

A Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos de Oliver Byrne no GeoGebra

Luis Andrés Castillo¹ Ivonne C. Sánchez²

Resumo

Neste trabalho descreve-se uma proposta baseada na edição de Oliver Byrne dos Elementos de Euclides, que usa diagramas coloridos. A ideia de Byrne era apresentar as afirmações, as construções e até as provas dos Elementos de Euclides com um uso simples e rigoroso de cores, como forma de sintetizar descrições e argumentações verbais mais explícitas. Na proposta deste estudo o sistema semiótico e a abordagem de Byrne são materializados digitalmente com a utilização de um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra, e o uso do caso da Proposição XXXIV do Livro I, de Byrne. O recurso interativo no GeoGebra no estilo de Byrne foi criado como um objeto de aprendizagem para a exploração de propriedades e discussões matemáticas e como uma ferramenta para tornar explícita a compreensão e aprendizagem da geometria euclidiana pelos estudantes.

Palavras-chave: Demonstração, Byrne, GeoGebra, Ensino.

Proposition XXXIV of Book I of Oliver Byrne's Elements in GeoGebra

Abstract

This paper describes a proposal based on Oliver Byrne's edition of Euclid's Elements, which uses colored diagrams. Byrne's idea was to present the statements, constructions and even proofs of Euclid's Elements with a simple and rigorous use of color, as a way of synthesizing more explicit verbal descriptions and arguments. In this study's proposal, the semiotic system and Byrne's approach are materialized digitally with the use of a dynamic geometry environment, GeoGebra, and the use of the case of Byrne's Proposition XXXIV of Book I. The interactive resource in GeoGebra in Byrne's style was created as a learning object for the exploration of mathematical properties and discussions and as a tool for making students' understanding and learning of Euclidean geometry explicit.

Keywords: Demonstration, Byrne, GeoGebra, Teaching.

La Proposición XXXIV del Libro I de los Elementos de Oliver Byrne en el GeoGebra

Resumen

Este trabajo describe una propuesta basada en la edición de Oliver Byrne de los Elementos de Euclides, que utiliza diagramas coloreados. La idea de Byrne era presentar los enunciados, construcciones e incluso demostraciones de los Elementos de Euclides con un uso sencillo y riguroso del color, como forma de sintetizar descripciones y argumentaciones verbales más explícitas. En la propuesta de este estudio, el sistema semiótico y el planteamiento de Byrne se materializan digitalmente mediante el uso de un entorno de geometría dinámica, GeoGebra, y la utilización del caso de la Proposición XXXIV del Libro I de Byrne. El recurso interactivo en GeoGebra al estilo de Byrne fue creado como objeto de aprendizaje para la exploración de propiedades y discusiones matemáticas y como herramienta para explicitar la comprensión y el aprendizaje de la geometría euclidiana por parte de los alumnos.

Palabras clave: Demostración, Byrne, GeoGebra, Enseñanza.

¹ Universidade Federal do Pará (UFPA). E-mail: luiscastleb@gmail.com

² Universidade Federal do Pará (UFPA). E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A História da Matemática, como campo de pesquisa, está em constituição no Brasil desde as últimas cinco décadas do século XX e o início do século XXI (Mendes, 2022). Nesse percurso temporal, pesquisadores, tanto da Educação Matemática como da Matemática, têm somado esforços para o estabelecimento de diálogos entre a História da Matemática e as tecnologias digitais. Thomsen, Jankvist e Clark (2022) fizeram uma revisão sobre o uso combinado da História da Matemática e das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da matemática. No referido estudo, os autores enfatizam que os trabalhos mapeados propõem ou analisam atividades baseadas em fontes históricas primárias que são apoiadas em tecnologias digitais, especialmente Softwares de Geometria Dinâmica (DGS) e Sistemas de Álgebra Computacional (CAS).

No contexto brasileiro, esse interesse tem sido evidenciado com uma ampla extensão de trabalhos desenvolvidos sobre o uso de tratados históricos matemáticos, especificamente aqueles que datam dos séculos XVI e XVII (Pereira, 2022; Pontes; Batista; Pereira, 2021; Silva Junior; Santos; Pereira, 2022). Agora, nas atividades baseadas em informações históricas e que incorporem as tecnologias digitais, temos, por um lado, aquelas que focalizam os instrumentos presentes nos tratados e que têm interesse no estudo da matemática envolvida no processo de construção desse tipo de artefato (Pereira; Alves, 2019; Silva; Batista, 2022) e naquela implícita no seu manuseio (Alves, 2019). Por outro lado, temos as atividades que possibilitam um olhar desde uma perspectiva mais contemporânea, por meio dessas tecnologias, de problemas ou demonstrações nesses tratados (Coelho *et al.*, 2023; Sánchez; Castillo, 2022; Teixeira *et al.*, 2023).

Isoda (2002) descreve diversas tecnologias digitais para apoiar esses tipos de atividades que citamos, entre elas: Algebraic Expresser, Function Probe, Calculus Unlimited; DGS (Jankvist; Geraniou, 2021; Meadows; Caniglia, 2021), como o Cabri (Baki; Guven, 2009), o Geometer's Sketchpad (Dennis; Confrey, 1997) e o GeoGebra (Sousa, 2021; Thomsen, 2021; Zengin, 2018); planilhas (Excel, Lotus, etc.); e CAS (Hašek; Zahradník, 2015). Para Isoda (2002), essas tecnologias podem auxiliar os alunos a traduzir e interpretar conceitos matemáticos nas várias representações.

Neste trabalho, temos o intuito de indagar sobre esse novo olhar que as tecnologias digitais permitem para os problemas históricos, como no caso de Hašek e Zahradník (2015), quando combinam o sistema de álgebra computacional wxMaxima e o software de matemática dinâmica GeoGebra para resolver um problema geométrico – de um livro didático do século XVIII – sobre cônicas e lugar geométrico. É o caso também das experiências relatadas por Sánchez e Castillo (2022) quando descrevem o uso do GeoGebra para (re)explorar uma validação do teorema de Pitágoras a fim de dinamizar a demonstração planteada por Só-

crates – registrada, segundo os autores, na obra intitulada *The Pythagorean Proposition*, de autoria de Elisha Scott Loomis e publicada no ano de 1968.

Sánchez e Castillo (2022) diferenciam-se da abordagem do problema histórico, pois, em vez de fazer as construções passo a passo, descrevem o uso de um objeto de aprendizagem elaborado na interface do GeoGebra, de maneira que seja possível, para os sujeitos envolvidos na atividade, visualizar a tradução dos conceitos na demonstração nas diversas representações que o software permitir. Pelo contexto anteriormente exposto, podemos perceber que existe uma variedade de teoremas que podem ser abordados e reinterpretados por meio das tecnologias digitais, especificamente por meio de softwares de matemática dinâmica, como o GeoGebra.

Neste trabalho, escolhemos a Proposição XXXIV do livro I dos Elementos da Edição de Byrne (1847) pelo fato de ela mobilizar conceitos matemáticos relacionados a polígonos, especificamente quadriláteros do tipo paralelogramos, e seus elementos constitutivos. Nosso objetivo, então, é descrever a exploração dinâmica da demonstração dessa proposição para o ensino de conteúdos da geometria euclidiana plana, por meio de um objeto de aprendizagem desenvolvido no GeoGebra.

Para alcançar esse objetivo, primeiramente procuramos saber o contexto histórico-cultural no momento do surgimento da obra dos Elementos de Byrne (1847), em seguida mostramos a perspectiva adotada sobre o objeto de aprendizagem. Depois, descrevemos o modo de abordar essa proposição no objeto de aprendizagem feito no GeoGebra e, finalmente, apresentamos nossas considerações finais.

OS ELEMENTOS DE OLIVER BYRNE

Neste momento é propício levantar alguns questionamentos sobre Oliver Byrne: onde e quando ele nasceu? Além dos Elementos escreveu outras obras? Qual é a grande contribuição de Byrne à matemática e ao seu ensino? Conseguimos respostas para essas inquietações na biografia extensa que Hawes e Kolpas (2015) fizeram de Oliver Byrne. Byrne, mostrado na Figura 1, nasceu em 31 de julho de 1810 na vila de mineração de cobre de Vale de Avoca, no condado de Wicklow, Irlanda. Morreu em 9 de dezembro de 1880 e foi enterrado em Maidstone, Kent, Inglaterra. Na sua trajetória profissional foi matemático, educador e engenheiro civil. O'Connor e Robertson (2016) apresentam uma extensa biografia – que pode ser consultada no site McTutor – sobre a trajetória profissional desse autor.

Figura 1: Oliver Byrne



Fonte: Hawes e Kolpas (2015)

Hawes e Kolpas (2015) relatam que Oliver Byrne fez sua estreia como autor em Dublin, com *A Treatise on Diophantine Algebra* – obra mais frequentemente referenciada como *Treatise on Algebra* –, publicada por Allen and Co. em 1830. Depois, em 1831, ele publicou o panfleto *A Pamphlet on the Teaching of Geometry by Coloured Diagrams, etc.; Applied to the First Book of Euclid*. Ao que parece, esse panfleto foi a base para *The first six books of the elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*, publicada em 1847 em Londres pela William Pickering.

Segundo Hawes e Kolpas (2015, p. 15), Byrne afirmou ter conduzido experiências que mostravam que os *Elementos* de Euclides poderiam ser compreendidos com uso desse método de cor “em menos de um terço do tempo normalmente empregado”. Seu objetivo expresso era “ensinar as pessoas como pensar e não o que pensar” (p. 16). Além disso, na sua inscrição final no Royal Literary Fund em 1880, Byrne expressa que tem um objetivo maior do que a mera ilustração, ele não apresenta cores com propósito estético ou lúdico, ao contrário, faz isso para auxiliar a mente em suas pesquisas pela verdade, para aumentar as facilidades de instrução e para difundir o conhecimento permanente dos *Elementos*.

O sistema de Byrne é baseado em três cores: vermelho, amarelo e azul. Com essas cores básicas, ele colore os elementos básicos da geometria euclidiana: pontos, retas, ângulos, superfícies e corpos sólidos. Ele lista também um conjunto de conectivos lógicos e operacionais a serem utilizados nas provas, a fim de reduzir o número de palavras utilizadas na demonstração, e associa-lhes símbolos a serem utilizados para conectar logicamente elementos coloridos. Byrne começa com as definições primeiras do Livro 1 de Euclides e detalha casos particulares (triângulos, quadriláteros) para dar exemplos de seu sistema de coloração.

Byrne reformulou em cores brilhantes não apenas as ilustrações das figuras geométricas que estava prestes a provar mas também os detalhes das provas. Nesse sentido, usou, ao longo do livro, apenas 4 cores (vermelho, azul, amarelo e preto), 2 estilos de linha (sólido e tracejado) e 2 espessuras de linha (grosso e fino). Combinados, esses aspectos criaram 16 opções diferentes, como mostramos na Figura 2, para diagramas de coloração – mais do que o suficiente para ilustrar os conceitos necessários desses 6 primeiros livros dos elementos. A Figura 3 apresenta um exemplo da paleta de cores de Byrne.

Figura 2: Conjunto de cores, linhas e espessuras na obra de Byrne

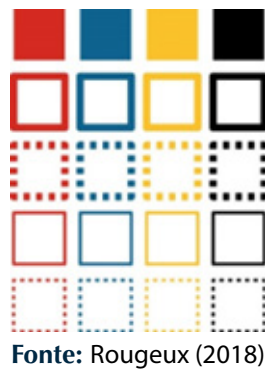
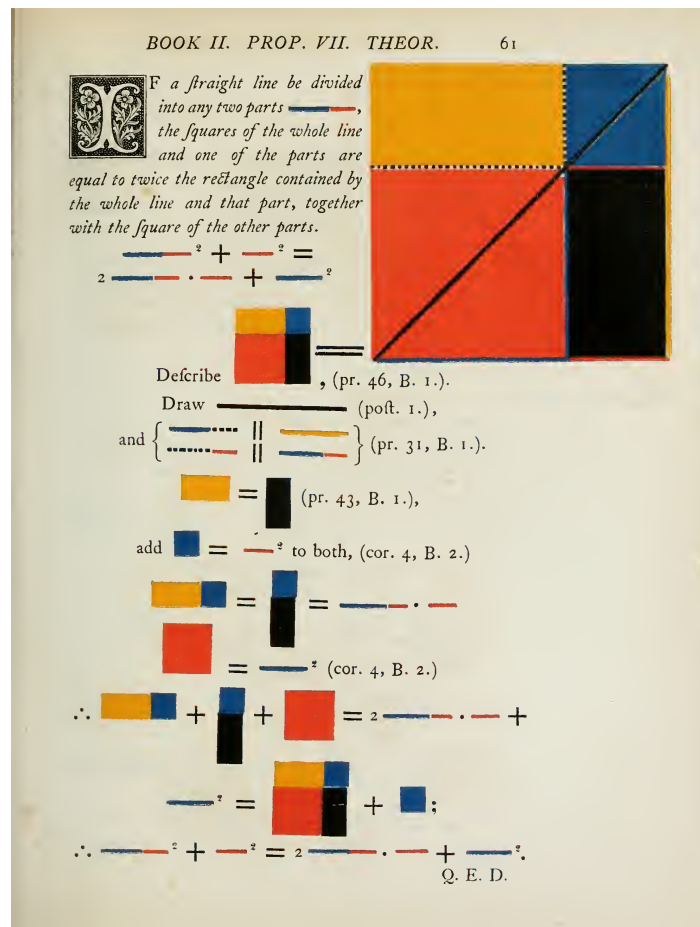


Figura 3: Exemplo do conjunto de cores, linhas e espessuras na obra de Byrne



Fonte: Byrne (1847, p. 61)

Segundo Alexanderson (2010), a obra de Byrne foi praticamente ignorada por seus contemporâneos na matemática na época em que o educador viveu: Augustus de Morgan foi particularmente desdenhoso, provavelmente encorajando Florian Cajori a chamar Byrne de uma curiosidade. Também, parece não haver menção a Byrne na história do ensino da matemática de Cajori naquele período na América ou em seu clássico *History of Mathematics* – apenas uma breve citação em seu livro sobre notação matemática de outra obra de Byrne, essa intitulada *Dual Aritmética*.

Embora na época de sua produção a obra de Byrne tenha passado despercebida, Rougeux (2018) expressa que ela ganhou interesse renovado a partir da última década do século XX – em parte, devido a uma menção de Edward Tufte; em parte, pela recente reprodução publicada pela Taschen em 2010.

Alexanderson (2010), no seu review dessa reprodução da Editora Taschen, expressa que se trata de uma edição suntuosa em que as páginas originais, antes de serem fotografadas, foram lavadas para remover evidências de foxing³. O novo papel é ligeiramente esbranquiçado, aproxima-se do papel que se pode esperar de um livro de arte de alta qualidade. Alexanderson afirma que, na atualidade, os exemplares das obras de Byrne em feiras internacionais de livros têm um valor entre US\$ 20.000 e US\$ 25.000 – podemos perceber que a produção do autor se tornou altamente desejável e valiosa em sua forma original. Mas, agora, a reprodução da Taschen torna possível que praticamente qualquer pessoa que queira a obra no seu formato impresso possa tê-la por um preço mais acessível.

A utilização de diagramas faz com que as fontes individuais de informação sejam visualmente integradas, portanto a aprendizagem dos estudantes é melhorada, já que eles devem dirigir a sua atenção para cada fonte individual, codificar as peças separadas de informação e depois gerir as informações armazenadas para fazer conexões significativas (Hauk *et al.*, 2013).

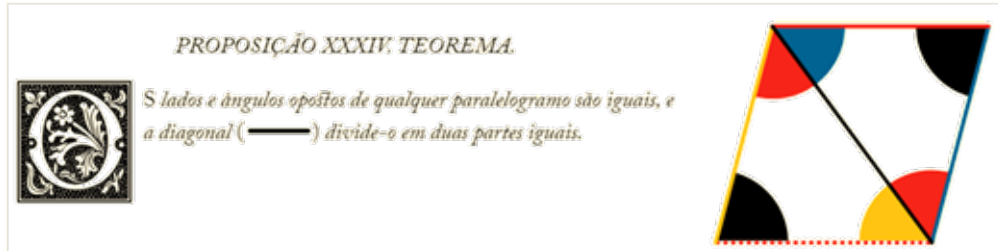
Com o trabalho de Hauk *et al.* (2013) sobre o uso de diagramas coloridos, podemos entender a obra de Byrne e os argumentos que ele expõe e sustenta por meio da experimentação em sala de aula. Os dois argumentos são: cor como ferramenta de representação e cor como ferramenta de compreensão. Essas maneiras de usar a cor permitem representar fatos e compreender as relações entre os elementos. Assim, podemos entender que essa codificação por cores pode ajudar os estudantes a empacotar e desempacotar informações e a gerenciar a complexidade das provas e comprovações.

Para compreender melhor esses argumentos, coloquemos como exemplo a demonstração da Proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne, mostrada na Figura 4. A Proposi-

³ O foxing é frequentemente descrito como pequenas manchas circulares e irregulares dispersas aleatoriamente na superfície do papel, variando em termos de tonalidade entre o castanho avermelhado e o castanho amarelado. Elas aparecem em diferentes tipos de papel datados do período entre o século XVI e XX.

ção afirma: “os lados e os ângulos opostos de qualquer paralelogramo são iguais, e a diagonal divide-o em duas partes iguais” (Byrne, 1847, tradução nossa).

Figura 4: Proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne



Fonte: Byrne (1847, tradução nossa)

Como podemos observar na Figura 4, já na própria Proposição Byrne usa a cor como ferramenta de representação para sinalizar qual dos segmentos coloridos é a diagonal. Além disso, o diagrama colorido reforça esse argumento: os ângulos da mesma cor comunicam que são iguais em medida; e os segmentos com uma cor diferente comunicam que são diferentes até que se demonstre o contrário – lembramos que Byrne usa só quatro cores, assim, o quinto segmento repete a cor vermelha, porém seu desenho é descontínuo para comunicar que é diferente do seu oposto em posição.


















No processo da demonstração no método de Byrne, percebe-se a cor como ferramenta de compreensão. Byrne, a partir do diagrama colorido, para levar a cabo seu raciocínio na demonstração, começa a desempacotar o diagrama em outros menores; em outras palavras, ele codifica os significados de cada peça separadamente e estabelece as relações entre elas, tendo, assim, seis ângulos e cinco segmentos – mostrados na Figura 5 –, de maneira a demonstrar que os triângulos  e  são congruentes.

Figura 5: Elementos do diagrama da Proposição XXXIV do Livro I de Byrne



Fonte: Elaboração dos Autores

Logo, na demonstração Byrne agrupa os diagramas segundo o que pode ser demonstrado de imediato, nesse caso, que  =  e  =  por serem ângulos alternos internos; e  que é comum a ambos os triângulos. Continuando com o raciocínio, temos que  = ,  =  e  = ; em função dessas informações, determina-se que  = . Portanto, os lados e os ângulos opostos do paralelogramo são iguais; e, como os triângulos  e  são congruentes em todos os elementos, a diagonal divide o paralelogramo em duas partes iguais.

Com esse exemplo podemos ilustrar o método de ensino de geometria de Byrne em função dos argumentos apresentados por Hauk *et al.* (2013) sobre o uso das cores como uma ferramenta de representação de informações e de compreensão de relações. Pesquisas, como a desenvolvida por Rizos e Foykas (2023), revelam algumas vantagens do uso da obra de Byrne para o ensino da geometria, entre elas: assimilação de conceitos geométricos básicos; aumento do envolvimento da aprendizagem na resolução geométrica de problemas; compreensão dos principais pontos de uma prova geométrica; e envolvimento ativo de todos os estudantes da turma em atividades de resolver problemas geométricos com uso de cores.

Nesse sentido, Rizos e Foykas (2023) chegam à conclusão de que usar o livro dos Elementos de Byrne melhora o desempenho matemático dos estudantes a respeito da percepção visual e das habilidades metacognitivas, como a solução de problemas.

OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Para Koper (2003), um objeto de aprendizagem é um recurso virtual disponível para ser utilizado pelo professor com o intuito de contribuir para a aprendizagem dos seus alunos. Para Santos (2007), os objetos de aprendizagem são como quaisquer materiais digitais que oferecem informações para a construção de conhecimento, informações em forma de uma imagem, uma página HTML, uma animação ou uma simulação. Neste artigo, consideramos que um objeto de aprendizagem é “um recurso virtual que pode ser usado e reutilizado para apoiar a aprendizagem, por meio de atividade interativa, na forma de simulações ou animações” (Kalinke *et al.*, 2015).

Castillo, Gutiérrez e Sánchez (2020) mostraram que os objetos de aprendizagem elaborados com GeoGebra têm suas vantagens e características que os destacam dentre os elaborados por outras tecnologias digitais, já que permitem aos alunos gerar conjecturas e validá-las por descobertas de exploração e manipulação do recurso de um modo mais dinâmico e interativo, possibilitado pelas suas ferramentas e funcionalidades dinâmicas. Além disso, esse tipo de recurso na interface do GeoGebra permite explorar de maneira dinâmica os conteúdos que o professor tem a intenção de ensinar e possibilita estabelecer vinculações entre as várias formas de representação dos conceitos matemáticos.

METODOLOGIA

Esta pesquisa é do tipo qualitativa e com abordagem bibliográfica, desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente por livros e artigos científicos, entre outros tipos de produções (Gil, 2010). Neste caso, foi feita uma pesquisa da edição do século XIX dos Elementos, intitulada *The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*

(Byrne, 1847), com o propósito de entender a constituição do sistema desenvolvido por Byrne e sua abordagem semiótica para essa versão dos Elementos de Euclides. O objetivo é conseguir idealizar uma reinterpretação no GeoGebra da construção e da demonstração da Proposição XXXIV do Livro I.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO XXXIV DO LIVRO I DE BYRNE NO GEOGEBRA

Nesta seção descrevemos a forma de usar os ideogramas coloridos dinâmicos como ferramenta de representação e como ferramenta de compreensão. Nesse sentido, utilizaremos o GeoGebra como um meio para produzir uma dinamização baseada nos ideogramas coloridos da obra de Byrne, com o propósito de acrescentar movimento nesse processo de desempacotar e empacotar informações nos Elementos de Byrne.

A escolha do GeoGebra deve-se à possibilidade de reproduzir o conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne na interface do software, já que este possui funcionalidades que permitem variar a cor, o tipo de linha e a espessura da linha dos objetos representados geometricamente na janela de visualização, como vemos na Figura 6 – o que nos faz refletir sobre o fato de que, na produção da ideografia dinâmica em matemática, devemos considerar que o gerador de ideograma consiga reproduzir o tipo de ideograma base que vem das fontes históricas, nesse caso, a obra de Byrne.

Figura 6: Conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne no GeoGebra



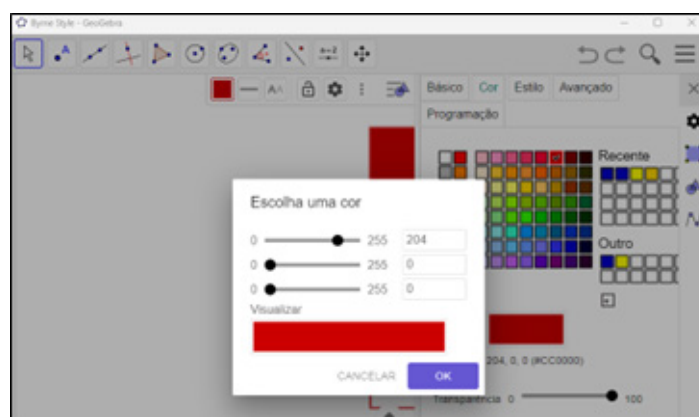
Fonte: Elaboração dos Autores

Para reproduzir o estilo de Byrne no GeoGebra, foram escolhidas as cores no sistema RGB⁴, que é o modo de determinar uma cor em específico no software. Assim, temos o vermelho (204, 0, 0) – que mostramos na Figura 7 – e o azul (0, 0, 204) com o mesmo valor na res-


⁴ RGB é a abreviatura de um sistema de cores aditivas em que o vermelho (Red, na sigla), o verde (Green) e o azul (Blue) são combinados de várias formas de modo a reproduzir um largo espectro cromático. O sistema de cores RGB é encontrado em monitores de computador, televisão, câmeras digitais entre outros. As cores são atingidas com a mistura das três cores primárias em um número definido em uma escala de 0 a 255.

pectiva escala para manter a mesma tonalidade, uma característica que, no amarelo (255, 215, 0), teve que ser procurada em uma escala diferente, pois o valor (204, 204, 0) resultava em uma cor verde amarelada. Finalmente, temos o preto (0, 0, 0).

Figura 7: Conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne no GeoGebra

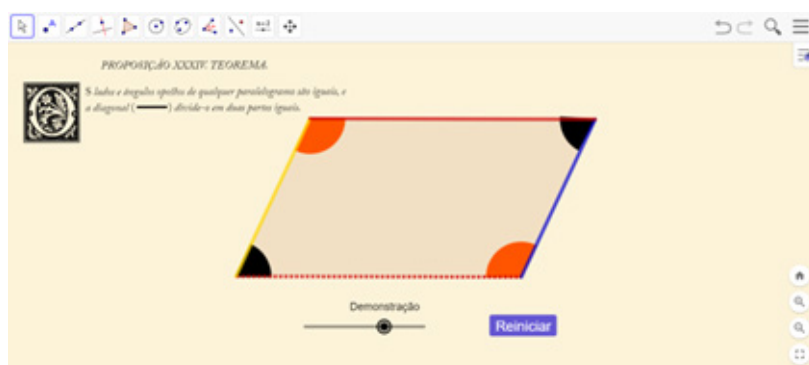


Fonte: Elaboração dos Autores

No GeoGebra as espessuras de linhas têm uma escala de 0 a 13 – no nosso caso, escolhemos o valor de 12 para as linhas mais grossas e 6 para as mais finas. O software oferece 5 tipos de formato para as linhas, que vão desde o mais contínuo ao mais discreto: . Para reproduzir o estilo de Byrne, decidimos usar a primeira opção para linhas de traço contínuo; a terceira opção, para as descontínuas de maior espessura; e a quarta opção, para as descontínuas de menor espessura.

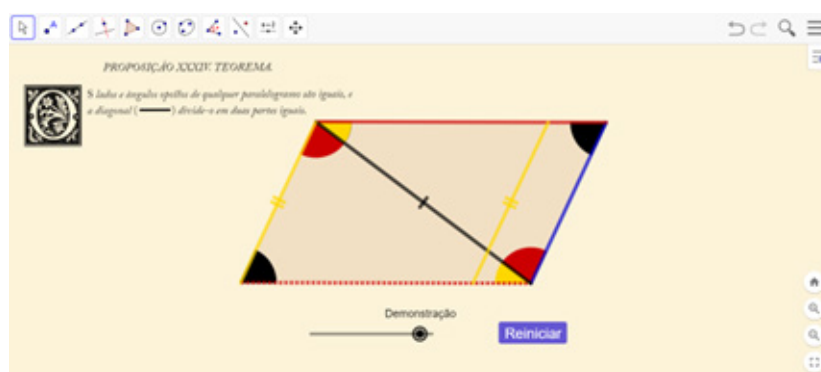
Agora, tendo todas as considerações de aspecto visual da obra de Byrne sistematizadas para serem usadas no GeoGebra, retomemos o exemplo da Proposição XXXIV⁵ – que aparece na Figura 8, na Figura 9 e na Figura 10 – do Livro I da edição de Byrne citado anteriormente, de maneira a produzir no GeoGebra a demonstração, não apenas construindo os objetos geométricos seguindo o raciocínio e Byrne, mas de modo a ir além disso, ou seja, de criar uma demonstração dinâmica, em movimento, que simule esses processos de descompactar e empacotar as informações por meios dos ideogramas dinâmicos.

Figura 8: Construção e demonstração da Proposição XXXIV no GeoGebra

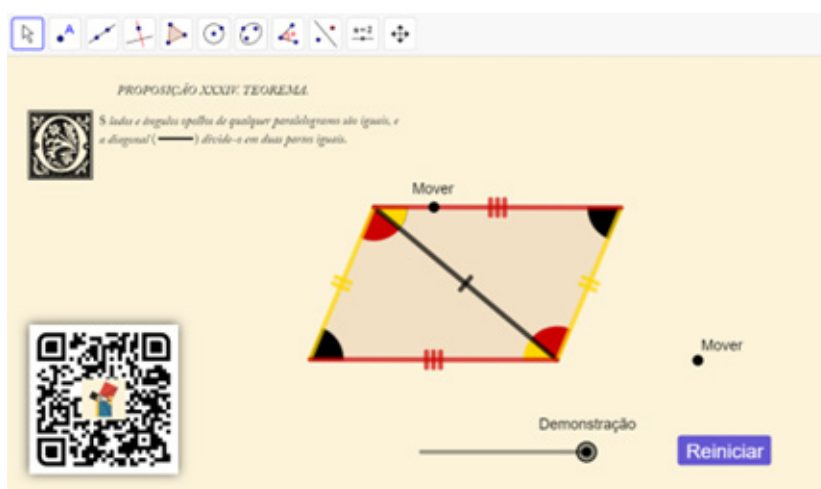


Fonte: Elaboração dos Autores

⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/eyhnjs3j>.

Figura 9: Desenvolvimento na demonstração da Proposição XXXIV no GeoGebra

Fonte: Elaboração dos Autores

Figura 10: Fase final na construção e demonstração da Proposição XXXIV no GeoGebra

Fonte: Elaboração dos Autores

Como pode ser observado na Figura 8, na Figura 9 e na Figura 10, apresenta-se um exemplo de uma dinamização no GeoGebra a partir das informações históricas da obra de Byrne (1847). Nesse exemplo foi possível ampliar as informações presentes na obra de Byrne em dois momentos: o primeiro refere-se à construção da figura que será usada na análise – análise essa que apresenta as informações da hipótese, que não é contemplada na obra de Byrne na Proposição XXXIV. O segundo momento se dá na exploração dos elementos constitutivos do paralelogramo, nos quais, a partir do arrastamento de pontos vinculados aos comprimentos da altura e da base do referido quadrilátero, podem ser geradas outras conjecturas e generalizações na atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscamos não apenas descrever mas também explorar de forma dinâmica a demonstração da Proposição XXXIV, com o intuito de utilizá-la no ensino de conteúdos da geometria euclidiana plana. Essa exploração foi conduzida por meio de um objeto de aprendizagem que foi desenvolvido no GeoGebra, utilizando como base a obra Elemen-

tos, de Byrne (1847). Além de abordar a demonstração em si, diversas considerações foram destacadas para enriquecer a proposta.

Um dos aspectos relevantes abordados foi o contexto histórico e social da obra de Byrne. Compreender as circunstâncias em que a obra foi produzida permite uma melhor contextualização e apreciação das contribuições do autor para a geometria euclidiana. Além disso, a postura adotada em relação aos objetos de aprendizagem foi discutida, destacando a importância de utilizar ferramentas contemporâneas, como o GeoGebra, para potencializar o ensino e a aprendizagem.

No desenvolvimento da proposta, foram exploradas diferentes maneiras de utilizar o GeoGebra. Essa ferramenta foi considerada não apenas como um meio de representação mas também como uma poderosa ferramenta de comunicação do conhecimento matemático. A capacidade de visualização oferecida pelo GeoGebra foi destacada, enfatizando como ela pode auxiliar os estudantes na compreensão mais profunda dos conceitos geométricos.

Além disso, o GeoGebra foi tratado como uma ferramenta de descoberta na demonstração, contribuindo para dinamizar a Proposição XXXIV. A ênfase foi colocada na exploração, generalização e experimentação, utilizando recursos como diagramas coloridos para catalisar as capacidades cognitivas do raciocínio. Essa abordagem visa não apenas à compreensão passiva mas também à participação ativa dos estudantes na verificação de teoremas da geometria euclidiana plana – na proposição em destaque e também em outras contidas no tratado de geometria euclidiana.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (Fapespa) e da Universidade Federal do Pará.

REFERÊNCIAS

ALEXANDERSON, Gerald L. Reviewed of the first six books of the Elements of Euclid. **Mathematical Association of America**. 2010. *Online*. Disponível em: <https://www.maa.org/publications/maa-reviews/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid> Acesso em: 15 ago. 2023.

ALVES, Verusca Batista. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

BAKI, Adnan; GUVEN, Bulent. Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment.

Teaching Mathematics and its Applications, Oxônia, v. 28, n. 1, p. 1-9, 2009. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrp001>

BYRNE, Oliver. **The first six books of the elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners**. Londres: William Pickering, 1847. Online. <https://doi.org/10.5479/sil.317414.39088000863027>

CASTILLO, L. A.; GUTIÉRREZ, R. E.; SÁNCHEZ, I. C. O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 106-119, 2020.

<https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119>

COELHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. História da matemática e geometria dinâmica: um novo olhar ao teorema de Viviani para o ensino médio. **Journal of Education Science and Health**, Teresina, v. 3, n. 1, 2023. <https://doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178>

DENNIS, David; CONFREY, Jere. Drawing logarithmic curves with Geometer's sketchpad: a method inspired by historical sources. In: KING, James R.; SCHATTSCHEIDER, Doris (org.). **Geometry turned on!** Washington: MAA, 1997. p. 147-156.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

HAŠEK, Roman; ZHRADNÍK, Jan. Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 53-58, 2015. https://doi.org/10.1564/tme_v22.2.02

HAUK, Shandy; SLATEN, Allison; PETERS, Elisabeth; SLATEN, Kelli. Color work to enhance proof-writing in geometry. **Journal of the California Mathematics Project**, Long Beach, v. 6, n. 1, p. 12-12, 2013. Disponível em: <https://jcmp.calstate.edu/jcmp/article/view/19> Acesso em: 10 dez. 2023.

HAWES, Susan M.; KOLPAS, Sid. Oliver Byrne: The Matisse of Mathematics. **Mathematical Association of America**, 2015. Online. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/oliver-byrne-the-matisse-of-mathematics-biography-1810-1829> Acesso em: 14 ago. 2023.

ISODA, Masami. Inquiring mathematics with history and software. In: FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan. (org.). **History in Mathematics Education**. [S. l.]: Springer, 2002. p. 351-358. (New ICMI Study Series). https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10

JANKVIST, Uffe Thomas; GERANIOU, Eirini. "Whiteboxing" the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment. **Digital Experiences in Mathematics Education**, Germany, v. 7, n. 2, p. 222-246, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6>

KALINKE, Marco Aurélio; DEROSI, Bruna; JANEGITZ, Laíza Eler; RIBEIRO, Marina Silva Nogueira. Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. In: KALINKE, Marco Aurélio; MOCROSKY, Luciane Ferreira (org.). **Educação matemática: pesquisas e possibilidades**. Curitiba: Ed. UTFPR, 2015. p.159-186.

KOPER, Rob. Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. In: LITTLEJOHN, A. (org.) **Reusing online resources: a sustainable approach to eLearning**. London: Kogan Page, 2003. p. 1-8.

MEADOWS, Michelle; CANIGLIA, Joanne. That Was Then...This is Now: Utilizing the History of Mathematics and Dynamic Geometry Software. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, [S. l.], v. 9, n. 2, p. 198-212, 2021. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1106>

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **COCAR**, Bélem, ed. esp, n. 14, p. 1-26, 2022.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. Oliver Byrne. **MacTutor**. 2016. Online. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Byrne/> Acesso em: 6 dez. 2023.

PEREIRA, Ana Carolina Costa (org.). **Ensino de matemática: conversas didáticas a partir de tratados históricos**. Fortaleza: EdUECE, 2022.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; ALVES, Verusca Batista. A reconstrução dos círculos de proporção no geogebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. **Revista História da Matemática para Professores**, São Paulo, v. 5, p. 19-28, 2019. PONTES, Lívia Monteiro; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A inserção de textos originais na disciplina de História da Matemática a partir de um problema do documento Sea Island Mathematical Manual. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, p. e202101, 2021. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202101>

RIZOS, Ioannis; FOYKAS, Evaggelos. Utilization of “Byrne’s Euclid” in the teaching of geometry to students with special learning difficulties: A qualitative research. **European Journal of Education and Pedagogy**, London, v. 4, n. 2, p. 139-148, 2023. <https://doi.org/10.24018/ejedu.2023.4.2.623>

ROUGEUX, Nicholas. **Making of Byrne’s Euclid**. C82. 2018. Online. Disponível em: <https://www.c82.net/blog/?id=79> Acesso em: 15 ago. 2023.

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030>

SILVA, Francisco Hemerson Brito da; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. Aspectos matemáticos e materiais da fabricação do báculo de Petrus Ramus frente a concepção de licenciandos em

Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 165-180, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8031>

SILVA JUNIOR, Francimar Miguel da; SANTOS, Andressa Gomes dos; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um primeiro olhar sobre A short Treatise of the Description of the Sector. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 374-385, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8034>

SOUSA, Giselle Costa de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Belém, v. 16, n. 37, p. 140-159, 2021. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310>

TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Martins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 9, n. 2, p. e2002, 2023. <https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467>

THOMSEN, Marianne. Working with Euclid's geometry in GeoGebra – experiencing embedded discourses. In: NORTVEDT, G. A. *et al.* (ed.). Bringing Nordic mathematics education into the future: **Proceedings of NORMA 20**, The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education. Oslo: SMDF, 2021. p. 257-265.

THOMSEN, Marianne; JANKVIST, Uffe Thomas; CLARK, Kathleen Michelle. The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: a review. **ZDM – Mathematics Education**, Germany, v. 54, p. 1631-1642, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0>

ZENGIN, Yılmaz. Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 49, n. 7, p. 1083–1098, 2018. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850>

COMO CITAR – APA

CASTILLO, L. A., & SÁNCHEZ, I. C. (2024). A Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos de Oliver Byrne no GeoGebra. **PARADIGMA**, XLV(1), e2024016. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024016.id1529>.

COMO CITAR – ABNT

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. A Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos de Oliver Byrne no GeoGebra. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, n. 1, e2024016, Ene./Jun., 2024. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024016.id1529>.



HISTÓRICO

Submetido: 29 de abril de 2023.

Aprovado: 12 de Diciembre de 2023.

Publicado: 04 de Enero de 2024.

EDITORES

Fredy E. González  

ARBITROS

Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres