Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
ISSN 1011-2251 ISSN 2665-0126
Volume XLV, Julio/Diciembre de 2024
Edición Normal, Número 2
doi 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024001.id1534

Contribuições epistemológicas do livro Théorie Générale des Fonctions (1887) à formação de professores de matemática

Iran Abreu Mendes[1] **Eric Souza Cartagenes**[2]

Resumo

O conceito de função é um tema amplamente debatido por pesquisadores da área de Educação Matemática que se interessam em pesquisar sobre os processos epistemológicos implicados no ensino e aprendizagem de conceitos funcionais. Este artigo discute questões epistemológicas sobre o tema e apresenta contribuições epistemológicas sobre a teoria das funções para a formação e professores de Matemática com base em uma análise histórico-epistemológica do livro Théorie Générale des fonctions (1887), de autoria de Paul Du Bois-Reymond. Nossa intenção é contribuir na formação epistemológica de professores de Matemática. Neste intuito realizamos uma pesquisa qualitativa do tipo análise histórico-bibliográfica, caracterizada pela leitura, tradução e uma análise de conteúdo do referido livro, intencionando identificar correlações entre os conteúdos matemáticos presentes no livro investigado e os assuntos tratados nos livros atuais de Matemática visando uma possível inserção de diálogo epistemológico para a formação de professores de Matemática. Os resultados apontam possibilidades de incorporação das ideias tratadas no livro de forma associada aos livros atuais na forma de complementação histórica conectando às ideias sobre funções abordadas no século XIX com as abordagens atuais estabelecidas nos livros didáticos de Matemática.
Palabras-chave: História das funções, Epistemologia das funções, Teoria das funções, Análise histórico-epistemológica, História na formação de professores.

Epistemological contributions of the book Théorie Générale des Fonctions (1887) to the training of mathematics teachers

Abstract

The concept of function is a topic widely debated by researchers in the area of Mathematics Education who are interested in researching the epistemological processes involved in teaching and learning functional concepts. This article discusses epistemological issues on the topic and presents epistemological contributions on the theory of functions for training and Mathematics teachers based on a historical-epistemological analysis of the book Théorie Générale des fonctions (1887), authored by Paul Du Bois-Reymond. Our intention is to contribute to the epistemological training of Mathematics teachers. To this end, we carried out a qualitative research of the historical-bibliographical analysis type, characterized by reading, translation and a content analysis of the aforementioned book, intending to identify correlations between the mathematical contents present in the book investigated and the subjects covered in current Mathematics books, aiming at a possible insertion of epistemological dialogue for the training of Mathematics teachers. The results point to possibilities of incorporating the ideas discussed in the book in association with current books in the form of historical complementation, connecting the ideas about functions addressed in the 19th century with the current approaches established in Mathematics textbooks.
Keywords: History of functions, Epistemology of functions, Theory of functions, Historical-epistemological analysis, History for teacher training.

[1] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Rrande do Norte (UFRN). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica (PPGECM/IEMCI) da Universidade Federal do Pará. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil. CEP: 66075-110. E-mail: iamendes1@gmail.com

[2] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Professor Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA) - São Luís (MA). Endereço para correspondência: Rua Pará 112- Cond. Praia Grande A-Chácara Brasil -São Luís (MA), CEP: 65066-869. E-mail: eric.cartagenes@ifma.edu.br

Aportaciones Epistemológicas del Libro Théorie Générale des Fonctions (1887) a la formaciónde profesores de matemáticas

Resumen

El concepto de función es un tema ampliamente debatido por investigadores del área de la Educación Matemática que están interesados en investigar los procesos epistemológicos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos funcionales. Este artículo discute cuestiones epistemológicas sobre el tema y presenta aportes epistemológicos sobre la teoría de funciones para la formación de profesores de Matemáticas a partir de un análisis histórico-epistemológico del libro Théorie Générale des fonctions (1887), de autoría de Paul Du Bois-Reymond. Nuestra intención es contribuir a la formación epistemológica de los docentes de Matemáticas. Para ello, realizamos una investigación cualitativa del tipo análisis histórico-bibliográfico, caracterizada por la lectura, traducción y análisis de contenido del libro antes mencionado, pretendiendo identificar correlaciones entre los contenidos matemáticos presentes en el libro investigado y los temas tratados en Libros de Matemáticas actuales, visando una posible inserción del diálogo epistemológico para la formación de profesores de Matemáticas. Los resultados apuntan a posibilidades de incorporar las ideas discutidas en el libro en asociación con libros actuales en forma de complementación histórica, conectando las ideas sobre funciones abordadas en el siglo XIX con los enfoques actuales establecidos en los libros de texto de Matemáticas.

Palabras clave: Historia de las funciones, Epistemología de las funciones, Teoría de las funciones, Análisis histórico-epistemológico, Historia en la formación docente.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Desde o final do século XIX que o estudo das funções como conhecimento escolar tem se evidenciado como uma temática importante a ser abordada no ensino na Matemática em todos os níveis educacionais, não só pelo seu caráter interdisciplinar, mas também como balizador para a compreensão de outros assuntos, como por exemplo o cálculo diferencial e integral, a análise matemática, dentre outros. A esse respeito, um questão que sempre vem à tona em investigações históricas é a seguinte: como se constituiu o conceito de função ao longo dos tempos e espaços? Tal questão indica a busca de respostas que denotem a organização do desenvolvimento epistemológica do conceito que pode ser explorada na formação inicial de professores, como um processo retroalimentador da aprendizagem matemática dos professores em formação, para assim promover a organização de um movimento de ensino que fortaleça a Educação Básica, o Ensino Médio e o Ensino Superior, especificamente nos cursos de licenciatura em Matemática.

Ao longo de nossa experiência docente identificamos que na abordagem do tema referente às funções, especificamente a respeito do conceito de função, os estudantes do ensino médio e superior manifestam dificuldades na compreensão desse conceito, expressando apenas compreensões algébricas representadas por formulações que representam essas noções matemáticas. Não conseguem perceber relações advindas desse desenvolvimento conceitual e principalmente sua implicação na representação de fenômenos naturais e sociais, especificamente em situações da realidade cotidiana e científica como forma de compreensão e explicação desses fenômenos que passam por conexões científicas empíricas e teóricas.

> (...) O objetivo, a longo prazo, da teorização científica não é sumarizar a experiência, mas interpretar a realidade e, em particular, explicar a parte da realidade acoplada ao conhecedor, isto é, o campo dos fenômenos (no sentido do filósofo). A teorização científica pode ser inicialmente motivada pelo desejo de se entender o que é observado e é, por certo, comprovada por fatos

> desta espécie; mas não logra realizar a sua tarefa a menos que leve em conta fatos inobserváveis (mas inferíveis) (Bunge, 2013, p. 89).

A esse respeito, muito já foi publicado sobre a forma o ensino de funções por meio de modelos de transmissão de conhecimentos e suas implicações nas dificuldades de aprendizagem compreensiva dos estudantes. Nessa esteira, refletimos sobre situações similares que nos inquietaram e nos levaram a problematizar uma temática de pesquisa que pudesse contribuir para a introdução de uma proposta de abordagem conceitual e didática para o conceito de função nos cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que em nossa verificação *a priori*, nas experiências docentes e em revisão bibliográfica de artigos resultantes de outras pesquisas, ficou evidente a necessidade de estabelecer abordagens que envolvam simultaneamente o desenvolvimento conceitual e didático no ensino de funções.

Igualmente, outra inquietação que nos provocou bastante a respeito do modo como o tema de funções tem sido tratado na licenciatura em Matemática, foi que na maioria dos casos esse ensino quase sempre aparece associado ao ensino de cálculo, e de forma aplicada e técnica, desligado do seu desenvolvimento conceitual e epistêmico, ou seja, sem o sentido epistemológico do tema, por nós considerado de extrema relevância para fortalecer conceitualmente a formação do professor.

A este respeito, durante o período de 2004 a 2012 foram desenvolvidos estudos e pesquisas aplicadas em turmas de licenciatura em Matemática, conforme mencionado por Mendes (2015, p. 264-265), em relação a sua experiência docente em uma disciplina intitulada *Fundamentos Epistemológicos da Matemática*, na qual um dos focos programáticos centrava-se no desenvolvimento epistemológico das funções. O objetivo principal da disciplina foi identificar os fundamentos filosóficos e epistemológicos concernentes à criação e reformulação das ideias matemáticas sobre funções e a organização do acervo sistemático acadêmico da Matemática como disciplina escolar, com vistas a promover discussões e reflexões acerca desses fundamentos e suas implicações no ensino de Matemática.

Igualmente, Mendes (2015) assevera que em seu trabalho, buscou, também, estimular a compreensão dos alunos a respeito do pensamento contemporâneo e suas implicações na fundamentação epistêmica no que concerne aos conjuntos numéricos como extensão do campo numérico, como base principal para analisar o conceito de função e como uma implicação do pensamento contemporâneo da Matemática e seus desdobramentos no ensino. Neste sentido, foram abordados aspectos conceituais relacionados às implicações das reformulações dos fundamentos matemáticos na Antiguidade, na Idade Média, Idade Moderna e Contemporânea, como por exemplo as formulações teóricas sobre conjuntos numéricos e o surgimento do pensamento funcional e sua implicação no desenvolvimento do conceito de função.

Deste modo, consideramos que o professor em formação precisa se apropriar desses conhecimentos para desenvolver adequadamente suas atividades docentes em relação ao tema *funções* na Educação Básica, após sua formação e inserção no campo de trabalho, ao concluir o curso, uma vez que os estudos sobre o assunto são importantes para a abordagem de outros temas da Matemática e de outros campos disciplinares do currículo do Ensino Médio como por exemplo biologia, física, química e estatística.

Foi com essa compreensão que consideramos necessário realizar um estudo histórico-epistemológico sobre o tema, que possibilitasse ao professor em formação uma compreensão conceitual e didática sobre aspectos teóricos relativos ao desenvolvimento funcional, de modo a responder questões como: 1) qual a importância do conceito de função nos estudos sobre cálculo e análise na licenciatura em Matemática? 2) de que maneira se pode explorar estudos relativos à história e epistemologia das funções para a reorientação de uma abordagem conceitual e didática dessa temática disciplinar para a licenciatura? Desses questionamentos surgiu a intenção de realizar uma pesquisa sobre história e epistemologia das funções em livros publicados entre o século XVIII e a primeira metade do século XX. A esse respeito identificamos uma publicação do final do século XIX, intitulada *Théorie Générale des fonctions* (1887), de autoria de Paul Du Bois-Reymond.

Para Mendes (2006), adotar a história da Matemática como princípio para uma abordagem pedagógica da Matemática pode promover uma aprendizagem que ressignifique o conhecimento matemático construído ao longo dos anos pela sociedade humana. Foi com essa intenção que examinamos esse livro do século XIX, em busca de aspectos conceituais que pudessem ser reelaborados na incorporação de ideias que viabilizassem o desenvolvimento de uma abordagem didática para o ensino de funções na formação de professores de Matemática. Encontramos no livro *Théorie Générale des Fonctions* de Paul Du Bois-Reymond, publicada em 1887, uma possibilidade para alcançar nossos ensejos conceituais e didáticos referentes ao tema.

Em relação ao livro foco da pesquisa, trata-se de um trabalho publicado originalmente em alemão, em 1882, que posteriormente foi publicado em Paris, em 1887, a partir de uma tradução realizada por G. Milhaud e A. Girot para a língua francesa. A versão original em alemão de 1882, intitulava-se *Die allgemeine Functionentheorie* (A teoria geral das funções)**,** que conforme o comentário do autor no prefácio, tratava-se de uma teoria geral das funções que naquele momento abrangia tudo o que se relacionava com a ideia mais geral de função, colocando em primeiro lugar a metafísica dos conceitos de grandeza e limite, servindo de base para a teoria da argumentação, da função, e da condição comum de convergência e divergência das várias operações que envolviam os conceitos de infinitésimo e infinito.

O livro utilizado na pesquisa foi a edição de 1887, que está organizada em uma parte introdutória e mais cinco capítulos. Inicialmente nessa introdução o autor trata dos conceitos de grandeza e limite. No primeiro capítulo trata das grandezas ou quantidades matemáticas, a partir de duas concepções: idealista e empirista, acerca do que seja limite e grandeza, considerando essas noções como ideias introdutórias fundamentais acerca da análise matemática e da teoria das funções.

No segundo capítulo apresenta suas considerações sobre o que compreende como o conceito de limite nas perspectivas do idealismo e do empirismo, visando discutir os conceitos de continuidade, limite, derivada e integral, bem como as propriedades básicas das funções. Segue tratando de funções de uma variável complexa, apresenta discussões sobre as propriedades das funções complexas, incluindo singularidades, singularidades essenciais e teorema de Cauchy. Finaliza abordando funções de várias variáveis e suas aplicações, teoria das funções variáveis, incluindo o teorema de Green e o teorema de Stokes.

No capítulo 3 trata sobre o argumento como uma sucessão de determinações numéricas; os valores do argumento são distribuídos como pontos; dividimos as extensões em extensões parciais; construímos sobre os pontos dessas extensões os valores da função, etc. No capítulo 4 aborda as noções fundamentais sobre função e o avanço com o conceito de funções além do ponto de vista Idealista e Empirista e no quinto capítulo trata sobre o comportamento ou desenvolvimento final das funções e finaliza o livro com suas considerações finais acerca da metafisica dos conceitos analíticos fundamentais.

De acordo com informações mencionadas por O'Connor e Robertson (2005), o referido livro é conhecido por sua clareza e rigor matemático, e foi amplamente utilizado como um texto de referência em cursos de análise matemática durante as duas últimas décadas do século XIX e início do século XX, cuja contribuição o autor para a didatização do tema concernente à teoria das funções no ensino é amplamente reconhecida.

A esse respeito neste artigo apresentamos apontamentos extraídos de uma análise histórico-epistemológica de alguns excertos do livro de Paul Du Bois-Reymond (1887), a fim de identificar elementos essenciais para a elaboração de uma abordagem didático-conceitual para o ensino de funções na licenciatura.

UMA BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE PESQUISAS SOBRE FUNÇÕES

O conceito de função é um tema amplamente debatido por pesquisadores da área de Educação Matemática que se interessam em pesquisar sobre os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. A justificativa para tamanho interesse na temática pode residir no fato de que esse conceito está presente na Matemática de todo o Ensino Médio e, ainda, é conhecimento base de disciplinas essenciais nos cursos de exatas, como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Análise.

O que fica evidente é que, embora nem todos os alunos precisem estudar funções em um nível avançado, há determinadas competências, necessárias à compreensão de fenômenos naturais e problemas sociais, cujo desenvolvimento depende, em certa medida, do trabalho com aspectos fundamentais desse conceito. Nesse sentido, Watson e Harel (2013) sugerem que, no âmbito escolar, noções de modelagem, de interpretação, de tradução e de transição entre diferentes representações sejam trabalhadas, tratando as funções como objeto que possibilite a atuação sobre problemáticas e informações.

De acordo com Nasser; Sousa; Torraca (2012) o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente necessária no Ensino Superior, como citado por Caraça (1984, p. 109), o qual sugere que o conceito de função surge da necessidade de interpretar fenômenos da natureza, observar a interdependência entre duas grandezas e descrever regularidades.

Para Zuffi (1999) a análise das concepções de um sujeito sobre o conceito de função só poderá ocorrer depois que ele apresentar um contato com a ideia matematicamente construída, ou por um livro, ou por um professor. Do contrário, trataremos apenas de um "instinto de funcionalidade", como já evidenciaram os gregos, antes da Era Cristã. É claro que a noção de variação é um dos aspectos essenciais ao desenvolvimento desse conceito e, para ela, poderá existir uma concepção espontânea. Entretanto, ao nosso ver, a ideia de variação não é suficiente para sozinha, caracterizar por completo o conceito matemático de função. Aí pode estar uma das razões pelas quais este apresenta grandes dificuldades de compreensão entre os sujeitos.

Pires (2014), relata em seu trabalho que no século XIX e início do século XX, o conceito de função passou por alguns refinamentos e apresentou descobertas referentes às funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas em determinados pontos. Nessa época, podemos destacar os trabalhos de Cantor, Richard Dedekind (1831-1916), Hermann Hankel (1839-1873), René Baire (1874-1932), Emile Borel (1871-1956) e Henri Leon Lebesgue (1875-1941).

A respeito do trabalho elaborado por Du Bois-Reymond (1887), Mendes (2021a), destaca que no final do século XIX, o conceito científico de limite passou a ser entendido como uma abstração primitiva de percepções internas e externas, levando a representações geradas absolutamente por meio de processos de pensamento, originando assim o conceito científico de limite. Ou seja, às vezes se refere a limites de sequências de valor individual, como o caso mais comum na matemática da Antiguidade (por exemplo, nas questões relacionadas com o comprimento da circunferência, considerado como limite do perímetro dos polígonos e nas quadraturas de Arquimedes), às vezes limite significa sequências de valores contínuos, como na questão da tangente (limite secante), e muitos limites do cálculo infinitesimal que surgiu da questão da tangente.

Para Du Bois-Reymond (1887), a construção de um conceito matemático acontece por uma volta às origens de definições auxiliares, pois

> (...) compreender plenamente os conceitos poderosos que dominam todo o pensamento, como os de espaço e tempo, e também conceitos menos vastos, mas ainda muito bem delimitados, como o que nos interessa, parece mais natural e ainda mais interessante, proceder em sentido inverso, tentando voltar à origem do conceito, examinar de perto por quais abstrações ele pode ter sido formado, persegui-lo nas diferentes áreas do conhecimento, onde ele se manifesta, e finalmente estabelecer firmemente as características comuns dessas diferentes manifestações (Du Bois-Reymond, 1887, p. 32, tradução nossa).

Em consonância, mesmo que indiretamente, com as ideias de Du Bois-Reymond, Roratto (2009), comenta em seu trabalho, que o conceito de função se mostrou tão amplo que atingiu tamanho grau de generalização, gerou dificuldade de visualização, ocasionada pela formalização conceitual, evidenciada partir do final do século XIX e início do século XX com o advento da escola Formalista, uma corrente filosófica da Matemática que a apresentava basicamente mediante uma estrutura lógico-dedutiva, construída integralmente a partir de definições e axiomas.

De acordo com Duboc (2005), a definição do conceito de função é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade. Desde os tempos mais remotos, tabelas de correspondências obtidas da observação de fenômenos físicos desempenharam um importante papel na evolução do conhecimento intuitivo do que hoje conhecemos por função.

Funções representam relações de dependência entre grandezas, e o seu uso faz-se indispensável na leitura matemática de fenômenos da natureza. Esse conceito surgiu a partir de um contexto prático, atrelado a problemas concretos do mundo físico, como um instrumento próprio para o estudo quantitativo de fenômenos naturais (Caraça, 1951). O conceito de função passou por diversas modificações durante a história da Humanidade. Além disso, foi de extrema importância para o desenvolvimento de outras áreas da Matemática, como o cálculo e a análise. Caraça define função assim:

> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é uma função de x e escreve-se y = f(x), se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x→y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente (Caraça, 1975, p. 129).

No trabalho desenvolvido por Rocha (2008) a respeito do tema, a autora assevera que os conceitos matemáticos relativos à função têm sua formalização abstrata evidenciada no processo de construção histórica, apontando os movimentos cognitivos que conduziram à sistematização matemática. Portanto, há um certo consenso entre educadores matemáticos sobre esse fato e a respeito de que o estudo das dificuldades demonstradas pelos estudiosos da Matemática, durante o desenvolvimento histórico do conceito de função, pode fornecer pistas valiosas sobre a superação de possíveis dificuldades atuais no ensino e aprendizagem desse conceito.

A esse respeito, Pires (2016) assevera que em relação ao tema funções, as dificuldades apresentadas pelos estudantes com essa noção fica muito evidente, pois na maioria das vezes eles não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações de função: gráfica, algébrica, diagramas. Neste sentido, Pires (2014) ressalta que:

> [...] surgiram diferentes concepções de função, seja na maneira de olhar o objeto matemático, seja no modo de utilizar ou enfatizar suas propriedades. Algumas dessas concepções foram utilizadas simultaneamente na mesma definição, como também diferentes concepções foram adotadas em uma mesma época. Contudo, toda essa diversidade de ideias respaldadas no pensamento científico e filosófico contribuiu com a evolução do conceito desse objeto matemático, desencadeando as definições que temos nos dias atuais (Pires, 2014, p. 44).

Neste sentido filosófico e epistêmico, Richard Skemp (1995) assevera que ao considerarmos uma função como uma regra ou método por meio do qual, para todo elemento do conjunto original, podemos obter um único elemento correspondente no conjunto imagem, admitiremos que as funções apresentam muitas variantes, ou seja, a mesma função pode ser expressa de distintas maneiras ou formas para propósitos diversos, mas sua essência fundamental está na significação teórica implícita em cada uma dessas variantes representativas da mesma função. Portanto, reforça a premissa do processo evolutivo e desenvolvimental do conceito ao longo da história da matemática e da disciplinarização do tema em direção ao seu ensino como assunto abordado nas componentes do sistema escolar.

Sobre esse tipo de implicação podemos citar, por exemplo, o modo como o tema foi abordado por Euclides Roxo (1937) em seu livro *A Matemática na Educação Secundária*, ao tratar da noção de função como ideia axial do ensino em um dos capítulos do referido livro. Neste caso, Roxo (1937) trata da importância da noção de função e de funcionalidade para em seguida apresentar o conceito de função e sua ideia unificadora dos assunto tratados no ensino de Matemática no nível médio, tendo em vista os principais objetivos do ensino de Matemática na preparação dos estudantes para o ensino superior naquele momento da primeira metade do século XX.

Podemos induzir, portanto, que a partir da revisão bibliográfica mencionada, e também com base em outros contextos desafiadores, relacionados às teorias funcionais na formação e professores de matemática, nos propomos, então, a realizar um estudo que pretende investigar sobre a *teoria geral das funções*, a partir das ideias de Paul Du Bois-Reymond em seu livro publicado em 1887, trabalhando a construção do conceito de Função, a partir do seu avanço e considerando os aspectos históricos envolvidos, tentando diminuir as dificuldades que ocorrem atualmente no ensino deste conceito na graduação, relacionadas ao seu caráter avançado e abstrato, deixando este conteúdo mais significativo para os alunos e com isso melhorar o aproveitamento no processo ensino-aprendizagem.

Diante desse desafio, o primeiro aspecto a ser focalizado refere-se à identificação do autor e seu livro foco do estudo. Assim passamos a caracterizar uma parte dos dados biográficos do autor e seu livro.

SOBRE OS FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS DA PESQUISA

Buscamos na história da Matemática e história do ensino da Matemática uma mediação didático conceitual, conforme propõe Mendes (2009) quando afirma que a Matemática é um saber gerado pela sociedade humana e que possui uma história, mas que esse conhecimento ao longo do tempo amplia-se em conteúdo, escrita e simbologia de forma não-linear e isto acontece quando acontecem controvérsias, debates, divergências, renovações e atualizações incessantes.

Para Mendes (2010), o modelo didático de investigação histórica utilizado na formação dos professores, deve partir de um diálogo conjuntivo entre as ideias matemáticas desenvolvidas e organizadas historicamente e a perspectiva investigativa que caracteriza a construção do conhecimento. É nessa aliança integrativa que a abordagem investigativa imprime maior significado à Matemática escolar, pois o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados em atividades ou explícito nos textos e problemas históricos resgatados de fontes primárias como os livros do passado remoto ou recente (textos originais, documentos históricos) ou secundárias (informações de livros de história da Matemática ou de livros paradidáticos).

SOBRE OS FUNDAMENTOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

No estudo adotamos uma fase da análise de conteúdo proposta por Bardin (2011) do desenvolvimento histórico e epistemológico de conteúdos matemáticos, com enfoque no conceito de função, entendendo como uma tentativa facilitadora do processo de apropriação do conceito matemático, uma vez que podemos com ele, determinar mais claramente os obstáculos de aprendizagem.

Para o levantamento das informações que constituíram o *corpus* de análise da pesquisa, adotamos uma abordagem qualitativa. Assim, a pesquisa empírica relacionada à revisão bibliográfica foi realizada no Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat), que é um espaço virtual que contém diversos materiais como, artigos, livros de minicursos, dissertações de mestrados profissionais e acadêmicos, teses de doutorado e produtos educacionais, todos relacionados à pesquisa em história da matemática em suas três dimensões (HEpM, HEdM e HEnM) conforme chancelado por Mendes (2021b; 2022).

A investigação sobre o conceito de função se desenvolveu por meio de uma análise documental e interpretativa. Iniciamos com uma pesquisa bibliográfica, voltada à produção científica existente e disponibilizada em livros, teses dissertações e outros que permitam reflexões mais apuradas e uma compreensão de totalidade em que se insere o objeto de estudo. Optou-se pela realização de uma pesquisa bibliográfica, pois esse tipo de procedimento permite ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente, conforme destaca Gil (2008).

Para alcançar nossos objetivos seguimos algumas etapas como a revisão bibliográfica acerca do desenvolvimento histórico do conceito de função, em repositórios, tomando como referência o portal: https://crephimat.com.br/. Em seguida fizemos a tradução, leitura e análise de conteúdo do livro *Théorie Générale des fonctions,* especificamente na parte que trata do tema objeto de estudo*,* destacando as principais ideias do autor, e como se desenvolve a formulação dos conceitos sobre funções a partir da concepção epistemológica estabelecida no livro.

SÍNTESE BIOGRÁFICA DE PAUL DU BOIS-REYMOND

Paul Du Bois-Reymond nasceu em 2 de dezembro de 1831 em Berlim (Alemanha) e faleceu no dia 7 de abril de 1889, em Freiburg (Alemanha), filho de Felix Henri du Bois-Reymond e Minette Henry. Seu pai era de Neuchâtel, mas mudou-se para Berlim em 1804, onde foi professor no *Kadettenhaus*.

A Suíça havia sido conquistada por Napoleão em 1798, que então estabeleceu a República Helvética, que durou até 1803"(Mac Tutor, 2005).

Figura 1. Imagem de Paul du Bois-Reymond

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Du_Bois-Reymond/pictdisplay/
(Acesso em 10.10.2022)

Paul Du Bois-Reymond foi um dos cinco filhos do casal Felix e Minette. Teve uma educação fluente em francês e alemão, e fortemente influenciado por seu irmão mais velho Émile, que foi para a Universidade de Berlim quando Paul tinha apenas seis anos de idade. Tal como o seu irmão mais velho, Paul também frequentou o French Gymnasium em Berlim e continuou a seguir os passos do seu irmão frequentando o Collège em Neuchâtel. De Neuchâtel, Paul foi para o Gymnasium em Naumburg e depois entrou na Universidade de Zurique em 1853. Em 1854, Paul Du Bois-Reymond publicou quatro artigos que estudavam problemas fisiológicos. Movendo-se para Königsberg, ele foi influenciado por Franz Neumann para mudar para a física matemática. Seus estudos de doutorado foram supervisionados por Kummer e Du Bois-Reymond recebeu seu doutorado pela Universidade de Berlim em 1853 por sua tese intitulada: *De aequilibrio fluidorum.*

Logo que concluiu seu doutorado, Du Bois-Reymond foi nomeado para ensinar matemática e física em uma escola secundária em Berlim. No entanto, continuou a realizar pesquisas em matemática aplicada e, como consequência, tornou-se cada vez mais envolvido com a teoria das equações diferenciais parciais. Em 1864, enquanto ainda ensinava na escola secundária, publicou *Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln.* Neste trabalho generalizou a ideia de Monge da característica de uma equação diferencial parcial de equações de segunda ordem para equações de terceira ordem. Esse trabalho formou a base do que Lie generalizou mais tarde.

Após a publicação deste importante trabalho foi nomeado para uma cátedra na Universidade de Heidelberg em 1865. Depois de cinco anos em Heidelberg, mudou-se para uma cátedra na Universidade de Freiburg, onde lecionou de 1870 até 1874, quando foi nomeado para a cátedra na

Universidade de Tübingen, onde sucedeu Hankel. Seu período em Freiburg foi dificultado pela guerra franco-prussiana que viu a França ser rapidamente derrotada pela Prússia na guerra de 1870-71.

As fortes ligações francesas e prussianas de Du Bois-Reymond o colocaram em uma posição um tanto difícil e seu irmão Émile foi um crítico franco dos franceses nesta disputa. Finalmente, depois de dez anos em Tübingen, onde supervisionou os doutorados de vários alunos, dos quais o mais famoso foi Otto Hölder, Du Bois-Reymond foi nomeado para uma cadeira na Technische Hochschule Charlottenberg em Berlim. Embora Du Bois-Reymond se desse bem com Weierstrass e os dois compartilharam muitos interesses matemáticos semelhantes e preocupações com o rigor, o mesmo não poderia ser dito para os membros da escola de Weierstrass com quem as relações eram tensas. Em particular, Du Bois-Reymond e Schwarz não estavam em boas condições.

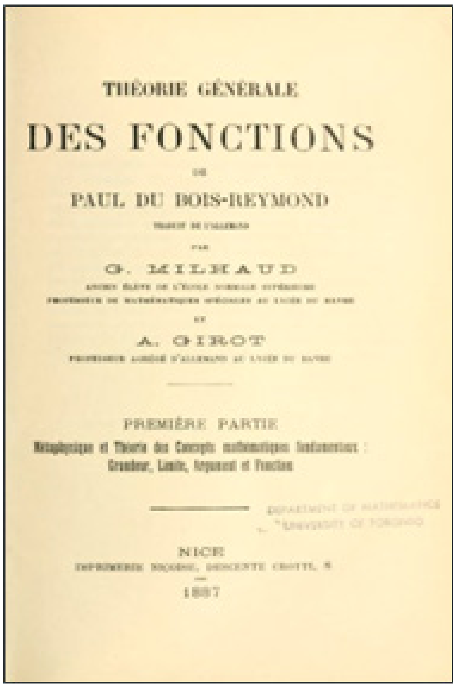
O trabalho de Du Bois-Reymond é quase exclusivamente sobre cálculo, em particular equações diferenciais parciais e funções de uma variável real. A técnica padrão para resolver equações diferenciais parciais usava séries de Fourier, mas Cauchy, Abel e Dirichlet haviam apontado problemas associados à convergência da série de Fourier de uma função arbitrária. Em 1873 Du Bois-Reymond foi a primeira pessoa a dar um exemplo de uma função contínua cuja função Fourier Série diverge em um ponto. Talvez o que foi ainda mais surpreendente, a série de Fourier da função de Bois-Reymond divergiu em um conjunto denso de pontos. O importante trabalho *Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern* levou a uma compreensão crescente de todo o conceito de uma função.

DESCRIÇÃO COMENTADA DOS ASPECTOS PRINCIPAIS DO LIVRO PESQUISADO

A livro *Théorie Générale des Fonctions* (Teoria Geral das Funções), de autoria de Paul Du Bois-Reymond, tem como principal finalidade propor a inserção das ideias do autor concernentes ao tema, em uma componente específica relativa aos conhecimentos sobre funções, que possam fortalecer a compreensão do assunto e sua abordagem de ensino pelos professores de Matemática em formação.

O livro se inicia abordando conceitos como magnitude (quantidades matemáticas) e limite, pontuando preliminarmente enunciados intuitivos, alguns princípios e métodos de análise de constituição do conceito de limite. O livro estabelece no decorrer das seções dos capítulos o autor apresenta suas discussões a respeito do conceito de limite a partir das concepções idealistas e empiristas. Para a teoria das funções, o autor adota uma forma de apresentação neutra, ou seja, que não contradiz nenhum dos dois pontos de vista.

Figura 2. Capa da tradução francesa do livro (1887).



THÉORIE GÉNÉRALE

DES FONCTIONS

PAUL DU BOIS-REYMOND

G. MILHAUD

A. GIROT

PREMIÈRE PARTIE

Métaphysique et Théorie des Concepts mathématiques fondamentaux :
Grandeur, Limite, Argument et Fonction

NICE

1887

Fonte: Google Images (Acesso em 10.10.2022)

A metafísica idealista, o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, não pode ser usada, mas também a ideia empirista do arbitrariamente exata, de modo que conceitos como magnitude, valor e segmento podem ser usados no sentido idealista colocando a *Teoria Geral das Funções* como uma investigação principalmente epistemológica do problema relativo ao conceito de limite.

> **Conceito de limite.–A existência de limite requer uma demonstração.–**Eu considero o comprimento exato como fundamento da ciência das grandezas e o represento como uma unidade de segmento de linha reta perfeitamente delimitado, cujas extremidades são designadas por 0 e 1. Nessa extensão, conhecemos uma infinidade de pontos determinados de diferentes maneiras; entre eles, devemos considerar especialmente esses tipos de pontos dos quais podemos encontrar representantes em qualquer porção, por menor que seja, do comprimento unitário. São os comprimentos racionais, ou seja, metades, terços, quartos, etc., ou múltiplos dessas frações da unidade de comprimento. São também os comprimentos em quantidade incontável sucessíveis que podem ser construídos, que não são frações racionais da unidade, mas raízes de números racionais, bem como frações racionais e múltiplos dessas raízes. O pensamento pode multiplicar indefinidamente o número desses tipos de pontos, e o comprimento unitário se cobre em nossa representação com uma multidão de pontos cada vez mais densa. Por mais que tentemos fazer crescer o número desses pontos, nosso pensamento atento não vê nunca dois pontos coincidirem, sempre ao contrário, dois pontos vizinhos permanecem separados por um segmento de linha reta que, abstraindo sua extensão, se assemelha completamente a unidade de comprimento. Essa e a imagem que sempre acompanha minha representação de grandeza (Du Bois-Reymond, 1887, p. 64, tradução nossa).

No excerto destacado anteriormente, Du Bois-Reymond apresenta uma abordagem idealista do conceito de limite, introduzindo-o como uma hipótese fundamental para a construção da matemática. Ele parte da ideia de que o comprimento exato é o fundamento da ciência das grandezas e o define como uma unidade de segmento de reta perfeitamente delimitada, com extremidades em 0 e 1. Reconhece a existência de uma infinidade de pontos na extensão unitária, dividindo-os em dois tipos principais: pontos racionais e pontos irracionais apontando que o pensamento pode multiplicar indefinidamente o número desses pontos, cobrindo a unidade de comprimento com uma multidão cada vez mais densa. Por fim ressalta que, por mais que se aumente o número de pontos, o pensamento atento nunca os verá coincidirem, sempre havendo um segmento de linha reta separando-os.

Alguns pontos abordados no livro Théorie générale des fonctions

Já no início do livro Teoria Geral das Funções, se destaca uma situação que até hoje se apodera das relações de ensino e aprendizagem de conceitos em matemática: “a preocupação excessivamente exclusiva com a precisão confere ao ensino de matemática uma forma frequentemente dogmática”(-Girot,1887, p. 04, tradução nossa). isso nos leva uma reflexão sobre como os conceitos matemáticos são apresentados e o que é mais importante, ceticismo em relação a conceitos abstratos com valorização em observações concretas e experiências sensoriais ou ênfase no racionalismo tendo razão e a reflexão como meios de alcançar o conhecimento, ou até mesmo uma certa fusão dessas correntes filosóficas. Assim se apresenta o livro *Teoria Geral das Funções(1882),* de Paul Du Bois-Reymond, que originalmente se intitula *Die allgemeine Functionentheorie* traduzida para o francês como *Théorie Générale des Fonctions* em 1887 por A. Girot e G. Milhaud. aborda questões relacionadas às correntes empiristas e idealistas, mas é importante notar que o foco principal do livro é a teoria matemática das funções. Du Bois-Reymond não se dedica de maneira extensiva à filosofia ou à discussão profunda sobre essas correntes, mas algumas de suas considerações e abordagens refletem aspectos filosóficos que estavam em voga em seu tempo.

São destacados conceitos como magnitude (quantidades matemáticas) e limite, pontuando preliminarmente enunciados intuitivos, alguns princípios e métodos de análise de constituição do conceito de limite, conforme mencionado no excerto a seguir.

> **Quantidade, número e formalismo literal A unidade e o um.–**Para comparar mais de duas quantidades matemáticas entre si e também para poder expressar com uma perfeita precisão a variação das quantidades, e necessário fixar a unidade de grandeza, ou simplesmente a unidade, ou seja, uma quantidade determinada dentre aquelas de uma certa espécie com as quais as outras são comparadas e que serve para medi-las. Não e apenas a divisibilidade das grandezas que gera o conceito de unidade, mas também, como observei, a atenção simultânea voltada para várias quantidades. Um certo grau de desenvolvimento da ciência da medida exigiu, em determinado momento, a divisão ***indefinida*** da unidade para que pudéssemos comparar quantidades diferentes entre si de maneira rigorosa, utilizando a unidade como referência. Isso, evidentemente, e a origem dos números fracionários, que, em sua representação, sempre remetem a uma certa divisão. Aqui, certamente, devemos distinguir pelo menos dois estágios de desenvolvimento do conceito. Os números fracionários mais simples correspondem provavelmente a um estágio de cultura apenas menos avançado do que os números inteiros; a necessidade diária de dividir comida, saque ou qualquer outra coisa provavelmente levou a esse conceito, enquanto as frações que têm o maior numeradores e denominadores, e especialmente o conceito desenvolvido de fração, já pertencem a ciência da medida. E instrutivo contrastar o conceito de quantidade em sua relação com os números fracionários e o conceito de números inteiros (Du Bois-Reymond, 1887, p. 55, tradução nossa).

O livro estabelece no decorrer de seus tópicos uma discussão do conceito de limite a partir das concepções idealistas e empiristas. Para a teoria das funções, o autor adota uma forma de apresentação neutra, ou seja, que não contradiz nenhum dos dois pontos de vista.

De acordo com Bentivoglio (2023), o movimento intelectual do século XVIII conhecido como empirismo foi uma abordagem filosófica que enfatizava a importância da experiência sensorial e da observação como fontes primárias de conhecimento tendo como exemplo de características: empirismo epistemológico, sensação e percepção, método científico, ceticismo em relação a conceitos abstratos, etc…, já os idealistas eram filósofos que pertenciam a uma tradição filosófica diferente, muitas vezes associada ao racionalismo, tinham como características: racionalismo epistemológico, ênfase na realidade mental, valorização de conceitos abstratos, filosofia especulativa, entre outros.

Em resumo, a principal diferença entre o empirismo e o idealismo reside na fonte do conhecimento e na abordagem epistemológica. Enquanto os empiristas enfatizavam a experiência sensorial e a observação como as principais fontes de conhecimento, os idealistas valorizavam a razão e a reflexão como meios de alcançar o conhecimento, muitas vezes considerando a realidade como intrinsecamente ligada à mente.

Nesse contexto apontaremos neste artigo algumas contribuições do livro de Du Bois-Reymond visando contribuir para a elaboração de uma abordagem de ensino a ser utilizada na formação de professores, mais precisamente, na temática *Funções* com intuito de se sugerir encaminhamentos para uma abordagem didática do tema, a ser implementada na Licenciatura em Matemática.

De acordo com Watson e Harel (2013), a importância desse conceito se deve principalmente a aplicabilidade do assunto que resulta em habilidades tanto gráficas como algébricas no que se refere a interpretações de situações cotidianas: Análises de gráficos, relação entre grandezas, modelagens de características da natureza, movimentação de objetos, etc. Também vale ressaltar o caráter interdisciplinar do estudo das funções, com alcance predominante em disciplinas como a física, química e biologia, entre outras.

Cabe ressaltar que além da aplicabilidade e interdisciplinaridade, do estudo das funções, outra importante característica a ser destacada se refere ao fato que ao longo do curso na formação dos professores de matemática, algumas disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral, a Análise Real, Álgebra Linear, etc, utilizam o tema como balizador dos conceitos específicos, em outras palavras, é necessário que o aluno tenha conhecimentos específicos em funções para que possa ter um entendimento mais produtivo das definições a serem apresentadas em determinadas componentes curriculares da formação de professores de Matemática.

Correlações histórico-comparativas entre as abordagens funcionais da obra e um livro didático usado no ensino médio

O objetivo desta seção é estabelecer uma análise comparativa entre as abordagens funcionais de Du Bois-Reymond (Teoria Geral das Funções) e Iezzi (Fundamentos da Matemática Elementar), buscando identificar pontos de convergência e divergência na forma como o conceito de função é apresentado e explorado em cada obra. Pretende-se, ainda, contextualizar as obras em seus respectivos períodos históricos, traçando um paralelo entre as ideias da obra de Du Bois-Reymond e a abordagem atual e muito usada do livro de Iezzi.

Neste sentido, o autor mesmo tendo um viés empirista, com ênfase no rigor do método científico e formalização de conceitos, não entende que partir de uma definição pronta deva ser o ponto chave de estudo mas sim uma junção de teorias e relações que se complementam dando sentido ao que se quer apresentar. Podemos dar exemplo de como é apresentada a definição de função no livro *Fundamentos da Matemática Elementar* (Iezzi, 2013), muito utilizado na formação de professores.

Nosso desafio aqui passará por algumas etapas como a análise textual aprofundada das obras de Du Bois-Reymond e Iezzi com foco nas seções que tratam do conceito de função, em que a ideia é extrair trechos relevantes que ilustram as definições, propriedades e aplicações do conceito em cada obra, visando correlações que poderão identificar similaridades e diferenças nas abordagens funcionais presentes em cada obra, considerando o desenvolvimento da matemática e as necessidades educacionais, conforme destacamos nos quadros a seguir.

Quadro 01

Definição de Argumento identificada no livro Teoria Geral das Funções (Du Bois-Reymond. 1887)
Para o Empirista e o Idealista, um valor específico do argumento é um comprimento que vai de um ponto inicial fixo a um ponto final arbitrário, um comprimento que pode sempre ser expresso em relação à unidade de comprimento, usando um número no sentido geral, ou seja, usando um número racional ou o limite de um número desse tipo. Por isso, no início da teoria das funções, reservamo-nos a liberdade de imaginar o argumento de acordo com a necessidade do momento ou à vontade, seja como um comprimento final, ou seja, como um ponto definindo uma distância, seja como um número, ou seja, como uma relação numérica em relação a uma unidade de comprimento.
Definição de Domínio identificada no livro Fundamentos da MatemáticaElementar (IEZZI, 2013)
Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos x ϵ A para os quais existe y ϵ B tal que (x, y) ϵ f. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções: *domínio conjunto de partida.*

No século XVII, o termo “argumento” começou a ser utilizado na matemática para se referir à variável independente em uma função. Essa mudança de significado foi impulsionada pelo desenvolvimento do cálculo infinitesimal é o valor que “entra” na regra da função para determinar a imagem, ou seja, o valor que a função assume para aquele argumento específico. Já o domínio de uma função, por sua vez, define o conjunto de valores válidos para o argumento. São os elementos que podem ser "inseridos" na lei da função sem gerar resultados inconsistentes ou indefinidos.

A relação entre argumento e domínio é fundamental para compreender o comportamento e as propriedades de uma função. O domínio restringe os valores que o argumento pode assumir, enquanto o argumento determina a imagem que a função fornece para cada valor válido.

Observando os quadros acima podemos constatar duas definições usadas em épocas diferentes mas que possuem a mesma finalidade teórica, que são os possíveis valores que a variável independente pode assumir para uma determinada função. Enquanto Du Bois-Reymond parte de significados práticos para dar a ideia abrangência a esse valor abstrato, onde já sugere que seria o valor que usa dependendo da necessidade, verificamos na definição pronta no livro do Iezzi, sobre o chamado domínio de uma função, a valorização das expressões algébricas, em detrimento do entendimento da relação de dependência entre funções e de forma elas podem ser encontradas.

Quadro 02

Definição de Função identificada no livro Teoria Geral das Funções (Du Bois-Reymond. 1887)
Função da variável ou do argumento, deve-se entender uma determinação através da qual os valores do argumento correspondem a valores da função; e ainda precisamos mostrar tudo o que essa expressão implica: valor da função. A um valor de argumento específico, podemos atribuir como valor da função um valor particular, ou um número limitado ou ilimitado de valores, ou todo um intervalo de valores, ou ainda uma série de intervalos desse tipo.
Definição de Função identificada no livro Fundamentos da Matemática Elementar (IEZZI, 2013)
Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo x ϵ A existe um só y ϵ B tal que (x, y) ϵ f.

Ambos os autores reconhecem a importância de regras de correspondência para determinar o valor de uma função para cada elemento de seu domínio. Du Bois-Reymond, ao analisar funções infinitesimais e infinitamente grandes, utiliza conceitos como limites e taxa de crescimento para definir essas regras. Já no livro do Iezzi, em sua definição formal, exige que a relação entre domínio e contradomínio seja definida por uma regra de correspondência unívoca.

As definições refletem os diferentes contextos históricos em que foram formuladas. A definição de Du Bois-Reymond se insere em um contexto de debates sobre o infinito e a rigorosidade do cálculo, enquanto a definição do livro do Iezzi se beneficia dos avanços da matemática moderna, como por exemplo o advento da teoria dos conjuntos.

Não será encontrada uma definição pronta de função na obra de Du Bois Reymond, mas sim diversas partes de conceitos importantes da teoria geral das funções em que o mesmo organiza tentando elucidar lacunas desses conceitos e estabelecer uma ponte entre o empirismo e idealismo elencando o pontos fortes de cada tendência filosófica, como por exemplo a junção da associação contínua de valores(Idealista) e a necessidade de uma lei de formação(Empirista).

A definição de Du Bois-Reymond, com sua flexibilidade e amplitude, pode ser interpretada como uma aproximação idealista. Ao permitir a aplicação do conceito de função a valores infinitesimais e infinitamente grandes, ela sugere a existência de uma realidade matemática ideal que transcende a experiência sensorial. Já definição no livro do Iezzi, pode ser vista como uma aproximação empírica. Ao utilizar conceitos da teoria dos conjuntos e da lógica matemática, ela se baseia em estruturas abstratas e simbólicas, que podem ser consideradas abstrações da realidade física.

O autor mesmo tendo um viés empirista, não entende que partir de uma definição pronta deva ser o ponto chave de estudo mas sim uma junção de teorias e relações que se complementam dando sentido ao que se quer apresentar.

Observamos a definição pronta contradizendo a ideia apresentada por Du Bois-Reymond, pois já foi iniciada a partir de uma relação de dependência entre variáveis. Mesmo sabendo que outros conceitos como conjuntos, relação biunívoca, foram progressivamente apresentados até chegar na definição pronta acima, como ressalta (Du Bois-Reymond,1887):

> (...) é importante ressaltar que, com essas definições gerais, formuladas de maneira a abranger todos os casos particulares, não avançamos. O problema é que, no fundo, para saber onde parar ao restringir a definição geral, é preciso já estar em posse do conceito final. Portanto, os resultados obtidos dessa maneira parecem pouco satisfatórios, bastante vagos e até contraditórios, dependendo das diferentes ideias preconcebidas sobre o assunto (Du Bois-Reymond, 1887, p. 27, tradução nossa).

O autor complementa que em muitos casos os viés trabalhados nos conceitos se integram: “ portanto, se imagine nas figuras do idealista e do empirista, conforme eu tentei apresentá-los, homens raciocinando com igual precisão e lógica, mas, acima de tudo, não recuando diante de nenhuma consequência de seu raciocínio” (Du Bois-Reymond, 1887, p. 123).

Quadro 03

Noção intuitiva de limite de uma Função identificada no livro de Du Bois-Reymond
Eu considero o comprimento exato como fundamento da ciência das grandezas e o representou como uma unidade de segmento de linha reta perfeitamente delimitado, cujas extremidades são designadas por 0 e 1. Nessa extensão, conhecemos uma infinidade de pontos determinados de diferentes maneiras; entre eles, devemos considerar especialmente esses tipos de pontos dos quais podemos encontrar representantes em qualquer porção, por menor que seja, do comprimento unitário. São os comprimentos racionais, ou seja, metades, terços, quartos, etc., ou múltiplos dessas frações da unidade de comprimento. São também os comprimentos em quantidade incontável sucessíveis que podem ser construídos, que não são frações racionais da unidade, mas raízes de números racionais, bem como frações racionais e múltiplos dessas raízes. O pensamento pode multiplicar indefinidamente o número desses tipos de pontos, e o comprimento unitário se cobre em nossa representação com uma multidão de pontos cada vez mais densa. Por mais que tentemos fazer crescer o número desses pontos, nosso pensamento atento não vê nunca dois pontos coincidirem, sempre ao contrário, dois pontos vizinhos permanecem separados por um segmento de linha reta que, abstraindo sua extensão, se assemelha completamente a unidade de comprimento.

Apresentação da noção intuitiva de limite de uma função identificada no livro Fundamentos da Matemática Elementar vol. 8 (Iezzi, 2013)
Seja a função f(x) = 2x+1, definida para todo x real. Estudemos os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferentes de 1. Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos: x = 0 f(x) = 1 x = 0,5 f(x) = 2 x = 0,75 f(x) = 2,5 x = 0,9 f(x) = 2,8 x = 0,99 f(x) = 2,98 x= 0,999 f(x) = 2,998 Se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos: x = 2,0 f(x) = 5 x = 1,5 f(x) = 4 x = 1,25 f(x) = 3,5 x = 1,1 f(x) = 3,2 x = 1,01 f(x) = 3,02 x = 1,001 f(x) = 3,002 Observemos em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, f(x) aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 3 estará f(x). Observemos que podemos tornar f(x) tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1.

Du Bois-Reymond visando explicar intuitivamente o conceito de limite emerge da ideia de "convergência infinita", propondo que à medida que um ponto se aproxima cada vez mais de outro, a função assume valores cada vez mais próximos de um valor específico, como se estivesse se "concentrando" nesse valor limite, utiliza a analogia de um ponto se movendo ao longo de uma reta para ilustrar essa ideia de aproximação gradual.

Já no livro "Fundamentos da Matemática Elementar", Iezzi, apresenta a noção intuitiva de limite através da ideia de "arbitrariedade". Ele argumenta que, para que um número seja o limite de uma função, este número deve ser "aproximável" pela função para qualquer valor de entrada suficientemente próximo do ponto limite, independentemente da "arbitrariedade" com que escolhemos esse valor de entrada, enfatizando que a aproximação deve ser válida para qualquer valor de entrada próximo do ponto limite, independentemente de suas características específicas. Ambas as definições enfatizam a ideia de que, à medida que o ponto de entrada se aproxima do ponto limite, a função assume valores cada vez mais próximos do valor limite.

Para reforçar o pensamento de Du Bois-Reymond, destacamos uma de suas demonstrações intuitivas da concepção de limite, a partir de uma sequência numérica, fazendo partições decimais no intervalo real de 0 a 1, ou seja, o conceito de limite usando partição do intervalo numérico de (0,1):

> **...Todo número** decimal $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \ldots + \alpha_n/10^n$, aproxima-se tanto quanto desejado quando n cresce suficientemente, de um valor limite. Sob as frações $0, \alpha_1$; $0\,\alpha_1.\alpha_2$; deve-se entender como múltiplos de décimos, centésimos,... de uma unidade de comprimento, cujas extremidades seriam 0 e 1. Se representarmos os comprimentos $0, \alpha_1$, $0, \alpha_1\,\alpha_2$ na unidade de comprimento 0 ... 1, a partir do ponto 0, suas extremidades viradas para o lado 1 vão se aproximando cada vez mais, e o ponto limite fecha a sequência que se aproxima indefinidamente de tal maneira que todas as extremidades estão situadas em relação a esse ponto limite do mesmo lado que o zero, as distâncias dos pontos $0, \alpha_1$, $\alpha_1\,\alpha_2$; ponto limite caindo abaixo de qualquer valor... (Du Bois-Reymond, 1887, p. 66, tradução nossa).

Du Bois-Reymond (1887) assevera que, embora já existisse uma formalização conceitual de limite, observou-se lacunas na aprendizagem ao mencionar que pelo conceito de limite, escutamos um certo modo de raciocínio em virtude da natureza de uma sequência de valores susceptíveis de serem mensurados ou observados, e concluímos a existência de valores que escapam de toda percepção na qual à existência não pode nunca se demonstrar no sentido literário da palavra. Apesar de tudo, nós estamos acostumados a aceitar sem pestanejar essa conclusão, que aplicamos constantemente (Du Bois-Reymond, 1887).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresentamos os resultados de uma pesquisa mais ampla que está em desenvolvimento, cujo tema central é a exploração do desenvolvimento histórico do conceito de função em um livro publicado nas últimas décadas do século XIX, cujo impacto foi considerado relevante na abordagem de ensino de teoria funcional na Europa.

Compreendemos que esse é um tema amplamente debatido por pesquisadores da área de Educação Matemática que se interessam em pesquisar sobre os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Igualmente, enfatizamos que se trata de um tema cujo desenvolvimento histórico-conceitual é de extrema importância na aprendizagem sobre o ensino de funções que todo professor de Matemática precisa incorporar em sua formação para que supere toda e quaisquer dificuldades concernentes à realização do seu fazer docente nas sala de aula do Ensino Médio e na licenciatura em Matemática.

Os resultados advindos da pesquisa realizada até o momento, apontam possibilidades de uso das informações sobe o desenvolvimento conceitual e didático do tema, presentes no livro, como conhecimento complementar que deve ser associado aos conteúdos presentes nos livros atuais de Matemática do Ensino Médio, ou mesmo de disciplinas sobre fundamentos epistemológicos da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática, desde que essa abordagem se estruture na forma de diálogos que se conectem de maneira lógica e coerente, às ideias sobre funções abordadas em livros como o que foi examinado neste artigo e as abordagens atuais estabelecidas nos livros didáticos de Matemática, como apresentamos anteriormente.

Com base na pré-análise de conteúdo realizada durante a tradução e leitura do livro compreendemos que ao longo do seu desenvolvimento histórico-epistemológico, o conceito de função se mostrou tão amplo e múltiplo (plural), que atingiu um grau sofisticado de generalização teórica, se mostrando bastante abstrato quando desvinculado das capacidades de representação de modelos de aproximação explicativa dos fenômenos da realidade natural e sociocultural do nosso mundo e com isso gerou dificuldades nessa visualização interpretativa de tais fenômenos pelos estudantes.

Assim, interpretamos que tais dificuldades na abordagem conceitual e didática dos professores, ao longo dos dois últimos séculos (XIX e XX) deve ter implicando em entraves na aprendizagem dos estudantes que pode ter sido ocasionados pela vinculação excessiva do tema aos seus processos de formalização conceitual quando levados para a sala de aula, e que historicamente parece evidenciada a partir dos modos de abordar a Matemática no final do século XIX e início do século XX, com o advento da escola Formalista, uma corrente filosófica da Matemática que a apresentava basicamente mediante uma estrutura lógico-dedutiva, construída integralmente a partir de definições e axiomas.

Outro aspecto identificado no livro e que fortalece nosso pressuposto é que as discussões do autor sobre o empirismo como uma abordagem filosófica que enfatizava a importância da experiência sensorial e da observação como fontes primárias de compreensão e produção de conhecimento matemático evidenciou características que fizeram emergir correntes de pensamento relacionadas ao empirismo epistemológico, com maior valorização da sensação e percepção, do método científico para se conhecer a prática do ceticismo em relação a conceitos abstratos como caminho da investigação e aprendizagem.

Por outro lado identificamos que o autor coloca em outro polo de discussão a abordagem do tema na perspectiva dos idealistas, por considerar que se tratava de filósofos que pertenciam a uma tradição filosófica diferente, muitas vezes associada ao racionalismo, e que tinham como características o racionalismo epistemológico, a ênfase na realidade mental, valorização de conceitos abstratos, filosofia especulativa, entre outros.

Em nossas reflexões sobre a importância da abordagem dada pelo autor ao livro investigado, é principalmente pelas potencialidades de tratar de uma possibilidade de diálogo entre os dois extremos epistemológicos refletidos no tratamento conceitual e que bem reflete as interpretações filosóficas do tema pelo autor. Aspectos como esses que mencionamos até esse ponto da nossa análise realizada e nos indicam o quão potencial pode ser a exploração do material contido no livro examinado.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BENTIVOGLIO, J. **Conversa sobre Teoria da História com o ChatGPT.**Revista de Teoria da História, Goiânia, v. 26, n. 1, p. 316–335, 2023. Disponível em: https://revistas.ufg.br/teoria/article/view/75344 .Acesso em: 12 de jan 2024.

BUNGE, Mario. **Teoria e realidade**. Tradução Gita K. Guinsburg. São Paulo: editora Perspectiva, 2013

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951.

DUBOC, I. C. **Funções–da Noção de Dependência Funcional ao Conceito Formal no Século XVIII** [Rio de Janeiro] 2005 IX, 173 p. 29,7 cm. Dissertação (COPPEIUFRJ, M.Sc., História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2005).

DU-BOIS REYMOND, P. **Théorie Générale des Fonctions** / por Paul Du Bois-Reymond; traduzido do alemão por G. Millaud,... e A. Girot,.... 1887.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

IEZZI, Gelson, **Fundamentos de matemática elementar, 8** : limites, derivadas, noções de integral / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — 7. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

MENDES, Iran Abreu. **Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil**: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática. Relatório de Pesquisa. Universidade Federal do Pará, Belém, 2022.

MENDES, Iran Abreu. Historical Creativities for the Teaching of Functions and Infinitesimal Calculus. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, 16(2), in 0629. https://doi.org/10.29333/iejme/10876, 2021a.

MENDES, Iran Abreu. **História para o Ensino de Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica**: uma Análise da Produção Brasileira (1997 -2017). Relatório de Pesquisa. Universidade Federal do Pará, Belém, 2021b.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Coleção História da Matemática para professores).

MENDES, Iran Abreu. A Investigação Histórica na Formação de Professores de Matemática. **Revista Cocar** 4.7 (2010): 37-48. Web. ISSN 19819269.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre/RS: Sulina, 2006.

NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. **Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo?** Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

O'CONNOR, J. J. **Paul David Gustav du Bois-Reymond. Mac Tutor,** 2005. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Du_Bois-Reymond/>. Acesso em: 08 de Jan. 2024.

PIRES, R. F. **O conceito de função: uma análise histórico epistemológica.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática ENEM, São Paulo: 2016.

PIRES, R. F. **Função: concepções de professores e estudantes dos ensinos Médio e Superior.** 440 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

ROCHA, S. M. C. **Investigação histórica na formação de professores de matemática**: um estudo centrado no conceito de função. 2008. 188 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)–Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

RORATTO, C. **A história da matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função.** 2009. 199 f. Dissertação (Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas). Universidade Estadual de Maringá, 2009.

ROXO, Euclides. **A Matemática na educação secundária**. Companhia Editora Nacional, 1937.

SKEMP, Richard. **Psicología del aprendizage de las matemáticas**. 2. ed. Tradução Gonzalo Gonzalvo Mainar. Madrid: Ediciones Morata, 1993.

WATSON, A.; HAREL, G. The role of teachers' knowledge of functions in their teaching: a conceptual approach with illustrations from two cases. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, v. 13, n. 2, p. 154-168, 2013.

ZUFFI, E. M. **O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio**: por uma aprendizagem de significados. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo 1999.

COMO CITAR — APA

Mendes, I. A., & Cartagenes, E. S. (2024). Contribuições epistemológicas do livro Théorie Générale des Fonctions (1887) à formação de professores de matemática. *PARADIGMA*, *XLV*(2), e2024001.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024001.id1534

COMO CITAR — ABNT

MENDES, Iran Abreu; CARTAGENES, Eric Souza. Contribuições epistemológicas do livro Théorie Générale des Fonctions (1887) à formação de professores de matemática. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, n. 2, e2024001, Jul./Dez., 2024. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024001.id1534

HISTÓRICO
Submetido: 15 de janeiro de 2024.
Aprovado: 30 de maio de 2024.
Publicado: 01 de julho de 2024.

EDITOR
Fredy E. González

ARBITROS
Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres