

Las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional

Rodolfo Vergel¹ Rafael Moreno León²

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional. El estudio se aborda desde la Teoría de la objetivación, adoptando una perspectiva multimodal de la cognición humana. Se trabaja con dos grupos de estudiantes de quinto de primaria (10-11 años), analizando su actividad matemática en clase a través de dos tareas sobre proporcionalidad directa. El análisis de datos, basado en dos episodios de clase, se fundamenta en el método dialéctico, que considera los fenómenos deben ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio. Los resultados indican, por un lado, la emergencia de dos tipos de trabajo grupal: uno de tipo individualista y otro que empieza a dar signos de una actividad como labor conjunta; y, de otra parte, que las formas de cooperación humana en el segundo tipo de trabajo grupal repercuten en la emergencia de este tipo de pensamiento caracterizado por una relación de proporcionalidad expresada en la regla de conformación de una serie una de parejas ordenadas.

Palabras clave: Teoría de la objetivación. Ética comunitaria. Subjetividad. Alienación. Pensamiento proporcional.

The repercussions of non-alienating forms of human collaboration in the emergence of proportional thinking

Abstract

The objective of this article is to show the repercussions of non-alienating forms of human collaboration on the emergence of proportional thinking. The study is approached from the Theory of Objectification, adopting a multimodal perspective of human cognition. We work with two groups of fifth grade students (10-11 years old), analyzing their mathematical activity in class through two tasks on direct proportionality. The data analysis, based on two class episodes, is based on the dialectical method, which considers phenomena to be studied as processes in constant movement and change. The results indicate, on the one hand, the emergence of two types of group work: one of an individualistic type and another that is beginning to show signs of an activity as a joint effort; and, on the other hand, that the forms of human cooperation in the second type of group work have an impact on the emergence of this type of thinking characterized by a relationship of proportionality expressed in the rule of formation of a series of ordered pairs.

Keywords: Theory of objectification. Community ethics. Subjectivity. Alienation. Proportional thinking..

As repercussões das formas não alienantes de colaboração humana na emergência do pensamento proporcional

Resumo

O objetivo deste artigo é mostrar as repercussões das formas não alienantes de colaboração humana na emergência do pensamento proporcional. O estudo é abordado a partir da Teoria da Objetivação, adotando uma

¹ Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE), Bogotá, Colombia. Correo electrónico: rvergelc@udistrital.edu.co

² Magister en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá. Candidato a doctor en el Doctorado Interinstitucional en Educación, sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: rmorenol@udistrital.edu.co

perspectiva multimodal da cognição humana. Trabalhamos com dois grupos de alunos do 5º ano (10-11 anos), analisando a sua atividade matemática nas aulas através de duas tarefas sobre proporcionalidade direta. A análise dos dados, baseada em dois episódios de aula, baseia-se no método dialético, que considera os fenômenos a serem estudados como processos em constante movimento e mudança. Os resultados indicam, por um lado, o surgimento de dois tipos de trabalho em grupo: um de tipo individualista e outro que começa a dar sinais de uma atividade como esforço conjunto; e, por outro lado, que as formas de cooperação humana no segundo tipo de trabalho em grupo impactam no surgimento deste tipo de pensamento caracterizado por uma relação de proporcionalidade expressa na regra de formação de uma série de pares ordenados.

Palavras-chave: Teoria da objetificação. Ética comunitária. Subjetividade. Alienação. Pensamento proporcional.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación, se estudia la subjetividad en el aula de matemáticas de quinto de primaria desde la Teoría de la Objetivación (TO). La TO se inspira en la escuela sociocultural de Vygotsky y en el concepto de educación de Freire. Desde este marco de referencia, no solo se investigan las formas de producción de saberes, sino también las formas de relación social de los sujetos al interactuar en el desarrollo de la actividad matemática.

En general, una buena parte de las investigaciones en el campo de la Educación Matemática ha focalizado su atención en el eje del Saber/Conocimiento. Esto ha sido objeto de crítica, ya que ha llevado a invisibilizar la consideración sobre el sujeto o, en términos de la TO, del Ser/Devenir (Alves Paiva & Noronha, 2020; Lasprilla & León, 2020; Moreno, 2023; Radford, 2017b, 2020b, 2023a; Radford & Lasprilla, 2020; Vergel & Miranda, 2020). Según la revisión de la literatura, en particular, vemos una situación similar sobre el estudio del pensamiento proporcional a nivel escolar. El saber sobre razones, proporciones y proporcionalidad (RPP) se ha mostrado principalmente como una construcción, acorde a una visión psicológica subjetiva de esta entidad (Moreno, 2023). Visto así, este tipo de saber es ahistórico y acultural, ya que, desde la TO consideramos el saber ligado a una cierta visión cultural del mundo; es decir, está culturalmente situado. La producción y la transformación del saber ocurren dentro de los límites y las posibilidades que ofrece la cultura, o de lo que es la base real de la existencia humana en un momento y lugar específicos. El saber se constituye en y a través de sus relaciones y propiedades con otras cosas. Inspirados en la TO, es posible deducir que el saber matemático sobre las RPP se ha creado mediante un largo proceso de refinamientos y concreciones (lenguaje natural, simbolismo alfanumérico, gráficos, etc.) y se ha codificado en la memoria y en las prácticas culturales (Radford, 2013, 2017a, 2020a, 2023a, 2023b; Vergel, 2015; Vergel, et al., 2021; Vergel & Miranda, 2020; Vergel & Rojas, 2018).

Igualmente, según la revisión realizada por Moreno (2023), podemos inferir que el sujeto predominante en las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las RPP es de tipo cognitivo o kantiano. En este tipo de sujeto, podríamos afirmar que la realidad emana de él cuando crea o recrea el saber sobre las RPP. En este contexto, la actividad desarrollada en la clase de matemáticas se caracteriza por un tipo de interacción social que funciona como catalizador del aprendizaje individualista de contenidos matemáticos (Radford, 2023a; Radford & Lasprilla, 2020).

Algunas investigaciones se han preocupado por explorar condiciones en el trabajo de aula con estudiantes que posibiliten formas de colaboración humana no alienantes, es decir, relaciones éticas, entendiendo la ética como una forma de alteridad (Lasprilla & León, 2020; Radford, 2023a; Radford & Lasprilla, 2020; Radford & Silva, 2021). Estas investigaciones presentan una concepción de la actividad como una forma de vida con un fuerte sentido social y colectivo, proponiendo un tipo de relación ética diferente a las usuales encontradas en el aula, como la ética de la obediencia y la ética de la autonomía (Radford, 2016b; Radford & Silva, 2021).

Por otra parte, Radford (20116b) plantea una estructura para el análisis de la alienación, tomando como base los principios filosóficos del materialismo dialéctico de la obra de Marx. Estos elementos son: un preciso concepto antropológico de sujeto, un concepto específico de trabajo y una relación precisa entre los individuos y los objetos que producen mediante la actividad.

En síntesis, a partir de las investigaciones mencionadas, surge la necesidad y pertinencia de estudiar cómo las formas de interacción social en una clase de matemáticas pueden repercutir en la comprensión de formas de pensamiento matemático. En particular, en este artículo nos planteamos la siguiente pregunta ¿Cuáles son las repercusiones de las formas de interacción humana no alienantes en estudiantes de quinto grado en las formas de pensamiento proporcional emergentes?

ELEMENTOS TEÓRICOS DE REFERENCIA

Para abordar la dimensión del Ser y el Devenir, la TO contempla los *procesos de subjetivación*. Estos “se definen como aquellos procesos en los que los profesores y los estudiantes se posicionan, mientras que al mismo tiempo son posicionados por otros, apoyados, ineluctablemente, en las redes sociales de la cultura y la historia” (Radford, 2020a, p. 37).

Para ello, la TO, desde sus principios epistemológicos, considera una nueva visión del sujeto en el aula, de la actividad y del saber. Debido a que en el campo de la Educación Matemática se ha mostrado una focalización sobre cierto fundamento en el individuo y sobre las formas de producción de saber en el aula (Radford, 2023c). A continuación, mostraremos nuestra perspectiva sobre algunos principios teóricos: sujeto, actividad, saber y ética comunitaria, necesarios para el propósito de nuestro trabajo.

El sujeto histórico-cultural de la TO

En la TO no hablamos de dos procesos separados, enseñanza y/o aprendizaje, para nosotros hay un solo llamado enseñanza-aprendizaje (Radford, 2023a). El aprendizaje lo vemos tanto desde las formas de producción de saber, como desde las formas de interacción social colectiva. Usualmente, el aprendizaje matemático es visto como un proceso de construcción de estructuras cognitivas, en el cual el niño juega un papel activo en la búsqueda del conocimiento, la visión cognitiva (Piaget, 1978); y, por tanto, el aprendizaje es visto como experiencia subjetiva (Radford, 2023a). De igual manera, el juzgar, reflexionar o pensar sobre algo que aprendemos, parte tradicionalmente desde el racionalismo

filosófico. Dado que, desde esta corriente, la razón es considerada como un elemento fundamental del pensamiento; y, por tanto, el sujeto es un elemento central en la acción de conocer.

La idea de individuo desde Kant, la llamamos el *sujeto kantiano*; él es el centro de la cognición humana, a partir de su consciencia (Radford, 2023c). Así, la realidad emerge de él, desde su razonamiento a priori al conocer, desde el uso de su autonomía para alcanzar la madurez intelectual y desde la experiencia sobre el objeto de conocimiento. Esta visión del ser humano se desarrolló a la par del capitalismo mismo y se trasladó al campo educativo, bajo la influencia del neoliberalismo económico que ha permeado este ámbito social (Radford, 2023b). En consecuencia, la escuela se ha enfocado en ser un lugar de fabricación de individuos necesarios para la vida socioeconómica, en nombre del buen uso de la autonomía del sujeto al aprender (Radford, 2023a). De ahí que el proyecto social de los enfoques constructivistas o con afinidad a ellos, se enmarca en la consideración de un sujeto kantiano; mientras que desde la TO consideramos un sujeto histórico-cultural.

Mientras que el *sujeto histórico-cultural* es un individuo que se produce en la cultura y a partir de su transformación, mediante el co-posicionamiento de su subjetividad, junto con otros; el individuo visto de esta forma es único, histórico, cultural y concreto (Radford, 2023c). Este tipo de ser humano surge con Marx, al configurar los lineamientos del materialismo dialéctico, como se deduce de la Tesis 6 sobre Feuerbach: “La esencia humana es el conjunto de las relaciones sociales”. De acá surgen dos ideas fuertes para nosotros: No hay dos sujetos idénticos, porque cada persona tiene un medio social distinto al de los otros; y el sujeto, al relacionarse con los demás, al moverse dentro de la cultura, está en constante transformación al establecer relaciones sociales con otros.

La idea de sujeto histórico-cultural considera lo que Stetsenko y Ho (2015, p. 224) llaman “una de las paradojas más complejas de la existencia humana”. El sujeto comparte con otros, cosas como el lenguaje y las costumbres, además de cierta filosofía sobre el mundo; sin embargo, cada ser es un individuo único (Heidegger, 2009). El hombre así, por más que sea un individuo particular (y justamente es su particularidad la que hace de él un individuo y un ser social individual real), es, en la misma medida, la totalidad, la totalidad ideal, la existencia subjetiva de la sociedad pensada y sentida para sí (Vergel, en prensa; citando a Marx, 1981, p. 147). En consecuencia, “la paradoja es que los seres humanos son individuos singulares y únicos, pero también son profundamente relacionales y sociales, compartiendo con otras personas nada menos que el fundamento existencial de la vida en todas sus expresiones y formas” (Stetsenko & Ho, 2015, p. 224).

La actividad matemática en la TO

Dos de las acepciones del término actividad que usualmente se encuentran en el aula de matemáticas, son: i) Aktivität/aktivnost´ (tomado del alemán y el ruso), como “una serie de acciones que un individuo realiza en la consecución de su objetivo” (Radford, 2023a, p. 36); ii) mientras que Tätigkeit (en alemán) y deyatel´nost´ (en ruso) “se refiere a un sistema dinámico en el que los individuos interactúan colectivamente en un fuerte sentido social, lo que hace que los productos de

la actividad sean también colectivos”. Desde la TO tomamos este segundo significado de actividad (Tätigkeit), una forma de vida, a la cual la enunciamos como *Labor conjunta*.

En la TO, la labor conjunta es la categoría principal de investigación, esta se define desde tres dimensiones: Epistemológica (cómo llegamos a saber); ontológica (cómo llegamos a ser lo que somos); y estética (cómo llegamos a expresar nuestra subjetividad) (Radford, 2023a). La labor conjunta se constituye desde el lenguaje, las experiencias corpóreas del movimiento, la acción, el ritmo, lo estético y lo sensual (Radford, 2016a).

El saber desde la TO

La TO ha establecido su noción del término saber, desde la distinción con otras teorías dentro del campo. Para otros enfoques teóricos, el saber o el conocimiento es muy similar. Desde el constructivismo o teorías afines a él, el saber se entiende como una construcción, como una entidad psicológica subjetiva. Por tal razón, Radford (2023a) discute que el saber no se recibe pasivamente, el sujeto lo construye; la cognición como función psicológica es adaptativa para organizar el mundo experiencial del sujeto; y el individuo no sólo construye su propio saber, sino que lo hace desde la autonomía.

Otro enfoque investigativo, muy influyente dentro del campo, es el de la Teoría de las Situaciones didácticas (TSD), para ellos el saber resulta de una solución “óptima” a una problema específico o situación; a partir de una adaptación cognitiva del sujeto al medio se logra el aprendizaje; y para cada saber matemático hay un grupo de situaciones que le otorgan un apropiado significado (Radford, 2023a).

En cambio, desde la TO consideramos el aula de matemáticas como un espacio de producción de saberes y de subjetividades; de la misma forma, la investigación contempla no solo la dimensión del saber, sino también la del devenir (la dimensión de la subjetividad). En consecuencia, desde la TO consideramos la Educación Matemática como:

Un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busca la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en permanente evolución (Radford, 2017a, p. 97).

En resumen, el saber no es algo que se construye o se transmite al sujeto. El saber (el saber cultural) se crea y recrea a partir de la actividad histórico-cultural sensual y sensible, se entiende como elemento general. Específicamente, el saber es “un sistema de arquetipos de pensamiento, acción y reflexión, constituido histórica y culturalmente a partir de la labor colectiva material, sensual y sensible” (Radford, 2023a, p. 51).

El estudio de la alienación en el aula de matemáticas

Asociado al saber y a la actividad misma, desde nuestras consideraciones de estudio surge el asunto de la alienación del sujeto, por lo que produce y por la forma en que lo hace. Por ello, desde la

perspectiva de ser humano de Marx (2015), Radford (2016b) toma como base los principios filosóficos del materialismo dialéctico y plantea una estructura para el análisis de la alienación constituida por:

- Un preciso concepto antropológico de sujeto
- Un concepto específico de trabajo y
- Una relación precisa entre los individuos y los objetos que producen mediante la actividad.

Teniendo en cuenta la singularidad del ser y el sentido de transformación de los individuos, según su contexto social y relaciones dentro de él, nuestro sujeto es el histórico-cultural. Por otro lado, desde esta estructura filosófica, el término trabajo puede ser sustituido por la actividad de los estudiantes al conocer dentro del aula. Igualmente, los objetos que se producen en el aula pueden considerarse como los saberes. Según lo anterior, en el aula de matemáticas, pueden darse dos tipos de alienación, por la actividad matemática y por el conocimiento (en forma de saber desde otras aproximaciones teóricas), como en los enfoques transmisivos o en los progresistas Radford (2016b).

La ética comunitaria

Según Bajtín existen tres posibilidades de relación para los actos éticos: Yo- consigo mismo, Otro-Yo y Yo-Alteridad (Bubnova, 1997). La primera forma de relación se refiere al acto reflexivo o examen acerca de nuestros actos; la segunda acerca de cómo los otros afectan nuestros comportamientos y decisiones; mientras que la tercera se refiere a cómo el Yo afecta a los demás, en forma de respuesta a la necesidad del otro. Desde esa tercera vía, en la TO entendemos la ética desde el espacio de creación de “condiciones para el surgimiento de nuevas formas de alteridad y nuevas concepciones de la sociedad y de la escuela” (Radford, 2023b, p. 270).

Resulta fundamental para nosotros señalar que el asunto de la ética es ineludible al hablar de educación matemática (Radford & Lasprilla, 2020). Esto justificado por las relaciones humanas gestadas entre los sujetos en el aula, el papel del contenido matemático en la inserción social de los estudiantes, el asunto del manejo de las normas de comportamiento en la clase y la cuestión teleológica que contempla educar a los niños. Por otro lado, existen al menos dos tipos de éticas imperantes en el aula de matemáticas: la ética de la obediencia y la ética de la autonomía (Radford, 2023a; Lasprilla, 2020; Radford; Silva, 2021) . Sin embargo, desde la TO consideramos una alternativa basada en las formas de colaboración humana dentro del aula, centradas en aspecto colectivo de las formas de producción de conocimiento y las formas de interacción social en el aula, llamada la *ética comunitaria* (Ver Cuadro 1).

Cuadro 1 – Indicadores y vectores de la ética comunitaria

Relación de alteridad "subjetividad"			Indicador de búsqueda específico (acciones)
Sustrato ético	Vectores	Componentes	
Responsabilidad (Lévinas, Buber, Rorty) yo-tú	Responsabilidad (R) (yo-tú) (relación de responsabilidad)	Excedencia	Los participantes asumen posicionamientos con el trabajo, que les permite: hacer frente a las dificultades, comprometerse con el trabajo y mostrar responsabilidad por el "otro" quedándose y escuchando las ideas de otros
		Acogida (hacerse cargo)	Se interesa por la comprensión o no de los compañeros. Ofrece ayuda a alguien; los apoya en sus pasos. Se muestra dispuesto a atender al compañero. Valora los esfuerzos de los demás y el propio en el esfuerzo conjunto para avanzar en una tarea (por ejemplo, una solución de un problema)
Socialidad (Lévinas)	Cuidado del otro (CO) (Relación de Similitud, nosotros, los otros)	Otredad Inmanencia	Prevalecen sobre el otro mis ideas y pensamientos, existe el otro, pero existe desde el "yo creo", "yo pienso" o "yo considero".
		Encuentro "diálogo"	Muestra respeto por lo que hacen o dicen los demás. Maneja con respeto y responsabilidad el poder. Tiene puntos de referencia para reconocer su estado de ánimo y la forma en que piensa y actúa. A partir de varias actividades, es capaz de cambiar sus creencias sobre sus habilidades y las del compañero, asumiendo que si pueden desarrollarlas de manera adecuada. Trata de entender una idea o una acción propuesta por alguien más. Felicita a otros por los buenos aportes. Es capaz de sacar cosas positivas de las experiencias y eventos difíciles que se presentan para mejorar las relaciones con otros.
La sensibilidad (Lévinas, Farias)	Compromiso en el trabajo conjunto (CTC) (Relación de cercanía, nosotros)	Otredad Proximidad (empatía)	Muestra querer estar al lado del otro por gusto propio, necesidad de hacer algo juntos. Llamar la atención del otro por algo que hace o dice. Les pide a los que no hablan mucho participar y les da la palabra para darles confianza, etc. En sus acciones, posicionamientos o actitudes muestra un interés por el compañero, en sus incomprensiones o dudas, atento (a) a prestar su ayuda. Desarrolla la confianza usando una actitud positiva para motivar, animar o mantener el interés de los otros.
		Exposición	Propone abiertamente ideas y comprensiones, buscando aportar a la tarea común. Se interesa por las ideas y comprensiones de los compañeros. Maneja las emociones para pensar y resolver problemas en el contexto de una actividad de colaboración o cooperación entre pares.

Fuente: Tomado de Lasprilla et al. (2021)

Esta se fundamenta en tres vectores que la caracterizan: la responsabilidad, el compromiso en el trabajo conjunto (CTC) y el cuidado por el otro (CO) La responsabilidad la entendemos desde Lévinas, como un compromiso sin limitaciones hacia los demás; el compromiso lo asimilamos como una promesa, como la realización de querer y hacer todo lo posible para trabajar hombro a hombro con los demás en el marco de nuestra labor conjunta; mientras que el cuidado del Otro, lo consideramos como una forma de estar con el Otro y de ser-para-Otro (Radford, 2023a). Estos vectores a su vez poseen unos componentes que ayudan en la investigación a clasificar los rasgos hallados de la ética comunitaria y unos indicadores que permiten identificar las acciones propias de los sujetos en la interacción social.

METODOLOGÍA

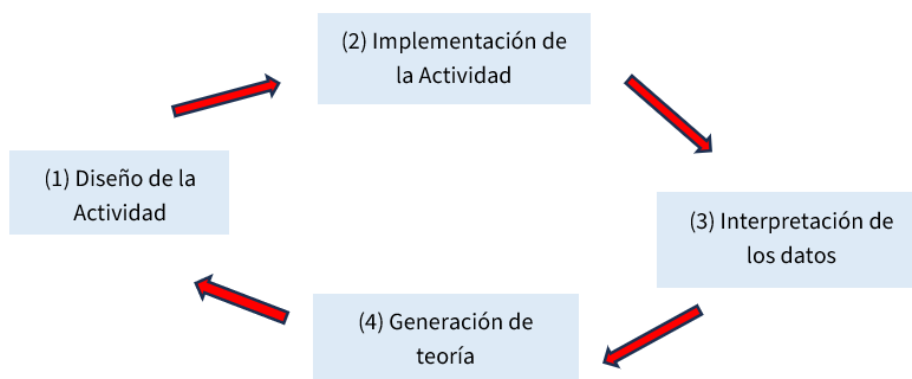
Este estudio es de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo (Creswell, 2009). Desde la TO, asumimos una perspectiva multimodal de la cognición humana (Arzarello, 2006; Radford, 2023a; Radford & Sabena, 2015; Vergel, 2015). Esta perspectiva investigativa centra la atención en “cómo los diversos canales sensoriales y signos semióticos (lingüísticos, símbolos escritos, artefactos, diagramas,

etc.) se relacionan, coordinan y subsumen en un nuevo pensamiento o unidad psíquica” (Radford, 2023a, p. 151). El análisis realizado se fundamenta en el método dialéctico (Yajot, 1973). Un eje central de este método es concebir que todos los fenómenos deban ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio. En particular, para esta investigación, asumimos los vectores de la ética comunitaria y las formas de pensamiento proporcional como elementos que se “mueven”, esto es, que están en permanente tensión e influencia mutua.

La investigación se desarrolló en un aula de clases de quinto grado de primaria con dos grupos de 32 y 35 estudiantes, con edades entre 10 y 11 años, en un colegio público de Bogotá en dos momentos distintos. Durante 8 sesiones de 60 minutos, el profesor (primer autor de este escrito) dirigió durante este tiempo el desarrollo de 8 tareas sobre proporcionalidad directa. En este escrito se presentan solamente dos episodios, correspondientes a la primera y última sesión de trabajo.

Nuestro método investigativo es acorde a el ciclo de investigación longitudinal, propuesto por Radford (2010); por ello, la investigación principal tuvo cuatro etapas (ver Figura 1):

Figura 1 - Ciclo de la metodología de investigación longitudinal



Fuente: Adaptado de Radford (2010).

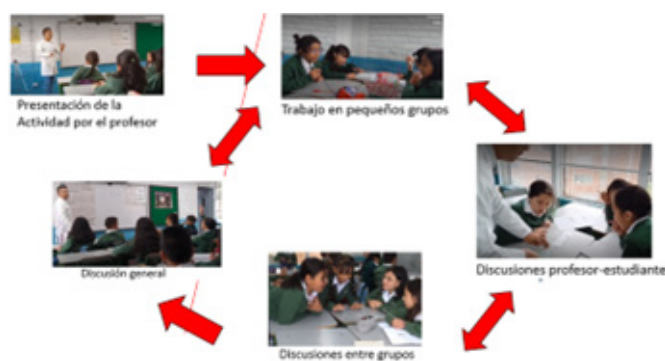
- En la primera etapa se consolidó el diseño de la Actividad³ de acuerdo con los principios de la TO, a partir de una primera experimentación de tareas, con un grupo de estudiantes del mismo nivel educativo, quinto de primaria (septiembre-octubre/2022).
- En la segunda etapa se implementó la Actividad en concordancia con los momentos señalados por Radford (2023a), con un segundo grupo de estudiantes (marzo-abril/2023) (ver Figura 2).
- En la tercera etapa se logró transformar la información recolectada a través de distintas fuentes, en los datos de la investigación.
- Finalmente, en la cuarta etapa se enunciaron los aspectos teóricos derivados de los datos consolidados.

³ Actividad en mayúscula inicial, para notar el uso de la segunda acepción del término, desde las formas de colaboración humana y relacionarla con una acción colectiva orientada desde nuestro diseño e implementación hacia la labor conjunta.

Para documentar las repercusiones de las formas de interacción humana no alienantes, en las formas de pensamiento proporcional emergentes de los estudiantes de quinto grado, hicimos un estudio de la relación establecida entre las componentes del binomio *formas de pensamiento proporcional-formas de interacción social con orientación hacia la ética comunitaria*, nuestra unidad de análisis en la investigación principal.

Al comenzar las sesiones el profesor hacía la presentación del trabajo del día; igualmente, él centraba su discurso en una reflexión sobre las formas de trabajo observadas en la clase, vinculadas sobre la interacción social de los estudiantes. Esto debido a que, en una fase previa de la investigación se adelantó una experimentación de las tareas propuestas, en ella se establecieron ciertos presupuestos sobre la manera cómo los niños desarrollaban las tareas y vinculaban a sus compañeros en el grupo de trabajo. Por tal razón, de forma a priori, para esta segunda etapa de la investigación, en la implementación de la Actividad de clase, se diseñaron las tareas: desde un lenguaje en las instrucciones que involucrara a los otros estudiantes en el desarrollo de la actividad; se limitaron los materiales de trabajo a los estudiantes, para mejorar la interacción social desde la necesidad de los sujetos; y para el cumplimiento de la meta de trabajo se implementaron los momentos de la actividad de Radford (2023a) (ver Figura 2).

Figura 2 – La actividad de clase y algunos de sus “momentos”



Fuente: Adaptado de Radford (2023a)

De acuerdo con Miranda et al. (2007) para la recolección de la información, se desarrollaron cuatro fases para ello. En la primera fase se realizaron grabaciones de audio y video, además de registros fotográficos de la actividad de estudiantes y profesor al resolver las tareas propuestas. En la segunda fase se recopilaban las producciones de los estudiantes (cuestionarios resueltos), las fotografías de lo anotado en el tablero y las grabaciones del trabajo de aula (audio y video), para indagar por la subjetividad emergente en la actividad matemática. En la tercera etapa se estudiaron las grabaciones, para destacar los segmentos de la actividad de clase que mostraban rasgos asociados a los tipos de ética presupuestados. En la cuarta etapa se realizaron transcripciones, tanto de lo verbal, como de lo no verbal de las acciones empleadas por los estudiantes y el profesor.

La organización social de la clase debía propiciar un encuentro con el otro y esto se consideró desde el diseño mismo de la tarea. Por ello, el trabajo grupal alrededor de un objeto de aprendizaje

resultaba fundamental para el desarrollo de la actividad matemática, mediante los momentos de la clase y mediante el lenguaje que se empleó en las instrucciones de las tareas que considera la alteridad.

De acuerdo con las indicaciones de Radford (2023a), las tareas se diseñaron desde una unidad conceptual y contextual, con el fin de establecer condiciones de trabajo que propiciaran formas de colaboración humana. El aspecto contextual se contempla porque existe una historia general que articula todas las tareas, en este caso las fotografías y sobres del mundial de futbol que forman combinaciones (parejas ordenadas) o arreglos con estos objetos (esquemas de patrones numéricos). El aspecto conceptual porque las cuestiones matemáticas relacionadas con las RPP van surgiendo en las tareas con una complejidad creciente en el desarrollo de la actividad matemática; cuestiones como: identificar de la razón unitaria, calcular términos en el conjunto de parejas ordenadas, enunciar la regla de conformación de la relación proporcional, etc. Este diseño de tareas se propone con el fin de documentar las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional.

A continuación, una descripción del *objeto* y *meta*⁴ de las dos tareas presentadas en este escrito:

Cuadro 2 – Descripción del objeto y meta de las dos tareas

Tarea	Objeto	Metas
Comparando sobres y fotografías. Se entrega un cuestionario por grupo con un contexto gráfico, como el de la figura 3, que relaciona las parejas ordenadas de sobres y fotografías: (3,12) y (4,16). Luego se pide que continúen la secuencia hacia atrás y hacia adelante. Junto con el cuestionario, se les entrega a los grupos material en físico (7 sobres y 28 fotografías) para apoyar el desarrollo del trabajo grupal.	Pensar proporcionalmente en cuanto a las formas y los números	Buscar una estrategia general que permita resolver cualquier caso de la situación presentada y realizar la síntesis de los resultados obtenidos a modo de tabla.
Las esquinas que crecen diferente. En la última tarea (del estudio principal), se propone un patrón numérico diferente a los proporcionales, trabajados anteriormente, uno de tipo $f(x) = ax+b$, función afín. Junto con el cuestionario, se les entrega a los grupos material en físico (7 sobres y 28 fotografías) para apoyar el desarrollo del trabajo grupal.		Establecer la diferencia entre los patrones numéricos expresados por una función afín y los patrones de tipo proporcional.

Fuente: Elaboración propia

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los momentos de clase implementados (Radford, 2023a) son: presentación de la actividad por el profesor, trabajo en pequeños grupos, discusiones profesor-estudiante, discusiones entre grupos y discusión general (Ver Figura 2). Por ello, al inicio de las sesiones de trabajo, el profesor hace la presentación de la tarea frente al tablero de forma general, compuesta por un contexto de trabajo (como el de la Figura 3) y siete preguntas. En su intervención frente al tablero, él hace lectura del contexto de la tarea y de cada uno de los siete ítems del cuestionario, así como una indicación de

⁴ La estructura de la actividad propuesta por Radford (2023a) incluye: Objeto, Meta y Tareas de la actividad.

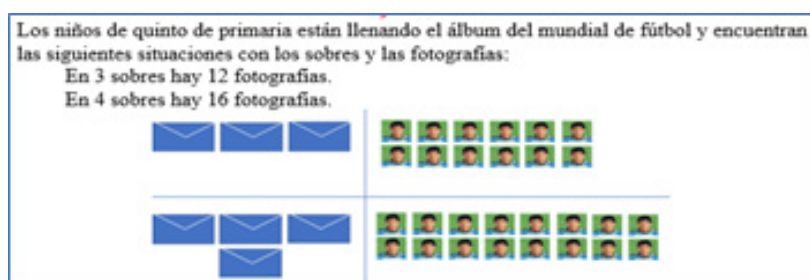
los momentos de la actividad, Luego de este primer momento, durante la primera sesión de trabajo, los estudiantes se disponen en grupos de tres o cuatro estudiantes para responder el cuestionario suministrado; junto con la tarea, ellos reciben un material en físico, siete sobres y 28 fotografías, como apoyo y herramienta para el trabajo grupal. Las soluciones al cuestionario surgen luego de discutir y lograr un consenso sobre lo trabajado.

Tarea: comparando sobres y fotografías

En esta tarea se asumía que los sobres del contexto tenían la misma cantidad de fotografías, para poder establecer la igualdad entre las cantidades de sobres y láminas del álbum del mundial de fútbol.

Una primera instrucción de la tarea contemplaba representar sobre la mesa de trabajo, con el material en físico, el contexto de la tarea, las parejas ordenadas: (3,12) y (4,16), como se aprecia en la Figura 3. No obstante, como se aprecia en la Figura 4, Martín y Esther arman dos parejas ordenadas en sentidos opuestos: 3 sobres y 12 fotografías; 4 sobres y 16 fotografías. Esto nos indica dos perspectivas individualistas del trabajo grupal, porque la instrucción del profesor hablaba de armar las dos parejas ordenadas de manera conjunta por parte de todos los miembros de la mesa de trabajo. Esta situación de las perspectivas visuales opuestas se dio en varios grupos de la clase. Este tipo de individuo que emerge en la actividad al interior de la clase lo asociamos con lo que antes definimos como un sujeto kantiano, en la cual el Yo impera; el sujeto crea su realidad y se encierra en sí mismo desde el solipsismo que le brinda el aislarse del Otro.

Figura 3 – Contexto de la tarea: comparando sobres y fotografías



Fuente: Elaboración propia

Figura 4 – Dos perspectivas individualistas en el trabajo grupal de Esther, Katherine, Martín y Sheila

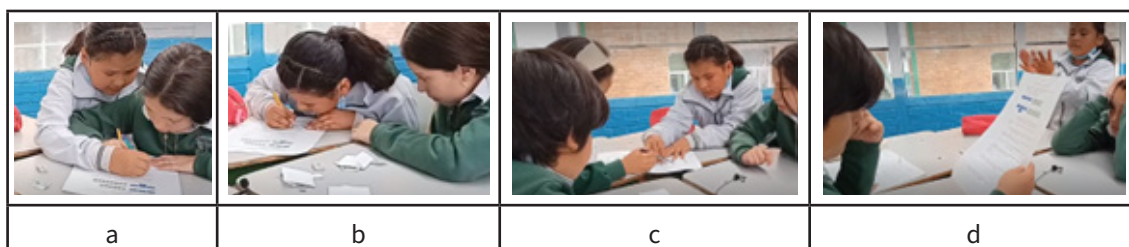


Fuente: Elaboración propia

En este caso, la perspectiva visual individualista de los estudiantes repercute en el éxito de la tarea, porque las parejas ordenadas no forman una única tabla de datos que articule adecuadamente las magnitudes relacionadas, número de sobres y número de fotografías; no hay una obra común. Recordemos que la obra común de la que habla Hegel (2001) es una construcción colectiva que se va constituyendo a través del tiempo, esta se conforma por un cúmulo de subjetividades que se articulan en el concepto de comunidad, a la par de instaurar ciertos mecanismos de colaboración humana para todos los sujetos del grupo.

Un segundo hecho en el desarrollo de la actividad, que marca la imperante perspectiva individualista en las acciones grupales, está marcado por la *repartición o división del trabajo*, sugerida por varios grupos de la clase. Los niños reparten los 5 o 6 ítems del cuestionario para que sean desarrollados por turnos; es decir, cada sujeto debe desarrollar individualmente al menos algún punto del taller de la sesión (Ver Figura 5).

Figura 5 – Momentos de trabajo del grupo de Sheila, Katherine, Esther y Martín



Fuente: Protocolo de fotografías de la actividad de los estudiantes.

Inicialmente, Katherine empieza el trabajo y asume el responder el numeral a del cuestionario (Figura 5a); aunque Sheila quiere ayudar e intervenir, y por ello, logra dibujar parte de la respuesta, como se mencionó anteriormente. Luego, Sheila asume la responsabilidad de dibujar la respuesta del numeral b (Figura 5b), mientras Katherine mira atentamente lo que hace su compañera. A continuación, Esther responde la siguiente pregunta (Figura 5c), pero dialoga un poco más con el grupo que sus anteriores compañeras al hacerlo. Finalmente, Martín debe responder el cuarto ítem (Figura 5d); en la imagen se observa cómo él afronta el trabajo sin intervención de sus compañeros.

Esta misma conducta, la de repartir los puntos del cuestionario, se aprecia en los otros grupos de la clase. Mientras el docente atiende las dudas de los compañeros de las otras mesas de estudiantes, él aprecia cómo cada estudiante se turna para escribir y resolver; sin importar si esta repartición del trabajo repercute en el éxito de lograr las respuestas correctas. Parece ser que la meta común que persigue la clase es la de terminar el cuestionario, sin importar la validez de las respuestas. Esta conducta, de división del trabajo para cada miembro del grupo, prevaleció en algunos grupos de estudiantes durante toda la secuencia de tareas. La división del trabajo propuesta se asemeja con una cadena de producción en una empresa que fabrica o produce algo.

Estos procesos asumidos desde la fabricación de mercancías se reflejan en la escuela, además de otras conductas de los sujetos; por ejemplo, en la institución educativa hay salones y oficinas (dependencias), cubículos individuales o puestos de trabajo (pupitres unipersonales), subordinación

(v.g. directivos docentes y docentes) y un producto por elaborar (el saber). Por tal razón, desde la TO se marca la relación entre política y educación a partir de la influencia del neoliberalismo en la visión de la “escuela como una empresa, y de las matemáticas escolares como una herramienta al servicio del comercio y las finanzas” (Radford, 2023c, p. 64). Al respecto de las relaciones y formas de producción en el capitalismo, Marx (2015), en su crítica al sistema socioeconómico, nos habla de cuatro tipos de alienación del ser humano, en cuanto a: i) el hombre por el producto de su trabajo; ii) el trabajo mismo; iii) otros seres humanos; y iv) sí mismo. De ahí la oportunidad de usar la estructura filosófica que propone Marx para analizar la alienación, en relación con las formas de producción de conocimiento en el aula.

Sin embargo, a la par de esta división del trabajo tenemos cierta interacción social (ver Cuadro 3), que denota rasgos de trabajo colectivo desde la ética comunitaria (Lasprilla & León. 2020; Radford, 2023a). El ítem de la tarea pedía establecer cuál era la siguiente pareja ordenada, en la secuencia: (3, 12), (4,16), ... por parte del grupo de cuatro integrantes. Aunque en el turno de Katherine al desarrollar la pregunta no hubo mucha intervención por parte de los otros integrantes del grupo, Sheila sí logró colaborar con la parte que le correspondía a Katherine (ver imagen 5a). Creemos que esto se da por la proximidad a ella, pues estaba sentada a su lado derecho.

Cuadro 3 – Transcripción 1

L1	Katherine	4, 8, ... [señalando con su dedo índice derecho cada uno de los sobres correspondientes de la primera pareja ordenada].
L2	Sheila	[al dudar Katherine sobre el número que corresponde al tercer sobre, Sheila lo señala con su pulgar derecho].
L3	Katherine	12.
L4	Sheila	12 [afirmando con su cabeza la misma respuesta].
L5	Katherine y Sheila	4, 8, 12, 16 [señalando con sus dedos índices los sobres correspondientes].

Fuente: Protocolo video grabaciones de la actividad de clase

Como se aprecia en la Transcripción 1, Sheila y Katherine muestran rasgos de compromiso por el trabajo conjunto (CTC). Repasemos el contenido de estas manifestaciones, en la línea 2: Sheila: “[al dudar Katherine sobre el número que corresponde al tercer sobre, Sheila lo señala con su pulgar derecho]”; y en la línea 4: Sheila: “12 [afirmando con su cabeza la misma respuesta]”. Dado esto, vemos que Sheila colabora con Katherine al señalar sobre el papel y hacer que ella complete la frase al indicar sobre el papel (*Proximidad-empatía*); así mismo, no sólo llama la atención de su compañera al involucrarse en la tarea, sino que también propone sus puntos de vista y afirma cuando está de acuerdo con lo que dice Katherine (*Exposición*). Es decir, Katherine responde recíprocamente al compromiso en el trabajo conjunto expresado por Sheila. Aunque con menos fuerza observamos rasgos del vector de la responsabilidad desde la *excedencia* en la conducta de las dos niñas, cuando asumen posicionamientos con el trabajo propuesto, al momento de dar una respuesta a la actividad en desarrollo. Es decir, aparecen dos vectores de la ética comunitaria a la vez, pero el primero con mayor fuerza que el segundo. Estas formas de colaboración humana se contraponen a la ética de la

autonomía presente en las conductas individualistas ya anotadas anteriormente en el grupo A; lo que nos resulta interesante para observar a lo largo de las próximas sesiones, el movimiento de los vectores de la ética comunitaria en oposición a las dos éticas imperantes en el aula, la de la autonomía y la de la obediencia (v.g. la que surge del rol natural que ejerce el educador en el aula).

Es el momento de señalar, en concordancia con Lasprilla et al. (2021), que dentro de la actividad matemática en la TO hay dos tipos de procesos:

i) los modos de interacción que hacen referencia a las formas históricas y culturales de interacción y cooperación entre los sujetos, y

ii) los modos de producción del saber que hacen referencia a los medios materiales e intelectuales que emplean los miembros de una cultura en la producción y la reproducción de su vida (Lasprilla et al., 2021, p. 231).

Estos tipos de procesos manifestaron para nosotros el vínculo entre los dos ejes planteados en nuestra investigación: Saber/Conocimiento y Ser/Devenir, lo cual empezamos a evidenciar en la interacción entre Sheila y Katherine; primero desde las formas de producción de conocimiento, y luego desde las formas de interacción social con cierta orientación hacia la ética comunitaria.

Tarea: las esquinas que crecen diferente

Luego de la primera sesión, el profesor propuso una división del trabajo diferente a la implementada por los estudiantes de repartir las preguntas de la tarea. Esta consistía en asignar responsabilidades específicas a cada integrante del grupo, con el propósito de promover formas de interacción y cooperación humana de compromiso conjunto, para abordar las tareas:

- El Relator, él representaba al grupo y exponía al resto de la clase las respuestas obtenidas.
- El Moderador, él permitía el uso de la palabra dentro del grupo y resumía lo discutido por sus compañeros, luego de cada intervención.
- El Sintetizador, él iba registrando lo sucedido en la discusión, no solo las respuestas obtenidas, sino también la forma cómo se hallaban.
- El Cronometrista, él era el encargado de regular el tiempo total del trabajo y el tiempo para cada pregunta asignada.

Es oportuno señalar que cada grupo tenía el compromiso de desarrollar el cuestionario asignado y a la vez cumplir con la división de roles propuesta. Los estudiantes inicialmente pudieron elegir los roles de su preferencia; luego se propuso la rotación de roles y en las dos últimas sesiones se mantuvo el mismo rol para cada uno.

Esta organización de los estudiantes al interior de cada grupo pretendía cierto grado de intervención en las dinámicas propias de la interacción social. Mediante esta división del trabajo se pretendía establecer cierta autorregulación de los estudiantes, con la intención de lograr alcanzar la meta de trabajo de cada sesión.

Figura 6–Explicación de los nuevos roles de cada niño dentro del grupo de trabajo

Fuente: Protocolo de fotografías de la actividad de clase.

El profesor de la clase les manifiesta a sus estudiantes, desde su experiencia como docente, situaciones que se presentan a veces en el trabajo grupal de los profesores, las cuales impiden el normal desarrollo de la tarea propuesta (Ver Cuadro 4 – Transcripción 2). En el diálogo con la clase, el profesor explica a modo de ejemplo, cuando debería intervenir el cronometrista, en la actividad grupal.

Cuadro 4 – Transcripción 2

L1	Profesor	...Cuando en un grupo de profesores por ejemplo tenemos que desarrollar una agenda de trabajo y hay 7 u 8 puntos, de vez en cuando un compañero dice los siguiente “moción de orden”. ¿Qué significa eso? Que nos estamos dedicando mucho a uno de los puntos y los demás puntos son importantísimos, porque hay que cumplir con toda la guía de trabajo [
----	----------	--

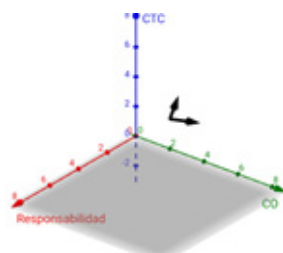
Fuente: Protocolo de grabaciones de clase.

Al respecto debemos señalar la necesidad de desarrollar este tipo de diálogos al inicio o al final de la actividad de clase, si queremos transformar el tipo de relación ética entre los estudiantes. En efecto, como se mostró anteriormente, existe un marcado individualismo en la clase, en la forma como los sujetos aprenden en forma solitaria, desde su propio solipsismo, en el cual cada uno de los miembros de la clase construye su conocimiento y su realidad, sin considerar a veces la alteridad. Para cambiar esta circunstancia, la acción docente es crucial para establecer las condiciones de clase que permitan formas de colaboración humana no alienantes. Teniendo presente que, Radford (2020b) concibe al profesor como encarnación de una forma ideal de comportarse, de pensar, de hablar, de hacer, etc.; estas formas ideales o estructuras culturales que asignan un rol al educador son históricamente constituidas y además ejercen una influencia real sobre el estudiante; y no solo se relacionan con el eje del Saber y el Conocimiento, sino también con el Ser y el Devenir. Con su diálogo y reflexión al dirigirse a sus estudiantes, el docente intenta cambiar los modos de relación de los sujetos, para buscar formas no alienantes de interacción humana, desde su experiencia y desde el mismo ejemplo que él transmite al comportarse con los otros al interior de la clase.

Estas actitudes del profesor que orienta la Actividad de clase diseñada, de *Cuidado por el otro* (CO), fundamentadas desde el concepto de socialidad de Lévinas (2002), se basan en la idea de la consideración de la alteridad en el sustento de la existencia humana. Ese otro, un ser diferente a mí define mi propia identidad y a la vez se convierte en objeto de respeto y consideración. Estas formas de relación ética comunitarias no se generan espontáneamente y requieren cierto nivel de intervención del docente desde la gestión de clase. Esto se manifiesta desde el uso del lenguaje del profesor, porque

muestra un esfuerzo por hacerlo comprensible a los estudiantes, al proponer abiertamente sus ideas y comprensiones de lo sucedido sobre el trabajo grupal visto anteriormente (CTC-Exposición), esto muestra una expresión de cuidado por el otro (CO). A la vez, por parte de sus estudiantes de manera recíproca también hay un cuidado hacia su docente al prestar atención, reflexionar y participar de dicha charla. Es decir, coexisten los vectores del CO y el CTC, aunque con más fuerza el primero de ellos (ver Figura 7).

Figura 7–Interpretación de los vectores de la ética comunitaria



Fuente: Gráfico propio.

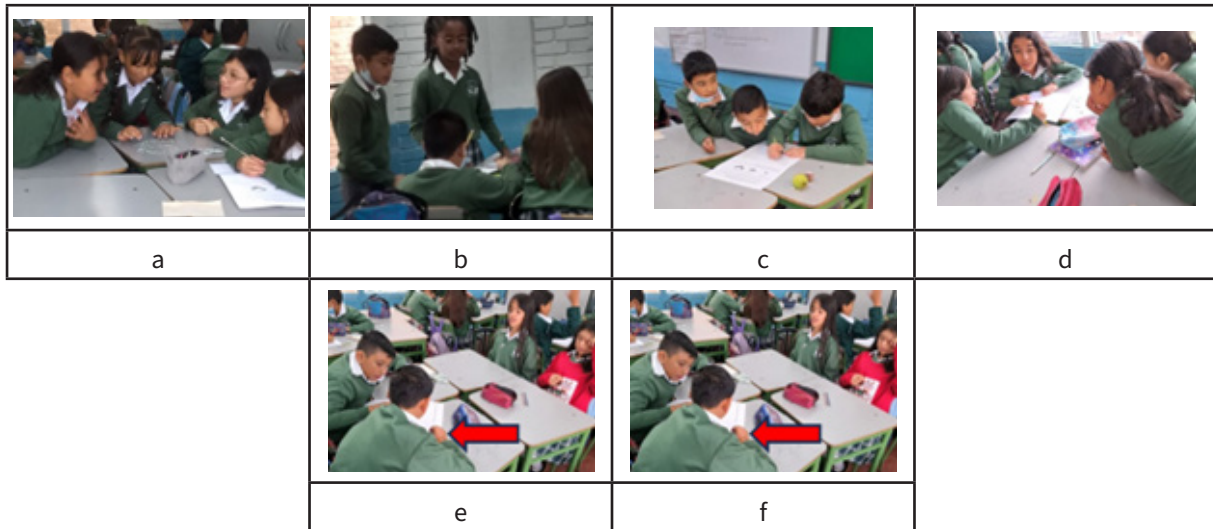
Siguiendo con la metáfora de los vectores de la ética comunitaria, podría establecerse para su interpretación un gráfico en el espacio que coordine estos tres elementos (Responsabilidad, CO y CTC); los elementos cuantitativos de dicho gráfico corresponden al número de la sesión en la que emergen los vectores, a modo frecuencia estadística de tipo discreto. En la imagen se aprecian los dos vectores sobre el plano CO-CTC, cada uno de ellos emerge en la segunda sesión de trabajo de la secuencia con repercusiones hacia futuros encuentros, y dada su orientación, cada uno de ellos tiene características de estas dos virtudes, CO y CTC, pero con prevalencia de una sobre la otra. A medida que avanzaron los encuentros, los tres vectores de la ética comunitaria fueron más recurrentes en la interacción social de la Actividad de clase implementada, formando así un *espacio o campo ético*, que conforme evolucionaban las formas de colaboración hacia una labor conjunta, este tejido social se tornaba más denso.

Ahora queremos mostrar la evolución de la interacción social, desde el individualismo mostrado por los sujetos, a pesar de estar organizados por grupos, hacia ciertos rasgos de trabajo colectivo. Estas formas de colaboración humana que hemos percibido en el trabajo de los estudiantes poseen ciertos atributos desde lo comunitario, que ellos han logrado consolidar, desde la primera hasta esta última sesión de trabajo.

Por eso queremos señalar varios aspectos relacionados con el contraste, entre las dos formas que hemos observado del trabajo en grupo predominantes en la clase, evidentes nuevamente en esta última sesión de trabajo: La Actividad de clase como una aproximación hacia la labor conjunta, (Figuras 8a, 8b, 8c y 8d) y la actividad de clase desde el individualismo (Figuras 8e y 8f). Esta es una apreciación gráfica, de tipo ilustrativo para el lector (Figura 8), en ella se puede percibir el trabajo de 5 grupos de la clase. Nuestras percepciones acerca de estos dos tipos de trabajo grupal ya han sido mostradas anteriormente, desde la evidencia y el argumento que las sustenta.

Como se explicó anteriormente, los estudiantes de la clase implementaron la división de los puntos del cuestionario, para ser repartidos de forma equitativa para cada miembro del grupo, por turnos de trabajo individual, eso señala la flecha roja en las imágenes 8e y 8f; esto de acuerdo con lo que Radford (2023a) llama un conjunto de mónadas, una sociedad formada por un conjunto de individuos separados. Mientras que en las imágenes 8a, 8b, 8c y 8d, los sujetos están reunidos en torno a algo que los convoca en la interacción social.

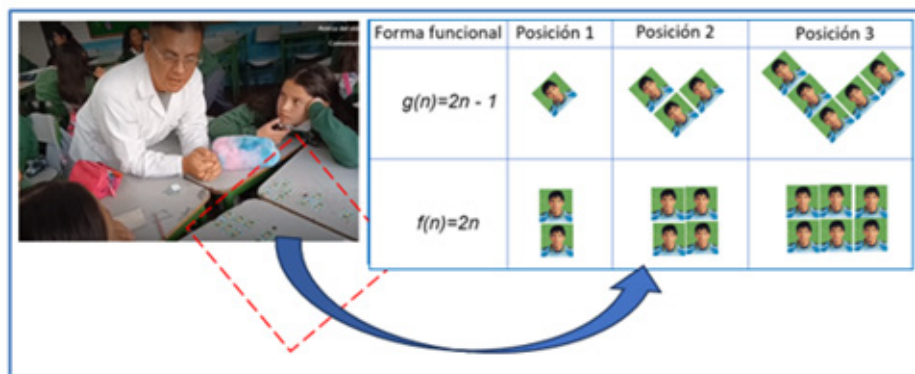
Figura 8 – Dos tipos de trabajo grupal en clase: Actividad de clase (como aproximación hacia la labor conjunta), imágenes: a, b, c y d; y actividad individualista, imágenes: e y f.



Fuente: Protocolo de fotografías de la actividad de clase de los estudiantes

En esta última tarea, las esquinas que crecen diferente, los estudiantes debían hacer el contraste de dos tipos de patrones numéricos desarrollados durante la actividad matemática, los de tipo proporcional y no proporcional (ver Figura 9).

Figura 9 – Explicación del profesor al grupo de Esther, Sheila y Katherine. Patrones numéricos de tipo proporcional ($f(n)=2n$) y no proporcional ($g(n)=2n-1$)



Fuente: Protocolo de fotografías de la actividad de clase.

Durante esta interacción social señalada, Esther recuerda para sus compañeras el patrón proporcional encontrado en una sesión anterior, lo que nosotros escribiríamos como $f(n)=2n$ (ver Transcripción 3):

Cuadro 5- Transcripción 3

L1	Profesor	¿Recuerdan este ejercicio? [señalando con su dedo índice el arreglo de fotografías de la función f].
L2	Esther	Sí.
L3	Profesor	¿Cuál era su regla de conformación?
L4	Esther	La otra vez multiplicábamos cada posición por dos, porque a cada una se le suman dos para hallar otra [enuncia la regla de conformación de la relación de proporcionalidad].
L5	Profesor	Explícame eso...
L6	Esther	Esta es la posición 3, si multiplico dos por el tres de la posición, pues me dan las seis figuritas de acá [explica la regla señalando de forma fija con su dedo índice el grupo de 6 fotografías, luego haciendo un círculo sobre él].

Fuente: Protocolo de grabaciones de clase.

Como se aprecia en L1 y L6 aparecen las matemáticas desde formas histórico-culturales de pensamiento, acción y reflexión que aparecen a través de la actividad, tocando, señalando, escribiendo, haciendo, etc. Estas no son las matemáticas de los axiomas y teoremas como cuerpo unificado, emergen a partir de los gestos y el lenguaje natural del profesor y Esther. Dadas las líneas 4 a 6, Esther muestra rasgos de un pensamiento algebraico, desde el componente de la *designación simbólica* (ver Radford (2010), características del pensamiento algebraico) usando obviamente el lenguaje natural, pero hace falta el componente analítico para ser una forma algebraica completa.

Los estudiantes se han posicionado en este momento frente a un saber cultural, una forma de matematización del mundo. Este saber histórico-cultural sobre las funciones se originó hace mucho tiempo en el seno de las matemáticas, y ahora, desde su aprendizaje en la clase, ya está instaurado en la cultura de los estudiantes, en forma de potencial que se transforma en actualidad. Pero esto ha sido posible por las condiciones establecidas por el docente en la organización social de la clase, los estudiantes junto a su profesor ahora muestran una interacción basada en acciones relacionadas con la solidaridad, la inclusión, la democracia y demás valores relacionados con la ética comunitaria, evidenciado esto en el dialogo y la participación de los estudiantes, mediante los roles asignados dentro del grupo de trabajo. Veamos esto en la siguiente interacción.

Se han formado dos subgrupos: Katherine y Marcela trabajan con el material en físico, al juntar las fotografías de las posiciones 2 y 3 e intentan armar la figura de la posición 5 (ver Figura 9, $g(n)=2n-1$); mientras Esther y Sheila leen sobre el cuestionario la pregunta y analizan el contexto grafico del problema. Acto seguido, Katherine y Esther hablan entre sí, como representates de estos subgrupos de trabajo y analizan la situación (Ver Transcripción 4).

Cuadro 6 – Transcripción 4

L1	Katherine	Déjame ver [pidiéndole la hoja a Esther para poder leer ella, observa la gráfica y el modelo construido con el material en físico para comparar lo realizado con Marcela] eh...sí [lo aprueba luego de comparar, luego devuelve la hoja a Esther].
L2	Esther	La posición número 5... ¿se forma de la posición 2 y 3...? [preguntando a sus compañeras].

L3	Katherine	A ver ¿la posición número 5? ...La posición número 5 tiene 9. <i>[ahora dirige la atención de sus compañeras hacia el arreglo de fotografías construido sobre la mesa] 2, 4, 6 ¿8? [contando con el dedo índice los objetos de la posición 3, de dos en dos; indicando sorpresa a sus compañeras y abriendo las manos].</i>
L4	Esther	¿Los primeros tres?
L5	Katherine	<i>[Luego de la sorpresa de todas las niñas al mirar la situación sobre el esquema de la mesa, ella llama al profesor] Profe... [levantando su mano derecha].</i>

Fuente: Protocolo de grabaciones de clase.

A partir de los roles establecidos dentro del grupo, el profesor ha aprovechado la situación para lograr un encuentro con el otro, mediante las diferentes perspectivas que surgen de los estudiantes, la actividad provee cierto medios semióticos y se provoca así un debate. Estas discusiones lideradas por el moderador del grupo (Esther) permiten la oportunidad para que los estudiantes experimenten la solidaridad al trabajar juntos, la inclusión al escuchar distintas voces y la participación al intervenir democráticamente y ser escuchados. Estas participaciones y divergencias se dan dentro del marco del respeto y a partir del esfuerzo por comprender las posturas del otro, mediante el esfuerzo colectivo por diferenciar las funciones de patrones, de tipo proporcional y no proporcional, este es el objeto de aprendizaje del colectivo, capturado por el sintetizador del grupo al consignar las respuestas consensuadas del grupo.

Esto ha sucedido en el encuentro colectivo de las estudiantes con este saber cultural sobre la proporcionalidad (L5-Transcripción 4), el cual genera oposición y las objeta. Pero este segmento de actividad ha surgido por el establecimiento de ciertas condiciones de trabajo del docente que ha permitido las formas de colaboración humana no alienantes, lo cual ha repercutido en la emergencia del pensamiento proporcional. En el desarrollo de esta forma de pensamiento es fundamental diferenciar lo proporcional de lo no proporcional, porque el concepto a su vez esta cargado de su negación y esto reafirma el mismo sentido de la proporcionalidad para los estudiantes, el poder establecer estas comparaciones.

La interacción social no es vista acá solamente como una forma de actividad con un fuerte sentido social en apoyo a lograr la conceptualización, también es un encuentro con el otro, desde la dimensión ética que abarca la responsabilidad, el cuidado por el otro y el compromiso por el trabajo conjunto. Dado que las formas de trabajo de algunos grupos en la clase, han evolucionado del individualismo de los sujetos, a una Actividad cooperativa como colectivo, en la cual el aprendizaje y las formas de interacción social empiezan a mostrar rasgos comunitarios.

CONCLUSIONES

Los análisis de las evidencias empíricas nos permiten sugerir una evolución de la actividad de clase desde una concepción individualista y egocentrista hacia una Actividad que empieza a dar signos de una labor conjunta. Hemos mostrado cómo los estudiantes, apoyados por el profesor, generan una interacción social cuyo motor no es el interés propio, sino unas formas de colaboración humana

menos alienantes. Esto significa que los estudiantes ofrecen sus voces, pero también encuentran otras voces, formas de hacer y pensar, una otredad que los lleva a replantear sus propias ideas. La relación con el otro va cambiando, desde una forma en la que el otro es un instrumento para avanzar en sus propias cavilaciones –una relación de tipo utilitarista–, hacia una relación que empieza a presentar características de tipo ontológico y ético. Este tipo de relación significa que la transformación histórico-cultural del individuo está siempre fundada en su relación con el otro y, principalmente, en la idea de que esta relación no es un mero acto contingente de conveniencia (no es utilitarista, no es coyuntural, no es instrumental), sino más bien un tipo de relación en el que la presencia del otro me incumbe y transforma. De aquí que podemos hablar de desarrollo de subjetividades, de hecho, Vygotsky (1994, p. 181) afirmaba que “si cambian las relaciones entre las personas, también cambiarán las ideas, las normas de comportamiento, las exigencias y los gustos”.

El análisis de las evidencias sugiere que la obra común (Hegel, 2001), expresada a través de formas de pensar proporcionalmente desde los patrones numéricos, proporcionales y no proporcionales, empieza a aparecer.

A pesar de la orientación docente en las sesiones, y de la reflexión de los mismos estudiantes, aún persisten formas alienantes de interacción humana. Sin embargo, dado el tipo de evolución de la Actividad, consideramos que hace falta más tiempo para consolidar el trabajo conjunto y lograr un cambio de consciencia en aquellos grupos de estudiantes que aún persisten con el individualismo, por encima del trabajo colectivo. En palabras de Radford (2020a), la labor conjunta es un ejercicio titánico que toma tiempo en consolidarse, en tanto que el proceso de enseñanza-aprendizaje busca ser emancipador para el sujeto, apartándose de aquellas formas de interacción social de tipo individualista predominantes en el aula de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial para el programa de formación doctoral de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, por robustecer nuestras comprensiones sobre la investigación en Educación Matemática.

REFERENCIAS

Alves Paiva, J., & Noronha, C. (2020). O entrelaçamento entre os processos de objetivação e subjetivação no Labor conjunto em uma tarefa sobre Orientação espacial para alunos do 6o ano do ensino fundamental. In L. Radford & S. Takeko Gobara (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 153–174). Editora Livraria da Física.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa RELIME, Extraordin(9)*, 267–299.

Bubnova, T. (1997). El principio ético como fundamento del dialogismo en Mijaíl Bajtín. *Escritos, Revista Del Centro de Ciencias Del Lenguaje*, 15–16, 259–273.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Batoche Books. (Original work published 1837).

Heidegger, M. (2009). *Ser y tiempo*. Madrid: Editorial Trota.

Lasprilla, A., & León, O. (2020). Elementos de un método para el estudio de aspectos éticos en la educación matemática escolar inicial. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), 129–139.

Lasprilla, A., Radford, L., & León, O. (2021). La labor conjunta en actividades de enseñanza-aprendizaje a partir del estudio de los vectores de la ética comunitaria. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura-REMATEC, Belém/PA*, 16(39), 228–245.

Lévinas, E. (2002). *Totalidad e infinito: ensayo sobre la exterioridad* (Sexta Ed.). Ediciones Sígueme.

Marx, K. (2015). *Manuscritos económico-filosóficos de 1844* (Trad. M. Vedda, F. Aren y S. Rotemberg). Ediciones Colihue SRL.

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5–30.

Moreno, R. (2023). El pensamiento proporcional y la formación de subjetividades en el aula: Una aproximación al estado del arte. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 3(3), e202313.

Piaget, J. (1978). *Psicología del niño* (Octava Ed.). Madrid, España: Morata.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.

Radford, L. (2016a). Mathematics Education as a Matter of Labor. In M.A. Peters (ed.). *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory* (pp. 1–5).

Radford, L. (2016b). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258–266.

Radford, L. (2017a). Sabery conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En D'Amore B. y Radford L. (Eds.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 95–112).

Radford, L. (2017b). Ser, Subjetividad y Alienación. En D'Amore B. y Radford L. (Eds.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 137-165).

Radford, L. (2020a). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. *REMATEC*, 15(36), 27-42.

Radford, L. (2020b). Play and the production of subjectivities in Preschool. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. Hundeland (Eds.), *Mathematics education in the early years. Results from the POEM4 conference 2018* (pp. 43-60). Springer International Publishing.

Radford, L. (2023a). *La teoría de la objetivación: Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de los Andes.

Radford, L. (2023b). Política, saber y ética: la necesidad de replantear la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 25(2), 45-68.

Radford, L. (2023c). Sujeto, Objeto, Cultura y la formación del Conocimiento. *REMATEC*, 45, 1-22.

Radford, L., & Lasprilla, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La Matematica e La Sua Didattica*, 28(1), 107-128.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In Bikner-Ahsbahr, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 157-182). New York: Springer.

Radford, L., & Silva, M. (2021). *Ética: entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Stetsenko, A., & Ho, P. C. G. (2015). The Serious Joy and the Joyful Work of Play: Children Becoming Agentive Actors in Co-Authoring Themselves and Their World Through Play. *International Journal of Early Childhood*, 47(2), 221-234.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

Vergel, R. (en prensa). Algunas notas sobre la concepción dialéctico-materialista de la categoría de sujeto. *Revista Magisterio, Número especial*.

Vergel, R., Godino, J. D., Font, V., & Pantano, Ó. L. (2021). Comparing the views of the theory of objectification and the onto-semiotic approach on the school algebra nature and learning. *Mathematics Education Research Journal*.

Vergel, R. & Miranda, I. (2020). Editorial. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), 1-13.

Vergel, R. & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Editorial UD.

Vygotsky, L. (1994). The socialist alteration of man. In R. V. D. Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 175–184). Blackwell.

Yajot, O. (1973) *Qué es el Materialismo Dialéctico*. Progreso.

COMO CITAR — APA

Vergel, R., & León, R. M. (2024). Las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional. *PARADIGMA*, XLV(Edición Temática 2), e2024004. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024004.id1577>.

COMO CITAR — ABNT

VERGEL, Rodolfo; LEÓN, Rafael Moreno. Las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLV, Edición Temática n. 2, e2024004, Nov., 2024. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024004.id1577>.

HISTÓRICO


Submetido: 20 de abril de 2024.


Aprobado: 03 de junio de 2024.

Publicado: 01 de noviembre de 2024.


EDITORAS CONVIDADAS

Claudianny Amorim Noronha 

Shirley Takeco Gobara 

Luanna Priscila da Silva Gomes 

EDITOR JEFE

Fredy E. González 

ARBITROS

Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres