Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
ISSN 1011-2251 ISSN 2665-0126
Volume XLV, Julio/Diciembre de 2024
Edición Normal, Número 2
doi 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024009.id1429

El aprendizaje de la matemática a largo plazo: un análisis a la experiencia en el aula

Diana Isabel Quintero-Suica[1] Gerardo Antonio Chacón Guerrero[2]

Resumen

Empleando los métodos de la teoría fundamentada en el marco de una investigación cualitativa, se analizan las producciones de siete estudiantes de secundaria colombianos al resolver tres problemas matemáticos que buscan fomentar el aprendizaje de la matemática a largo plazo. Se identifican nueve acciones categorizadas en cuatro niveles, de acuerdo con las funciones asignadas por los participantes durante la solución de los mismos, y la forma en las cuales se articulan en un esquema de razonamiento repetido general constituido por cuatro aspectos fundamentales: i) la categoría general e instancias-problema, ii) la Unidad Básica de Acciones-UBA, iii) la Unidad de Acciones de Ajuste – UAA, y iv) los esquemas mentales organizados y reorganizados. Se concluye y refuerza la idea de una mirada recursiva de la solución de problemas, tal como lo establecen Kieren y Pirie (1990) y, además, se adopta la misma visión para el razonamiento repetido al resolver problemas matemáticos.
Palabras clave: Razonamiento Repetido, Solución de Problemas, Organización y Reorganización del Conocimiento, Esquemas Mentales.

Long-term learning of mathematics: an analysis of classroom experience

Abstract

Using grounded theory methods in the framework of a qualitative research, the productions of seven Colombian high school students are analyzed when solving three mathematical problems that seek to promote long-term mathematical learning. Nine actions categorized in four levels are identified, according to the functions assigned by the participants during the solution of the problems, and the way in which they are articulated in a general repeated reasoning scheme constituted by four fundamental aspects: i) the general category and problem--instances, ii) the Basic Unit of Actions-BUA, iii) the Unit of Adjustment Actions–UAA, and iv) the organized and reorganized mental schemes. The idea of a recursive view of problem solving, as established by Kieren and Pirie (1990), is concluded and reinforced, and the same view is adopted for repeated reasoning when solving mathematical problems.
Keywords: Repeated Reasoning, Problem-solving, Organization and Reorganization of Knowledge, Mental Schemes.

Aprendizagem matemática de longo prazo: uma análiseda experiência em sala de aula

Resumo

Utilizando métodos de teoria fundamentada no âmbito da pesquisa qualitativa, são analisadas as produções de sete estudantes colombianos do ensino médio na resolução de três problemas matemáticos que buscam promover a aprendizagem da matemática a longo prazo. São identificadas nove ações categorizadas em quatro níveis, de acordo com as funções atribuídas pelos participantes durante a sua solução, e a forma como são articuladas

[1] Doctora en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño (UAN). Docente Universidad Antonio Nariño (UAN), Bogotá, Cundinamarca, Colombia. Calle 58 A BIS # 37 - 94, Federman, Bogotá, Cundinamarca, Colombia, CEP: 111-321. Correo electrónico: dquintero72@uan.com.

[2] Doctor en Matemáticas del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC). Docente Universidad Antonio Nariño (UAN), Bogotá, Cundinamarca, Colombia. Calle 58 A BIS # 37 - 94, Federman, Bogotá, Cundinamarca, Colombia, CEP: 111-321. Correo electrónico: gerardoachg@uan.com.

num esquema geral de raciocínio repetido composto por quatro aspectos fundamentais: i) a categoria geral e instâncias-problema , ii) a Unidade Básica de Ações – UBA, iii) a Unidade de Ações de Ajustamento – UAA, e iv) os esquemas mentais organizados e reorganizados. A ideia de uma visão recursiva de resolução de problemas é concluída e reforçada, conforme estabelecido por Kieren e Pirie (1990) e, além disso, a mesma visão é adotada para raciocínios repetidos na resolução de problemas matemáticos.
Palavras chave: IRaMuTeQ, Formación continua, EaD, Investigación (auto)biográfica, Educación Estadística.

INTRODUCCIÓN

“La práctica hace al maestro.”, “Practice makes perfect.” o “A prática leva à perfeição.”. Sea cual sea el idioma en el que se presente, parece un conocimiento común que la práctica es un elemento necesario y requerido para llegar a desenvolverse con suficiencia en distintos ámbitos de la vida. Dicha práctica suele asociarse con la repetición de experiencias en un ámbito específico que, si bien están basadas en la reproducción de un aspecto central, este último es trascendido al incorporar características desafiantes cada vez. Lo anterior, posiblemente, redunda en un enriquecimiento del conocimiento del individuo que se encuentra inmerso en estas, puede ampliar su campo de destrezas en dicho ámbito e, incluso, llevarlo hacia una actitud indagatoria y propositiva.

El panorama anterior suele filtrarse en la mirada que tienen, respecto del desarrollo del pensamiento matemático, muchos de los integrantes de las comunidades educativas. En diversos y variados escenarios es frecuente ver la implementación de actividades, tareas, problemas, entre otros, buscando que los estudiantes consoliden el conocimiento matemático desarrollado, demostrando capacidades especificas predeterminadas por el docente con un conocimiento que perdure en ellos durante toda su escolaridad (al menos) y que, además, le permita ser crítico y creativo en este campo. En suma, el fomento de la práctica matemática entendida como la realización de un conjunto variado de tareas, actividades, problemas, etc., por parte de los estudiantes, el cual se constituye en un modo usual para el desarrollo del pensamiento matemático, para el aprendizaje de la matemática a largo plazo, y para la promoción de la creatividad matemática.

Lo anterior se refleja en las respuestas a una encuesta aplicada a diez docentes de matemáticas de educación básica, media y universitaria en Colombia, la cual busca establecer las dinámicas y principios metodológicos que ellos contemplan al tomar decisiones sobre el desarrollo del pensamiento matemático y la consolidación del conocimiento en sus estudiantes. Por medio de cinco preguntas cerradas evaluadas según el nivel de acuerdo o desacuerdo de los participantes (nunca, rara vez, algunas veces, casi siempre y siempre); y de cuatro preguntas abiertas relacionadas con el objetivo mencionado, se halla que nueve de ellos algunas veces, casi siempre o siempre, proponen problemas matemáticos que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático y el aprendizaje a largo plazo, que ocho de ellos reconoce casi siempre o siempre el momento en el cual sus estudiantes han internalizado hábitos de pensamiento matemático deseables, y que en esa misma proporción, admiten la necesidad de que esto se lleve a cabo por medio de más de una actividad o problema específico.

Ahora bien, se debe reconocer que aquella “práctica” referida en líneas anteriores en muchas ocasiones ha sido estigmatizada. Regularmente, se ha asociado con la formación de conductas acríticas frente al hacer matemático, promoviendo en los estudiantes la aplicación de algoritmos y procedimientos sin un conocimiento profundo de su potencial, así como el seguimiento sin cuestión de acciones matemáticas específicas. Paradójicamente, aún sigue siendo la manera de dar consecución a los objetivos didácticos en las aulas de muchos docentes, y el modo de aprender que con mayor frecuencia es empleado por los estudiantes tanto en la escuela como fuera de ella. Esto lleva a pensar que dicha "práctica" debe tener aspectos destacables y favorables tanto para el aprendizaje a largo plazo, como para la formación de actitudes creativas en matemáticas que son merecedores de un examen cuidadoso y que permitan, a su vez, acercar aún más las posiciones teóricas en didáctica de las matemáticas al ejercicio habitual en las aulas.

Sin embargo, la iniciativa anterior afronta la dificultad de poder discernir los elementos que tienen importancia en la práctica en el aula y su incidencia en la comprensión matemática pues,

> Aunque estamos demasiado ansiosos por indagar acerca de la comprensión matemática propia y de otras personas y, posteriormente, emitir juicios al respecto, no es tan probable que lleguemos a una respuesta apropiada a las preguntas acerca de qué comprendemos o qué significa decir que alguien comprende o no. (SFARD, 2008, p. 37).

Lo anterior, exhorta la adopción de una mentalidad (investigativa) abierta frente a este fenómeno educativo, recobrando lo productivo, lo práctico y suscitando elementos que puedan favorecerlo y enriquecerlo.

Así las cosas, y concibiéndolas como una entidad compleja, se examinan las dinámicas de clase que emergen de las interacciones entre docentes y estudiantes. Se presta especial atención a aquellas costumbres, hábitos, acciones, etc. (*v.g.* aplicar el algoritmo de la multiplicación, comunicar resultados parciales, entre otros.) que provocan, expresamente, el aprendizaje matemático permanente, la consolidación del conocimiento matemático a largo plazo, la manifestación de capacidades específicas en el estudiante y la creatividad matemática.

Con el fin de orientar una homogeneidad en el uso discursivo de este documento, se hace la selección de un constructo que denomine y represente las dinámicas mencionadas anteriormente. Y, aunque la palabra "repetición" parecería las más lógica de utilizar, se opta por una alternativa a fin de evitar que se malinterpreten las experiencias que referimos, confundiéndolas con hábitos acríticos e irreflexivos frente al trabajo matemático. "Razonamiento repetido" es un conjunto de palabras conveniente, cuya selección obedece a dos razones: primera, porque la palabra "razonamiento" implica realizar acciones de pensamiento profundas que son requeridas en un trabajo matemático provechoso y, segunda, porque en el marco de referencia contemplado para esta investigación se encuentra contemplado este fenómeno del aula bajo esta denominación. Así, de ahora en adelante nos referiremos al razonamiento repetido.

Por lo anterior interesa conocer ¿cuáles elementos del razonamiento repetido en el aula de matemáticas influyen en el aprendizaje de la matemática a largo plazo? ¿de qué manera se interrelacionan dichos elementos? y ¿cuáles de estos elementos son insustituibles, estudiando la naturaleza de dicha característica?

ANTECEDENTES

Al analizar los trabajos de investigación que reportan algún estudio sobre lo que se ha denominado razonamiento repetido, se hallan tres fuentes de información relevantes, dos de las cuales se enmarcan en un paradigma cognitivista Kieren y Pirie (1991) y Cooper (1991) y, la restante, en un paradigma participacionista y comunicacional Sfard (2008).

Al hablar de la experiencia matemática de los niños como una entidad compleja, Kieren y Pirie (1991) consideran la comprensión (understanding) en el conocimiento matemático de un individuo como una estructura mental, más que como un cúmulo de conocimientos, e identifican la recursión como una metáfora apropiada para discutir dicha entidad. Desde este punto de vista, el estudio del conocimiento matemático de un niño, las actividades matemáticas de construcción de conocimiento y la resolución de problemas, no puede obviar el enlace con el conocimiento y compresión previos.

Estos autores apuestan en su investigación por la caracterización recursiva de la experiencia matemática de los niños, indicando que el conocimiento matemático, la comprensión matemática y la actividad de resolver problemas se referencian a sí mismas, involucran estados que difieren entre sí, la estructura de los estados en una construcción particular de conocimiento o en la resolución de problemas son autosimilares y que, el estado actual del conocimiento matemático trascendental elaborado en estados previos, se conecta de tal forma que puede ser evidenciado dentro de acciones actuales de conocimiento.

Por lo anterior, el acto de conocer ocurre a través de acciones del pensamiento que se enlazan con resultados de acciones mentales previas y que se toman como entradas (inputs) en una situación problemática determinada. De esta manera es posible colegir que la resolución de problemas y la construcción de conocimiento son entidades complejas de la experiencia matemática.

Por su parte, Cooper (1991) enfoca su atención en el papel de la experiencia repetida para el desarrollo de conceptos matemáticos, entendiendo dicha experiencia como la repetición de un conjunto actividades similares e interrelacionadas que, a su vez, promueven el desarrollo de aspectos diferentes una y otra vez.

Al respecto, llama la atención sobre la escasa importancia que se le otorga, desde el punto de vista investigativo, a la organización y reorganización de estructuras mentales de conocimiento debido a la experiencia repetida. Reconoce que la experiencia repetida puede influir en estos y otros aspectos adicionales del desarrollo del conocimiento como, por ejemplo, el surgimiento de asociaciones entre unidades de conocimiento, la configuración de acciones particulares a un determinado grupo de situaciones problemáticas, entre otros.

Finalmente, Sfard (2008) incorpora el significado de la repetición en el marco del pensamiento matemático en general, y el aprendizaje de la matemática en particular, como el desarrollo de un discurso. Apuesta por la deconstrucción del significado rutina y todo lo que ha evocado en el campo de investigación para estudiarla en el aula, considerándola en términos comunicativos, como "…la fuente de eficacia comunicacional." (SFARD, 2008, p.195) llegando a observarla a través de las acciones regulares que un individuo lleva a cabo en situaciones similares.

Estas acciones discursivas repetitivas o patrones discursivos recurrentes se agrupan para conformar las rutinas, que le ofrecen al individuo tanto un curso de acción o forma de proceder, como una indicación del momento apropiado en los cuales utilizar los recursos a disposición. Desde esta perspectiva, la formación de rutinas en el desarrollo del pensamiento matemático no excluye la creatividad. Esta última es vista cuando el curso de una acción familiar, repetitiva o recurrente se trasplanta a un nuevo contexto discursivo de manera provechosa.

REFERENTE TEÓRICO

Consolidando y presentando un modelo de instrucción basado en la visión piagetiana del aprendizaje como "...adaptación dirigida a la conquista del equilibrio..." (MORENO-ARMELLA, 2000, p. 341) el investigador Guershon Harel plantea tres principios fundamentales involucrados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula: principio de Dualidad, principio de Necesidad y principio de Razonamiento repetido. De especial interés aquí es el *Principio de Razonamiento Repetido* (PRR de ahora en adelante).

El PRR establece que "…los estudiantes deben practicar el razonamiento para interiorizar formas deseables de entender y de pensar." (HAREL, 2010 p. 359). Además, Harel (2010, p. 360) señala que "…la secuencia de problemas que se da a los alumnos debe exigir continuamente la reflexión sobre las situaciones y las soluciones, y los problemas deben responder a las necesidades intelectuales cambiantes de los estudiantes...".

En Harel (2021, p. 359) el PRR se describe en términos de tres acciones esenciales: internalización del conocimiento, "...manifestada en la capacidad de aplicar el conocimiento de forma autónoma y espontánea..."; organización y reorganización del conocimiento, "...manifestada en la capacidad de reestructurar el conocimiento en ricas redes conceptuales jerárquicas..."; y la retención del conocimiento, "...manifestada en la capacidad de recordar el conocimiento durante un largo periodo de tiempo...".

METODOLOGÍA

Al concebir la realidad como una entidad dinámica, múltiple, cambiante y holista, esta investigación se enmarca en un paradigma y enfoque de investigación cualitativo, orientado a revelar los elementos que influyen en la manifestación de un fenómeno (el razonamiento repetido) y sus interrelaciones (elementos a identificar en este razonamiento). A continuación, se presenta el contexto experimental, así como los métodos de análisis de la evidencia recolectada para la obtención de resultados.

Contexto experimental

La evidencia recolectada se compone de las producciones realizadas por un grupo de siete estudiantes de secundaria de una institución educativa colombiana cuyas edades oscilan entre los 10 y 16 años. Con el liderazgo de la docente que es autora de este documento, los estudiantes asisten voluntariamente a tres sesiones de clase semanales, de una hora y media cada una, con el fin de constituir una comunidad de aprendizaje por medio de la solución de problemas y acertijos matemáticos.

Durante un semestre de trabajo con los estudiantes se plantea a los estudiantes la siguiente actividad, compuesta por tres problemas a ser resueltos.

Problema 1 – ¡Yo puedo adivinar el número![3]

La docente propone a un participante que piense en un número entre 1 y 60. Luego, este debe indicar en cuál de las siguientes tarjetas se encuentra el número que pensó. La docente dirá el número que pensó el estudiante, basada únicamente en la información de las tarjetas en las cuales se halla, en un aparente "truco de magia" ¿Por qué el truco de magia funciona? ¿Hay alguna explicación matemática para ello?

0 CARD					
1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59

1 CARD					
2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59

2 CARD					
4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	

3 CARD					
8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	

4 CARD					
16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	

5 CARD					
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	

[3] Problema propuesto por la profesora Lyda Constanza Mora Mendieta, en el seminario Aritmética, desarrollado en el segundo semestre de 2011 en la Universidad Pedagógica Nacional.

Problema 2 – Pagando el alquiler[4]

Un buscador de plata no podía pagar su alquiler de marzo por adelantado. Tenía una barra de plata pura de 31 centímetros de largo; de modo que hizo con su casera el siguiente arreglo: Le dijo que cortaría la barra en pedazos más pequeños. El primer día de marzo le daría a la casera un centímetro de la barra, y cada día subsiguiente le agregaría otro centímetro más. Ella conservaría la plata en prenda. A fin de mes, el buscador esperaba estar en condiciones de pagarle la renta completa, y ella le devolvería los pedazos de la barra de plata.

Marzo tiene 31 días, de modo que una manera de cortar la plata era dividirla en 3 1 partes, cada una de un centímetro de largo. Pero como era bastante laborioso cortarla, el buscador deseaba cumplir el acuerdo dividiéndola en el menor número posible de partes. Por ejemplo, podía darle a la casera un centímetro el primer día, otro centímetro el segundo día, y el tercer día podía entregarle una parte de tres centímetros y recibir a cambio las dos partes anteriores de un centímetro.

Suponiendo que las porciones de barra fueran entregadas y devueltas de esta manera, ve si puedes determinar el menor número posible de partes en las que el buscador debe dividir su barra de plata.

Problema 3–¿Cuántos ceros escribirías?[5]

¿Cuántos ceros escribimos cuando escribimos todos los enteros del 1 al 256 en binario?

Las unidades de análisis se seleccionan por conveniencia y por ser de tipo teórico pues, son aquellas que se encuentra a disposición de los investigadores y que contribuyen con el acercamiento a la descripción teórica buscada. La evidencia la constituyen aportes fotográficos de los apuntes de los participantes, sus declaraciones verbales y las reflexiones de la docente registradas posteriormente a cada sesión en su diario de campo. Todas las sesiones fueron grabadas para su posterior consulta.

Métodos de la teoría fundamentada

La elección de la teoría fundamentada como parte del diseño metodológico para el análisis de la información es porque permite "…apoyar la abstracción de los datos para desarrollar una teoría que se base en los datos empíricos…" (VOLLSTED Y REZAT, 2019, p. 83), y porque es apropiada para el estudio de fenómenos, objetos o conceptos que carecen de un desarrollo teórico suficiente o, cuando la relevancia de conceptos y sus relaciones aún no han sido corroboradas en un contexto o población particular, como es el caso del PRR. El proceso de evaluación de los datos recolectados se realiza bajo sendas técnicas establecidas, denominadas codificación, las cuales son: abierta, axial y selectiva (STRAUSS Y CORBIN, 2002).

La *codificación abierta* es el proceso analítico por medio del cual se identifican los basamentos fundamentales de la teoría (conceptos), se descubren en los datos las características de una categoría

[4] Problema tomado del libro de Martin Gardner, *Matemática para divertirse*, publicado en 1986 cuyo título es La barra de plata (p. 15).

[5] Problema tomado en Mike's Math Page recuperado el 19 de julio de 2021 en el enlace https://mikesmathpage.wordpress.com/2014/07/19/a-great-counting-problem-for-kids-involving-binary/

(sus propiedades), y la escala en la cual varían las propiedades generales de esta (sus dimensiones) (STRAUSS Y CORBIN, 2002).

La *codificación axial* es el "…proceso de relacionar las categorías a sus subcategorías, denominado 'axial' porque la codificación ocurre alrededor del eje de una categoría, y enlaza las categorías en cuanto a sus propiedades y dimensiones." (STRAUSS Y CORBIN, 2002, p.134).

Y la *codificación selectiva*, que es el "…proceso de integrar y refinar la teoría." (STRAUSS Y CORBIN, 2002, p.157), alcanzando la saturación teórica e incorporando los rangos de variabilidad, entendidos como "…el grado hasta el cual varía un concepto en cuanto a las dimensiones de sus propiedades […] por medio de un muestreo que busca la diversidad y los rangos [de estas]." (STRAUSS Y CORBIN, 2002, p.157).

RESULTADOS

Al analizar la evidencia recolectada por medio de la codificación abierta, se halla el uso frecuente de mediadores (*v.g.* tablas de datos numéricos y no numéricos, representaciones posicionales de los números naturales por medio de cajas y alfas, entre otros); de estrategias para exploración de los problemas (*v.g.* trabajar un problema ás pequeño); y de criterios habituales para la selección de un registro de representación o de las estrategias empleadas que fueron descritas anteriormente.

En el tratamiento de dichos elementos por medio de la codificación axial, se identifican nueve acciones que se categorizan en cuatro niveles, de acuerdo con las funciones asignadas por los participantes durante la solución de los problemas.

Categorías de acciones

En el *Nivel 1–acciones globales*, se ubican dos acciones de carácter global que sustentan la formulación de un plan general de solución para el problema, alejándose de sus singularidades. Ayudan al participante a tomar distancia en el proceso de solución y a construir una visión general del curso adecuado a seguir. Tales acciones son la de *Dividir el problema* (analizar el problema dividiéndolo en partes pequeñas) y la *inmersión/emersión del problema* (ver paralelismos entre problemas auxiliares y el problema original).

Las acciones del *Nivel 2 – acciones intermedias*, despliegan puntos de conexión entre el plan general y algunas particularidades del problema. El participante reflexiona sobre el problema, acercándose al uso de datos concretos de la formulación inicial o alternando entre diversas hipótesis. En todo caso, se usan como mecanismos de ayuda que soportan la búsqueda de solución al problema. Por ejemplo, *uso de un problema auxiliar* y *buscando una generalidad*.

En el *Nivel 3 – acciones específicas* se agrupan aquellas que le ofrecen al resolutor la posibilidad de lo que llamaríamos "ensuciarse las manos" con el trabajo matemático. Representan el trabajo de campo con el problema, aplicando rutinas, cuestionándose, revisando cálculos, estructurando vías para agotar casos, posibilidades y alternativas, etc. Acciones de ejemplo son la de *evaluar las condiciones iniciales, seleccionar o decidir el punto de partida* y, *el uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas*.

Por último, en el *Nivel 4 – acciones de engranaje* se hallan aquellas que permiten enlazar las acciones de los niveles anteriores, permitiéndole al participante desenvolverse entre estos, durante la solución del problema. Pueden, por ejemplo, ser fundamentales para un cambio de plan en el Nivel 1, o para agregar posibilidades a corroborar en el Nivel 2, o para redireccionar las acciones del Nivel 3. Aunque juegan un papel decisivo en diferentes momentos, siempre atienden a un nivel concreto, incluso cuando influye en niveles abstractos. Estas atienden a *comunicar resultados-convencer* o *mostrar un ejemplo (contraejemplo)* que incluye como función el corroborar un resultado, resaltar información irrelevante que lleva a errores de cálculo, ejemplificar la búsqueda de una generalidad de procedimiento o de cálculo, contrastar resultados obtenidos entre diferentes participantes con el fin de ajustarlos.

Curso del razonamiento

Se analiza y presenta a continuación el detalle del razonamiento empleado por los estudiantes para resolver cada problema presentando, por un lado, la descripción de las acciones en bloques que son separados por filas sombreadas de color gris cuando la naturaleza de las intervenciones de los participantes cambia lo suficiente para plantear escenarios de atención particular; y, por otro, en un esquema que representa la generalidad del detalle del curso del razonamiento.

Problema ¡Yo puedo adivinar el número!

La docente líder planteó el problema, siendo ella quién realizaba el truco de magia adivinando el número que cada uno de los participantes pensaba y ponía a prueba. La cantidad de veces que fue necesario realizar el proceso de adivinanza fue numeroso, surgiendo la valoración de regularidades entre los números de cada tarjeta como estrategia.

Cuadro 1 – Curso del razonamiento del problema 1.

1. Dividir el problema

Valoración de las particularidades de los números de cada tarjeta por separado. Con base en esto, observar particularidades en los conjuntos de números que allí se agrupan.

1. Evaluar las condiciones iniciales.

¿Cuál es la particularidad que tienen los números de cada tarjeta? ¿Hay alguna particularidad entre los números de una misma tarjeta que permita descartar o considerar opciones a la hora de adivinar el número?

2. Seleccionar o decidir el punto de partida.

Los números de cada tarjeta deben tener algún tipo de característica común que permite descartar o considerar opciones a la hora de adivinar el número.

3. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

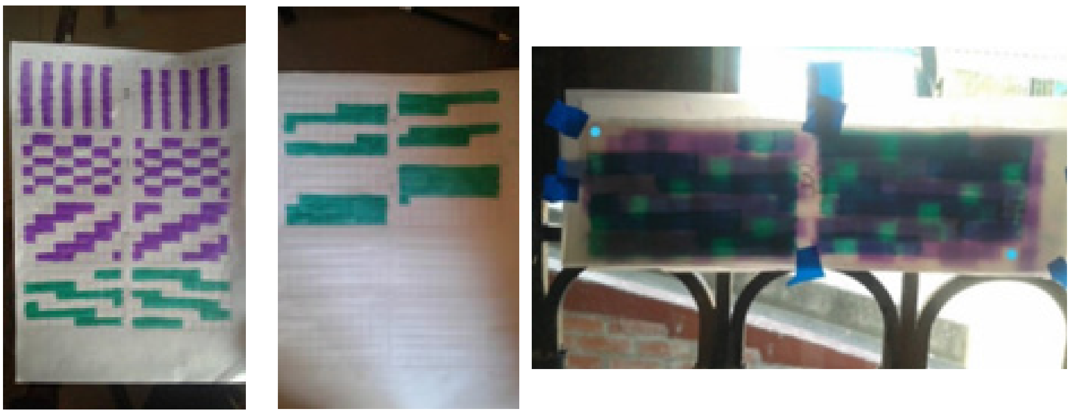
Al analizar los números de la tarjeta 0, por ejemplo, se halla que todos estos son números impares y que contiene a todos los números impares del intervalo 1 al 60.

4. Comunicar resultados-convencer.

Todos los números impares que hay entre 1 y 60 están contenidos en la tarjeta 0 y, por tanto, si un participante piensa en un número par, no es requerida tal tarjeta para adivinarlo.

De esta forma, en las demás tarjetas es posible ocultar o dejar ver un cierto tipo de números de acuerdo con la paridad, sobreponiendo papel calco sobre cada tarjeta con una configuración particular.

Figura 1 – Tarjetas simétricas para ocultar-revelar números.



Fuente: imágenes del participante Alberto.

1. Inmersión-emersión del problema.

Cada tarjeta debe tener una particularidad, pero debe verse a partir de los números que ya se han adivinado hasta el momento.

2. Evaluar las condiciones iniciales.

Si se plantea la adivinanza de un número específico ¿qué tienen de particular los números de las tarjetas en las que sí se encuentra el número pensado? ¿Hay algún indicio entre los números o en algún número de tales tarjetas?

3. Seleccionar o decidir el punto de partida.

Hay alguna particularidad en un número o conjunto de números de las tarjetas en las que sí se encuentre un número particular que se esté adivinando.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Al pensar un número, la suma de los números que ocupan la primera casilla de cada tarjeta en las cuales este se encuentre, es igual dicho número.

5. Mostrar un ejemplo (contraejemplo).

El número 14 se encuentra en las tarjetas 1, 2 y 3. Los números de la primera casilla de cada una de esas tarjetas es 2, 4 y 8, respectivamente. Entonces 14 = 2 + 4 + 8.

#	Tiempo	Participante	Intervención
1	48:49	María	Profe, pues la 2explicación sería que (.3) digamos (.) en el número digamos que ella dice que, que está el número que ella eligió que es el 14, entonces digamos, en la tarjeta 1 estaba el 14[=
2	49:04	Docente	=Sí.
3	49:05	María	Entonces lo que a mí se me ocurrió pues, [fue] poner el número de la esquina ((refiriéndose al primer número de la tarjeta 1)).
4	49:10	Docente	Este es el [número] que Alejandra pensó ((encerrando en una circunferencia en la imagen de la tarjeta 1 el número 14)) y este es el [número] de la esquina ((encerrando en una circunferencia en la imagen de la tarjeta 1 el número 2)). Ajá.
5	49:16	María	Y entonces digamos, los otros dos números que yo puse, entonces esos salieron de las otras tarjetas [en las] que ella dijo que sí estaba el número. Entonces, a mí se me ocurrió tomar eso, pero pues no sé si será (.) si sea verdadero o no.

6. Evaluar las condiciones iniciales.

¿De qué manera es posible comprobar que todos los números pensados se pueden adivinar por medio de la suma de los números de la primera casilla de las tarjetas en las cuales se encuentra?

7. Seleccionar o decidir el punto de partida y uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Comprobar este mecanismo por medio de la adivinanza de más números, jugando varias veces más.

8. Comunicar resultados-convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se hace lleva a cabo el truco de magia con tres números más: 32, 33 y 59. Se tiene el detalle de tarjetas y operación (Ver Tabla 1).

Tabla 1 – Distribución de los números 32, 33 y 59 en las tarjetas.

Número	Tarjetas en las cuales se halla el número	Operación
32	Tarjeta 5 – 32	32 = 32
33	Tarjeta 0 – 1	1 + 32 = 33
	Tarjeta 5 – 32	
59	Tarjeta 0 – 1	1 + 2 + 8 + 16 + 32 = 59
	Tarjeta 1 – 2	
	Tarjeta 3 – 8	
	Tarjeta 4 – 16	
	Tarjeta 5 – 32	

Fuente: elaborado por los autores.

9. Buscando una generalidad.

La docente cuestiona si la narrativa descrita como el mecanismo con el cual es posible adivinar los números pensados es válida para todos los números naturales entre el 1 el 60.

1. Uso de un problema auxiliar.

¿De qué manera comprobar que todos los números naturales entre el 1 y el 60 se pueden hallar en las tarjetas del truco de magia de tal forma que sean la suma de los números de la primera casilla de cada una de estas?

2. Inmersión/emersión del problema.

Adoptando e integrando las dos formas de abordar el problema, se requiere comprobar que todos los números naturales entre el 1 y el 60 pueden ser marcados en una combinación de tarjetas cuyos números de las primeras casillas, al ser operados con la adición, arrojan como suma el número pensado por un participante.

3.Dividir el problema.

La comprobación requerida se divide entre los participantes por medio de intervalos de números naturales, a saber:

Del 1 al 20.	Del 10 al 30.	Del 20 al 40.	Del 30 al 50.	Del 40 al 60.	Del 50 al 60 y del 1 al 10.

4. Evaluar las condiciones iniciales.

¿Los números en el intervalo asignado pueden ser expresados como los números de la primera casilla de cada tarjeta en las cuales se encuentren?

5. Seleccionar o decidir el punto de partida.

Los ejemplos mostrados (32, 33 y 59) muestran que son suma de los números de la primera casilla de las tarjetas en las que se encuentran.

6. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Registrar en una tabla cada una de las ubicaciones de los números naturales entre el 1 y el 60, inclusive, de acuerdo con su aparición en las 6 tarjetas del truco de magia.

7. Comunicar resultados – convencer.

Cada uno de los números tiene una configuración particular en las tarjetas del truco de magia que, además, al operar con la adición los números de la primera casilla de cada una de aquellas en la que se encuentre, se obtiene como resultado dicho número. La configuración es, además, única. Se evidencia una conexión con el sistema de numeración binario. Si cada marca X se cambia por un dígito 1, y cada espacio vacío por un dígito 0, se obtiene de forma vertical la representación binaria de cada número natural en la tabla.

Figura 2 – Registro de números del al 60 en las tarjetas.

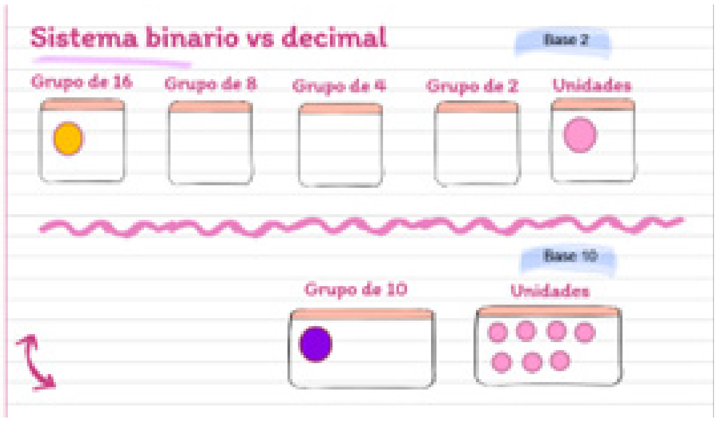
		Números																													
Tarjeta	**0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0 -1		x	0	x	0	X	0	x	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X		X		X		X	
1 - 2			x	x			X	x			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X
2 - 4					X	X	X	x					X	X	X	X					X	X	X	X					X	X	X
3 - 8									X	X	X	X	X	X	X	X									X	X	X	X	X	X	X
4 - 16																	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5 - 32																															

		Números																													
Tarjeta		31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0 -1		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
1 - 2		X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X	
2 - 4		X					X	X	X	X					X	X	X	X					X	X	X	X					X
3 - 8		X									X	X	X	X	X	X	X	X									X	X	X	X	X
4 - 16		X																	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5 - 32			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Fuente: estudiantes voluntarios.

A partir del uso de un mediador que identifica una caja con la posición de un dígito y un alfa con una unidad o grupos de unidades como la siguiente,

Figura 3 – Representaciones del sistema binario y decimal.



Fuente: elaborado por los autores.

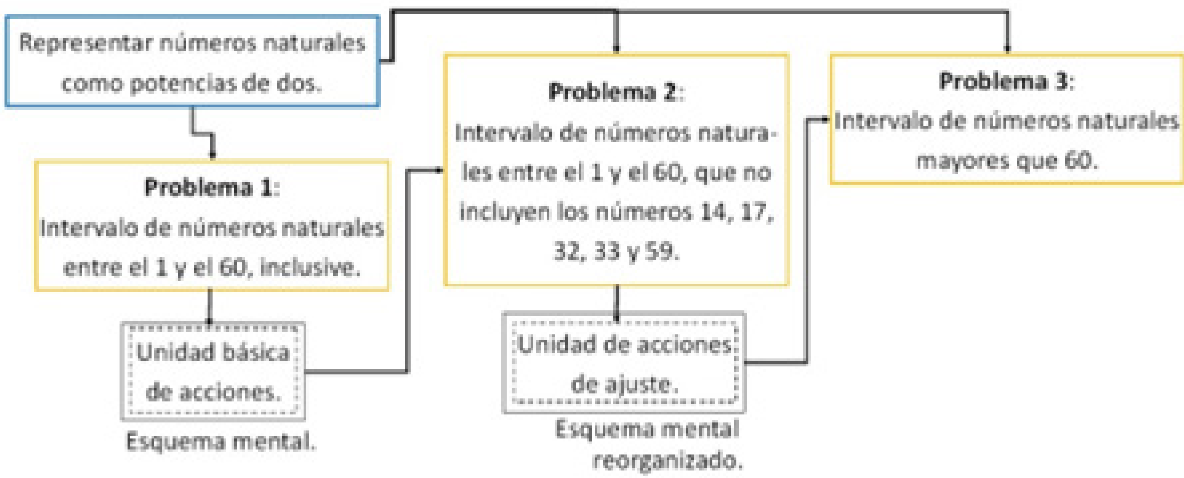
Se puede establecer una relación entre la representación decimal y binaria de lo números naturales.

	Tiempo	Participante	Intervención
6	52:26	María	Yo noto que, digamos (.) cada número de la esquina [de cada tarjeta] corresponde como a (.) al valor [que representa una esfera] de cada cajita. Digamos, en la tarjeta 0 [tomamos] el 1, que son las unidades; el 2 [de la tarjeta 1, que coincide con el valor de la segunda posición]; el 4 [de la tarjeta 2, que coincide con el valor de la tercera posición]; el 8, [de la tarjeta 3, que coincide con el valor cuarta posición]; el 16, [de la tarjeta 4, que coincide con el valor quinta posición] y el 32 [de la tarjeta 5, que coincide con el valor sexta posición].

Fuente: elaborado por los autores.

A continuación, el esquema general del razonamiento (Ver Figura 4)

Figura 4 – Esquema general de solución del problema 1.



Fuente: elaborado por los autores.

Problema Pagando el alquiler

Por la extensión del problema y el contexto en el cual se enmarca, se evalúan las condiciones iniciales que deben ser satisfechas. La manera de abordar este problema se distinguió por la forma en la cual se busca la solución del problema. Grosso modo y hasta ahora, los participantes determinan el punto de partida con base en el cual aplican narrativas y comunican resultados. Aquí, el trabajo se basó, principalmente, en proponer soluciones que son evaluadas de acuerdo con su ajuste a las condiciones iniciales. La solución que se ajuste es la respuesta al problema.

De acuerdo con lo anterior, los problemas que se identifican aquí se basan en la verificación de que una partición específica de la barra de plata sea apropiada, tanto en términos de la eficiencia en la cantidad de cortes, como en que esta permita suplir el pago del alquiler en la justa medida por medio del mecanismo de devolución y entrega.

Cuadro 2 – Curso del razonamiento del problema 2.

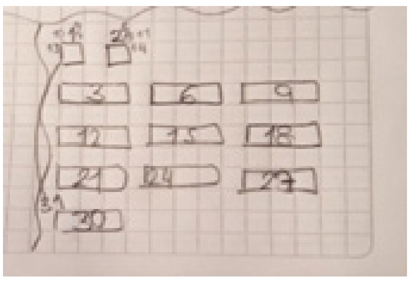
1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Cuáles son las condiciones de entrega y devolución de trozos de plata de tal forma que la casera no tenga, en un día específico, ni una mayor ni una menor cantidad de plata de la que debe tener?

Las condiciones son las siguientes:

- Como marzo tiene 31 días, la cantidad de centímetros de la barra de plata se ajusta a estos. Así, es posible cubrir todos los 31 días.
- El primer día de marzo, el buscador debe darle a la casera un trozo de plata de 1cm de longitud.
- Cada día subsiguiente, la casera deberá tener en su poder trozos de plata cuya longitud en centímetros se corresponda con el número del día de marzo correspondiente.
- Como la plata es laboriosa de cortar, se debe dividir la barra en un número eficiente de partes para disminuir el trabajo de corte y cubrir la deuda diaria en la cantidad justa de trozos de acuerdo con su longitud.
- Los intercambios de trozos de plata pueden iniciar como sigue: primer día, dar un trozo de 1cm de longitud; segundo día, dar un trozo de 1 cm más; tercer día, dar un trozo de 3cm de longitud y solicitar la devolución de los trozos de 1cm que tiene la casera en su poder.

Figura 5 – Propuesta de división de la barra.



Fuente: elaboración de Gabriela.

2. Usar narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Teniendo en cuenta la sugerencia de intercambios para los tres primeros días, el método de entregas puede ser de la siguiente forma: en el cuarto día, dar a la casera uno de los trozos de plata de 1cm que fueron devueltos en el tercer día; el quinto día, dar el otro trozo de plata de 1cm; el sexto día, cortar y dar a la casera un trozo de 6cm de longitud solicitando la devolución de los trozos anteriores. De esta manera, cortar la barra en trozos de longitud que sean múltiplos de 3cm hasta agotar la barra y cubrir la deuda del mes.

3. Comunicar resultados – convencer.

La cantidad de partes en las que se divide la barra de plata para garantizar la entrega y devolución de trozos de acuerdo con el número del día es doce. Se presentan las divisiones por medio de un gráfico de partición.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿La división propuesta cumple con las condiciones iniciales del problema teniendo en cuenta la longitud de la barra y el método de entrega y devolución? La barra de plata tiene 31cm y esta longitud debe ser la suma de las longitudes de los trozos en las cuales se corte.

2. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados-convencer.

Al sumar 1cm + 1cm + 3cm + 6cm + 9cm + 12cm + 15cm+ 18cm + 21cm + 24cm + 27cm + 30cm = 167cm. La suma de las longitudes de los trozos de barra que son propuestos excede en 136cm la longitud de la barra que se establece en las condiciones iniciales.

3. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera interpretar el mediador que ilustra la partición de la barra de plata para que la suma de las longitudes de los trozos pequeños no exceda la longitud total?

Como la longitud de la barra de plata es de 31cm, la interpretación de la partición propuesta debe contemplar que todos los trozos, excepto tres, miden 3cm de longitud cada uno.

5. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Teniendo en cuenta la sugerencia de intercambios para los tres primeros días, el método de entregas puede ser de la siguiente forma: en el cuarto día, dar a la casera uno de los trozos de plata de 1cm que fueron devueltos en el tercer día; el quinto día, dar el otro trozo de plata de 1cm; el sexto día, cortar y dar a la casera un trozo de 3cm de longitud solicitando la devolución de los dos trozos de 1cm. De esta manera, cortar la barra en trozos de longitud de 3cm hasta agotar la barra y cubrir la deuda del mes.

5. Comunicar resultados – convencer.

La suma de las longitudes de los trozos de barra que son propuestos excede en 1cm la longitud indicada. La división sugiere que la barra debe medir 32 cm, por lo cual en el día 26 la última parte que le queda al buscador no es de 3 cm sino de 2 cm.

Con el esquema mental construido se aborda el problema desde una perspectiva diferente, llegando a encontrar que una cantidad menor de partes es posible.

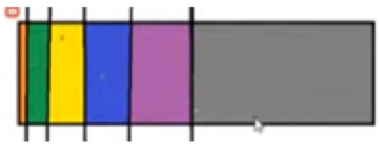
1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Dividir la barra, inicialmente, en dos partes de una longitud similar. Luego, dividir la parte la parte más pequeña en cinco pedazos, de tal forma que al menos uno de estos sea de 1cm de longitud para poder cubrir la deuda del primer día.

#	Tiempo	Participante	Intervención
9	27:38	Alberto	Entonces, primero que todo tomé el 31 y lo dividí a la mitad. Es decir 16. Bueno, aproximado porque está el 16 y el 15, no sé a cuál de los dos, pero se veía que tenía que haber una barra más (.) partida a la mitad. Mejor dicho, es como un experimento que la partí[era] a la mitad (…) Escogí el 16 por [ser] el más alto y una suma de números seguidos que dieran 15 (…) Por ejemplo, dividí la barra en 6 pedazos: [de tamaños] 1, 2, 3, 4 y 5 [centímetros], principalmente (…) 4 más dos me da 6; 4 + 3, 7; ((indicándolo en la Figura 5 que proyectaba)) en total la suma de estos ((refiriéndose al 1, 2, 3, 4 y 15)) dan 15.

Evaluar las condiciones iniciales.

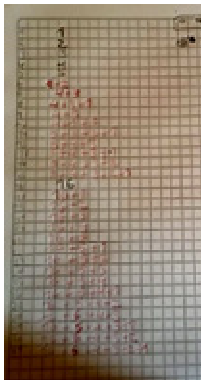
Asumiendo que la barra se divide en partes de longitud 1cm, 2cm, 3cm. 4cm. 5cm y 16cm, es posible cubrir la deuda de algunos días de dos formas diferentes, al menos. Por ejemplo, para el día 7 se puede hallar más de una configuración.

Figura 6 – Propuesta de división de la barra.



Fuente: elaboración de Alberto.

Figura 7 – Propuesta de división de la barra.



Fuente: elaboración de Alberto.

#	Tiempo	Participante	Intervención
10	32:42	Alberto	Este grupo de barras o de partes (…) [representan] el 6, el 7, el 8, el 9, el 10, el 11, el 12, el 13 o el 14. Solo hay que saberlos sumar. Por ejemplo, tenemos (…) [el día] 6. Entonces, tomamos la barra [que mide] 4 [cm] y la barra [que mide] 2 [cm y que, en total suman 6 cm]. Después tomo la barra de 4 [cm] y la barra de 3 [cm para el día 7]. Después la barra de 4 [cm], 3 [cm] y 1 [cm para el día 8], aunque también puede colocar la barra de 5 [cm] y la barra de 2 [cm para el día 7].
11	33:05	Docente	Sí, eso te iba a decir. ¿Qué influye en la selección [de una configuración de barras]? ¿Nada?
12	33:10	Alberto	Puede darle menos, puede darle más. Lo importante es que la suma cumpla con el día.

3. Comunicar resultados–convencer.

Se ilustra la forma de sumar día a día las longitudes de las seis partes en las cuales fue dividida la barra.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las longitudes de cada una de las partes en las cuales se divide la barra de plata, de tal forma que se pueda garantizar que el número de cortes es el menor posible?

La menor cantidad posible hallada hasta ahora es de seis partes.

2. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas, comunicar resultados-convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Con base en la división de la barra de plata en dos partes de similar longitud (15cm y 16cm), determinar la cantidad de partes en la cual debe ser dividida la parte más pequeña verificando el cumplimiento de las condiciones.

Una de las partes debe tener 1 cm de longitud, pues es necesaria para suplir la deuda del primer día y de días impares. Otra de las partes debe tener 16 cm, pues el valor restante de la barra debe adecuarse de tal forma que la suma de piezas sea 15cm y, el tener dos piezas que corresponden a la mitad (aproximadamente) de la barra original ahorra un corte posterior.

De forma similar, se evidencia la necesidad de que una de las otras piezas deba tener 2cm de longitud y, así, sabe que al menos son necesarias más de tres particiones. Se descarta que el número de particiones sea 4 pues, en el día 19, no será posible dar la cantidad de plata necesaria. En consecuencia, si hay una cantidad menor a la propuesta hasta el momento (6 partes), esta cantidad debe ser 5.

3. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Es posible obtener 5 partes de la barra de plata que cumplan con las condiciones del problema y, además, se sujeten a las deducciones antes descritas? Se asume que tres partes deben tener 1cm, 2cm y 16cm de longitud, respectivamente.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados–convencer.

El pedazo restante de la barra que aún no ha sido cortado tiene 12 cm, el cual debería ser dividido en dos partes. Las posibilidades son:

caso 1: 1 y 11 cm;

caso 2: 2 y 10 cm;

caso 3: 3 y 9 cm;

caso 4: 4 y 8 cm;

caso 5: 5 y 7 cm; y

caso 6, 6 cm cada parte.

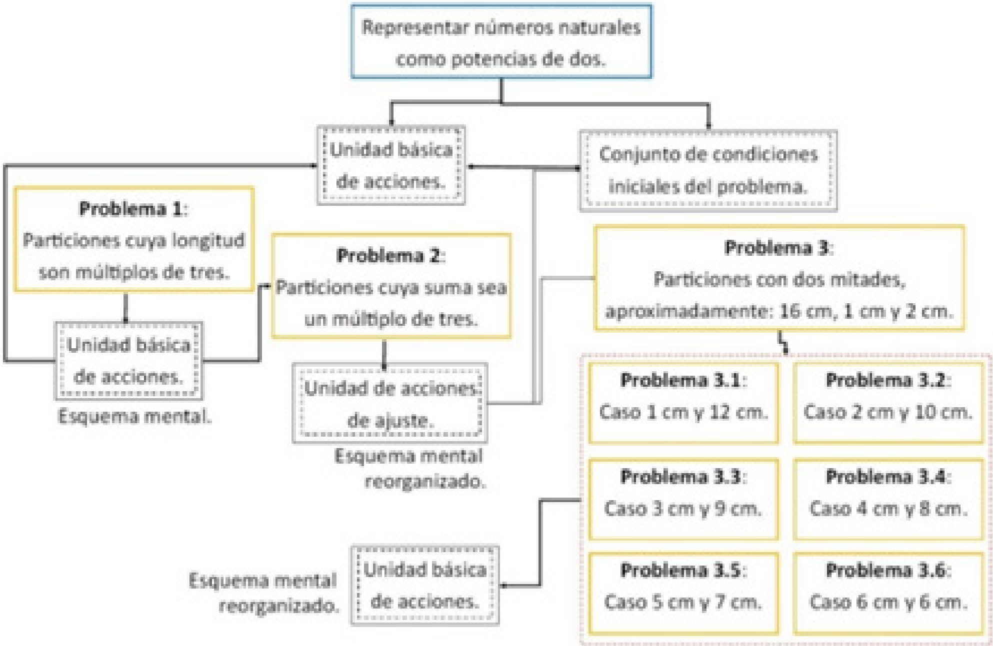
Luego de cada verificación día por día y caso por caso, se concluye que la división favorable es la propuesta en el caso 4.

Fuente: elaborado por los autores.

Uno de los participantes (Carlos) hace mención acerca de la particularidad sobre la aparición de los números 1, 2, 4, 6, 8 y 16 pues, se relacionan con los valores que representan las unidades en el sistema de numeración binario trabajado en el problema de adivinanza del número. Esta conexión puede sugerir un entendimiento profundo sobre las particularidades de los problemas y, por tanto, ser susceptible de anclarse a la internalización y organización de las formas de entender y de pensar manifestadas por los participantes.

El esquema general del proceso de razonamiento para la solución de este problema se muestra en la Figura 8.

Figura 8 – Esquema general de solución del problema 2.



Fuente: elaborado por los autores.

Problema ¿Cuántos ceros escribirías?

El planteamiento de este problema busca que los estudiantes internalicen la noción de posición en la representación de un sistema de numeración, lo que hace que cada dígito sea equivalente a una cantidad determinada de unidades dependiendo de dicha posición. Los participantes abordan el problema desde, al menos, tres perspectivas identificables: i) escribir el listado completo de números y hacer el conteo de los dígitos cero, uno a uno, ii) valorar un patrón o regularidad entre aquellos números que no contienen dígitos ceros en su representación, quizás con la idea de calcular el complemento de algún conjunto y, iii) la determinación de un patrón o regularidad en la representación de los primeros números naturales, que permita inferir la cantidad de dígitos ceros para el resto de números en la lista.

La segunda manera de abordar el problema surge del trabajo inicial realizado en la primera forma, aunque es desechada en el momento en el cual la regularidad percibida es difícil de precisar en términos precisos. La tercera manera de abordar el problema es una iniciativa que surge de forma independiente de las dos primeras formas descritas. En las líneas siguientes, se describe el curso del razonamiento.

Cuadro 3 – Curso del razonamiento del problema 3.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Es posible realizar el conteo de los ceros, número a número, para tener la certeza del resultado del problema? Teniendo en cuenta que el intervalo de números naturales propuesto es finito y, además, pequeño (hasta 256), es posible realizar el conteo número a número.

2. Usar narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados – convencer.

Por medio de un registro tabular, escribir la representación binaria de cada uno de los números naturales entre 1 y 256, inclusive. La Tabla 2 contiene los primeros 24 números naturales.

Tabla 2 – Representación binaria y decimal de los primeros 24 números naturales.

Número natural	Representación binaria	Número natural	Representación binaria	Número natural	Representación binaria
Uno	1	Nueve	1001	Diecisiete	10001
Dos	10	Diez	1010	Dieciocho	10010
Tres	11	Once	1011	Diecinueve	10011
Cuatro	100	Doce	1100	Veinte	10100
Cinco	101	Trece	1101	Veintiuno	10101
Seis	110	Catorce	1110	Veintidós	10110
Siete	111	Quince	1111	Veintitrés	10111
Ocho	1000	Dieciséis	10000	Veinticuatro	11000

Fuente: elaborado por los autores.

3. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Hay algún patrón o regularidad en el registro de los dígitos de la representación binaria de los números naturales?

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados – convencer.

Se evidencia un patrón en el registro de los dígitos "uno" en la representación binaria de los primeros 24 números naturales.

#	Tiempo	Participante	Intervención
14	56:55	Alejandra	Cuando comencé en el [número] ocho (2000) comenzaba [la representación binaria] mil [1000 que corresponde a la representación del número 8 en binario], después se le ponía [el número] uno [al dígito de las unidades para representar el número nueve con 1001], después se le corría [el número] diez [1010 en representación binaria del número diez], después se le volvía a repetir el [número] uno [en el dígito de las unidades para representar el número once con 1011], y después se corrió a [el número] cien [1100 en representación binaria del número doce], y así sucesivamente.

15	57:40	Docente	Sí.
16	57:41	Alejandra	Entonces, comenzaba en 0 [representación binaria del número cero], luego en 1 [representación binaria del número uno], luego en 10 [representación binaria del número dos], luego en 11 [representación binaria del número tres], luego en 100 representación binaria del número 4], luego en 101 [representación binaria del número cinco], luego en 110 [representación binaria del número 6], y quedaba en 111 [representación binaria del número siete], y así se repetía (.) iba subiendo.

Si bien la docente invita a Alejandra a explorar un poco más en la observación hecha por ella en su búsqueda de la respuesta evitando la verificación en cada caso, encuentra una dificultad al ver el comportamiento cambiante del patrón, por lo cual es necesaria la inclusión de un digito más a la izquierda para los números a partir del 16.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera el registro de los dígitos "uno" en la representación binaria de los primeros números naturales contribuye con el conteo pedido en el problema? En el problema inicial se solicita contar los dígitos "cero" en la representación binaria de los números naturales entre el 1 y el 256, inclusive.

2. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas, comunicar resultados–convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Con las consideraciones anteriores, se puede decir que "el [número] uno no tiene [dígitos ceros]; el [número] siete tampoco, después hasta el [número] 15 (...), luego va hasta el [número] 31; (...) y ya desde el 31 no sé cuáles más" (Participante Alejandra).

Tabla 3 – Cantidad de dígitos escritos por número hasta el 35.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Cantidad de ceros	0	1	0	2	1	1	0	3	2	2	1	2	1	1	0	4	3	3	2

Número	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Cantidad de ceros	3	2	2	1	3	2	2	1	2	1	1	0	5	4	4	4

Fuente: elaborado por Alejandra.

Esto permite determinar, sin hacer el cálculo, que 63 tampoco tendría dígitos ceros. La forma de determinar esto se puede suponer al ver que la secuencia de números 0, 1, 3, 7, 15 y 31 (aquellos que no requieren ceros para su escritura binaria) se comporta de forma recursiva al sumar una potencia de dos cada vez pues, 0 + 1 = 1, 1 + 2 = 3, 3 + 4 = 7, 7 + 8 = 15 y 15 + 16 = 31. Con esto, se obtiene que 31 + 32 = 63.

3. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera el patrón observable sobre la ausencia de dígitos ceros en la representación binaria de algunos números, proporciona indicios sobre la cantidad de "ceros" en la representación binaria de los números naturales tomados en intervalos?

Con base en la evidencia, la cantidad de ceros necesarios para escribir los números comprendidos entre 31 y 63 deben tener alguna regularidad.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados–convencer.

Como no es posible visualizar un patrón o regularidad en la cantidad de ceros por intervalos de números naturales de forma inmediata, se escribe cada número del problema en representación binaria y se totaliza la cantidad pedida por el problema. Se obtienen 773 ceros, lo cual difiere de la cantidad real por 4 ceros debido, posiblemente, a un error de cálculo.

Por su parte, Alberto propone desde el inicio la estrategia de buscar algún tipo de patrón o regularidad con base en la escritura de los primeros números y, así, hacer una hipótesis sobre el resultado. Su razonamiento se describe a continuación.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Es posible realizar el conteo de los ceros recurriendo a la observación de algún patrón o regularidad en la representación binaria?

Teniendo en cuenta que debe alguna regularidad en la cantidad de ceros en la representación binaria para el intervalo propuesto, se debe observar la representación de los primeros números y así enunciar una conjetura.

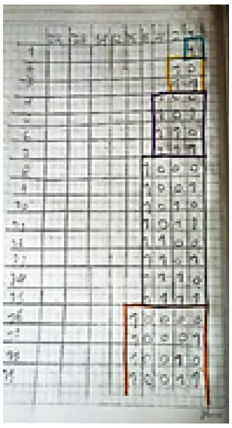
2. Usar narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Por medio de un registro tabular, se escribe la representación binaria de los primeros 19 números naturales. Se hacen marcas rectangulares en determinados conjuntos de dígitos de acuerdo con el siguiente patrón: el primer dígito del primer número es un 1 seguido de dígitos 0 y, el último número tiene todos sus dígitos 1. A estos conjuntos los llama "conjuntos de dígitos" y se pueden construir a partir de la representación del número dos.

Comunicar resultados–convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

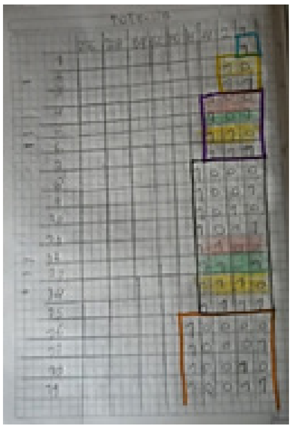
Para la primera marca (color turqués) hay un número; para la segunda (color amarillo), dos números; para la tercera (color púrpura), cuatro números, para la cuarta (color negro), ocho números; y así sucesivamente. Se estima que las siguientes cuatro marcas contendrán, 16, 32, 64 y 128 números, respectivamente.

Figura 9 – Representación binaria de números naturales.



Fuente: elaboración de Alberto.

Figura 10 – Representación binaria de números naturales.



Fuente: elaboración de Alberto.

4. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Hay alguna regularidad o patrón en la cantidad de ceros que hay en cada "conjunto de dígitos"? Se debe establecer la cantidad de ceros en cada conjunto y observar la secuencia resultante.

5. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

La cantidad de ceros que hay por cada una de las cuatro marcas completas es como sigue: en la primera, no hay ceros; en la segunda, hay un cero; en la tercera, hay cuatro ceros; y en la cuarta, hay doce ceros.

6. Comunicar resultados – convencer.

En la secuencia 0, 1, 4 y 12, que corresponde a la cantidad de ceros en los primeros cuatro "conjuntos de dígitos", no hay evidencia de un patrón identificable. Por lo anterior, no es posible estimar la cantidad de ceros en el quinto “conjunto de dígitos” por lo que es posible que la cantidad de ceros no siga una única regularidad, sino varias.

7. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Qué otro patrón o regularidad es observable en el registro de los ceros de la representación binaria en los primeros 19 números naturales que sirva para hacer el conteo total hasta el número 256?

8. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se observa que la representación binaria de los números 5 y 6, (101 y 110) se puede ver reflejada en forma similar entre la representación binaria de los números 10 y 12 (1010 y 1100) pues, para ambos, se agrega un dígito 0 al final, lo cual puede ser “un patrón amplificado del código binario”.

9. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados – convencer.

En color amarillo, se resalta todos los números cuyo último dígito es 0 y el resto de los dígitos son 1. El color rojo, resalta todos los números cuyos últimos dos dígitos son 00, y el resto de los dígitos son 1. El color verde resalta todos los números cuyos últimos dos dígitos son 01, y el resto de los dígitos son 1. A estos conjuntos los llama “conjuntos similares”.

De seguir con el mismo registro tabular, cada línea de un “conjunto similar” se repite ocho veces (para el amarillo) o siete veces (para el verde y el rojo) pues, hay nueve columnas en la tabla (las requeridas para escribir los números del 1 al 256), a las cuales se les debe restar una unidad que corresponde con el primer número, y una adicional para las líneas ausentes de cada “conjunto similar”, según el “conjunto de dígitos” estudiados. Así, se debe obtener la cantidad de ceros por cada “conjunto similar” que resaltar los números específicos.

Tabla 4 – Cantidad de dígitos ceros escritos por “conjunto similar”.

Color	Cantidad de ceros por número	Cantidad por “conjunto similar”	Cantidad total de ceros
Amarillo	1	8×1=8	8
Verde	1	7×1=7	8+7=15
Rojo	2	7×2=14	8+7+14=29

Fuente: elaborado por Alberto.

10. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera es posible contar los dígitos ceros de los números que no han sido resaltados? Debe ser útil la construcción de los “conjuntos similares” y los “conjuntos de dígitos”.

11. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas, comunicar resultados–convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se visualiza una contenencia entre los “conjuntos de dígitos”. Por ejemplo, el “conjunto de dígitos” amarillo se encuentra contenido en “conjunto de dígitos” morado y, a su vez, este último se encuentra contenido en el “conjunto de dígitos” negro, y así sucesivamente. Así, los números que no han sido resaltados también forman “conjuntos de dígitos” los cuales, omitiendo la columna que contiene dígitos 1, se les asigna el nombre de “cuadros reflejos”. De esta forma,

#	Tiempo	Participante	Intervención
17	54:41	Docente	Me di cuenta de que el cuadrito reflejo ((subrayando el “cuadro reflejo” contenido en el “conjunto de dígitos” morado)), intercambia los dígitos. Si en este cuadrito ((señalando el “conjunto de dígitos” amarillo contenido en el “conjunto de dígitos” morado)) hay dígitos 1, 1, 1 y 0, en el [cuadro] reflejo están los contrarios: 0, 0, 0 y 1. Entonces (…), en este cuadrito ((señalando el “conjunto de dígitos” morado)) hay tantos ceros como dígitos tiene el cuadrito anterior ((señalando el “conjunto de dígitos” amarillo)). Como el cuadro anterior tiene 4 dígitos, no importa si son unos o ceros, acá hay ((señalando el “conjunto de dígitos” morado)) 4 ceros.
(…)	(…)	(…)	(…)
18	1:02:34	Alberto	Profe, encontré algo muy, pero muy estupendo (…) Vamos a empezar con esto. En el conjunto número 3 ((el “conjunto de dígitos” negro)) que está con ocho números, como usted dice son números opuestos, [entonces] son equitativos a la cantidad de números dividido entre dos. Por ejemplo, [en ese conjunto] hay ocho números, [y] en ese mismo hay 12 [ceros] ¿por qué? (…) Voy a hacer esto más breve (…) Hay 12 ceros y es equitativo a la mitad del [la cantidad de dígitos del] conjunto [omitiendo la columna que tiene dígitos 1].
19	1:05:25	Docente	Ah, ya entiendo lo que Alberto está diciendo. Sí, si uno arma esto aquí ((señalando tanto la “caja reflejo” como el ”conjunto de dígitos” morado que están contenidos en el “conjunto de dígitos” negro)), esto sería ocho por tres, [que es igual a] 24, [lo cual] dividido [entre] 2 [es igual] a 12.

Fuente: elaborado por los autores.

Con base en la explicación proporcionada por Alberto [18] y la interpretación de la docente [19], se tiene la siguiente forma de cálculo (Ver Tabla 5).

Tabla 5 – Cantidad de dígitos ceros escritos por “conjunto similar”.

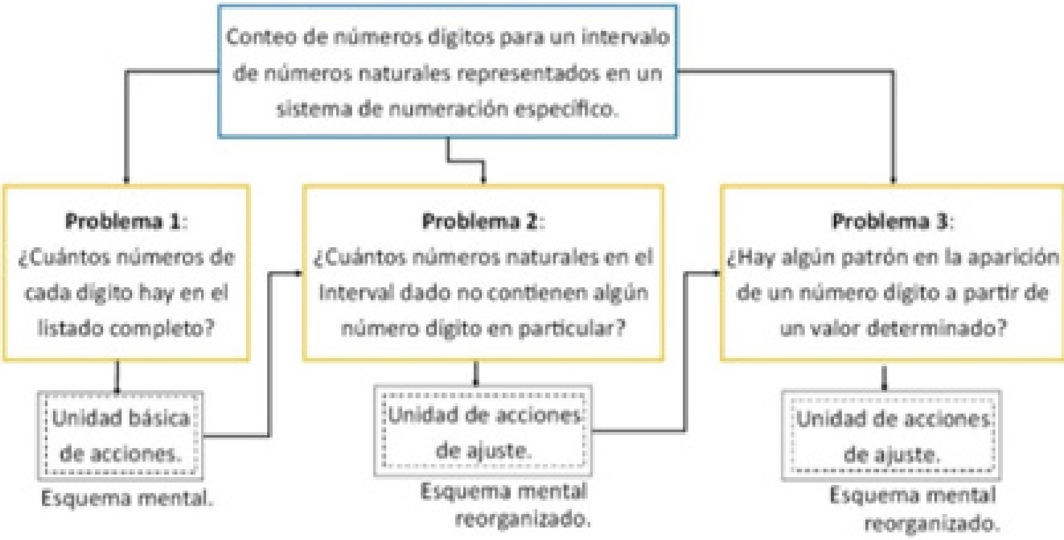
“Conjunto de dígitos”	Cantidad de números (filas)	Columnas	Total de dígitos (sin la primera columna)	Cantidad de ceros	Acumulado
Primero (amarillo)	2	2	2 × 2 – 2 = 2	2/2 = 1	1
Segundo (morado)	4	3	4 × 3 – 4 = 8	8/2 = 4	1+4=5
Tercero (negro)	8	4	8 × 4 – 8 = 24	24/2 = 12	5+12=17
Cuarto (naranja)	16	5	16 × 5 – 16 = 64	64/2 = 32	17+32=49
Quinto	32	6	32 × 6 – 32 = 160	160/2 = 80	49+80=129
Sexto	64	7	64 × 7 – 64 = 384	384/2 = 192	129+192=321
Séptimo	128	8	128 × 8 – 128 = 896	896/2 = 448	321+448=769

Fuente: elaborado por los autores.

El valor total (769 ceros) es muy cercano al valor dado por Alejandra y Carlos. Se omiten en esta última respuesta, los dígitos ceros que tiene la representación binaria del 256, los cuales son 8. Por tanto, si se suma 769 + 8, se obtiene la cantidad que es la respuesta al problema (777 ceros).

El esquema geneal que representa el proceso de solución detallado anteriormente se muestra en la Figura 11.

Figura 11 – Esquema general de solución del problema 3.



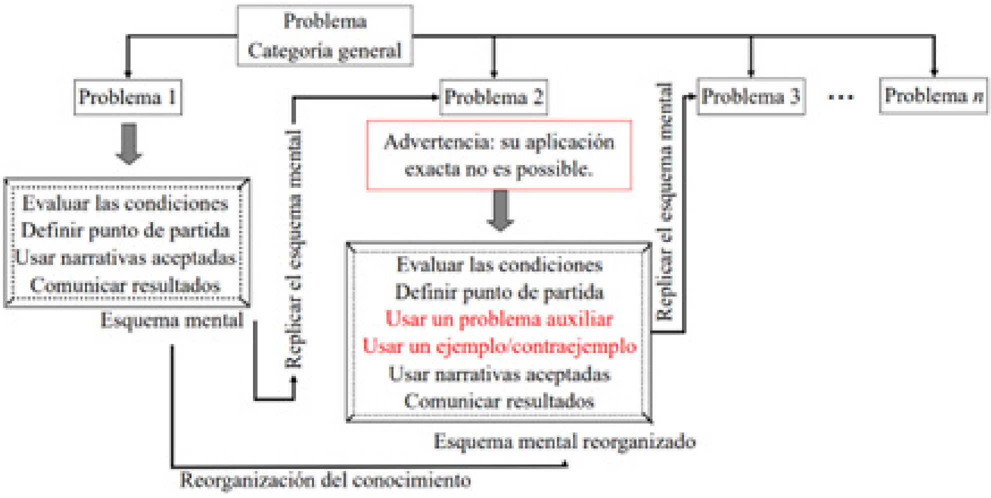
Fuente: elaborado por los autores.

Esquema modelo del razonamiento repetido

Al estudiar, comparar y consolidar la información analizada en los razonamientos empleados por los participantes en la solución de los tres problemas anteriores, emerge un esquema de relaciones que permite evidenciar los aspectos que permiten describir y explicar los procesos subyacentes al razonamiento repetido, sus relaciones y propiedades.

Cada uno de los caminos tomados por los participantes para dar solución a los problemas se fijaron en un esquema global particular para examinarlos. Luego, se realiza la comparación de los esquemas, uno seguido de otro, conservando en dicha comparación el mismo orden de presentación de los problemas. Con esto se determinan los puntos de conexión, los elementos divergentes, las similitudes e invariantes de interés para el objeto de investigación, lo que permite la estructuración de un esquema final que representa a los esquemas particulares emergentes. A continuación, se ilustra dicho esquema final (Ver Figura 12).

Figura 12 – Esquema general de razonamiento.



Fuente: elaborado por los autores.

La Figura 12 ilustra que, para una categoría general de problemas, los estudiantes analizan algunas de sus posibles instancias-problema, las cuales conservan la misma entidad, pero tienen en cierto modo, diferencias.

Los participantes abordan uno de los problemas (el primero) y desarrollan las acciones que constituyen lo que se ha llamado una *unidad básica de acciones*. Tal unidad sustenta la formación de un esquema mental y sus objetos, nociones, artefactos, heurísticas, prácticas, narrativas, etc., que les indican cómo abordar este tipo de problemas.

Luego, los estudiantes buscan replicar su esquema mental en una nueva instancia que es similar e interrelacionada encontrando que, por sus diferencias con lo abordado hasta ahora, deben ajustar y desarrollar acciones complementarias, agrupadas en lo que se denomina una *unidad de acciones de ajuste*, que permiten explorar y trabajar con las particularidades del(los) nuevo(s) problema(s). Esta unidad provoca la reorganización de la estructura mental y se lleva a cabo repetidamente hasta que, ante instancias-problema de la categoría general, es posible su resolución utilizando únicamente la *unidad básica de acciones*, habiendo conquistado así una nueva categorización de los problemas.

Con base en la exposición de los resultados se identifican cuatro elementos fundamentales para describir el proceso de razonamiento repetido, a saber: *i*) la categoría general e instancias-problema, *ii*) la *Unidad Básica de Acciones*-UBA, *iii*) la *Unidad de Acciones de Ajuste* – UAA, y *iv*) los esquemas mentales organizados y reorganizados.

Se refuerza la idea de una mirada recursiva de la solución de problemas (KIEREN Y PIRIE, 1990) y, además, se adopta la misma visión para el razonamiento repetido al resolver problemas matemáticos. En la evidencia recolectada y los resultados expuestos se advierte que el modelo en mención es un fragmento que se repite una y otra vez, con mayor o menor complejidad, a través de la solución de instancias-problema. Más interesante es ver que, al centrar la atención en un punto particular del proceso, es posible hallar un funcionamiento autosimilar a una escala mayor en el mismo.

REFERENCIAS

COOPER, R. The role of mathematical transformations and practice in mathematical development. En L.P. Steffe (Eds.), **Epistemological foundations of mathematical experience**, (pp. 102-123). New York: Springer Verlag, 1991.

HAREL, G. DNR-Based instruction in mathematics as a conceptual framework. En: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, P. (eds.). **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**. London: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. p. 343-367.

HAREL, G. The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. **ZDM**, v. 53, p. 709-721, 2021.

KIEREN, T.; PIRIE, S. Recursion and the mathematical experience. En STEFFE L.P. (ed.), **Epistemological foundations of mathematical experience**, (pp. 78-101). New York: Springer Verlag, 1991.

MORENO-ARMELLA, L. Preface to part XI DNR-Based Instuction in Mathematics as a conceptual framework by Guershon Harel. En SRIRAMAN, B.; ENGLISH, P. (eds.). **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**, (pp. 341-342). Londres: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

SFARD, A. **Thinking as communicating**. Londres: Cambridge University Press, 2008.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada**. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, 2002.

VOLLSTEDT, M.; REZAT, S. An Introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. En: KAISER, G.; PRESMEG, N. (eds.). **Compendium for early career researchers in mathematics education**. ICME-13 Monographs. Switzerland: Springer Cham, 2019, p.81-100.

COMO CITAR — APA
Quintero-Suica, D. I., & Guerrero, G. A. Ch. (2024). El aprendizaje de la matemática a largo plazo: un análisis a la experiencia en el aula. *PARADIGMA*, *XLV*(2), e2024009.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024009.id1429.

COMO CITAR — ABNT
QUINTERO-SUICA, Diana Isabel; GUERRERO, Gerardo Antonio Chacón. El aprendizaje de la matemática a largo plazo: un análisis a la experiencia en el aula. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, n. 2, e2024009, Jul./Dez., 2024.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024009.id1429.

HISTÓRICO
Submetido: 29 de janeiro de 2024.
Aprovado: 27 de maio de 2024.
Publicado: 01 de julho de 2024.

EDITOR
Fredy E. González

ARBITROS
Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres