Contributos do Contexto da Tarefa na Abordagem de Máximos e Mínimos em um Lesson Study em Cálculo

Adriana Richit
adrianarichit@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0778-8198
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS)
Erechim, Brasil.

Luiz Augusto Richit
luizaugustorichit@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3054-4933
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Porto Alegre, Brasil.

Andriceli Richter
andricelirichit@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1578-2821
Instituto Federal Catarinense (IFC)
Concórdia, Brasil.

Recibido: 07/02/2023 **Aceptado:** 17/04/2023

Resumo

A abordagem do Cálculo em cursos universitários, tais como a Licenciatura em Matemática, reveste-se de importância devido ao papel dessa componente curricular na formação dos futuros professores, assim como pelo fato de que os conceitos do Cálculo constituem as ferramentas matemáticas essenciais para a análise de fenômenos em distintos campos do conhecimento. A pesquisa orientou-se pela questão "De que forma o contexto que embasa a tarefa para a aula de investigação pode influenciar a interpretação e abordagem do objeto matemático abordado em lesson study"? A investigação, de natureza qualitativa e interpretativa, foi realizada em um lesson study sobre 'Máximos e Mínimos em Cálculo', ao longo de doze encontros semanais de duas horas. Envolveu oito professores de instituições de Ensino Superior, os quais se dedicam à formação de futuros professores de Matemática. A análise apontou influências em três perspectivas: interpretação da tarefa, mobilização de conceitos e representações e formulação de conclusões.

Palavras-chave: Ensino Superior. Lesson Study. Ensino de Cálculo. Máximos e Mínimos.

Aportes del Contexto de Tarea en el Abordaje de Máximos y Mínimos en un Estudio de Clase en Cálculo

Resumen

El abordaje del Cálculo en cursos universitarios, como la Licenciatura en Matemáticas, es de importancia por el papel de este componente curricular en la formación de los futuros docentes, así como por el hecho de que los conceptos del Cálculo constituyen las herramientas matemáticas esenciales para el análisis de fenómenos en diferentes campos del conocimiento. La investigación estuvo guiada por la pregunta "¿Cómo el contexto que sustenta la tarea para la

clase de investigación puede influir en la interpretación y abordaje del objeto matemático abordado en el estudio de clase”? La investigación, de carácter cualitativo e interpretativo, se llevó a cabo en un estudio de clase sobre ‘Máximos y Mínimos en Cálculo’, a lo largo de doce encuentros semanales de dos horas. Involucró a ocho profesores de instituciones de educación superior, quienes se dedican a formar a los futuros profesores de Matemáticas. El análisis mostró influencias en tres perspectivas: interpretación de tareas, movilización de conceptos y representaciones y formulación de conclusiones.
Palabras clave: Enseñanza superior. Estudio de clase. Enseñanza del Cálculo. Máximo y Mínimo.

Contributions of Task Context in Maximums and Minimums Approach in a Lesson Study of Calculus

Abstract

The approach of Calculus in university courses, such as courses in undergraduate education of future math teachers, is of importance due to the role of this curricular component in the pre-service teacher education, as well as the fact that the concepts of Calculus constitute the essential mathematical tools for the analysis of phenomena in different fields of knowledge. The research was guided by the question “How can the context that supports the task for the research lesson influence the interpretation and approach of the mathematical object addressed in the lesson study”? The investigation, of a qualitative and interpretative nature, was carried out in a lesson study on Maximums and Minimums in Calculus, over twelve weekly meetings. The lesson study involved eight professors from higher education institutions, who are dedicated to education of prospective mathematics teachers. The analysis highlighted influences in three perspectives: task interpretation, mobilization of concepts and representations, and formulation of conclusions.
Keywords: Higher education. Lesson Study. Calculus teaching. Maximums and Minimums.

Introducción

O Cálculo caracteriza-se pela formalização de conceitos e resultados relacionados às variações e mudanças de valores mediante incrementos/decrementos. Os estudantes são instruídos a representar, com rigor, ideias muitas vezes intuitivas (Moreno-Armella, 2021) e manipular matematicamente símbolos e significados que em parte são pioneiramente apresentados neste curso (Alvine, Judson, Schein y Yoshida, 2007). Essa apresentação é convencionalmente articulada por meio de representações gráficas e geométricas com o objetivo de oferecer recursos de interpretação e conectar esses conceitos e significados (Tallman, Reed, Oehrtman y Carlson, 2021; Larios, Páez y Moreno, 2011). Conceitos tais como derivada são aplicados mais tarde na resolução de problemas de maximização e minimização. Promover essa experiência pode potencializar a construção de conhecimentos, corrobora a importância do estudo do Cálculo e atende a uma frequente solicitação dos alunos: a aplicação de conceitos.

Porém, a aprendizagem e as dificuldades dos alunos são temáticas recorrentemente discutidas no ensino de Cálculo, para as quais alternativas e abordagens são desenvolvidas e analisadas (Cury, 2004). Um exemplo de abordagem que tem se destacado por seu potencial para promover mudanças no ensino de Cálculo é o lesson study (Alvine et al., 2007; Becker, Ghenciu, Horak y Schroeder, 2008; Fajar, Harahap, Sukarsih, Rohaeni y Suhaedi, 2017; Lasut, 2013; Richit, Ponte y Richit, 2022), que caracteriza um dispositivo de desenvolvimento profissional, de natureza colaborativa e reflexiva, centrado na prática letiva (Lewis, 2002; Richit, Ponte y Tomasi, 2021), com potencial para favorecer a aprendizagem dos estudantes em Cálculo (Becker et al., 2008).

Entretanto, há poucos estudos que examinam o lesson study em disciplinas matemáticas no Ensino Superior. Uma revisão realizada por Utimura e Curi (2017) revelou que no Brasil as experiências conduzidas em lesson study ocorrem principalmente na educação básica, aspecto observado também no cenário internacional (Hervas, 2021; Richit, Ponte y Richit, 2022).

Para contribuir com as discussões sobre a dinamização e as possibilidades dessa abordagem no Ensino Superior, analisamos um lesson study, cuja aula de investigação foi promovida em uma turma de Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática. O tópico matemático selecionado pela equipe foi ‘Máximos e Mínimos’, um tópico do programa curricular de Cálculo do referido Curso, que foi abordado a partir de uma tarefa específica, cuidadosamente elaborada ao longo do lesson study para promover a investigação, a discussão entre pares e a explicitação das estratégias matemáticas mobilizadas pelos estudantes para resolvê-la. O contexto da tarefa, concebido como o universo conceitual relacionado a um campo da vida cotidiana ou da própria matemática (Ponte y Quaresma, 2012), foi o pastejo rotacionado de gado de leite, por ser uma atividade econômica característica da região de abrangência da Instituição em que a aula de investigação foi lecionada.

A pesquisa tem potencial de contribuir com as discussões sobre lesson study em Cálculo na medida em que pode sinalizar possibilidades de favorecer a abordagem de tópicos curriculares a partir de contextos ricos e instigantes. A resolução de tarefas investigativas, baseadas em contextos próximos das vivências dos estudantes, constitui-se em uma oportunidade para analisarem problemas e mobilizarem conhecimentos distintos.

1. Lesson Study e o Ensino Universitário de Cálculo

O lesson study é uma abordagem que envolve um pequeno grupo de professores trabalhando em torno de quatro ações: identificação de um problema de aprendizagem e formulação de objetivos para a aprendizagem dos alunos; trabalho preparatório e planejamento de uma aula para uma turma de alunos (a aula de investigação); lecionação desta aula com observação por uma equipe de professores e/ou pesquisadores; e reflexão sobre os aspectos observados pela equipe acerca das aprendizagens dos alunos (Lewis, 2002; Ponte, Quaresma, Mata-Pereira y Baptista, 2016; Richit y Ponte, 2017).

O lesson study surgiu no Japão no início do século XX, constituindo-se em um dos principais dispositivos de formação docente (Stigler y Hiebert, 2016; Richit y Tomkelski, 2020) e como uma forma de preparar os professores para melhorarem suas práticas (Isoda, 2007; Neves, Fiorentini y Silva, 2022). Essa abordagem tem interessado pesquisadores em vários domínios do conhecimento, os quais têm se dedicado a examiná-la, buscando explicitar suas possibilidades e contribuições para as aprendizagens e o desenvolvimento do professor, assim como para as aprendizagens dos alunos (Baldin y Felix, 2011; Isoda y Olfos, 2020; Richit, Ponte y Tomasi, 2021).

O lesson study envolve questões relacionadas aos objetivos de aprendizagem dos alunos e estratégias para os alcançar, assim como a definição da questão central da aula (Takahashi y McDougal, 2014), a concretização da aula de investigação (Fernandez, 2002) e a reflexão que segue esta aula (Richit, Hurtado y Silva, 2022). Uma importante etapa da aula de investigação é a discussão coletiva das resoluções da tarefa (Ponte et al., 2016; Richit, 2020), mediante a qual as ideias, conjecturas, conclusões e generalizações são debatidas (Canavarro, 2011) e as conclusões sistematizadas.

Relativamente ao ensino universitário do Cálculo, Alvarenga, Dorr e Vieira (2016) destacam que os conteúdos circunscritos por essa componente curricular, especialmente as funções, derivadas e integrais, constituem-se em ferramentas matemáticas essenciais para a análise de fenômenos da Física, Biologia, Economia, Matemática, Engenharias.

Diante das discussões sobre a necessidade de superar o ensino apoiado em técnicas convencionais de comunicação oral, predominante na Indonésia, Lasut (2013) investigou, a partir de um lesson study, os problemas de aprendizagem em Cálculo de estudantes do curso de

Matemática da Universidade do Estado de Manado. Como resultado aponta que o lesson study contribuiu para a aprendizagem de Cálculo, constituindo-se em uma alternativa para superar as práticas de ensino menos eficazes, promovendo mudanças no ensino (Lasut, 2013).

Na Universidade de Wisconsin, EUA, Becker et al. (2008) analisaram a dinamização de um lesson study em Cálculo, com foco no Teorema de Rolle e no Teorema do Valor Médio. Os autores descrevem o processo de lesson study, a aula de investigação, as observações da primeira rodada de ensino e possíveis revisões para a aula. Concluem que essa abordagem oferece oportunidade para os estudantes aprofundarem conceitos de Cálculo mediante situações de aprendizagem específicas.

Considerando as dificuldades dos estudantes universitários em compreender o conceito de integral, especialmente integral indefinida, Fajar et al. (2017) investigaram a aprendizagem de estudantes de um curso de Matemática de uma universidade indonésia. Concluíram que o lesson study oportunizou aos acadêmicos estudarem a Soma de Riemann, explorando-a a partir da abordagem geométrica, algébrica, tabular e gráfica (usando o Wolfram Mathworld). A abordagem concretizada representou uma mudança no ensino na medida em que a aula expositiva deu lugar para a abordagem orientada para a aprendizagem ativa dos estudantes. Porém, ressaltam que são necessários esforços para o desenvolvimento de métodos adequados às demandas dos alunos e às especificidades do curso (Fajar et al., 2017).

Portanto, a aprendizagem matemática precisa oportunizar aos estudantes trabalhar com tarefas relacionadas a contextos diversos – realísticos, de semi-realidade e matemáticos – a partir das quais eles têm a possibilidade de mobilizar e articular suas experiências em contextos da realidade e também experiências matemáticas prévias (Ponte y Quaresma, 2012). Nesta perspectiva, consideramos que o lesson study pode favorecer mudanças no ensino de Cálculo porque possibilita a preparação de tarefas instigantes, desafiadoras e próximas das vivências cotidianas dos estudantes.

2. Metodologia

Natureza e objetivo. A investigação, qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), dedica-se a investigar o modo pelo qual o contexto da tarefa pode influenciar a interpretação e abordagem do objeto matemático (Máximos e Mínimos) estudado em um lesson study. Examinamos uma tarefa específica, cuidadosamente elaborada para promover a investigação, a discussão entre pares e a explicitação das estratégias matemáticas mobilizadas pelos estudantes para resolvê-la.

Participantes. A investigação foi conduzida em um lesson study que envolveu oito professores universitários (Alice, Amy, Catarina, Christopher, Esther, Estrela, Michel, Tatiana – nomes fictícios), docentes em universidades da região Sul do Brasil. Todos os professores possuem mais de dez anos de docência. A aula de investigação envolveu estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.

Contexto. O lesson study, estruturado em doze encontros semanais de duas horas, dedicou-se ao aprofundamento de 'Máximos e Mínimos', um tópico de Cálculo. A aula de investigação foi realizada em uma turma de Cálculo, constituída de quinze estudantes, do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense (IFC), Concórdia. A aula de investigação, realizada e gravada em sala virtual Google Meet, foi voluntariamente lecionada por Amy e observada pelos demais participantes do lesson study. Após a introdução da tarefa, os estudantes foram encaminhados para subsalas virtuais que foram gravadas para subsidiar a reflexão. Cada sala foi observada, virtualmente, por dois participantes do lesson study (um com experiência em Educação Matemática e outro em Cálculo). Após o trabalho autônomo nas subsalas, os estudantes retornaram à sala virtual principal e Amy promoveu a discussão coletiva, auxiliada por Michel, concretizando a docência compartilhada (Richit, Ponte y Tomkelski, 2019).

Material empírico e aspectos éticos. O material empírico constitui-se das notas de campo dos pesquisadores e das transcrições das gravações das sessões. A investigação está em consonância com os critérios éticos de pesquisa, tendo sido aprovada em Comitê de Ética em Pesquisa (Parecer nº. 4.764.981, em 10 de junho de 2021).

Análise. A análise, qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), estabeleceu como unidades de referência os trechos do material empírico que indicavam influências do contexto da tarefa na interpretação do tópico 'Máximos e Mínimos'. A partir das unidades de referência definimos as categorias de análise: interpretação da tarefa, mobilização de conceitos e representações e formulação de conclusões.

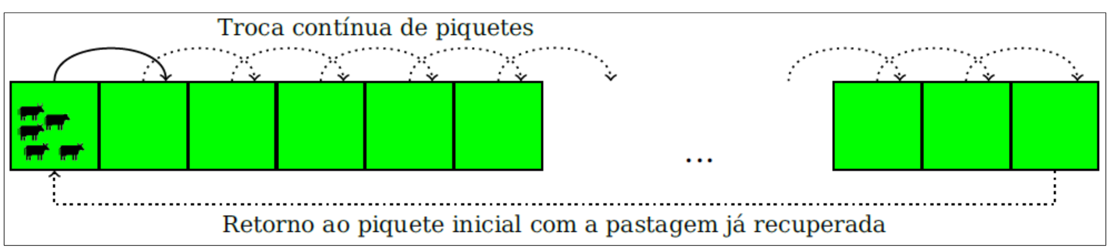
3. Dinamização do Lesson Study: aspectos balizadores e decisões

3.1. Delimitação do Contexto da Tarefa.

A escolha do contexto da tarefa caracterizou um processo cuidadosamente negociado e fundamentado, de modo que além dos interesses e dificuldades dos estudantes, considerou as características socioeconômicas da região. Ao citar as frequentes dificuldades dos estudantes no estudo de derivadas, Christopher e Michel destacaram que a resolução de problemas práticos é uma dificuldade recorrente nas disciplinas de Cálculo. Catarina corroborou esse aspecto e destacou que, contrapondo as abordagens algoritmizadas, “a resolução de problemas relacionados a temas cotidianos oportuniza aos estudantes compreenderem conceitos, explorarem processos de resolução diferentes e confrontá-los” (Notas de campo, junho de 2021).

Assim, para o 4º encontro do lesson study, dedicado à revisão do tópico, os professores Christopher e Michel prepararam e desenvolveram problemas relacionados às derivadas e aplicações. Mediante a discussão sobre as resoluções e do potencial das atividades para abordar tópicos de Cálculo, emergiram possibilidades de atividades e, subjacente a elas, contextos que poderiam embasar a tarefa, potencializar a comunicação das ideias matemáticas e favorecer a discussão coletiva (momento final da aula de investigação). A primeira atividade, compartilhada por Christopher, referia-se à minimização de material (arame) para cercar uma região retangular. A segunda atividade, elaborada por um participante, referia-se a um problema agrícola relativo à maximização da produção de cultivares. Assim, definiram que o contexto da tarefa envolveria a realidade estudantes, culminando no tema pastejo rotacionado de gado de leite. Desse modo, a segunda proposta foi adaptada a uma tarefa relacionada à minimização do comprimento do fio elétrico para a construção de um circuito de piquetes para pastejo de gado de leite (Figura 1).

Figura 1 - Ilustração para um sistema de pastejo rotacionado de gado de leite



Fonte: Os autores.

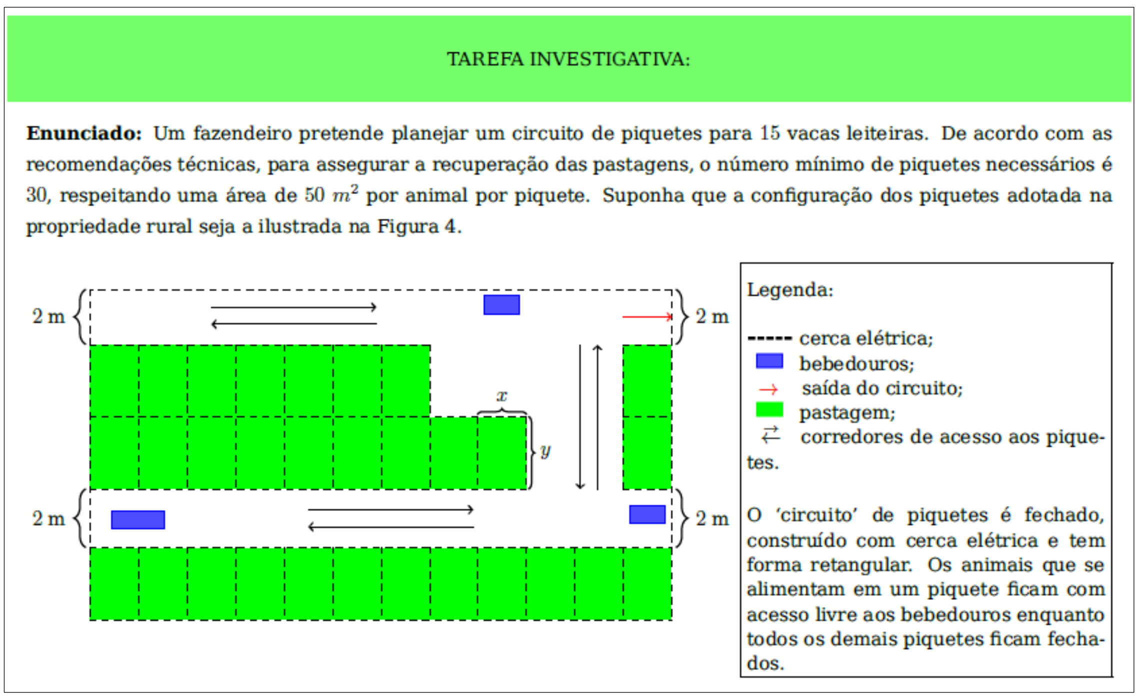
A relevância do contexto que embasou a tarefa foi destacada por uma estudante ao informar que “a maior bacia leiteira de Santa Catarina se concentra aqui no oeste e o nosso município (Concórdia- SC) é o primeiro em produção, a que gera mais leite ao estado" (Celine, aula de investigação, Julho de 2021).

3.2. A Tarefa Elaborada

Baseado no contexto 'pastejo rotacionado de gado de leite', o grupo trabalhou na elaboração de uma tarefa para abordar Máximos e Mínimos e a testou. Após a primeira testagem pela equipe de professores, a tarefa foi aprimorada e voluntariamente resolvida por dois estudantes universitários de outras instituições como pré-teste (Alvine et al., 2007). O pré-teste forneceu subsídios para a versão final da tarefa.

A tarefa, em sua versão final, foi estruturada em duas partes. A primeira consistia na apresentação do contexto da tarefa (enunciado), conforme figura a seguir, e a segunda apresentava as questões a serem resolvidas pelos estudantes (Apêndice 1).

Figura 2 – Enunciado da tarefa.



Fonte: Richit et al. (2021).

3.3. A Aula de Investigação

A aula foi organizada em quatro momentos: discussão sobre o contexto da tarefa; trabalho autônomo sobre a tarefa (discussão e resolução da tarefa nos subgrupos); discussão das resoluções (discussão coletiva); sistematização das aprendizagens (Canavarro, 2011; Richit, Tomkelski y Richit, 2021). Para o trabalho autônomo foram criadas quatro salas virtuais: Subsala Gauss; Subsala Cauchy; Subsala Riemann; Subsala Fermat. Os estudantes poderiam acessar qualquer uma das salas, porém, para evitar que algumas salas tivessem mais estudantes do que outras, definiu-se que o número máximo de integrantes seria cinco por grupo.

Problematização inicial sobre o Contexto da Tarefa. Na primeira parte da aula, realizada na sala principal, Amy promoveu uma discussão sobre o contexto da tarefa, abordando as variáveis envolvidas na composição de pastagens e piqueteamento para o pastejo rotacionado de gado de leite, assim como das normas técnicas que orientam essa atividade socioeconômica. Amy questionou os estudantes sobre o planejamento de piquetes para pastejo, visando à mobilização de conhecimentos relativos à Matemática e ao contexto da tarefa. Os estudantes contribuíram a partir das vivências pessoais, alguns pelo contexto familiar e outros pela formação escolar prévia (ensino médio técnico em agropecuária).

> Dependendo do lugar onde você vai fazer o piquete, a própria formação do solo [relevo] vai interferir. Um piqueteamento em um morro, em que o terreno é ondulado, por mais que você queira tentar [fazê-lo] regular ele vai acabar saindo irregular. Você tem que trabalhar de uma maneira que fique uma área semelhante em todos os piquetes para você estar trabalhando com a mesma área de pastagem. [O tamanho dos piquetes] depende da quantidade de vacas que [serão manejadas], até a distância [percorrida pela] vaca até o piquete vai interferir na produção [de leite]. É bastante coisa para manter uma dieta balanceada para o gado de leite. Você precisa analisar a silagem, o pasto, analisar as vacas com uma equipe profissional e aí a gente faz uma dieta com proteína, ureia, sal, etc. [...]. Além disso, eles também recomendam que a vaca não deve estar muito gorda, considerar a distância que a vaca caminha até o pasto, a quantidade de água [que ela deve beber, etc.]" (**Carla**).

> [Também se recomenda] que tenha um bom sombreamento no piquete, mas a água é melhor deixar no sol, porque a vaca não gosta de tomar água muito gelada, ela prefere a água um pouco mais quentinha (**Camila**).

> Para uma vaca produzir um litro de leite, ela precisa ingerir em média de 6 a 10 litros de água [diariamente] (**Theo**).

Os estudantes também destacaram aspectos relacionados à pastagem, à água e aos materiais utilizados na construção dos piquetes.

> [Para planejar os piquetes é importante observar] A quantidade de vacas e como está o pasto. Por exemplo, eu vou trabalhar com um tipo de pastagem de inverno ou da estação em que estamos [então tenho de analisar a] disponibilidade de água e como que você vai fazer para levar a água até aquele piquete. [...] Os materiais [usados] são: palanquinhos [de madeira para a cerca],

> fio, aparelho de choque, roldana, o tempo que a pessoa gasta para ir lá e fazer o piquete, martelo, prego, marreta, a própria semente do pasto você poderia estar considerando, o adubo que você aplicou (**Carla**).
>
> No manejo da pastagem [é importante permitir] a recuperação constante do capim por unidade de área, conservar a qualidade do solo, prover ao animal alimentação de qualidade e quantidade e evitar a degradação do pasto, não deixar o bovino de leite ou de corte pisotear muito ali no pasto e acabar prejudicando [o pasto...] (**Celine**).
>
> É importante conhecer o tipo de material empregado (referindo-se as sementes da pastagem de azevém) se for um material novo saber se o material é diplóide, tetraplóide que seriam questões específicas da pastagem mesmo (característica morfogenética de cultivares de azevém muito empregados na região sul do Brasil) [...]. Normalmente o produtor já sabe, ele conhece a marca da semente, então ele já sabe que aquele material vai precisar de 20 dias, de 14 dias para crescimento, mas se não, é importante quando ele for comprar ele pedir quanto tempo (para crescimento) e que tipo de material é esse (**Theo**).
>
> Aqui em casa nós medimos a distância entre os palanques para garantir espaço de passagem do trator para aplicação de adubo (**Celine**).

A discussão sobre o contexto propiciou a abordagem aprofundada e fundamentada sobre produção de leite e as normas técnicas relativas ao pastejo rotacionado de gado leiteiro mobilizou distintos conhecimentos da Matemática, tais como noções geométricas, algébricas e aritméticas. O contexto oportunizou a interpretação diferenciada da tarefa, bem como forneceu subsídios para a validação das respostas. Esse aspecto sinaliza que a abordagem de tópicos curriculares de Cálculo envolvendo o contexto dos estudantes tem potencial para mobilizar conhecimentos distintos, para além dos conceitos e operações matemáticas, contribuindo para o aprofundamento desses conhecimentos.

Trabalho Autônomo sobre a Tarefa. Ao acessar as subsalas, os estudantes receberam a tarefa. O trabalho nos grupos foi auxiliado por Amy, que visitava as subsalas para orientá-los.

Subsala Gauss. Vítor, Alan, Carla e Celine constituíram o grupo, que foi observado por Michel e Tatiana. A discussão em torno da tarefa lhes oportunizou mobilizar conhecimentos no domínio do Cálculo, da Geometria e sobre o pastejo rotacionado de gado leiteiro, culminando em uma interpretação contextualizada da tarefa. Por exemplo, na questão 1 (A área que cada piquete deve possuir nas condições dadas no enunciado) compreenderam que a "área do piquete é dada pelo número de vacas vezes a razão da área estabelecida para cada vaca" (Alan). Assim, multiplicaram o número de vacas manejadas pela área destinada para cada vaca no piquete ($15\times50 = 750$ m²), indicando a área mínima para cada piquete.

Além disso, mostraram-se familiarizados com a notação matemática das questões e a escrita algébrica das relações solicitadas. Por exemplo, para a questão 2 (Uma expressão que permite calcular o comprimento de fio necessário para cercar um piquete de medidas arbitrárias x e y) imediatamente escreveram a expressão 2x+2y.

Para a questão 3 (Uma expressão que permite calcular o comprimento total de fio, em metros, necessário em função das medidas arbitrárias de cada piquete, para todo circuito), o grupo considerou que a medida solicitada deveria corresponder ao perímetro externo do circuito. A análise das resoluções aponta que o fato da tarefa mencionar que os piquetes eram retangulares e que o circuito completo também era retangular os levou a pensarem que se requeria avaliar apenas o contorno externo, para o qual escreveram a expressão para o comprimento total de fio ‘Pt = 2(12x)+2(4+3y) = 24x+6y+8 m’. Na questão 4 (Uma expressão que permite determinar a área de apenas um piquete em função dos lados x e y) responderam A = xy.

Na questão 5 (O comprimento total de fio da questão 3 em função dos lados x ou y do piquete, mantendo a área estipulada na questão 1) os estudantes mobilizaram a relação xy = 750 para escrever x em função de y e, dessa forma, obter a função solicitada. A partir da relação x = 750/y obtiveram a função ‘Pt = 2×12(750/y) + 2(4 + 3y) = 24(750/y) + 6y + 8 = 18000/y + 6y + 8’, que correspondia ao solicitado na questão (‘em função de um dos lados x ou y do piquete’).

Na questão 6 os estudantes buscaram aplicar derivadas para resolvê-la, aspecto que sinaliza que o contexto da tarefa mobilizou experiências matemáticas prévias no Curso. Ao lerem a questão concluíram, imediatamente, que deveriam recorrer às ferramentas do Cálculo, afirmando: “Ah, é agora que a gente vai usar a derivada para resolver a questão” (Alan). Primeiramente, os estudantes recordaram que o perímetro de um retângulo é menor quando as medidas dos lados x e y são iguais, isto é, x = y. Assim, conjecturaram que a medida ideal dos lados dos piquetes poderia ser obtida pela expressão da área, assim representada: $x^2 = 750$, concluindo que x = 27,7 m correspondia à medida ideal para o lado do piquete. A seguir avaliaram o limite da função xy = 750 quando x tende a 27,7 (aproximadamente) na intenção de resolver a tarefa a partir de conceitos estudados no Cálculo.

Subsala Cauchy. O grupo (Emily, Kate, Laila e Theo) foi observado por Catarina e Estrela. Inicialmente, discutiriam o contexto da tarefa. Após lerem o enunciado, debruçaram-se na resolução das questões, obtendo 750 m² para questão 1. Na questão 2 exploraram representações algébricas e formas de registrá-las, baseando-se em elementos extraídos do enunciado: 'uma expressão', 'em função de', 'valores arbitrários'. Além disso, validaram o raciocínio anterior adotando valores numéricos para as duas medidas arbitrárias x e y (x = 20 m e y = 37,5 m), tais que o produto resultasse em 750 m², conforme solicitava a questão 1, embora não houvesse menção de restrição para área.

Na questão 3 consideraram multiplicar a medida do perímetro (obtida na questão 2) pelo número de piquetes indicado no enunciado (30). Um integrante argumentou: "Mas, se um piquete vai estar do lado do outro, ele não vai usar o mesmo fio?" [...]. "É isso? E naquele modelo [na figura da tarefa] tem 30 piquetes [porque alguns lados são comuns]" (Theo). Concluíram que a discrepância nos resultados decorria do fato de que alguns lados eram compartilhados entre piquetes. Essa conclusão foi corroborada por uma estudante ao contar novamente os piquetes e concluir: "É, tem 30 piquetes aqui" (Kate). Ao contabilizarem a quantidade de medidas x e y do circuito concluíram que o comprimento total de fio era dado por '35y+52x+8'. Após retomarem a legenda da figura, identificando o equívoco em relação à quantidade de lados a serem considerados na contagem, formularam a expressão: 64x+35y+8.

Na questão 4 escreveram xy=750. Na questão 5 consideraram calcular numericamente a quantidade total de fio para construir os piquetes a partir do total de medidas x e o total de medidas y separadamente. Na questão 6 tentaram encontrar expressões algébricas, embora deveriam determinar os valores numéricos de x e y que minimizassem a função obtida na questão 5.

Subsala Riemann. Ayla, Edu, Lia e Paola constituíram o grupo, que foi observado por Esther (um dos observadores ausentou-se). Os estudantes conversaram sobre o tema da tarefa e, após a leitura do enunciado, colocaram-se à responder as questões. Ao discutirem a questão 1, supuseram que além de "multiplicar (15 x 50 = 750) deveriam dividir por 30 piquetes, obtendo o valor de 25 m² por piquete" (Lia).

Embora apresentassem dificuldade em explicar algumas resoluções, observamos que a estrutura e a sequência das questões os levaram a perceber erros cometidos em questões anteriores, tanto em relação ao contexto da tarefa como aos aspectos matemáticos. Por exemplo, após resolverem a questão 4 (Uma expressão que permite determinar a área de apenas um piquete em função dos lados x e y), que requeria a área, perceberam que haviam se equivocado na questão 2, para a qual haviam respondido xy = 25, corrigindo-a para 2x+2y. Na questão 5 consideraram que era solicitado igualar à expressão da questão 3 (comprimento total de fio) à 750 m², isolando uma das variáveis (y), para atender a indicação ‘em função de um dos lados x ou y do piquete’. O grupo não resolveu a questão 6 por ter acabado o tempo de trabalho autônomo sobre a tarefa.

Subsala Fermat. O grupo, observado por Alice e Natan, foi composto por Joe, Mary e Nick. Inicialmente os estudantes interpretaram as informações disponibilizadas no enunciado da tarefa. Nick, a partir da vivência familiar em pastejo rotacionado de gado de leite, explicou que “os animais ficam juntos no mesmo piquete e somente depois são alocados em outro piquete” (Nick). Essa observação ajudou-os a compreenderem a dinâmica do circuito e, assim, validarem o cálculo da área do piquete pela expressão 15 x 50 = 750 m².

Para responder a questão 2 entenderam que era necessário considerar as medidas dos piquetes que restringiam a área a 750 m^2. Embora inicialmente Nick argumentou que era necessário determinar “o comprimento do fio, que seria o perímetro do retângulo”, o grupo decidiu considerar o piquete retangular com dimensões 15 x 50 metros. A partir dessa hipótese Mary tentou construir um retângulo de medidas 5 x 10 metros para cada vaca e criar uma configuração de 15 deles (para as 15 vacas) com objetivo de determinar as dimensões numéricas do piquete. Nick argumentou: “Eu acho que seria semelhante ao resultado da área total [...] e as vacas podem estar espalhadas, então tu não precisa que cada vaca tenha uma região retangular exclusiva [em cada piquete. Elas podem ficar juntas em um piquete maior]”. Porém, retomaram a ideia de construir piquetes retangulares com dimensões 15 x 50 metros e Nick, mesmo que as tenha sugerido, comentou:

> [...] fecharia a medida [da área] para o piquete, mas não sei se [faz sentido na] prática. Se [o piquete for um retângulo] muito estreito, [as vacas] vão ter que passar pela pastagem boa para se espalharem nessa pastagem e conseguirem se alimentar. Elas vão acabar pisando [na] pastagem, estragando boa parte dela. [...] Eu [acho que] seria melhor se [o formato de cada piquete] fosse quase um quadrado (**Nick**).

Então, Nick sugeriu x = 25 m como medida de um dos lados e obteve y = 30 m a partir da área 750 m^2. Mediante essa sugestão e depois de calcular o perímetro para essas medidas, concluíram que com essas medidas “Economizaria fio. Olha, já podemos até dar ideia para pessoa que cria esse gado. Vai até economizar” (Mary).

Na questão 3 sugeriam multiplicar o perímetro obtido para questão anterior por 30. Mas, ao analisar a figura da tarefa comentaram: “vai ter piquete que vai dividir lado/cerca com outro piquete” (Mary) e “Isso é o mesmo que uma parede na tua casa, tu tem um cômodo e tu tens a parede no cômodo, só que você tem outro cômodo que usa a mesma parede" (Nick). Assim, decidiram fazer a contagem de todas as medidas x e y, subdividindo o circuito em trechos (fileira de piquetes inferior, piquetes na lateral direita e a dupla fileira de piquetes adjacentes no interior do circuito). Ao final, obtiveram a expressão 52x + 35y + 8, calculando a partir dela o valor numérico com as medidas x = 25 m e y = 30 m, totalizando 2358 m de fio.

Na questão 4 escreveram xy = 750. Na questão 5 concluíram que precisavam escrever uma expressão para estimar o total de medidas x e uma expressão para o total de y, igualando-as ao total numérico de x e y conforme as dimensões sugeridas (x = 25 m e y = 30 m).

Na questão 6 retomaram a discussão da questão 2, ressaltando as medidas que minimizam o perímetro do piquete. Embora não tenham discutido amplamente esse aspecto devido ao tempo do trabalho em grupo ter se esgotado, essa consideração pareceu estar baseada na hipótese de que minimizando o perímetro de um piquete, minimiza-se, por extensão, o total de fio do circuito. Ao final ponderaram que x = 25 m e y = 30 m era a melhor hipótese testada para a questão 6.

Discussão Coletiva. Após retornarem para a sala principal, foi realizada a discussão coletiva. Cada grupo compartilhava a tela com as resoluções e os colegas comentavam, destacando diferenças de interpretação, estratégias e conclusões. Os estudantes puderam confrontar formas de interpretar a tarefa, estratégias de representação e resolução de cada questão, bem como erros na manipulação dos objetos matemáticos mobilizados no processo.

Relativamente à primeira questão, embora algumas dificuldades de interpretação tenham sido observadas no trabalho autônomo, na apresentação os grupos apenas relataram que a resposta foi obtida pela multiplicação 15 x 50. Na questão 2, o grupo Cauchy adotou valores para x e y, chegando a uma resposta numérica. Quando Amy questionou as respostas distintas, o grupo Gauss explicou que "O nosso grupo fez só 2x + 2y. A gente usou só a medida x e y" (Alan). Amy questionou-os sobre esse resultado e responderam: "Porque ele estava falando de modo arbitrário, aí a gente achou que era para utilizar só as medidas abstratas" (Alan).

A questão 3 suscitou a revisão das interpretações realizadas pelos grupos em face das respostas obtidas. Em especial, esteve associada à divergência entre a resposta do Grupo Gauss, que considerou apenas o contorno externo do circuito de piquetes para obter a expressão solicitada, e as respostas dos demais grupos. Nesse momento, os estudantes dialogaram até chegarem a uma compreensão partilhada de que a questão proposta se referia ao total de fio – o que incluía o cercado externo e todos os cercados dos piquetes internos. A partir da discussão coletiva dessa questão os grupos concluíram, coletivamente, que a expressão correta era 64x+35y+8.

Para a questão 4 foram identificadas duas resoluções diferentes. O grupo Gauss definiu a expressão A = xy, enquanto os demais escreveram xy = 750. Ao perceber essa diferença, uma integrante do Grupo Riemann comentou: "a gente tinha colocado 750 m² no lugar do A, ou seja xy = 750" (Lia). Na questão 5 o grupo Gauss explicou que "usou aquela fórmula do perímetro da questão 3, [...]. Então a gente pode transformar o x em 750 sobre y e a gente colocou na nossa expressão que ficaria assim: 64(750/y) + 35y + 8 (Alan)".

Relativamente à questão 6, os grupos comentaram as intepretações realizadas e hipóteses que conseguiram formular. Nenhum grupo finalizou a questão, mas ideias intuitivas do problema foram apresentadas. Theo (Cauchy) compartilhou o esboço da resolução apresentado duas expressões para calcular x e y mínimos para o circuito total, sendo eles x = 64(750/y) e y = 750(35/x) em analogia à questão 5. Nesse caso, os valores adotados na questão 2 para as medidas serviriam para calcular o total numérico de x e y do circuito e deveriam ser o valor de "y" e "x" nos denominadores, justificando que "é tipo uma prova real" (Theo). Após a apresentação de Theo e as inferências de Amy sobre a possibilidade de existência de medidas mínimas, Alan acrescentou:

> Eu quero é botar ponto de discussão porque a gente não conseguiu chegar exatamente numa expressão. [...] a gente tem que cada piquete tem uma área de 750 m². [...] aí pede qual que seria a medida para o menor [comprimento total de fio] possível [...] aí a gente foi seguindo nessa linha de raciocínio e também usando a raiz quadrada de 750 para ver quais seriam os menores valores que a gente poderia alcançar das laterais x e y de forma que o perímetro total fosse o menor possível. Aí a gente tem inicialmente que a raiz quadrada de 750 seria 27,386 etc., etc., etc. E a gente tem também que 25 m vezes 30 m (a melhor hipótese que eles testaram) é igual a 750. E o 27[,386...], que é a raiz quadrada, se estabelece entre o 25 e o 30 (**Alan**).

Entusiasmado com as justificações dos colegas, Nick (Fermat), acrescentou as hipóteses que formularam:

> Eu acho que vou seguir a mesma linha de raciocínio do Alan [...] A gente estava fazendo a 2, aí eu pensei em usar na base 15 m e na altura 50 m e a gente tinha calculado [o perímetro] e dado 130 m. Aí deu 110 m utilizando 25 m e 30 m. Assim, eu vi que quando x e y se aproximavam, vai ser menor o comprimento do fio (do piquete), então x e y teriam que estar bem próximos para que eu consiga um gasto de fio menor (**Nick**).

Essa estratégia foi considerada na questão 2 quando adotaram medidas numéricas x = 25 m e y = 30 m e, como consequência, na questão 6, supuseram que ao minimizar o perímetro do piquete, por extensão, minimizariam o comprimento total de fio do circuito de piquetes.

Assim, compreendemos que o contexto que embasou a tarefa, por abordar uma situação próxima da realidade dos estudantes, oportunizou aos grupos uma experiência de aprendizagem reflexiva e dialogada, mediante a qual negociaram interpretações do enunciado, definiram estratégias de resolução e formularam coletivamente conclusões. O contexto constituiu-se em ponto de partida para o trabalho dos grupos em torno de uma tarefa instigante, que os levou a realizarem aprendizagens para além do domínio da Matemática, mas relacionando-a.

4. Resultados e Discussão

Interpretação da tarefa. O tema pastejo rotacionado de gado de leite oportunizou aos estudantes explorarem o tópico Máximos e Mínimos em uma perspectiva em que a familiaridade com essa atividade socioeconômica favoreceu uma interpretação orgânica da tarefa. Ao resolverem a tarefa, os estudantes estavam atentos aos diversos aspectos matemáticos (Ponte y Quaresma, 2012; Canavarro, 2011; Richit, Tomkelski y Richit, 2021) relativos ao pastejo rotacionado de gado de leite, os quais poderiam influenciar a minimização do comprimento de fio do circuito de piquetes. Os conhecimentos prévios dos estudantes sobre essa atividade subsidiaram a interpretação da tarefa, propiciaram insights sobre a coerência das resoluções em face ao desafio proposto e embasaram a formulação de hipóteses e justificativas para as respostas.

A dinâmica da aula de investigação, organizada em quatro momentos, promoveu a interação entre pares (Canavarro, 2011; Ponte et al., 2016; Richit y Tomkelski, 2020) e favoreceu a discussão e a articulação de formas de interpretação da tarefa na busca por uma interpretação consensuada. A interpretação negociada no grupo permitiu-os definir e operacionalizar as variáveis envolvidas na tarefa, mobilizando conceitos e representações já adquiridos que os oportunizaram desenvolver novos conceitos (Lewis et al., 2012). Os estudantes analisavam as representações considerando o contexto, buscando padrões de correlação geométrica, que lhes forneceram recursos de interpretação e os permitiram conectar conceitos e significados (Tallman et al., 2021).

O contexto da tarefa constituiu-se em catalisador das vivências e conhecimentos dos estudantes, fomentando a participação, a discussão de argumentos para as conclusões, mesmo para aqueles que habitualmente não se sentem encorajados a interagir nas aulas de Cálculo, conforme mencionou Amy na reflexão sobre a aula. Favoreceu, portanto, a abordagem de 'Máximos e Mínimos', promovendo o envolvimento dos estudantes mediante um contexto de investigação favorável (Mariano et al., 2021) ao aprofundamento de conhecimentos, contribuindo para a aprendizagem nessa componente curricular (Becker et al., 2008; Fajar et al., 2017; Lasut, 2013).

A **mobilização de conceitos e representações** foi potencializada pelo contexto da tarefa nas quatro etapas da aula de investigação (Richit, Tomkelski y Richit, 2021). Mediante o objetivo de oportunizar aos estudantes um contexto de aprendizagem concreto, informações complementares e normas técnicas relacionadas à tarefa, assim como os termos relativos ao manejo de gado de leite (Junior et al., 2003) foram acuradamente fundamentados e instigantes para a abordagem de Máximos e Mínimos.

A tarefa, cuidadosamente desenhada para tratar uma questão de aprendizagem específica (Lewis et al., 2012) e promover a aprendizagem matemática (Ponte et al., 2016; Lasut, 2013) a partir de um contexto familiar aos estudantes e questões correlacionadas, visava conduzi-los à construção do objeto matemático (função a ser minimizada) de forma articulada e contextualizada. E a forma como articularam as informações relacionadas à tarefa e como desenvolveram as resoluções desvelam as distintas estratégias e representações mobilizadas no diálogo de interpretação-argumentação-contextualização.

A tarefa oportunizou aos estudantes mobilizarem e aprofundarem aspectos relativos à linguagem e notação matemática, assim como a escrita algébrica das relações solicitadas nas questões. Esse aspecto sinaliza que o lesson study favorece a abordagem de conceitos de Cálculo (Becker et al., 2008; Lasut, 2013) a partir da mobilização de recursos geométricos, algébricos, tabulares (Fajar et al., 2017) e aritméticos, assim como da manipulação de símbolos e significados que constituem esse curso (Alvine et al., 2007) devido, especialmente, ao contexto que embasou a tarefa.

Formulação de conclusões. O contexto da tarefa favoreceu a validação das resoluções e forneceu subsídios que os possibilitaram atribuir sentido às resoluções. Ao negociarem a interpretação da tarefa, os estudantes refletiam sobre a coerência das formas de interpretá-la e das hipóteses formuladas para resolvê-la. A cada argumento e a cada nova hipótese, novos aspectos eram acrescentados às justificativas e argumentos, enriquecendo e aprofundando as conclusões.

A observação do trabalho nos grupos evidenciou que os estudantes discutem não apenas estratégias de resolução: eles negociam significados, produzem mais do que registram (Becker et al., 2008) e formulam mais conclusões do que aquelas que sistematizam nas fichas de trabalho. Ou seja, a observação do trabalho autônomo por dois professores (Matemática e Educação Matemática) e o acesso às fichas de trabalho dos estudantes e às gravações das subsalas nos permitiram observar como os estudantes constroem interpretações e formulam suas conclusões. Observamos que os grupos anteciparam aspectos relativos à minimização, design do circuito de piquetes para o manejo dos animais, elaborando inferências a partir das propriedades geométricas do piquete e a coerência dessas hipóteses com a realidade.

A tarefa favoreceu o confronto entre as variações das grandezas envolvidas na tarefa (Fajar et al., 2017) em uma perspectiva relacionada ao contexto da tarefa, assim como as divergências de resultados decorrentes delas. Este processo levou-os a compreenderem a relação entre as grandezas consideradas na tarefa e, especialmente, representarem, com rigor, ideias e modos de resolver ainda que intuitivos a priori (Moreno-Armella, 2021), os quais favoreceram a formulação de conclusões mais elaboradas. Na medida em que os grupos procuraram padrões a partir da figura do circuito de piquetes, como no caso da configuração de retângulos 'unitários' para cada animal para a taxa de lotação informada na tarefa, foram oportunizados a examinarem padrões aritméticos (3 dos 4 grupos) e algébricos (grupo Gauss). Esse processo favoreceu a negociação das resoluções e a formulação de conclusões.

A experiência favoreceu o desenvolvimento do conhecimento de Cálculo dos estudantes, contribuindo para a aprendizagem deles nessa componente curricular (Cury, 2004), especialmente por lhes oportunizar atribuírem significado às resoluções. Um exemplo é a correlação entre os valores das dimensões dos piquetes para melhor conservação da pastagem considerando-se a circulação dos animais e que também minimizam o perímetro, levando-os a observarem, mediante a atribuição de significados, que esse retângulo deveria ser mais próximo de um quadrado. Assim, o contexto favoreceu a abordagem de Máximos e Mínimos no lesson study ao potencializar a interpretação da tarefa e das questões que a estruturavam, fortalecendo a associação de conceitos de Cálculo e a mobilização de representações pictórica, aritmética, geométrica e algébrica do objeto abordado. Estes aspectos evidenciam os contributos do contexto da tarefa, cuidadosamente elaborada para a aprendizagem de estudantes universitários (Alvine, et al., 2007; Becker et al., 2008; Lasut, 2013).

5. Conclusões

A análise da tarefa, concebida como um percurso para a realização de aprendizagens sobre Máximos e Mínimos em Cálculo, evidenciou que o contexto que a embasa pode favorecer a construção de conhecimentos e, portanto, a aprendizagem matemática, por oportunizar a mobilização de conceitos e representações, estimular a busca de relações entre representações e o escrutínio das resoluções em face ao contexto a que se relacionam. O tema da tarefa favoreceu mudanças na dinâmica da aula em Cálculo ao oportunizar aos estudantes compreenderem de maneira contextualizada as variáveis, os conceitos e as operações envolvidas. Além disso, potencializou o envolvimento dos estudantes na aula e favoreceu a investigação do tópico 'Máximos e Mínimos' a partir da mobilização das experiências familiares e/ou escolares pregressas, favorecendo a compreensão orgânica e contextualizada do objeto matemático. Favoreceu, também, o protagonismo dos estudantes na construção de seus conhecimentos e na condução da aula a partir de discussões baseadas em seu trabalho autônomo nos grupos. Assim, eles dialogaram entre pares, partilhando e resolvendo dúvidas para formularem conclusões, deslocando o processo de ensino de Cálculo centrado no professor para um processo partilhado por estudantes e professor. Por fim, a tarefa constituiu-se como um dispositivo catalisador e revelador do processo matemático desenvolvido pelos estudantes, contribuindo para o trabalho do professor, aspecto esse pouco discutido na literatura.

Referências

Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. D. (2016). O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, *4*(2), 46-57.

Alvine, A., Judson, T. W., Schein, M., & Yoshida, T. (2007). What graduate students (and the rest of us) can learn from lesson study. *College Teaching*, *55*(3), 109-113. https://doi.org/10.3200/CTCH.55.3.109-113.

Becker, J., Ghenciu, P., Horak, M., & Schroeder, H. (2008). A college lesson study in calculus, preliminary report. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(4), 491-503. https://doi.org/10.1080/00207390701867463.

Cajkler, W., Wood, P., Norton, J., Pedder, D., & Xu, H. (2015). Teacher perspectives about lesson study in secondary school departments: a collaborative vehicle for professional learning and practice development. *Research Papers in Education*, *30*(2), 192-213.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação Matemática*, Lisboa, 11-17.

Cury, H. N. (2004). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores*: reflexões, relatos, propostas. EDIPUCRS.

Fajar, M. Y., Harahap, E., Sukarsih, I., Rohaeni, O., & Suhaedi, D. (2017). *Implementation of Lesson Study on Integral Calculus Course*, 400-407.

Hervas, G. (2021). Lesson study as a faculty development initiative in higher education: A systematic review. *AERA*, *7*(1), 11-19. https://doi.org/10.1177/2332858420982564.

Huang, R. & Shimizu, Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM*, *48*(4), 393-409. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0795-7.

Junior, M. G. B., Barioni, L. G., Vilela, L., & Barcellos, A. D. O. (2003). Área do piquete e taxa de lotação no pastejo rotacionado. *Embrapa Cerrados-Comunicado Técnico*. 1-8.

Larios, V., Páez, R. E., & Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 105-124. https://doi.org/10.35763/aiem20.4002.

Lasut, M. (2013). Effect of implementation lesson study to improve students' learning achievement in Calculus I of mathematics department. *Journal of Education and Practice*, *4*(20), 182-188.

Lewis, C. (2002). Lesson study: *A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia: Research for Better Schools.

Mariano, D. L. F. (2021). Lesson Study: A Tool for an Improved Instructional Design in Teaching Integration by Parts. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *12*(3), 3862-3869. https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i3.1675.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM*, *53*(3), 621-633. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9.

Neves, R. S. P., Fiorentini, D., & Silva, J. M. P. (2022). Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: Contribuições à aprendizagem docente. *Paradigma (Maracay)*, *43*, 409-442.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema*, *30*(56), 868-891.

Richit, A & Ponte, J. P. (2017). La Colaboración Docente en Estudios de Clase en la Perspectiva de Profesores Participantes. *Paradigma* (*Maracay*), *38*(1), 330-352.

Richit, A. (2020). Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. *Revista Brasileira de Educação*, *25*(2), 1-24. https://doi.org/10.1590/s1413-24782020250044

Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2020). Secondary School Mathematics Teachers' Professional Learning in a Lesson Study. *Acta Scientiae*, *22*(3), 2-27.

Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2022). Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(9), em2151. https://doi.org/10.29333/ejmste/12325

Richit, A., Hurtado, L. M. F., & Silva, I. B. (2022). Reflexão sobre a Docência em Matemática Mobilizada em Estudos de Aula. *ACTIO – Docência em Ciências*, *7*(1), 01-24.

Richit, A., Ponte, J. P. & Tomkelski, M. L. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *100*(254), 54-81.

Richit, A., Ponte, J. P., & Richit, L. A. (2022). Conhecimento profissional de professores universitários em um estudo de aula em Cálculo. *PNA – Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *17*(1), 89-116. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.23931

Richit, A., Ponte, J. P., Tomasi, A.P. (2021). Aspects of Professional Collaboration in a Lesson Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(2), em0637. https://doi.org/10.29333/iejme/10904

Richit, A., Tomkelski, M. L., & Richit, A. (2021) Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. *Acta Scientiae*, 23(5), 2-27.

Richit, L. A., Richit, A., Richit, A., Teilor, B. A., Pedroso, C. A., Melo, M. V., Agranionih, N. T., Neves, R. B., & Zimer, T. (2021). O problema dos piquetes: material didático desenvolvido em um estudo de aula para investigação do tópico de máximos e mínimos em Cálculo. [The paddock problem: didactic material created in a Lesson Study to investigate the topic of maxima and minima in Calculus.] [Lesson, 2021, July 27]. *Zenodo*. https://doi.org/10.5281/zenodo.5140590.

Tallman, M. A., Reed, Z., Oehrtman, M., & Carlson, M. P. (2021). What meanings are assessed in collegiate calculus in the United States? *ZDM*, *53*(3), 577-589. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01212-3.

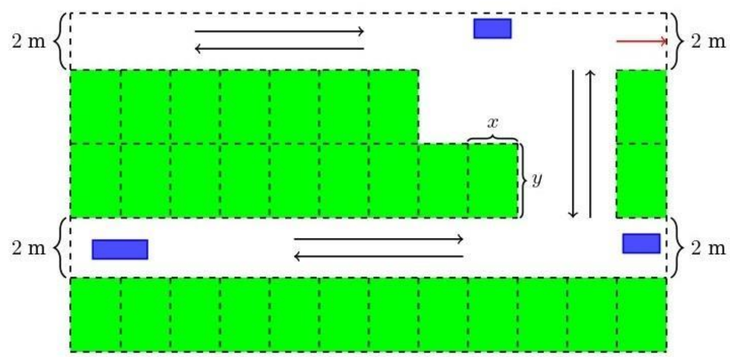
Utimura, G. Z., & Curi, E. (2017). Um mapeamento de trabalhos que utilizam o estudo de aula (lesson study) no Brasil e em Portugal. En FESPM - Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 11-19). Madrid, España: FESPM.

Apêndice 1

Tarefa criada para aula de investigação por Richit et al. (2021).

TAREFA INVESTIGATIVA:

Enunciado: Um fazendeiro pretende planejar um circuito de piquetes para 15 vacas leiteiras. De acordo com as recomendações técnicas, para assegurar a recuperação das pastagens, o número mínimo de piquetes necessários é 30, respeitando uma área de 50 m^2 por animal por piquete. Suponha que a configuração dos piquetes adotada na propriedade rural seja a ilustrada na Figura 4.



Legenda:
- ----- cerca elétrica;
- bebedouros;
- saída do circuito;
- pastagem;
- corredores de acesso aos piquetes.

O 'circuito' de piquetes é fechado, construído com cerca elétrica e tem forma retangular. Os animais que se alimentam em um piquete ficam com acesso livre aos bebedouros enquanto todos os demais piquetes ficam fechados.

Figura 4: Esquema ilustrando o circuito com 30 piquetes.

Todos os piquetes são iguais e retangulares com medidas x e y em metros. Considere que o circuito de piquetes é construído com fios metálicos presos em palanques de madeira conforme exemplificado na Figura 1. Supondo que o terreno a ser utilizado para a pastagens é totalmente plano, que os piquetes são retangulares e que estejam organizados como mostra a Figura 4, determine:

1. A área que cada piquete deve possuir nas condições dadas pelo enunciado.

2. Uma expressão que permite calcular o comprimento de fio (perímetro) em metros necessário para cercar um piquete retangular de medidas arbitrárias x e y.

3. Uma expressão que permite calcular o comprimento total de fio (em metros) necessário em função das medidas arbitrárias de cada piquete, para todo o circuito apresentado na Figura 4.

4. Uma expressão que permite encontrar a área de apenas um piquete em função dos lados x e y.

5. O comprimento total de fio (item 3) em função de um dos lados x ou y do piquete, mantendo a área estipulada no item 1.

6. Quais as dimensões x e y que minimizam o comprimento total de fio e mantêm a área estipulada no item 1.

Autores
Adriana Richit
Licenciatura em Matemática (URI)
Mestrado em Educação Matemática (UNESP)
Doutorado em Educação Matemática (UNESP)
Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GEPEM@T) - Formação e desenvolvimento profissional de professores
adrianarichit@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0778-8198

Luiz Augusto Richit
Graduação em Engenharia Ambiental e Sanitária (UFFS)
Licenciatura em Matemática (UFRGS)
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GEPEM@T) - Ensino e aprendizagem da Matemática
luizaugustorichit@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3054-4933

Andriceli Richter
Licenciatura em Matemática (URI)
Mestrado em Educação Matemática (UNESP)
Doutorado em Educação Matemática (UNESP)
Instituto Federal Catarinense - IFC
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GEPEM@T) - Formação e desenvolvimento profissional de professores
andricelirichit@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1578-2821

Como citar o artigo:

RICHIT, A., RICHIT, L.A., RICHIT, A. Contributos do contexto da tarefa na abordagem de máximos e mínimos em um *lesson study* em cálculo. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, mayo de 2023 / 318 – 340.