

Dificultades conceptuales de los estudiantes del nivel medio superior en las demostraciones geométricas

Elizabeth Rincón Santana

te10elirisa@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-7588-9586>

Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD)

Distrito Nacional, República Dominicana.

Olga Lidia Pérez González

olguitapg@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4475-814X>

Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz

Camagüey, Cuba.

Michelle Elizabeth Lalondriz Rincón

mlalondriz@unapec.edu.do

<https://orcid.org/0000-0001-7551-9147>

Universidad APEC (UNAPEC)

Distrito Nacional, República Dominicana.

Danielly Góngora Moran

daniellygongora2022@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7986-8050>

Dirección Municipal de Educación

Minas, Camagüey, Cuba.

Recibido: 30/06/2022 **Aceptado:** 14/02/2023

Resumen

Las demostraciones geométricas son objeto de estudio en todos los niveles educativos. Además, en las pruebas nacionales de Matemática, por lo general se incluye una pregunta relacionada con este contenido con el objetivo de explorar y describir las dificultades conceptuales de los estudiantes del Nivel Medio en el desarrollo de demostraciones geométricas, desde la perspectiva de la relación de la lógica de la evaluación del aprendizaje y de las etapas de su asimilación. Se analizan las respuestas de 450 estudiantes a un ejercicio que fue tomado de las pruebas cubanas para el ingreso a la universidad. Se elabora un instrumento para la evaluación atendiendo a las etapas de asimilación, se hace un análisis porcentual y se usan Redes Bayesianas para valorar los datos obtenidos e inferir que la situación es no favorable. Se describen las dificultades y sus relaciones, además se reflexiona sobre su posible abordaje didáctico para perfeccionar su enseñanza.

Palabras clave: demostración, geometría, asimilación, evaluación, dificultades conceptuales.

Dificuldades conceituais dos alunos de nível médio em demonstrações geométricas

Resumo

As manifestações geométricas são objeto de estudo a todos os níveis educativos. Além disso, nos testes nacionais de Matemática, uma questão relacionada com este conteúdo é geralmente incluída, com o objetivo de explorar e descrever as dificuldades conceituais dos alunos do Nível Médio no desenvolvimento de demonstrações geométricas, do ponto de vista da relação da lógica da avaliação do desempenho e dos estágios da sua assimilação. Analisam-se as respostas de 450 alunos a um exercício que foi retirado dos testes cubanos para a admissão universitária. Um instrumento de avaliação é desenvolvido de acordo com as fases da assimilação, é feita uma análise percentual e as Redes Bayesianas são utilizadas para avaliar os dados obtidos e inferir que a situação não é favorável. As dificuldades e as suas relações são descritas, e a sua possível abordagem didática reflete-se para melhorar o seu ensino.

Palavras-chave: demonstração, geometria, assimilação, avaliação, dificuldades conceituais.

Conceptual difficulties of middle level students in geometric demonstrations

Abstract

Geometric demonstrations are the subject of study at all educational levels. In addition, in the national tests of Mathematics, a question related to this content is usually included with the aim of exploring and describing the conceptual difficulties of the students of the Middle Level in the development of geometric demonstrations, from the perspective of the relationship of the logic of the evaluation of the performance and the stages of its assimilation. The responses of 450 students to an exercise that was taken from the Cuban tests for university admission are analyzed. An instrument for evaluation is developed according to the stages of assimilation, a percentage analysis is made and Bayesian Networks are used to assess the data obtained and infer that the situation is not favorable. The difficulties and their relationships are described, and their possible didactic approach is reflected to improve their teaching.

Keywords: demonstration, geometry, assimilation, evaluation, conceptual difficulties.

Introducción

El 2022 es el año internacional de las Ciencias Básicas con el fin de destacar su importancia y necesidad para el desarrollo sostenible de la sociedad, para recalcar sus aportes a la implementación de la Agenda 2030, y para solucionar los problemas que generan los desafíos globales con visión de ciencia (UNESCO, 2019).

En ese contexto las demostraciones geométricas son una poderosa estrategia didáctica para el adiestramiento lógico-lingüístico del estudiante, operar con conceptos y propiedades geométricas, propiciar el análisis reductivo deductivo, y uso adecuado del lenguaje matemático (ÁLVAREZ, ALMEIDA Y VILLEGAS, 2014); son, además, una vía muy importante para promover el pensamiento geométrico el cual es considerado como el más importante de la

Matemática en el Nivel Medio para promover el pensamiento científico en el estudiante (RODRÍGUEZ Y MONTIEL, 2021).

Su enseñanza se incluye paulatinamente en los diferentes niveles educativos, a través de la fundamentación de las vivencias del estudiante, deducciones, aplicación de reglas de inferencias, y la solución de ejercicios de demostración donde tenga que verificar propiedades y relaciones de figuras geométricas, incluso, para finalmente ser incluido en las pruebas nacionales de Matemática para el ingreso a los estudios universitarios, aunque, por lo general se le presta poca atención (ÁLVAREZ, ALMEIDA Y VILLEGAS, 2014, MORALES, LARIOS Y RUBIO, 2021).

En el nivel universitario también es un contenido de enseñanza de alta prioridad para la formación integral del estudiante (PÉREZ, 2020), sobre todo en las carreras de ingenierías y Arquitectura; sin embargo, las investigaciones didácticas generalmente se orientan al estudio de la formación didáctico-matemática de los docentes en servicio y/o en formación para abordar las demostraciones geométricas con el uso del GeoGebra (MONTES, 2020; RINCÓN Y MONTES, 2020).

A pesar de que en los resultados de pruebas nacionales se hacen análisis de los resultados atendiendo a la frecuencia de errores cometidos por el estudiante (PÉREZ, 2006, PÉREZ, MARTÍNEZ, TRIANA Y GARZA, 2015), la concepción de la evaluación del aprendizaje hace que se tenga poca información sobre las características de las dificultades de los estudiantes en las diferentes etapas del proceso de asimilación del estudiante cuando realiza una demostración geométrica (PÉREZ, 2020).

La investigación tuvo el objetivo de explorar y describir las dificultades conceptuales de los estudiantes del Nivel Medio en el desarrollo de demostraciones geométricas, desde la perspectiva de la relación de la lógica de la evaluación del aprendizaje y de las etapas de asimilación del estudiante, para sugerir sobre su posible abordaje didáctico.

1. Las demostraciones geométricas en el nivel medio

En la actualidad proliferan investigaciones relacionadas con el uso de tecnologías emergentes orientadas a la conceptualización, análisis de propiedades y a las demostraciones geométricas (RINCÓN Y MONTES, 2020), otras hacen énfasis en la necesidad de abordar dichas demostraciones como la actividad intelectual esencial de la Matemática en el Nivel

Medio, como resolución de problemas, y por su valor formativo, lógico y deductivo (LÁREZ, 2014).

De igual forma se investiga la actividad del estudiante cuando justifica sus respuestas a problemas o situaciones geométricas, a partir del proceso de construcción de argumentos con el uso del GeoGebra (MORALES, LARIOS Y RUBIO, 2021), y de la validación y elaboración de conjeturas (FREYRE Y CAVATORTA, 2021).

Sin embargo, en la práctica educativa aún predominan insuficiencias en el aprendizaje de la Geometría (RINCÓN Y MONTES, 2020), las cuales se concretan en situaciones como las siguientes:

Dificultades en que los alumnos comprendan y dominen la literatura básica, la mayoría no es capaz de interpretar los objetos geométricos en sus variadas formas de representación o de utilizarla terminología matemática con precisión, para comunicar razonamientos y resultados, todo lo cual dificulta la utilización del conocimiento geométrico en la resolución de ejercicios y problemas, manifestándose una fuerte tendencia a memorizar, en vez de comprender y de hacer generalizaciones (RINCÓN, MONTES Y MOLA, 2016, p. 180).

Contexto en el cual se hace mayor énfasis en el pensamiento algebraico y aritmético, aunque Rodríguez y Montiel (2021) reconocen la necesidad de promover el pensamiento geométrico como el más importante en la Matemática del Nivel, y Pérez (2020) sugiere prestar especial atención a los siguientes aspectos debido a que constituyen la clasificación de demostraciones geométricas utilizada en el Nivel Medio:

1. La obtención de fórmulas para calcular perímetros de figuras geométricas.
2. La formulación y demostración de conjeturas.
3. La solución de ejercicios de demostración que implique la verificación de propiedades y relaciones de figuras geométricas en el plano y el espacio, con el uso de los conocimientos sobre figuras conocidas, movimientos, teorema de las transversales, criterios de igualdad, y criterios de semejanza de triángulos (PÉREZ, 2020).

Desde otra perspectiva se concuerda con Rodríguez y Montiel (2021) quienes plantearon que:

La matemática escolar no da la oportunidad de desarrollar el pensamiento geométrico porque está centrada en el dominio de objetos, cuya institucionalización, es predominantemente algebraica. Desafortunadamente, escolarmente sí se demanda de este pensamiento, sobre todo en las evaluaciones de ingreso a los niveles medio y superior, así como en las pruebas estandarizadas, pruebas nacionales e internacionales (p.51).

Es por eso que en la preparación del estudiante para presentarse a las evaluaciones de ingreso a la Educación Superior y/o el Nivel Medio, se requiere que no sólo sistematice los conocimientos y habilidades aritméticas y algebraicas, sino que deben sistematizar, de forma integrada, las geométricas y trigonométricas, para obtener soluciones razonadas de problemas intra y extra matemáticos, entre los que se encuentran las demostraciones geométricas (LÁREZ, 2014).

Sobre lo anterior Pérez (2020) precisó que, para favorecer el desarrollo integrado de las habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas en las demostraciones geométricas, se deben orientar a la solución de:

1. Demostraciones geométricas implícitas en el cálculo de cantidades de magnitud.
2. Demostraciones geométricas en las que se utilicen conceptos y relaciones de la geometría plana.

La solución de dichos problemas requiere de las habilidades y comprensión de los conceptos de la Geometría Plana y del Espacio, entre los que se destacan las figuras geométricas, grupo de teoremas de Pitágoras, igualdad y semejanza de triángulos, razones trigonométricas de ángulos cualesquiera (sistema sexagesimal y circular de medida de ángulos), posiciones relativas entre rectas y planos en el espacio, resolución de triángulos y las posiciones relativas entre rectas y rectas y planos en el espacio.

De forma general, la identificación de las dificultades conceptuales en el desarrollo de las demostraciones geométricas se identifica con las deficiencias en el desarrollo de habilidades asociadas a los contenidos mencionados anteriormente, y/o a los aspectos del pensamiento matemático “elementos de la intuición, la inducción, conjeturar, buscar el teorema y demostrarlo”. (RINCÓN Y MONTES, 2020, P.12).

Sin embargo, no se identifican investigaciones que analicen dichas dificultades desde la perspectiva de la lógica del proceso de evaluación del aprendizaje y su relación con las etapas del proceso de asimilación del estudiante (PÉREZ, 2020).

2. Evaluación del aprendizaje y dificultades conceptuales

En la investigación desarrollada por Ramos y Casas (2018) sobre las concepciones y las creencias que tienen los profesores sobre el proceso de evaluación en la Matemática se precisó que se comenten muchos errores e impresiones para poder identificar las dificultades que tiene

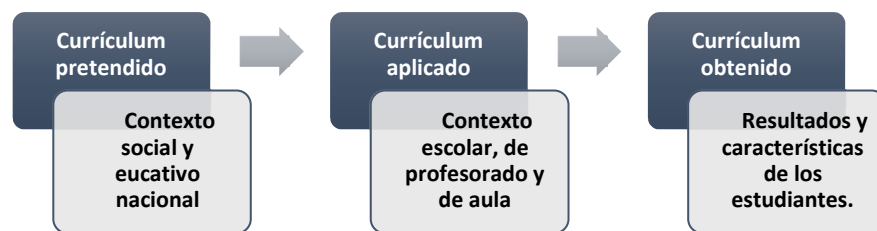
el estudiante, y que ello limita el perfeccionamiento continuo de su proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Lo anterior está dado porque la evaluación del aprendizaje es un proceso multifactorial, en su implementación intervienen diversos factores, entre los que predominan las percepciones, conocimientos, concepciones y percepciones que los maestros tienen sobre ella (PÉREZ, MARTÍNEZ, TRIANA Y GARZA, 2015), lo que incide en la necesaria renovación de las herramientas didácticas para analizar e interpretar didácticamente los resultados del aprendizaje del estudiante en la solución de problemas matemáticos, y su correspondiente marco teórico referencial para precisar los indicadores para desarrollar el proceso valorativo (CÁCERES, PÉREZ Y CALLADO, 2019).

Existen varias propuestas de marcos teóricos referenciales para analizar e interpretar didácticamente los resultados del aprendizaje del estudiante en la solución de problemas matemáticos, los cuales están alineados a las políticas educativas y curriculares (FERNÁNDEZ-ALONSO Y MUÑIZ, 2019).

Uno de los marcos teóricos utilizados y que sirve de marco de referencia a la investigación es el modelo curricular del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, en sus siglas en inglés se denomina TIMSS, en el que se considera el currículum pretendido, aplicado y obtenido (Figura 1), de modo que el último se oriente a valorar lo que el estudiante aprendió a partir de pruebas de rendimiento (DEMARCHI, 2020).

Figura 1 - Modelo curricular de TIMSS



Fuente: Mullis (2002, p. 18)

Otro marco teórico que sirve de referencia a la investigación es el propuesto por Pérez (2006) quien propuso un modelo teórico desde la perspectiva de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde la planificación y la organización la valoró sobre la base de la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales en el contexto de la Matemática, en la que se precisan los siguientes principios y regularidades metodológicas:

- Principio de la independencia de las habilidades a evaluar orientado al diseño de la tarea de modo que se pueda valorar el desempeño del estudiante respecto a cada una de las habilidades que intervienen en su solución.
- Principio del control de las operaciones (habilidades) antes del producto final orientado a precisar que primeramente se debe hacer énfasis en valorar cada una de las acciones que realiza el estudiante antes de valorar el resultado final de la tarea.
- Regularidad metodológica orientada a precisar que el método de comprobación de la veracidad es la base de la autoevaluación, el cual insiste en que el estudiante tenga que justificar sus acciones y resultados para comprobar la veracidad de sus respuestas.
- Regularidad metodológica orientada a precisar que los instrumentos utilizados para la evaluación del aprendizaje dejan de ser un fin en sí mismos, ellos sólo sirven para obtener indicadores y su interpretación depende de diferentes factores entre los que se destacan el tránsito por las etapas de asimilación.

Sobre la base de esos principios y regularidades se consideró que en el proceso de enseñanza-aprendizaje se considera las siguientes relaciones:

El contenido refleja la lógica de la ciencia; la evaluación, la lógica del proceso enseñanza-aprendizaje. Por tanto, la organización del contenido busca la unidad entre la lógica del proceso enseñanza-aprendizaje, la de la ciencia y la de la asimilación de los alumnos, mientras que la evaluación tiene que ser la expresión de dicha unidad (PÉREZ, 2006, P. 276).

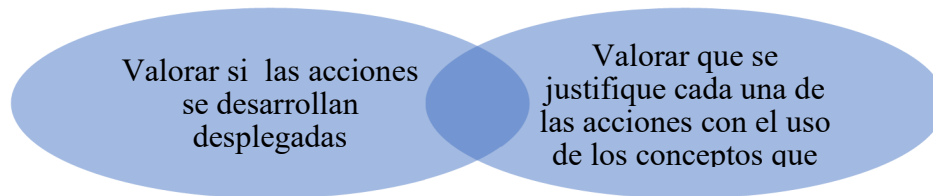
De esa forma, en la valoración e interpretación de los resultados de las tareas realizadas por el estudiante ha de considerarse la lógica del proceso de asimilación (FABIAN Y RODRÍGUEZ, 2020), para lo que se considera la teoría de la formación de las etapas de las acciones mentales en el contexto de la Matemática que se basan la teoría de Galperín (GALPERIN, 1998).

De la relación de la evaluación con las etapas de asimilación que se muestran en el Anexo, Pérez (2006) precisó que la identificación de dificultades conceptuales en el proceso de evaluación del aprendizaje de la Matemática, se debe hacer énfasis en tres aspectos (Figura 2) que se corresponden a:

- La etapa de las acciones materializadas externas para indagar sobre las dificultades relacionadas con la asimilación de la base orientadora de la acción y los conceptos que subyacen en ella.

- La etapa de las acciones del lenguaje externo para identificar las dificultades respecto a la asimilación de las operaciones respecto a los conceptos matemáticos a los que ellas se asocian, y su resultado exteriorizado.

Figura 2 – Criterios de valoración para identificar dificultades conceptuales



Fuente: Elaborado por las autoras

En síntesis, la identificación de las dificultades conceptuales requiere concebir la evaluación del aprendizaje como:

Una función del sistema de dirección del proceso enseñanza-aprendizaje, cumpliéndose sus principios y regularidades, y considerando que la evaluación esté referida a un sistema de tareas en función de las etapas del proceso de asimilación, entonces se logrará aumentar la dedicación de los alumnos al estudio, el rendimiento académico y su calidad (PÉREZ, 2006, p.289).

Por tanto, las tareas deben estar diseñadas de forma que favorezca la valoración de los aspectos planteados con cada etapa de asimilación, con énfasis en los criterios de valoración de la Figura 2 para identificar las dificultades conceptuales.

Y aunque la evaluación del aprendizaje tiene un carácter multifactorial, dinámico, perturbado, en la que influyen un grupo de factores que pueden afectar su implementación, destacándose entre ellos a los profesores, los estudiantes, la escuela y el aula, entre otros, se conoce que el factor que más predomina es el relacionado con los conocimientos, percepciones y concepciones que tiene el profesor sobre la evaluación (PÉREZ, MARTÍNEZ, TRIANA Y GARZA, 2015, P.160).

Por tanto, en un análisis y discusión sobre las dificultades conceptuales debe abordarse desde la perspectiva del profesor y de las orientaciones para que perfeccione la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se debe considerar, además, que existen otras propuestas para valorar las dificultades conceptuales del estudiante, por ejemplo, Díaz, Batanero y Arteaga (2018) lo hacen a través de “cuatro niveles de complejidad semiótica en la construcción de un gráfico estadístico, que dependen de los objetos matemáticos y estadísticos que se movilizan en su construcción” (p.

110) para valorar las dificultades en la construcción de diagramas de barras, que también hacen su propuesta desde la perspectiva del profesor.

De forma similar, Kaiber y Quadros (2020) indagan sobre las dificultades del estudiante sobre la base de las dificultades asociadas a los objetos básicos del Cálculo Diferencial, a la conceptualización y formalización del concepto de límite de una función, y a los aspectos relacionados con la ruptura del Álgebra y el Cálculo.

Sin embargo, esos autores, aunque atienden a la lógica del proceso de enseñanza-aprendizaje desde la perspectiva del profesor, y de la matemática como Ciencia, descuidan la lógica del proceso de asimilación del estudiante, aspecto en el que la investigación se hace especial énfasis.

Por lo que, el objetivo de la investigación es explorar y describir las dificultades conceptuales de los estudiantes del Nivel Medio en el desarrollo de demostraciones geométricas desde la perspectiva de la relación de la lógica de la evaluación del aprendizaje y de las etapas de asimilación del estudiante.

3. Metodología

La descripción metodológica toma como referente las propuestas de Amaís y Flores (2021) y Sánchez y Murillo (2021) para clasificarla como un estudio que integra lo cualitativo y cuantitativo, de tipo no experimental, y exploratorio-descriptivo orientado a indagar y caracterizar dichas dificultades.

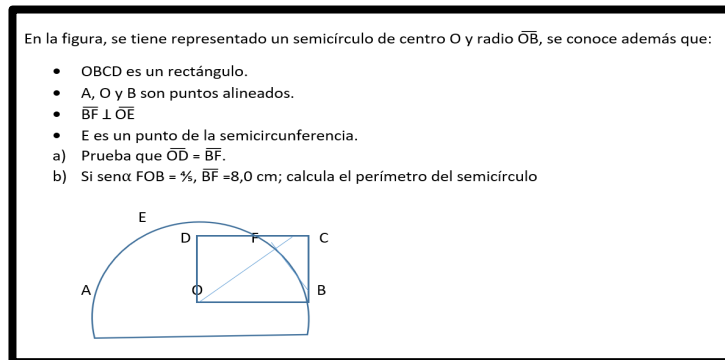
De esa forma partiendo de los presupuestos que plantean Sánchez y Murillo (2021) la complementación de lo cualitativo y lo cuantitativo se utilizó para comprender los procesos académicos relacionados con el desarrollo de demostraciones geométricas desde la perspectiva de la relación de la lógica de la evaluación del aprendizaje y de las etapas de asimilación del estudiante.

No hubo manipulación controlada de variables, pues sólo se obtuvieron los datos en contexto determinado, para estudiarlos en función del marco teórico, y fue de tipo transeccional porque la información se obtuvo en un único período de tiempo (AMAÍS Y FLORES, 2021).

Para el desarrollo de la investigación se solicitó a los 450 estudiantes de duodécimo grado de la Escuela Mixta Victoria de Girón, Camagüey, Cuba, que habían participado de un curso de preparación para presentarse a la prueba de ingreso a la Educación Superior, realizar

un ejercicio de demostración geométrica que incluyera el trabajo integrado de los conceptos de círculo y semicírculo, circunferencia y semicircunferencia, rectángulos, triángulos, paralelismo, perpendicularidad, igualdad de longitudes de segmentos y de amplitudes de ángulos, teoremas de igualdad de triángulos, relaciones trigonométricas y relaciones del perímetro del semicírculo en los que intervienen habilidades algebraicas, geométricas, aritméticas y trigonométricas, aplicar la Regla de redondeo y el trabajo con cifras significativas, entre otros (Figura 3).

Figura 3- Ejercicio propuesto a los estudiantes



Fuente: Martínez (2019, p. 57)

La lógica de la solución del ejercicio de la Figura 3 exigió realizar una demostración geométrica aplicando conceptos de la geometría plana (inciso a), y la determinación de cantidades de magnitud que incluye demostración en la que se aplican conocimientos sobre trigonometría (inciso b).

Para el análisis de las dificultades conceptuales se hizo un análisis de los errores cometidos por los estudiantes atendiendo a cada una de las acciones que intervienen en la solución del inciso, y con el fin de evitar ambigüedades se elaboró un instrumento que sirvió de guía para dicho análisis (Cuadro 1) en el que las acciones se valoran de 0 si es correcta (C) la respuesta, 1 si es incorrecta (I) y 2 si es parcialmente correcta (PC); en este último caso se consideró que si el estudiante identificaba el concepto o propiedad a aplicar para desarrollar la acción, pero no lo aplicaba o lo explicaba bien entonces se valoró de parcialmente correcta.

Cuadro 1 – Guía para valorar las soluciones dadas por los estudiantes

Incisos a) y b)	Acciones	Criterio de valoración	Conceptos y/o propiedades que subyacen
A1	Identificar los triángulos	A	Triángulo
A2	Reconocer que $OE=OB$	A	Segmentos iguales, radio, circunferencia
A3	Justificar la igualdad de los lados	B	Radio de una semicircunferencia
A4	Reconocer que $\angle DOE = \angle OBF$	A	Ángulo, ángulo agudo, ángulos iguales
A5	Justificar la igualdad de los ángulos	B	Relación de Perpendicularidad
A6	Reconocer que $\angle FOB = \angle OED$	A	Ángulos alternos, propiedades del rectángulo
A7	Justificar la igualdad de los ángulos	B	Ángulos alternos entre paralelas.
A8	Concluir que los triángulos ODE y BFO son iguales	A	Teoremas de igualdad de triángulos.
A9	Justificar con criterio de igualdad	B	Criterio de igualdad de triángulos a.l.a
A10	Concluir que $OD= BF$	A	Lados iguales a partir de figuras iguales.
A11	Justificar la igualdad de los lados	B	Elementos homólogos en triángulos iguales.
B1	Plantear la fórmula para calcular el perímetro del semicírculo	A	Círculo, semicírculo, relación de perímetro.
B2	Plantear la razón trigonométrica para calcular OB	A	Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos.
B3	Calcular a OB	A	Razones y proporciones
B4	Sustituir los valores en la fórmula para calcular el perímetro del semicírculo	A	Relación del perímetro de la semicircunferencia.
B5	Calcular	A	Habilidades algebraicas y aritméticas.
B6	Expresar la respuesta con cifras numéricas	A	Habilidades aritméticas
Valoración: 0 – Correcto, 1 – Incorrecto, 2 – Parcialmente correcto			

Fuente: Elaborado por las autoras

Sobre la base de los criterios de valoración dados en la Figura 2 para identificar las dificultades conceptuales, denominándolos A y B, de la siguiente forma. A) Valorar si las

acciones se desarrollan desplegadas y B) Valorar que se justifique cada una de las acciones con el uso de los conceptos que subyacen en ella.

Con el instrumento elaborado se consideró la existencia de dificultades conceptuales en cada una de las acciones realizadas por el estudiante con la siguiente escala valorativa: a) Si el tanto por ciento de las respuestas correctas era menor a 70: la situación es no favorable y son las acciones de mayor dificultad, si el tanto por ciento de las respuestas correctas estaba entre 70 y 90 la situación es favorable y son las acciones de dificultad media, y si el tanto por ciento de las respuestas correctas era mayor a 90: la situación es muy favorable y son las acciones con menor dificultad.

Se aplicó el criterio de expertos como un método de consenso para validar la guía que se muestra en la Cuadro 1 para lo que se utilizó como referente la propuesta de Pérez (2006).

La información se capturó en el Excel 2019, se representaron los resultados por incisos, en gráficos de barras, a través del cálculo del tanto por ciento de las respuestas correctas de cada una de las acciones para clasificar las dificultades conceptuales asociadas a cada uno de los incisos del ejercicio.

Para analizar los resultados con el referente de Pérez (2020), las dificultades fueron clasificadas en dos grupos: 1) Dificultades asociadas a las demostraciones geométricas en las que se utilicen conceptos y relaciones de la geometría plana (inciso a de la Figura 3), 2) Dificultades asociadas a las demostraciones geométricas implícitas en el cálculo de cantidades de magnitud (inciso b de la Figura 3).

Posteriormente se aplicó el método probabilístico de Redes Bayesianas para analizar relaciones entre las diferentes variables (acciones de la Cuadro 1), para lo que se utilizó como referentes teóricos-prácticos las investigaciones de Orjuela, Lesmes, Marcel y Castañeda (2020) para crear un modelo probabilístico sobre los eventos que sucedieron con las respuestas de los estudiantes.

Se utilizó Redes Bayesianas para obtener un Modelo Probabilístico Gráfico (MGP) para analizar la relación existente entre los incisos del ejercicio y obtener una representación gráfica de dependencias para el razonamiento probabilístico de los resultados obtenidos, en la cual los nodos representaron variables aleatorias y los arcos representaron relaciones de dependencia directa entre las variables.

La información de entrada de los algoritmos fue la base de datos de Excel que contenía la valoración de los resultados, por incisos, del ejercicio propuesto al estudiante, atendiendo a la guía expuesta en la Cuadro 1, y se consideró la fiabilidad de los resultados a obtener porque el número de variables era considerable; las variables de entrada de la Red Bayesiana fueron los valores discretos 0; 1; 2.

Para determinar las relaciones de dependencia entre las diferentes acciones realizadas por cada estudiante se utilizó el lenguaje de programación R y las redes bayesianas, para lo que se programó el código correspondiente de la red bayesiana. Después de definida la red bayesiana se realizó la inferencia para estimar la probabilidad de las dificultades conceptuales de los estudiantes.

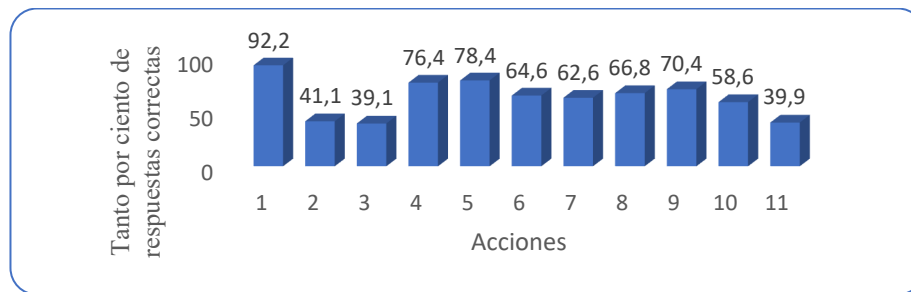
4. Resultados y discusión

Con la aplicación del método de consenso a través del criterio de 11 expertos de Cuba, República Dominicana, México y Panamá, se validó la guía propuesta en la Cuadro 1 como muy adecuada para realizar el estudio.

En el análisis del grupo 1 de dificultades asociadas a las demostraciones geométricas en las que se utilicen conceptos y relaciones de la geometría plana (Gráfico 1), se identificó que las acciones con situación no favorable fueron la A2, A3, A6, A7, A8, A10 y A11 descritas en el inciso a) del Cuadro 1, con mayor énfasis en la A2, A3 y A11, por lo que, las mayores dificultades conceptuales fueron:

- i. Reconocer la igualdad de segmentos ($OE=OB$) y su justificación.
- ii. Reconocer la igualdad de ángulos ($\angle FOB = \angle OED$) y su justificación.
- iii. Concluir que los triángulos ODE y BFO son iguales.
- iv. Concluir la igualdad de segmentos ($OD= BF$) y su justificación.

Gráfico 1- Resultados de las respuestas correctas del inciso a)



Fuente: Elaborado por las autoras

Se identificaron las acciones que tuvieron una situación favorable (A4, A5 y A9 del Cuadro 1) que dieron lugar a menores dificultades, ellas son: a) reconocer la igualdad de ángulos ($\angle DOE = \angle OBF$) y su justificación y b) Justificar la igualdad de triángulos.

En las dificultades identificadas:

- Subyacen los conceptos y/o propiedades siguientes: radio de una semicircunferencia, propiedades del rectángulo, ángulos alternos entre paralelas. teoremas de igualdad de triángulos, relaciones entre los elementos del triángulo, propiedades de los elementos del triángulo, ángulos agudos, perpendicularidad, criterio de igualdad de triángulos.
- Se observó que cuando no lograron realizar la acción (a, b y d) de forma desplegada tampoco pudieron justificarla con el uso de los conceptos que subyacen en ella.

En el análisis del grupo 2 de dificultades, asociadas a las demostraciones geométricas implícitas en el cálculo de cantidades de magnitud (Gráfico 2), se identificó que todas las acciones tuvieron una situación no favorable (inciso b en el Cuadro 1) con mayor énfasis en B2 y B6, por lo que se clasificaron como acciones de mayores dificultades conceptuales las siguientes:

- a) Plantear una fórmula para calcular el perímetro del semicírculo
- b) Plantear la razón trigonométrica para calcular OB
- c) Calcular a OB
- d) Sustituir los valores en la fórmula para calcular el perímetro del semicírculo.
- e) Calcular el perímetro del semicírculo.
- f) Obtener el resultado numérico.

Gráfico 2- Resultados de las respuestas correctas del inciso b)



Fuente: Elaborado por las autoras

En las dificultades identificadas subyacen los conceptos y/o propiedades de semiperímetro de una semicircunferencia, relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos, razones y proporciones, relación del perímetro de la semicircunferencia, así como habilidades algébricas y aritméticas.

En ambos grupos de dificultades los resultados se clasificaron como no favorables y se infirió que la relación del modelo TIMSS (Figura 1) entre el currículum pretendido, aplicado y obtenido no se cumplen en el contexto objeto de análisis, lo que puede estar dado los conocimientos, percepciones y concepciones que tiene el profesor sobre la evaluación (PÉREZ, MARTÍNEZ, TRIANA Y GARZA, 2015, P.160), pues si la concibieran desde la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje (PÉREZ, 2006) se prestaría mayor atención a su gestión didáctica (MONTES, 2020).

Al respecto Álvarez, Almeida y Villegas (2014) afirmaron que:

Con frecuencia la dificultad que presentan los alumnos no radica en el conocimiento de los argumentos, sino en su selección, organización y secuenciación para poder escribir la demostración. Por eso es conveniente la realización de tareas en las cuales los alumnos seleccionen, ordenen, desechen o completen los argumentos que se necesitan, hasta llegar a que, dada una demostración, determinen qué fue lo que se demostró (P. 130).

En relación con lo anterior Rincón y Montes (2020) y Álvarez, Almeida y Villegas (2014) precisaron que en la gestión didáctica de las demostraciones matemáticas se debe insistir en la comprensión del contenido matemático y apropiación del lenguaje matemático para lo cual el profesor debe:

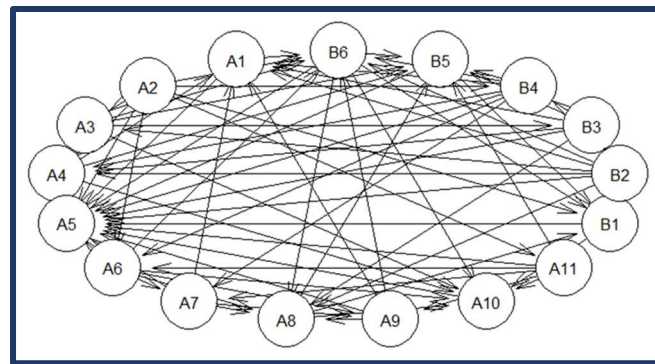
- Concebir las relaciones entre el razonamiento inductivo y deductivo para formular y demostrar conjeturas.
- Utilizar los asistentes matemáticos para visualizar relaciones y propiedades, analizar conjeturas, hacer simulaciones y experimentos, deducir ideas y argumentar su validez.

- Propiciar la explicación de argumentos, a través de preguntas, discusión y análisis en el grupo.

Para profundizar en el análisis de las dificultades conceptuales identificadas, se acudió al uso de las Redes Bayesianas para obtener información en cuanto a cómo se relacionan las respuestas de los estudiantes en cada una de las acciones del ejercicio dado, las cuales pueden ser interpretadas como relaciones de causa-efecto (ORJUELA, LESMES, MARCEL Y CASTAÑEDA, 2020).

Como resultado del uso de las Redes Bayesianas se obtuvo el Modelo Gráfico Probabilístico (MGP) (Figura 4) en el que se muestran las relaciones de dependencia entre las acciones que se desarrollan el inciso a y b del ejercicio.

Figura 4 - MGP generado por la Red Bayesiana



Fuente: Elaborado por las autoras

En la Figura 4 se presenta un grafo acíclico dirigido en el que cada nodo representó a los incisos del ejercicio, su estructura brindó información sobre las relaciones de dependencia e independencia condicional existentes entre dichos incisos, las cuales simplificaron la representación de la función de probabilidad conjunta como el producto de las funciones de probabilidad condicional de cada variable.

Su estructura tuvo las siguientes características: los nodos representaron las acciones descritas en el Cuadro 1, los arcos representaron relaciones de dependencia directas entre ellas, y la dirección de los arcos indicó que la acción señalada por el arco depende de la variable situada en su origen.

Se calcularon los parámetros que cuantifican la red y que contienen las probabilidades de cada variable objeto de análisis para obtener los 17 modelos probabilísticos que posibilitaron hacer la inferencia de los resultados de las relaciones entre las acciones.

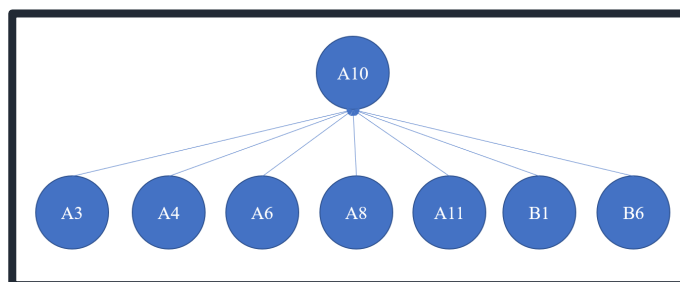
Por el espacio disponible se muestra solamente el modelo probabilístico (Tabla 1) y la Red Bayesiana (Figura 5) del nodo A10 por ser uno de los que tuvo menor desviación estándar de sus residuos.

Tabla 1 – Modelo probabilístico del nodo A10

Nodo	Modelo probabilístico	Desviación estándar del residuo
A10	$A10=0.1543089+0.3662933*A3-0.1708505*A4+0.2513601*A6+0.1314774*A8+0.4228975*A11-0.2010180*B1-0.2399753*B6$	0.3807655

Fuente: Elaborado por las autoras

Figura 5 – Red Bayesiana del nodo A10



Fuente: Elaborado por las autoras

De lo anterior se infirió que las dificultades conceptuales de A10 son dependientes de las de A3, A4, A6, A8, A11, B1 y B6, resultado que es similar al análisis realizado anteriormente (Gráficas 1 y 2), y que pueden interpretar como relaciones de causa-efecto que pudiera tener su origen en la concepción de la evaluación del aprendizaje en la gestión didáctica de las demostraciones geométricas realizada por el profesor.

Del resultado obtenido se infirió que la dificultad en la acción A10 (concluir que OD=BF) dependió de la actividad del estudiante en la que tuvo que:

- Justificar la igualdad de segmentos (OE=OB), a partir del uso de propiedades de figuras planas.
- Reconocer la igualdad de ángulos ($\angle FOB = \angle OED$), entre rectas paralelas.
- Concluir que los triángulos ODE y BFO son iguales.
- Justificar la igualdad de segmentos (OD= BF), en triángulos iguales.
- Plantear fórmula para calcular el perímetro del semicírculo y hallar el resultado numérico.

Y que A10 dependió mayoritariamente de que el estudiante desarrolle desplegadas sus acciones (A4, A6, A8, B1 y B6), y en menor medida en que justifique con el uso de los conceptos que subyacen en ella, aunque no ocurrió lo mismo con todas las acciones (A3 y A11).

De forma similar se realizó el análisis de cada una de las acciones del ejercicio, para profundizar en sus relaciones, causas y efectos desde la perspectiva de la asimilación del estudiante.

5. Conclusiones

Describir y explorar dificultades conceptuales en las evaluaciones de Matemática no debe limitarse al análisis cuantitativo para la interpretación de errores en base a los elementos del contenido, niveles de desempeño, indicadores, criterios, habilidades u otros aspectos, sino que deben aprovecharse otros métodos que permitan valorar a las dificultades y las relaciones entre ellas, sus causas y efectos, desde la perspectiva de la asimilación del estudiante.

En ese sentido, la investigación contribuye a la Didáctica de la Matemática en tres aspectos; el primero referido al análisis teórico de la evaluación del aprendizaje que tenga en cuenta la necesidad de valorar la relación del currículum pretendido, aplicado y obtenido, los principios y regularidades de la evaluación y su concepción de que se conciba desde la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje y las etapas por las que transita el estudiante para asimilar el contenido.

La segunda contribución está relacionada con la metodología empleada para describir y explorar las dificultades conceptuales con el uso del tanto por ciento, y las Redes Bayesianas para modelar de forma probabilística las relaciones entre las acciones que desarrolla el estudiante para resolver el ejercicio propuesto; queda además el instrumento para conformar la base de datos a partir de la respuesta del estudiante.

Los resultados obtenidos mostraron que el trabajo con las demostraciones geométricas es no favorable, que las dificultades que predominan están relacionadas con el desarrollo desplegado de las acciones y su justificación conceptual, y que existen relaciones de dependencia entre las diferentes acciones desarrolladas por el estudiante, las cuales deben ser atendidas desde la gestión didáctica realizada por el profesor.

Como resultado de la investigación se recomienda explorar otras técnicas de inteligencia artificial que puedan utilizarse para explorar y describir las dificultades conceptuales de los

estudiantes, además de profundizar en sus causas a través de las opiniones de los docentes sobre el trabajo de los estudiantes con las demostraciones geométricas.

6. Agradecimientos

Las autoras agradecen a los auspiciadores de la investigación, ellos son:

- Proyecto “Gestión didáctica innovadora de la Matemática para mejorar la formación de los estudiantes de preuniversitario y secundaria básica”, código PS221LH001-043 del Programa Sectorial Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba.
- Convenio de colaboración entre la Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana y la Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba.

7. Referencias

- ÁLVAREZ, M.; ALMEIDA, B.; y VILLEGAS, E. **El proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos. La Habana: Pueblo y Educación.** 2014
- AMAÍS, A. y FLORES, M. Estudio exploratorio-descriptivo sobre las actitudes de los odontólogos costarricenses hacia la aplicación interdisciplinaria de los principios psicológicos en la consulta bucodental. *Odontología Vital*, v.1, n.34, p.7-20, 2021. Disponible en: <https://revistas.ulatina.ac.cr/index.php/odontologiavital/article/view/422>. Acceso el 28 de abril. 2022
- CÁCERES, M., PÉREZ, C., y CALLADO, J. El papel de la evaluación del aprendizaje en la renovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Conrado*, v.15, n.66, p.38-44. 2019. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/rc/v15n66/1990-8644-rc-15-66-38.pdf>. Acceso el 30 de abril. 2022
- DEMARCHI, G. LA EVALUACIÓN DESDE LAS PRUEBAS ESTANDARIZADAS EN LA EDUCACIÓN EN LATINOAMÉRICA. *Revista En-contexto*, v.8, n.13, p.107-133, 2020. Disponible en: <https://ojs.tdea.edu.co/index.php/encontexto/article/view/716>. Acceso el 2 de mayo. 2022
- DÍAZ, D., BATANERO, C., y ARTEAGA, P. DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS DE BARRAS. *Paradigma*, v.39, n.2, p. 107-129, 2018. Disponible en: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/703>. Acceso el 19 de abril. 2022

- FABIAN. Y. y RODRÍGUEZ, Z. EL USO DEL GEOGEBRA EN LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA I. *Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas*, v.13, n.4, p.11-22, 2020. Disponible en: <https://publicaciones.uci.cu/index.php/serie/article/view/556>. Acceso el 29 de abril. 2022
- FERNÁNDEZ-ALONSO, R., y MUÑIZ, J. Calidad de los sistemas educativos: modelos de evaluación. *Propósitos y Representaciones*, 7(spe), e347-347, 2019. Disponible en: http://www.scielo.org.pe/pdf/pyr/v7nspe/en_a04v7nspe.pdf. Acceso el 30 de abril. 2022
- FRANCIA. UNESCO. **Conferencia general, 40th**. Proclamación de un Año Internacional de las Ciencias Básicas para el Desarrollo (2022). París, 2019. Disponible en: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000371464_spa Acceso el 2 de mayo. 2022.
- FREYRE, M., CAVATORTA, P. CONJETURAR Y VALIDAR EM UM PROBLEMA DE GEOMETRIA MEDIADO POR GEOGEBRA. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v.17, n.62, 2021. Disponible en: <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/183>. Acceso el 2 de mayo. 2022
- GALPERIN P. Ya. **La actividad psicológica como ciencia objetiva**. Moscú: Instituto de Ciencias Pedagógicas y Sociales.1998
- KAIBER, C., y QUADROS, P. ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Y ANÁLISIS DE ERRORES: CONTRIBUCIONES A LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE. *Paradigma*, p.508-539. 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p508-539.id856>. Acceso el 9 de abril. 2022
- LÁREZ, J. LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS COMO INSTANCIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. *Paradigma*, v.35, n.2, p.183-198. 2014. Disponible en: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2014.p183-198.id543>. Acceso el 30 de marzo.2022
- MARTÍNEZ, Y. **Compendio de exámenes de ingreso a la Educación Superior**. La Habana: Universidad de Ciencias Informática. 2019. Disponible en: <https://www.studocu.com/latam/document/universidad-de-las-ciencias-informaticas/matematica/pi-2-01-0-2-01-8-pruebas-de-ingreso-de-matematica/6175281>. Acceso el 29 de marzo.2022
- MONTES, N. LA FORMACIÓN DIDÁCTICO-MATEMÁTICA DE DOCENTES: RESULTADOS TEÓRICOS. *Paradigma*, v.41, p.271-288, 2020. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/22210/>. Acceso el 6 de abril. 2022
- MORALES, G., LARIOS, V. y RUBIO, N. ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL USAR GEOGEBRA EN EL CONTEXTO DE TESELADOS. *Uniciencia*, v.35, n.2, p.253-270, 2021. Disponible en: <https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.17>. Acceso el 20 de abril. 2022
- MULLIS, I. *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid: Ministerio de Educación, 2002. Disponible en:

https://www.iea.nl/sites/default/files/201904/TIMSS_2003_Framework_Spanish.pdf

Acceso el 19 de abril. 2022

- ORJUELA, C., LESMES, O., MARCEL, N. y CASTAÑEDA, J. PRUEBA ADAPTATIVA PARA MEDIR EL PROGRESO DE LOS ESTUDIANTES: COLEGIO DE BOGOTÁ. *Revista de Ciencias Sociales*, v.26, n.2, p.340-354, 2020. Disponible en: <https://www.redalyc.org/journal/280/28064146023/html/>. Acceso el 28 de abril. 2022
- PÉREZ, O. ¿CÓMO DISEÑAR EL SISTEMA DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS? *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, v.9, n.2, p.267-297, 2006. Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n2/v9n2a6.pdf>. Acceso el 14 de abril. 2022
- PÉREZ, O. **Colección de temarios para el entrenamiento al examen de ingreso a la Educación Superior.** Proyecto Sectorial de Investigación Gestión didáctica innovadora de la Matemática para mejorar la formación de los estudiantes de preuniversitario y secundaria básica. código PS221LH001-043. Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, 2020
- PÉREZ, O., MARTÍNEZ, A., TRIANA, B. y GARZA, L. REFLEXIONES CONCEPTUALES SOBRE LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, v.6, n.4, p.161-168, 2015. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7265643>. Acceso el 13 de abril. 2022
- RAMOS, L. A. y CASAS, L. CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS PROFESORES DE HONDURAS SOBRE LA ENSEÑANZA, APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, v.21, n.3, p.275-299, 2018. Disponible en: www.scielo.org.mx/pdf/relime/v21n3/2007-6819-relime-21-03-275.pdf. Acceso el 3 de mayo. 2022
- RINCÓN, E, MONTES, N. y MOLA, C. ESTRATEGIA PARA LA COMPRESIÓN DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS, EN LA CARRERA DE EDUCACIÓN, MENCIÓN MATEMÁTICA. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, v.8, n.4, p.179-198, 2016. Disponible en: <http://200.14.53.93/index.php/didascalía/article/view/660/658>. Acceso el 14 de abril. 2022
- RINCÓN, E., y MONTES, N. EL DESARROLLO DE LA COMPRESIÓN DE LOS OBJETOS DE GEOMETRÍA PLANA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICA. *Opuntia Brava*, v.12, n.2, p.25-36, 2020. Disponible en: <http://200.14.53.83/index.php/opuntiabrava/article/view/1007>. Acceso el 30 de abril.2022
- RODRÍGUEZ, M., Y MONTIEL, G. PENSAMIENTO GEOMÉTRICO: UNA EXPERIENCIA DE TRABAJO CON PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA. *SAHUARUS. Revista Electrónica de Matemáticas.*, v.5, n.1, 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.36788/sah.v5i1.108>. Acceso el 15 de abril.2022
- SÁNCHEZ, A, y MURILLO, A. ENFOQUES METODOLÓGICOS EN LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA: CUANTITATIVA, CUALITATIVA Y COMPARATIVA. *Debates por la Historia*, v.9, n.2, p.147-181, 2021. Disponible en:

<http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/303/3032344006/html/>. Acceso el 10 de abril. 2022

Autores

Elizabeth Rincón Santana

Profesor Titular de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD), Dr. C. Pedagógicas. Colaboradora del Proyecto “Gestión didáctica innovadora de la Matemática para mejorar la formación de los estudiantes de preuniversitario y secundaria básica”, código PS221LH001-043 del Programa Sectorial Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba
Correo electrónico: te10elirisa@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7588-9586>

Olga Lidia Pérez González

Coordinadora de la Red Iberoamericana de Investigadores en Matemática Educativa. Coordinadora del Proyecto “Gestión didáctica innovadora de la Matemática para mejorar la formación de los estudiantes de preuniversitario y secundaria básica”, código PS221LH001-043 del Programa Sectorial Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba
Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba
Correo electrónico: olguitapg@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4475-814X>

Danielly Góngora Moran

Estudiante de la Maestría en Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba
Colaboradora del Proyecto “Gestión didáctica innovadora de la Matemática para mejorar la formación de los estudiantes de preuniversitario y secundaria básica”, código PS221LH001-043 del Programa Sectorial Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba
Correo electrónico daniellygongora2022@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7986-8050>

Michelle Elizabeth Lalondriz Rincón

Profesora Novel de la Universidad APEC (UNAPEC). Máster en Matemática Pura. Colaboradora del Proyecto “Gestión didáctica innovadora de la Matemática para mejorar la formación de los estudiantes de preuniversitario y secundaria básica”, código PS221LH001-043 del Programa Sectorial Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba
Correo electrónico: michellelalondriz@hotmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7551-9147>

Como citar este artículo:

RINCÓN, E.; GÓNGORA, D; LALONDRIZ, M.; PÉREZ, O. Dificultades conceptuales de los estudiantes del nivel medio superior en las demostraciones geométricas. **Revista Paradigma**, Vol. XLIV, Edição Temática N° 3. (*Avaliação em Educação Matemática*), Ago. 2023 / 241 – 263

8. Anexo

Relación de la evaluación del aprendizaje con las etapas de las acciones mentales planteadas por Pérez (2006):

- A. Motivación, BOA (base orientadora de la acción)
 - Motivar al estudiante.
 - Valorar si el estudiante describe los elementos de la BOA.
- B. Acciones materializadas externas (para la asimilación de la BOA)
 - Realizar el control por operaciones e introducir gradualmente el control del producto final de las acciones.
 - Valorar si las acciones se desarrollan desplegadas.
 - Valorar el grado de despliegue de las acciones.
- C. Lenguaje externo (para la asimilación de las operaciones y el resultado exteriorizado)
 - Valorar que se justifique cada una de las operaciones.
 - Valorar que si se reconoce el grado de despliegue.
 - Valorar la comprobación de las respuestas obtenidas, en forma externa.
 - Valorar, en caso de que se reduzca el grado de despliegue, si se mutilan acciones.
 - Valorar si se desarrollan las acciones por diferentes métodos.
 - Controlar el producto final de forma externa.
- D. Lenguaje interno (para la asimilación de las operaciones de forma interna).
 - Si el grado de despliegue de las acciones es cada vez menor.
 - Si se justifica la reducción de las operaciones.
 - Si no se mutilan acciones en la resolución de los problemas presentados.
 - Si se es capaz de iniciar la resolución de problemas por etapas intermedias de todo el proceso de resolución.
- E. Acción del lenguaje interno (para el resultado de forma externa)
 - Si se reconoce el grado de despliegue y se tiende a reducir de forma externa, incluyendo la realización de algunas operaciones de forma interna.
 - Si se comprueban las respuestas de forma interna.
 - Si se dominan las acciones esenciales de los conceptos de forma interna.
 - El control del producto final de forma interna.