grupo aprendeu a compará-los por unidades de medida não padronizadas (*e.g.*, o quadradinho do geoplano como unidade de área e o lado desse quadradinho como unidade de comprimento; uso de barbantes coloridos, etc.). Houve entendimento da inexistência de relações de dependência entre áreas e perímetros e ampliaram compreensões sobre esses conceitos para polígonos não retangulares. Nessa esteira, também houve nesse LS o desenvolvimento do

*common content knowledge* (CCK) no processo formativo dos professores. Para o LS de volume, as principais apreensões matemáticas foram sobre discernimento dos conceitos de capacidade e volume, e o conceito de volume associado ao de massa, área e densidade (WANDERLEY; SOUZA, 2020). Ambos LS proporcionaram alargamento do conhecimento especializado, principalmente. Destacamos, também, que o LS de área e perímetro e o de volume são exemplos de formações de professores desenvolvidas pelo grupo Colabora que proporcionaram o desenvolvimento do conhecimento que Carrilho-Yañez *et al.* (2018) definem como *Knowledge of Topics* (KoT).

O LS sobre divisão (CAMPOS *et al.*, 2021) nasceu da constatação de uma professora do ensino médio brasileiro sobre a incompreensão da operação de divisão de seus alunos. Ademais, o repertório da professora estava restrito a um único modo “telegráfico” de ensinar. Os membros do Colabora, inicialmente, também não apresentaram alternativas para aquela aprendizagem. Esses fatos motivaram a realização de uma formação em LS, que não só proporcionou momentos de discussão e aprendizado sobre divisão, mas uma formação de professores em que foi possível discutir o *horizon content knowledge* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). No começo, todos se debruçaram sobre materiais científicos que versavam sobre o tema para alimentar debates no Grupo. Paralelamente, uma professora solicitou que cada membro, individualmente, dividisse 540 por 12. Os diferentes modos de operar muniram o Grupo de estratégias diversificadas a serem oferecidas aos alunos (KFLM). Esses modos, reunidos às indicações de artigos científicos, foram nominados e adotados pelo Grupo como: algoritmo padronizado, aproximação regressiva, aproximação progressiva, decomposição e método americano. Depois disso, o Grupo elaborou quatro problemas que explorassem: (1) Dividendo e divisor com números naturais e sem zero no quociente; (2) um zero no quociente; (3) dois zeros no quociente; (4) um número não inteiro no quociente e vírgula seguida de um zero. Esses quatro modos de divisão não foram aleatórios, mas emersos de um diagnóstico realizado pela professora regular daqueles alunos.

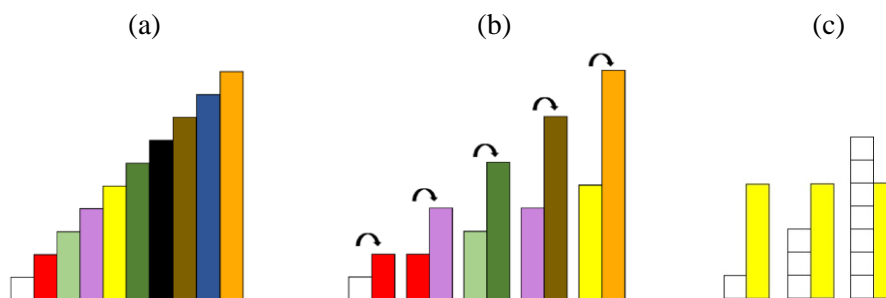
Particularmente, o estudo com frações (AMARAL, 2021; AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021) foi recorrentemente trazido às discussões no Grupo (e fora dele), pela importância e capilaridade que o tema possui na Matemática e em outras Ciências. Tradicionalmente aprendemos a pensar nas frações singularmente como divisão em partes iguais, ou seja, em uma perspectiva parte-todo (KPM). O Grupo aprendeu que essa singularidade é frágil para apreensão do conceito de modo amplo, gerando equívocos (*e.g.*, alunos são flagrados declarando  $5/7 = 3/4 + 2/3$ ) que impactam, por exemplo, na compreensão de frações impróprias (*e.g.*, alunos entendem que a quantidade de partes deve

ser sempre menor que a quantidade total de partes), na comparação de frações (*e.g.*, alunos declaram  $3/5 < 3/8$  porque  $5 < 8$ ) e em operações aritméticas sem compreensão de seus algoritmos (*e.g.*, alunos memorizam o algoritmo da divisão de frações sem compreendê-lo). Todas essas questões reafirmam quanto em um processo formativo de professores é necessária apropriação do *specialized content knowledge* (SCK). Nesse tema, Ball, Thames e Phelps (2008) destacam como conhecimentos necessários aos professores e que foram objeto de discussão e busca por respostas: “Por que conservamos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda para dividirmos frações?”, “Como comparar frações com denominadores e numeradores diferentes?”. No LS de frações houve muito investimento dos professores em estudos para construção e (re)construção de conceitos, reforçando o que Carrillo-Yañez *et al.* (2018) definem como conhecimento necessário ao professor – *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

Estudos (*kyozaiikenkyu*) no Colabora mostraram que alunos aproveitam o conceito de magnitude dos números naturais e o aplicam no campo dos números racionais indiscriminadamente, ou seja, empregam conceitos e propriedades dos naturais nos racionais (KMT). Durante o LS sobre frações, os professores ampliaram o *knowledge of content and students* (KCS), a partir de reflexões conjuntas e com apoio do professor e pesquisador Arthur Powell, que atuou como um *shidosha* (*shidosha*, em japonês, que dizer pessoa experiente no conteúdo e na prática de ensino de algum conteúdo curricular, no nosso caso, de frações). O Grupo aprendeu a trabalhar o conceito de fração pela perspectiva de medição, cuja noção remete à ontologia das frações como um problema de medir quantidades, que é a comparação multiplicativa de pares de magnitudes. A perspectiva de medição possui ontologia diferente da construção histórica de parte-todo, não oferecendo as dúvidas e equívocos que apresentamos nesse tema.

Em termos pedagógicos, o Grupo trabalhou com as barras de Cuisenaire no LS de frações – um meio que se mostrou relevante no processo formativo de professores como aprimoramento do *knowledge of content and teaching* (KCT). As mesmas ações poderiam ter sido realizadas com outros recursos (*e.g.*, barbantes, tiras de papel, etc.). Como ilustração, a Figura 4a apresenta as barras; a Figura 4b esboça relações da fração  $1/2$  pela perspectiva de medição e, a Figura 4c retrata a passagem natural das frações próprias para impróprias –  $1/5$ ,  $3/5$  e  $7/5$ .

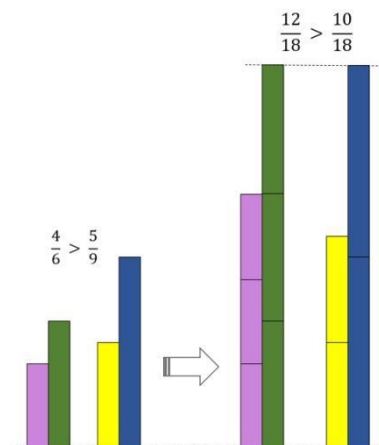
**Figura 4** - (a) Barras de Cuisenaire; (b) Relações de 1/2 medidas com as barras de Cuisenaire; (c) Passagem de frações próprias para impróprias



Fonte: Amaral (2021, p. 31, 36 e 58, respectivamente).

A comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes também é facilitada pela perspectiva de medição, oferecendo entendimento de propriedades particulares para os números racionais em relação aos números naturais. A Figura 5 esboça a comparação das magnitudes das frações  $\frac{4}{6}$  e  $\frac{5}{9}$  pelo entendimento de  $\frac{12}{18}$  e  $\frac{10}{18}$ . Observe o leitor que esse modo de conceber frações favorece entendimento de que  $\frac{4}{6}$  é maior do que  $\frac{5}{9}$ , embora 6 seja menor do que 9.

**Figura 5** – Comparação das magnitudes das frações  $\frac{4}{6}$  e  $\frac{5}{9}$



Fonte: Amaral (2021, p. 48).

Toda a pedagogia para construção de conceitos que envolvem frações pela perspectiva de medição pode ser trabalhada pela abordagem 4A-Instructional Model de autoria do Prof. Powell que inspiraram o planejamento de aulas nesse conteúdo pelos professores durante o *kyozaihenkyu*. O 4A-Instructional Model reúne quatro ações: Atuais, Virtuais, Escritas, Formalizadas. Embora haja um sequenciamento das quatro fases, é possível, e provável, que elas não ocorram de modo linear, a depender do domínio dos alunos em cada fase.



Em suma, o LS sobre frações levou membros do Colabora a reverem seus conhecimentos matemáticos no tema e a redesenharem suas práticas de ensino. O Grupo demonstrou convencimento sobre a refutação da singularidade e introdução do estudo de frações pela perspectiva parte-todo. Houve, igualmente, constatação de limitações nesse tema, levando-os ao alargamento de suas concepções (KFLM). Esses fatos foram facilitados, principalmente, pelo estudo do material (*kyozaiikenkyu*), que congrega aprendizagem profunda sobre um tema e, pela atuação e acompanhamento indiscutíveis do *shidosha*. A essa altura, o Grupo se encontrava mais confiante e alerta em atender aos pilares do LS genuinamente japonês, para além do ciclo planejamento-execução-reflexão.

Por fim, o LS de matemática na Astronomia, na verdade, não foi motivado inicialmente por qualquer dificuldade relatada de ensino ou aprendizagem de conteúdo curricular matemático ou pedagógico. O impulso inicial veio com a constatação de uma professora de Biologia que ministrava aulas de Ciências no sexto ano do ensino fundamental brasileiro. A professora argumentava que o ensino de Astronomia vinha sendo denunciado por pesquisadores como precário por carência epistemológica e(ou) pela prática equivocada em aulas, justificados principalmente pela inexistência ou falhas na formação de professores, ou por erros conceituais em livros didáticos – recurso frequentemente utilizado como orientador de planejamentos de aulas por professores (WATANABE; LO; SON, 2017; SCHEFFER; POWELL, 2019). Essa argumentação foi constatada na literatura científica específica (*e.g.*, LANGHI; NARDI, 2005; LANGHI, 2009; PINTO; SILVA; SILVA, 2018, CANALLE; TREVISAN; LATTARI, 1997), ao lado de dificuldades de ensino apresentadas por aquela professora. Dessas dificuldades nasceram justificativas para desenvolvimento de um LS com objetivo inaugural de planejar aulas para ensino do Movimento de Rotação da Terra.

A carência de conhecimentos veiculados em licenciaturas remete, por vezes, professores ao uso de ideias sobre algum fenômeno natural concebidas do senso comum (LANGHI; NARDI, 2005; LANGHI, 2009; TEODORO, 2000) emersas de crenças sustentadas pelo meio não-científico e incorporadas em aulas do ensino básico. As ideias mais comuns consideram a Terra como centro do Universo; associam a existência da Lua apenas durante a noite; justificam as estações do ano unicamente pela distância da Terra em relação ao Sol; alegam que as fases da Lua são resultados de eclipses lunares semanais e; compreendem equivocadamente o movimento das estrelas. Essa conjuntura deixa espaço para professores se basearem em argumentos não-científicos para o ensino de Astronomia

que depende, muitas vezes, de conceitos matemáticos que apoiem conhecimentos científicos.

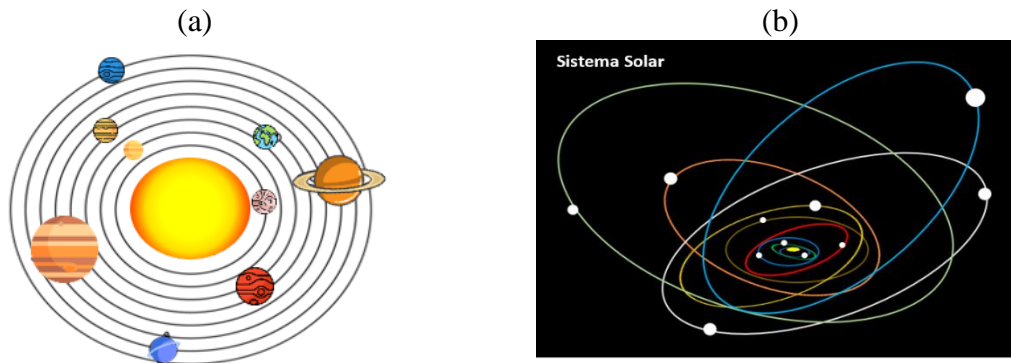
Os primeiros encontros para planejamento com nove professores – cinco de Matemática e quatro de Ciências – logo demandaram conhecimentos matemáticos – noções de ângulo, rotação, translação, diâmetro, direção, sentido, referencial, movimento aparente, escala de grandezas, circunferência, elipse, etc. Foi assim que dentro de um LS sobre Ciências, houve uma indispensável partição para planejamento de ensino de objetos matemáticos no contexto da Astronomia.

Embora esses temas parecessem triviais para os cinco professores de Matemática, ensiná-los à luz de objetos da Astronomia causou impactos que demandaram muito estudo e esforço do Grupo. Não era o caso de meramente explicar a matemática, mas de inseri-la como importante parte das explicações em meio aos estudos de Ciências, e, por essa razão, a compreensão de conteúdos da Astronomia eram essenciais. Além disso, o Grupo deveria considerar que as aulas estavam voltadas para alunos que não possuíam bagagem anterior de objetos matemáticos e astronômicos (KFLM), a despeito do que indicavam documentos normativos educacionais brasileiros utilizados pela escola da professora de Ciências. Não bastassem essas prerrogativas, todo o ensino deveria ser desenhado para aulas a distância, por imposição da pandemia de Covid-19. Em suma, durante o estudo do material no LS (*kyozaiikenkyu*), os professores deveriam estudar como ensinar conteúdos matemáticos a distância para explicar ideias da Astronomia para alunos que não dispunham de pré-requisitos e que apresentavam concepções do senso comum acerca do Universo (KMT).

O Grupo desde cedo constatou em livros didáticos uso inadequado de imagens para explicar ideias da matemática aplicadas na Astronomia (KMT). O estudo de Astronomia pode (e deve) empregar representações visuais como aliadas para ensino e compreensão do Universo. Essa estratégia, no entanto, requer atenção quanto às representações para que os benefícios não se transformem em prejuízos no conhecimento. Os professores observaram que o sistema solar é usualmente visualizado em materiais pedagógicos (KMT) de modo equivocado – o Sol no centro de um sistema cujos planetas giram ao seu redor em trajetórias circulares e concêntricas (Figura 6a) -, entretanto, afirmam que as trajetórias dos planetas são elípticas. Essa observação levou-os a explicar minimamente as diferenças entre órbitas circulares e elípticas, passando por explicações de excentricidade e de localização do Sol dentro do sistema planetário (KMLS). Além disso, os professores aprenderam que as trajetórias elípticas têm excentricidades diversas e não estão no mesmo plano. Após as

devidas explicações a respeito das ideias de circunferência, elipse, excentricidade e plano, os professores desenharam a Figura 6b como exemplo do que estavam a dizer.

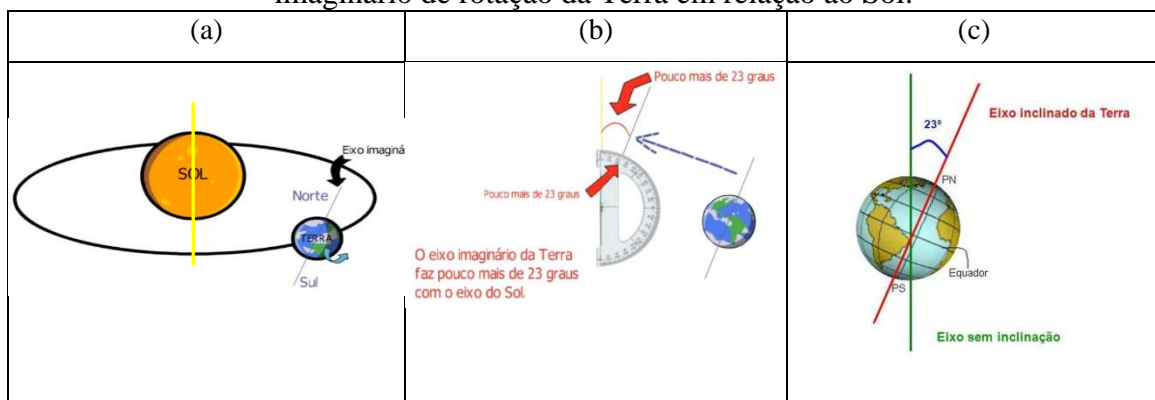
**Figura 6** – Trajetória circular e elípticas dos planetas ao redor do Sol



Fonte: Acervo das autoras, 2023.

Outros desafios foram compulsórios para planejamento de aulas para construção das ideias de direção, sentido, referencial e movimento aparente, que tangenciavam noções de álgebra linear – vetores (KMLS). Esses conceitos integrariam algo bem mais desafiador – o ensino de ângulo no espaço tridimensional. Como ensinar ângulo de inclinação do eixo imaginário da Terra em relação ao Sol? Após extensos debates e visando a desenvolver a ideia em vez de declarar a informação, o Grupo decidiu pela elaboração de uma videoaula que ensinaria o uso de um transferidor. A partir de alguns debates, os professores imaginaram que os alunos estariam aptos a compreender explicações sobre o ângulo de inclinação do eixo imaginário de rotação da Terra (Figura 7a) com auxílio de um transferidor (Figura 7b). As ideias apresentadas nas Figuras “7a” e “7b”, permitiram a construção da noção espacial do ângulo que está apresentada na Figura “7c”.

**Figura 7** – Imagens extraídas de partes da videoaula sobre o ângulo de inclinação do eixo imaginário de rotação da Terra em relação ao Sol.

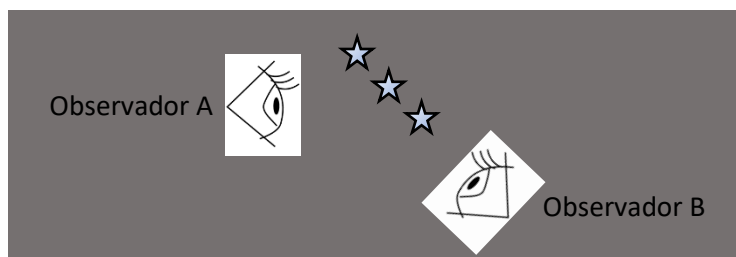


Fonte: Acervo das autoras, 2023.

O planejamento também deveria conter estudo sobre as constelações por meio de mapas celestes. O *kyozaikenkyu* oportunizou aos professores conhecer que as constelações são “vistas” de modo particular por povos diferentes, principalmente porque: (1) estão em hemisférios diferentes e(ou), (2) ainda que estejam no mesmo hemisfério, “organizam” ou agrupam as estrelas de modo diverso (KMT). Por exemplo, a disposição de três estrelas assume perspectivas diferentes para observadores em localizações diversas na Terra. Na Figura 8, o observador “A” vê três estrelas e o observador “B” vê apenas uma.

Assim, as estrelas que formam a constelação do Cruzeiro do Sul no Brasil, não necessariamente são do mesmo modo vistas por pessoas em outras localizações, a exemplo dos chineses. Esse tema foi aprofundado no *kyozaikenkyu*, mas os professores decidiram que o mais indicado para o momento era explorar as principais constelações adotadas pelo meio científico brasileiro – Cruzeiro do Sul, Hydra, Escorpião e Coroa Austral – uma vez que o objetivo era o de ensinar os alunos a identificar estrelas e constelações no céu, em determinado dia e localização na Terra, a partir da “leitura” em um mapa celeste, e não o de conhecer as diferentes constelações adotadas por pessoas em outras localidades (KMT).

**Figura 8** – Perspectivas diversas para observação de três estrelas



**Fonte:** Acervo das autoras, 2023.

Enfim, muito mais do que planejar aulas para desenvolvimento de noções da Astronomia, os professores deveriam ter atenção à construção de noções matemáticas que iriam impactar em estudos futuros na disciplina de Matemática ou outras. Esses foram exemplos de desafios enfrentados pelo Grupo, que apontaram limitações de conhecimentos (matemáticos e astronômicos) vencidos colaborativamente em um *kyozaikenkyu* e que esperamos ser gatilho para outras mais robustas e criativas.

### À guisa de conclusão

*Em uma época em que tantas políticas educacionais falham em reconhecer e estimular a capacidade de os professores melhorarem o ensino, nos sentimos enormemente gratas pelo aprendizado que as lições da comunidade de Lesson Study nos trouxeram.*

*(Catherine Lewis e Jacqueline Hurd)*

A presente investigação foi apoiada em teorias que versam sobre a formação de professores, nomeadamente em autores como Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Hill *et al.* (2008), Hill *et al.* (2011) e Carrillo-Yañez *et al.* (2018). A partir dessas teorias foi possível identificar **apropriação** de **conceitos matemáticos** pelos membros do Colabora, a exemplo de frações pela perspectiva de medição, de volume associado aos conceitos de massa, área e densidade e, inexistência de relações de dependência entre áreas e perímetros. De modo geral, foram **refinados** entendimentos sobre problemas matemáticos considerados mal estruturados, conceitos matemáticos aplicados à Astronomia e aprimoramento das diferenças entre as propriedades matemáticas de números naturais em relação aos racionais. O Grupo **refutou** estudos de frações baseados singularmente na perspectiva parte-todo.

Em termos **pedagógicos**, foram constatadas contribuições dos LS para ensino de todos os conteúdos matemáticos, sobretudo a diversificação de estratégias para a divisão, o modo de calcular ângulos entre figuras espaciais e planejamentos apoiados no 4A-Instructional Model para as frações. Além disso, a resolução de problemas passou a ser mais do que uma atividade complementar, sendo concebida como promotora para construção de noções matemáticas.

Em relação aos **insumos** do LS, embora todos tenham de algum modo contribuído para inaugurar nova maneira de ver e conceber conteúdos matemáticos e pedagógicos, alguns necessitam maior tempo de maturação: (1) O *hatsumon* não é trivial. Professores estão habituados a questionar alunos e responderem aos próprios questionamentos. Há uma ansiedade que exige atenção ao tempo e ritmo de quem está a aprender, seja aluno ou professor, se constituindo como um desafio; (2) A limitada experiência com planejamentos em LS prejudicam o controle do tempo de aula e, com isso, o *neriage* pode ficar sem ser desenvolvido; (3) A diversificação de estratégias promoveu alargamento da aprendizagem de conteúdos curriculares e pedagógicos, sobretudo no LS sobre o problema do Café com Leite e no LS sobre a operação de divisão; (4) O *bansho* é um desafio, pois toda a produção de conhecimento da aula deve estar registrada na lousa para que os alunos tenham oportunidade de expandir seus modos de conceberem o mesmo problema ou objeto. Ademais, vale incluir no rol de benefícios do LS para a formação de professores a colaboração entre os participantes, a postura de professor como pesquisador de aulas e a busca por pessoas que atuem como *shidosha*. De modo especial, o *kyozaikenkyu* reúne

muitos desses insumos, marcando a singularidade de um LS genuinamente japonês frente a quaisquer iniciativas que o concebiam como o simples planejar-aplicar-refletir aulas.

É notória a importância de discussões sobre temas matemáticos na perspectiva de formações de professores de matemática, bem como a relevância de conhecimentos de docentes em processos formativos, inclusive com possíveis impactos para a comunidade de educadores matemáticos.

## Referências

AMARAL, C. A. do N. **Conceito de fração pela perspectiva de medição**. Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/1439>. Acesso em 03 jan. 2023.

AMARAL, C. A. do N.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. **Fração à moda antiga**. Vitória: Editora Ifes, 2021.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. C. Content Knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov. 2008. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/255647628\\_Content\\_Knowledge\\_for\\_Teaching\\_What\\_Makes\\_It\\_Special](https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special). Acesso em: 10 jan. 2023.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem Matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-19, 2021. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2927>. Acesso em: 09 fev. 2023.

CAMPOS, N. Q.; WROBEL, J. S.; SOUZA M. A. V. F. de; PRANE, B. Z. D. **Dividir e Compartilhar**. Vila Velha: Editora Edifes, 2021.

CANALLE, J. B. G.; TREVISAN, R. H.; LATTARI, C. J. B. Análise do conteúdo de Astronomia de livros de Geografia de 1º grau. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v.14, n.3, p. 254-263, 1997.

CARRILLO-YANEZ, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUNOZ-CATALÁN, M. C. The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model. **Research in Mathematics Education**, Londres, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>. Acesso em: 22 jan. 2023.

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS, L. C., MONTES, M. Á., ESCUDERO, D., & MEDRANO, E. F. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. 2014.

FERNANDEZ, C; YOSHIDA, M. **Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning**. New Jersey, EUA: Autores Associados; 2004, 250p

FUJII, T. Implementing japanese lesson study in foreign countries: misconceptions reviewed. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 2-18, 2014.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

HILL, H.; BLUNK, M.; CHARALAMBOUS, C.; LEWIS, J.; PHELPS, G.; SLEEP, L.; BALL, D. L. Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. **Cognition and Instruction**, v. 26, p. 430-511, out. 2008. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/247502158\\_Mathematical\\_Knowledge\\_for\\_Teaching\\_and\\_the\\_Mathematical\\_Quality\\_of\\_Instruction\\_An\\_Exploratory\\_Study](https://www.researchgate.net/publication/247502158_Mathematical_Knowledge_for_Teaching_and_the_Mathematical_Quality_of_Instruction_An_Exploratory_Study). Acesso em: 14 jan. 2023.

HILL, H.; BALL, D. L.; BASS, H.; BLUNK, M.; BRACH, K.; CHARALAMBOUS, C.; COLE, Y.; DEAN, C.; DELANEY, S.; ESKELSON, S.; GOFFNEY, I. M.; LEWIS, J.; PHELPS, G.; SLEEP, L.; THAMES, M.; ZOPF, D. Measuring the Mathematical quality of instruction: Learning Mathematics for Teaching Project. **Journal for Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 1, p. 25-47, 2011.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El enfoque de resolución de problemas**. Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

LANGHI, R. **Astronomia nos anos iniciais do ensino fundamental: repensando a formação de professores**. 370p. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) - Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru. 2009.

LANGHI, R.; NARDI, R.. Dificuldades interpretadas nos discursos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação ao ensino da Astronomia. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, v. 2, p. 75-91, 2005.

MELLO, L. F. de. **Formação do conceito de área e perímetro a partir de aulas baseadas no modelo Lesson Study**. Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MELLO, L. F. de; SOUZA M. A. V. F. de; WROBEL, J. S. **Espaços e contornos da praça dos sonhos**. Vila Velha: Editora Edifes, 2022.

MELVILLE, M. D. **Kyozaikenkyu: An In-Depth Look into Japanese Educators' Daily Planning Practices**. Tese (Doutorado) – Brigham Young University, Provo, 2017. Disponível em: <https://scholarsarchive.byu.edu/etd/6515>. Acesso em: 01 fev. 2023.

MENEGHEL, C. A.; PINHAL, D. V. de R.; SILVA, R. S. de O. S.; SOUZA, M. A. V. F. de; NASCIMENTO, L. M. do; COSTA, K. M. da; LEFFLER, R.; MARTINS, F. S.; MACHADO, R. M. **Matemática do Dia e da Noite**. Livro 5. Série: Lesson Study em Matemática. Editora: Edifes. no prelo.

OLFOS, R.; ISODA, M.; ESTRELLA, S. Más de una década de estudio de clases en chile: hallazgos y avances. **Paradigma**, v. XLI, p. 190-221, 2020. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p190-221.id871>.

PINTO, C. M. S. F.; SILVA, J. P. G.; SILVA, M. F. A. A. Dificuldades no ensino de Astronomia em sala de aula: um relato de caso. **Revista Vivências em Ensino de Ciências**, v. 2, p. 65-75. 2018.

RANGEL, L.; GIRALDO, V. A.; MACULAN, N. Matemática elementar e conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. *In: XIV CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Anais do XIV CIAEM*. 2015.

RODRIGUES, P. F. C.; AMARAL, C. A. do N.; SOUZA, M. A. V. F. de. Lesson Study na Formação de Professores: um mapeamento de trabalhos científicos realizados no Brasil. *In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE LESSON STUDY NO ENSINO DE MATEMÁTICA. Anais do II SILSEM*. 2023, no prelo.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, v. 1, n. 3, p. 476-503, 1 set. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.33532/revemop.v1n3a08>. Acesso em: 02 fev. 2023.

SCHEINER, T.; MONTES, M. A.; GODINO, J. D.; CARRILLO, J.; PINOFAN, L. R. What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, n. 1, p. 153-172, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>. Acesso em: 05 fev. 2023.

SHIMIZU, Y. Some pluses and minuses of “typical pattern” in mathematics lessons: A Japanese perspective. **Bulletin of the Center for Research and Guidance for Teaching Practice**, v. 20, p. 35–42, 1996.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: [https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman\\_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching\\_1986-jy.pdf](https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching_1986-jy.pdf). Acesso em: 15 jan. 2023.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987. Disponível em: <https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2023.

SHULMAN, L. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. Tradução de Leda Beck. **Cadernos Cenpec**, v. 4, n. 2, p. 196-229, dez. 2014. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/5233/42637061d788ffdefc31f108c6e3369b8e7a.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2023.

SOUZA, H. de J. de; COUTO, M. E. S. Desenvolvimento profissional de professores: um olhar para o ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-25, 2021. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2882>. Acesso em: 09 fev. 2023.

SOUZA, M. A. V. F. de. A produção de significados e a representação mental na solução de problemas mal-estruturados de matemática. **Boletim Gepem**, n. 60, 2012. p. 129-144. <http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.007>. Acesso em: 18 jan. 2023.



SOUZA, M. A. V. F. de; POWELL, A. B. Kyozaikenkyu: essential lesson planning in japanese lesson study. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 13, 2023. p. 1-24.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S. **Café, leite e matemática**. Vila Velha: Editora Edifes, 2017.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 2000.

TAKAHASHI, A.; MCDUGAL, T. Implementing a new national curriculum: a Japanese public school's two years lesson-study project. *In*: KARP, Karen.; MCDUFFIE, Amy Roth. (Ed.). **Using research to improve instruction**. Reston, VA: NCTM, 2014. p. 13-22.

TAKAHASHI, A.; YOSHIDA, M. Ideas for establishing Lesson-Study communities. **Teaching Children Mathematics**, p. 436–443, may 2004.

TAKAHASHI, A. Characteristics of Japanese mathematics lessons. **Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics**, v. 25, p. 37–44, 2006

TEODORO, S. R. **A história da ciência e as concepções alternativas de estudantes como subsídios para o planejamento de um curso sobre atração gravitacional**. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Ciências, Unesp, Bauru. 2000.

WANDERLEY, R. A. J.; SOUZA, M. A. V. F. de. Lesson Study como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática sobre o Conceito de Volume. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, p. 1-20, 2020.

WANDERLEY, R. A. J. **Algumas contribuições do Lesson Study para a formação do professor de matemática em aulas que promovam a construção do conceito de volume**. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

WATANABE, T.; LO, J.-J.; SON, J.-W. Intended treatment of fractions and fractions operations in mathematics curricula from Japan, Korea and Taiwan. *In*: SON, J.-W. (Org.). **What Matters?** Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education. Springer International Publishing, 2017. p. 33-62. Disponível em: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-51187-0\\_2](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-51187-0_2). Acesso em: 8 jan. 2023.

#### **Autores**

***Maria Alice Veiga Ferreira de Souza***

Graduação em Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo  
Educação Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo  
Psicologia da Educação Matemática – Universidade Estadual de Campinas  
Instituto Federal do Espírito Santo  
Grupo Colabora e Gepeme – Linha: Formação de Professores  
alicevfs@gmail.com  
<http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

***Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues***

Licenciatura em Matemática – Universidade Federal Fluminense  
Engenharia de Produção – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense  
Grupo Colabora – Linha: Formação de Professores  
polianacar@gmail.com  
<http://orcid.org/0000-0002-2385-1727>

***Camila Augusta do Nascimento Amaral***

Licenciatura em Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo  
Educação em Ciências e Matemática – Instituto Federal do Espírito Santo  
Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo  
Grupo Colabora e Gepeme – Linha: Formação de Professores  
cam.amaral@yahoo.com.br  
<http://orcid.org/0000-0002-5721-7783>

**Como citar o artigo:**

SOUZA, M.A.V.F., RODRIGUES, P.F.C., AMARAL, C.A.N. Conteúdos matemáticos e pedagógicos: contribuições, limitações e desafios em edições do Lesson Study no Grupo Colabora. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 187 – 212.