Paradigma

Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
ISSN 1011-2251 ISSN 2665-0126
Volume XLV, Noviembre de 2024
Edición Temática, Número 2
doi 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024006.id1579

A objetivação de formas geométricas em processos de matematização na elaboração de simuladores com GeoGebra

João Cláudio Brandemberg[1] Ivonne C. Sánchez[2]
Luis Andrés Castillo[3]

Resumo

O artigo tem como objetivo descrever os processos de objetivação de formas geométricas manifestados em tarefas de Elaboração de Simuladores com GeoGebra por um grupo de estudantes do curso de Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagem. Especificamente, a objetivação desses conhecimentos geométricos foi evidenciada nas tarefas de matematização realizadas para simular o virabrequim de um motor de dois tempos no GeoGebra, no contexto de uma pesquisa de mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática na Universidade Federal do Pará. Este estudo teve como base teórica a Teoria da Objetivação, para proporcionar uma perspectiva que permitisse evidenciar que a objetivação do conhecimento geométrico do grupo de estudantes chega ao encontro dos saberes geométricos ao simular um virabrequim de um motor de dois tempos no GeoGebra. Os dados da pesquisa foram obtidos das gravações realizadas nas sessões de trabalho com os estudantes e os professores durante a realização das tarefas, particularmente no momento da matematização. Realizou-se uma análise multissemiótico das informações obtidas das transcrições das gravações. Os resultados concentram-se em como os estudantes utilizam meios semióticos de objetivação para expressar a representação geométrica do virabrequim.

Palavras-chave: Processos de objetivação. Meios semióticos. Matematização. Formas geométricas.

Objectification of geometric shapes in mathematization processes in the development of simulators with GeoGebra

Abstract

This paper aims to describe the objectification processes of geometric shapes manifested in activities of Simulator Development with GeoGebra by a group of students from the Integrated Degree Program in Science, Mathematics, and Language. Specifically, the objectification of these geometric knowledge was evidenced in the mathematization activities carried out to simulate the crankshaft of a two-stroke engine in GeoGebra, within the context of a master's research conducted in the Graduate Program in Science and Mathematics Education at the Federal University of Pará. This study was theoretically based on the Theory of Objectification, to provide a perspective that allowed evidencing that the objectification of the student group's geometric knowledge aligns with geometric knowledge when simulating a crankshaft of a two-stroke engine in GeoGebra. The research data were obtained from recordings made during the work sessions with the students and teachers during the activities, particularly at the moment of mathematization. A multisemiotic analysis of the information obtained from the transcriptions of the recordings was carried out. The results focus on how students use semiotic means of objectification to express the geometric representation of the crankshaft.

Keywords: Objectification processes. Semiotic means. Mathematization. Geometric shapes.

[1] Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil. E-mail: brand@ufpa.br
[2] Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil. E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com
[3] Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil. E-mail: luiscastleb@gmail.com

Objetivación de formas geométricas en procesos de matematización en el desarrollo de simuladores con GeoGebra

Resumen

Este artículo tiene como objetivo describir los procesos de objetivación de formas geométricas manifestados en actividades de Desarrollo de Simuladores con GeoGebra por un grupo de estudiantes del programa de Licenciatura Integrada en Ciencias, Matemáticas y Lenguaje. Específicamente, la objetivación de estos conocimientos geométricos se evidenció en las actividades de matematización realizadas para simular el cigüeñal de un motor de dos tiempos en GeoGebra, en el contexto de una investigación de maestría realizada en el Programa de Posgrado en Educación en Ciencias y Matemáticas en la Universidad Federal de Pará. Este estudio se basó teóricamente en la Teoría de la Objetivación, para proporcionar una perspectiva que permitiera evidenciar que la objetivación del conocimiento geométrico del grupo de estudiantes se alinea con el conocimiento geométrico al simular un cigüeñal de un motor de dos tiempos en GeoGebra. Los datos de la investigación se obtuvieron de grabaciones realizadas durante las sesiones de trabajo con los estudiantes y profesores durante las actividades, particularmente en el momento de la matematización. Se realizó un análisis multisemiótico de la información obtenida de las transcripciones de las grabaciones. Los resultados se centran en cómo los estudiantes utilizan medios semióticos de objetivación para expresar la representación geométrica del cigüeñal.
Palabras clave: Procesos de objetivación. Medios semióticos. Matematización. Formas geométricas.

INTRODUÇÃO

A aprendizagem da matemática é um fenômeno educacional cuja caracterização depende da perspectiva teórica com a qual se decide analisá-la. Uma dessas perspectivas, que teve uma grande influência na maneira de entender essa aprendizagem desde o final do século XX, foi o construtivismo (Sánchez; Brandemberg, 2019). Contudo, ao longo dos anos, novas perspectivas de aprendizagem vêm sendo desenvolvidas para responder às necessidades de integrar aspectos sociais, culturais e históricos nesse processo; entre elas está a sociocultural, que se caracteriza por considerar o conhecimento como um produto gerado por sujeitos no curso de estágios sociais que são consubstanciais na história e na cultura (Sánchez; Brandemberg, 2019). Um exemplo das perspectivas socioculturais é a Teoria da Objetivação (TO) (Radford, 2014, 2020), que, quando aplicada na educação matemática, aborda o ensino e a aprendizagem da matemática a partir de uma perspectiva histórico-cultural.

A TO, além de promover o desenvolvimento de relações humanas, é baseada em uma concepção social na qual os sujeitos, envolvidos em uma atividade de ensino-aprendizagem, procuram desenvolver habilidades intelectuais enquanto aprendem a se relacionar com os outros. A TO defende também uma concepção não mentalista da aprendizagem, segundo a qual a aprendizagem pode ser observada – pois emerge através de gestos, movimentos corporais, tarefas perceptivas, artefatos e signos utilizados pelos aprendizes –; ela não é algo inobservável, que só acontece no plano mental.

Na perspectiva da TO, o pensamento é enquadrado em significados culturais que orientam a atividade dos sujeitos e lhes conferem uma certa forma. Essa forma reflete na maneira de demonstrar, argumentar e resolver problemas, pois possui significados histórico-culturais que a precedem. Ou seja, essa forma de atividade é apoiada por uma superestrutura simbólica que tem sido chamada de meio semiótico. Esses meios de comunicação ajudam a entender as concepções de objetos matemáticos, suas existências e sua relação com o mundo concreto, além dos padrões de processos sociais de produção de significados culturais (Radford, 2006).

Recentemente, a perspectiva sociocultural tem animado o debate sobre o papel desempenhado pelo trabalho humano no desenvolvimento de formas histórico-culturais de produzir conhecimento matemático, independentemente das condições institucionais que cercam a atividade. Nesse sentido, tarefas educativas, formais e não formais, como a Elaboração de Simuladores com GeoGebra (ESG), são consideradas uma instância social de encontro com o conhecimento matemático, com posicionamento crítico diante dos sujeitos envolvidos nessas tarefas (Prieto; Ortiz, 2019) e como cenário para promover formas de colaboração humana em ESG (Castillo; Sánchez, 2020; Gutiérrez; Prieto; Sánchez, 2022; Prieto; Castillo; Márquez, 2020; Sánchez; Brandemberg, 2019; Sánchez; Castillo, 2022).

Embora a alienação nunca tenha sido o objetivo da ESG, é considerado importante evitar essa condição na medida do possível. Para isso, é necessário realizar estudos que permitam ampliar a compreensão das implicações da ESG na aprendizagem geométrica dos estudantes que participam em processos de ensino de Geometria. Assumir uma perspectiva sociocultural para isso envolve prestar especial atenção ao papel da cultura na produção do conhecimento matemático escolar, ou seja, na maneira como os sujeitos envolvidos na atividade pensam e trabalham juntos em relação ao conhecimento matemático, utilizando uma série de meios semióticos organizados na cultura escolar. Essa perspectiva permitirá expandir nosso entendimento das implicações da ESG na aprendizagem geométrica dos alunos que participam da atividade.

O objetivo deste trabalho é descrever a objetivação de formas geométricas no processo de matematização na ESG realizado por um grupo de alunos de graduação em conjunto com seus professores. Para conseguir esse objetivo, foi conduzido um estudo qualitativo, seguindo os princípios de Bogdan e Biklen (1994, 2007), com abordagem descritiva e de campo, conforme Fiorentini e Lorenzato (2012). Esta metodologia foi escolhida por sua capacidade de capturar nuances, experiências e significados nos processos educacionais relacionados à elaboração de simuladores com o GeoGebra. O estudo focou no contexto e nos participantes, selecionando estrategicamente alunos de graduação e professores envolvidos na criação de simuladores com o GeoGebra, considerando as interações na sala de aula e no ambiente digital onde o software foi utilizado.

Nossa intenção é contribuir com informações que sejam benéficas para professores que estão realizando a ESG como uma oportunidade para promover processos de ensino-aprendizagem de matemática.

REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta pesquisa, para interpretar a aprendizagem geométrica produzida nas tarefas de matematização, realizadas por alunos de graduação e professores que participaram no estudo, foi assumida a TO de Radford (2006, 2014, 2020). Esse autor argumenta que o processo de aprender não consiste em "construir ou reconstruir o conhecimento senão de dar sentido aos objetos conceituais que o estudante encontra em sua cultura" (Radford, 2006, p. 113). Portanto, a aprendizagem é um processo social, sensível e material, que na TO é considerado como um processo de objetivação, no qual o sujeito que aprende Matemática obtém uma compreensão crítica das noções aprendidas, "atribuindo significados aos objetos culturais matemáticos e sua lógica cultural" (Radford, 2011, p. 45).

Em oposição ao paradigma individualista (Radford, 2018a), a TO propõe uma reconceitualização da aprendizagem matemática, não como resultado da ação do sujeito que constrói o conhecimento, mas como "um processo coletivo, cultural e historicamente situado que destaca o papel do serviço social humano, do corpo, das emoções e do mundo material" (Radford, 2021, p. 113). Na perspectiva desse autor, o aprendizado está relacionado não apenas ao conhecimento matemático escolar mas também àqueles seres que se transformam e se reafirmam como sujeitos da educação na busca desse conhecimento. Para o estudo da aprendizagem matemática, na TO são definidas duas categorias conceituais: Objetivação e Subjetivação. A primeira refere-se às formas como o conhecimento aparece na aprendizagem, e na segunda a ênfase está colocada no sujeito que faz parte da atividade e em suas formas de colaboração. Neste estudo, referimo-nos à aprendizagem matemática em termos de processos de objetivação.

Conforme Radford (2018b), a experiência humana das pessoas, desde seu nascimento, coloca-as em contato com situações, entidades ou coisas que lhes são estranhas e desconhecidas, mas que fazem parte do repertório dos sistemas de expressão, ação e pensamento, constituídos histórica e culturalmente. A objetivação é justamente esse processo social, corporal, material e simbólico que implica

> tornar-se progressiva e criticamente consciente de uma forma codificada de pensamento e ação, algo que gradualmente percebemos e ao mesmo tempo adquire significado. Os processos objetivos são aqueles age para nos dar perceber significativamente que algo é revelado à consciência através da nossa atividade corporal, sensorial e de artefatos (Radford, 2017b, p. 121).

A maneira de entender a objetivação, proposta por Radford na sua TO, revela dois elementos que poderiam ser úteis para compreender como a aprendizagem geométrica é produzida durante a ESG. Por um lado, a objetivação é um processo individual, emocional e afetivo de conscientização sobre algo que constitui conhecimento. Portanto, a consciência é um reflexo da forma como cada indivíduo reconhece o mundo que transcende e se orienta/critica dentro dela (subjetivação), em uma dinâmica de encontro dialético com as formas codificadas de reflexão, ação e pensamento.

Essa consciência não é contemplativa, porque, através da consciência individual, as sensibilidades culturais são formadas para compreender, objetivar e sentir os outros, o mundo e a si mesmo, assim como para refletir sobre essas instâncias e, também, discordar delas (Radford, 2017b). Por outro lado, para produzir a consciência, é necessário que os sujeitos se envolvam em determinada atividade; no caso dos estudantes que participam das tarefas de aprendizagem da Matemática, suas reflexões e ações constituem formas de instanciação do conhecimento matemático, que, a princípio, podem nos parecer estranhos, como uma espécie de alteridade.

Durante os processos de objetivação nas tarefas de ensino e aprendizagem, alunos e professores utilizam seu corpo, desenvolvem gestos, apelam a signos e se valem de artefatos para fazer os objetos aparecerem (Sánchez; Brandemberg, 2019; Sánchez; Prieto, 2019a, 2019b; Sánchez; Prieto; Gutiérrez; Díaz-Urdaneta, 2020) e alcançar formas relativamente estáveis de consciência sobre os significados culturais com os quais tais objetos foram dotados, já que eles não podem ser usados quando totalmente expostos no mundo concreto. Esses recursos que são usados na atividade matemática são chamados de Meios Semióticos de Objetivação, assim definidos: "*These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities*" (Radford, 2003, p. 41).

É através da mobilização de Meios Semióticos de Objetivação na atividade matemática escolar que podemos ter acesso aos objetos matemáticos, permitindo que eles estejam presentes, dando-lhes uma certa forma de conhecimento tangível e corpóreo (Radford, 2003). Arzarello (2006) afirma que na pesquisa é necessário detectar e analisar como surgem e evoluem os meios semióticos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Na TO, o que torna possível a aprendizagem é uma atividade humana, sensorial e prática. Nesse sentido, o conceito de atividade proposto na TO abrange muito mais do que pessoas interagindo umas com as outras. É mais do que um meio de interagir com pessoas e artefatos. É um modo de vida, algo orgânico e sistêmico, um acontecimento criado por uma busca comum – por exemplo: uma resposta para uma questão de pesquisa realizada junto com outras pessoas; uma solução para um problema proposto em uma experiência didática; uma investigação cognitiva, emocional e ética (Radford, 2017a). Radford (2016), para evitar confusão com outros significados de atividade, decidiu designá-la como *Labor Conjunto* (*Joint Labor*), na TO para a atividade.

Radford coloca o *Labor Conjunto* como a principal categoria da TO, baseado nas ideias de Spinoza, para quem "os seres humanos são considerados parte da natureza: são seres naturais, seres de necessidades que encontram sua satisfação nos objetos fora de si mesmos" (Spinoza, 1989 *apud* Radford, 2018b, p. 12, tradução nossa). Para atender às suas necessidades – sobrevivência, aprendizagem e outras – criadas pela sociedade, o ser humano se lança ativamente para o mundo. Durante essa produção, os sujeitos inserem-se no mundo social e ao mesmo tempo produzem sua própria existência.

Colocar o *Labor Conjunto* como categoria ontológica e epistemológica na TO leva a considerar a atividade em sala de aula como unidade de análise (Radford, 2018a). Contudo, não podemos descartar o papel da linguagem, dos sinais, dos artefatos e do corpo nos processos de objetivação e o fato de que na TO são entendidos não como mediadores, mas como parte da atividade e do pensamento dos sujeitos.

Considerando um ambiente escolar, esse esforço comum é entendido justamente como aquilo que professores e alunos produzem juntos em sala de aula, trabalhando lado a lado (por exemplo, uma ou mais formas de apresentar e/ou resolver um problema, demonstrar etc.) (Radford, 2020). Hegel (2001) refere-se a essa busca através da expressão "trabalho comum" – com base nisso, Radford (2018b) estabelece o seguinte:

> É na produção desse trabalho comum que ocorre o encontro dos alunos com o conhecimento cultural e histórico. Esse encontro consiste em uma consciência progressiva, material e sensível do conhecimento, de modo que o aprendizado é nada mais nada menos do que a refração na consciência do aluno desse trabalho comum que ele ajudou a fazer aparecer na sala de aula (Radford, 2018b, p. 14, tradução nossa).

Tendo em conta as ideias teóricas anteriores, definimos a ESG como o contexto em que ocorrem diversas tarefas criadas para promover a aprendizagem matemática, especificamente a aprendizagem geométrica. Os envolvidos que participam dessa atividade são motivados pela produção de desenhos dinâmicos com o *software* GeoGebra. Um desenho dinâmico é um desenho geométrico produzido por meio de *software* dinâmico, no qual são preservadas as propriedades espaciais impostas quando é movido ou arrastado por algum dos seus elementos livres (Laborde, 1997).

Para produzir os desenhos dinâmicos, alunos e professores desenvolvem uma sequência de tarefas (Castillo; Prieto; Sánchez; Gutiérrez, 2019; Gutiérrez; Castillo, 2020; Sánchez; Castillo, 2019, 2022; Sánchez; Sánchez, 2020) na qual são postos em jogo diferentes tipos de trabalho conjunto. Segundo Rubio, Prieto e Ortiz (2016), o primeiro conjunto de tarefas gera como produto a tradução, em termos geométricos, do esboço de alguma das partes que compõem o fenômeno da simulação. Nesse caso, o trabalho conjunto manifesta-se no modelo matemático produzido durante a atividade e na sequência de construções com GeoGebra que servem como base para as tarefas restantes. O segundo conjunto de tarefas resulta na produção do desenho dinâmico correspondente ao modelo matemático produzido anteriormente.

Segundo Gutiérrez, Prieto e Ortiz (2017), "matematizar" é traduzir um modelo real em termos matemáticos para chegar a um modelo útil para resolver problemas. Nesse processo, as interpretações, descrições, conjecturas, explicações e justificativas que levam ao modelo são gradualmente elaboradas de acordo com o nível matemático. No desenvolvimento de um simulador com GeoGebra, a matematização é caracterizada por uma mudança na interpretação do modelo real, que começa a ser traduzido em termos geométricos. Essa mudança é influenciada tanto pelo conhecimento matemático dos sujeitos envolvidos quanto pelas ferramentas do GeoGebra.

Neste estudo, focaremos nossa atenção na matematização realizada por alguns alunos e professores da graduação para representar um setor circular no GeoGebra.

Assim, durante essas tarefas, alunos e professores: 1) selecionam a ferramenta ou funcionalidade dinâmica do GeoGebra que permite construir o objeto geométrico da primeira tarefa da sequência (Castillo; Prieto, 2018; Sánchez; Castillo, 2019); 2) identificam na visualização gráfica a presença ou ausência de cada elemento exigido pela ferramenta ou funcionalidade do *software* para construir o objeto geométrico em questão; 3) constroem os elementos que faltam aplicando uma determinada estratégia; 4) aplicam a ferramenta ou funcionalidade do GeoGebra; 5) validam a consistência da construção através da prova de arrasto; e 6) aplicam novamente as ações anteriores para outros objetos identificados no esboço, até que o desenho dinâmico seja produzido.

É durante o desenvolvimento dessas tarefas que surgem os processos de objetivação dos objetos geométricos utilizados para representar o setor circular, com especial interesse no meio semiótico usado para expressar as ideias geométricas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para responder à questão desta pesquisa, optamos por conduzir um estudo qualitativo, seguindo os princípios delineados por Bogdan e Biklen (1994, 2007), com uma abordagem descritiva e de campo conforme proposto por Fiorentini e Lorenzato (2012). Essa estratégia para coletar informação foi assumida devido à sua capacidade de capturar nuances, experiências e significados subjacentes aos processos educacionais envolvidos na elaboração de simuladores com o GeoGebra.

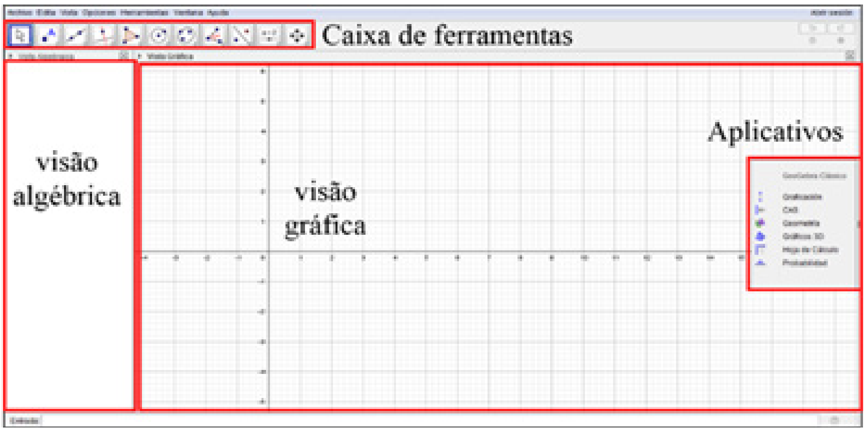
Na condução deste estudo, foi dada atenção especial ao contexto e aos participantes da investigação, que foram estrategicamente selecionados: alunos de graduação e professores envolvidos nas tarefas de elaboração de simuladores com o GeoGebra. No contexto foram consideradas as interações dentro da sala de aula bem como o ambiente digital onde ocorreu o uso do *software* GeoGebra.

Participantes e contexto

Os participantes desta pesquisa foram 14 alunos de licenciatura do Curso Integrado de Ciências, Matemática e Linguagens, do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA), que estavam matriculados na disciplina Tendências de Pesquisa em Ciências, Matemática e Letras I durante o terceiro período. Em algumas aulas dessa disciplina, os estudantes participaram da atividade chamada “Construir desenhos dinâmicos com o GeoGebra”, realizada nos meses de maio e junho do ano de 2019. Para preservar o anonimato dos participantes da pesquisa, os estudantes serão identificados pela sigla E, seguida de um número, e os professores participantes serão identificados pela sigla P, também seguida de um número.

Durante essas reuniões, foram realizadas quatro tarefas. Na primeira sessão, o objetivo foi familiarizar os alunos com a atividade de simulação com o GeoGebra. Isso envolveu a apresentação dos processos matemáticos associados à resolução de algum fenômeno, ou seja, explicar cada etapa pela qual os alunos passariam ao desenvolver o simulador de computador. Em seguida, foi feita uma primeira aproximação ao *software* GeoGebra, em que foram destacados os pontos mais importantes em relação a ele, como o criador do *software*, a comunidade que o acompanha e os materiais disponíveis para uso em sala de aula. A seguir, foram apresentadas aos estudantes a interface do GeoGebra, as áreas que a compõem e as caixas de ferramentas de construção que o *software* disponibiliza para os usuários (ver Figura 1).

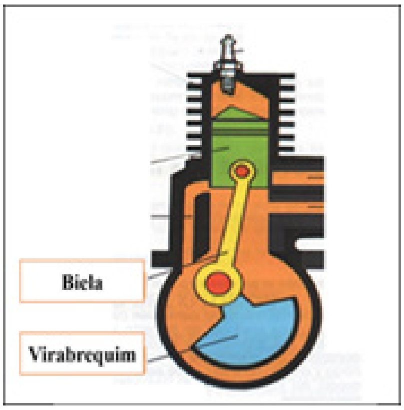
Figura 1 - Interface do GeoGebra



Fonte: Sánchez (2020)

Na segunda e na terceira sessões de trabalho, os participantes estavam diretamente dedicados ao desenvolvimento de simuladores com o GeoGebra. Devido a restrições de tempo, o fenômeno a ser simulado foi selecionado pelo responsável da oficina. O fenômeno escolhido foi um motor de dois tempos. Após receberem todas as informações sobre o fenômeno, os estudantes simularam o virabrequim[4] na visualização gráfica do GeoGebra (ver Figura 2).

Figura 2 - Imagem de referência do fenômeno



Fonte: Sánchez (2020)

Produção de dados

Os dados do estudo foram obtidos a partir das discussões geradas pelos participantes durante a construção do virabrequim no GeoGebra. Essas discussões foram gravadas com uma câmera de vídeo, com o intuito de capturar a realidade natural e complexa do trabalho conjunto realizado pelos participantes, conforme descrito nas seções anteriores, sobre a matematização do virabrequim. No vídeo, é possível observar os meios semióticos que os participantes utilizam para comunicar suas ideias. O vídeo foi transcrito na íntegra em formato Word, utilizando um instrumento semelhante ao mostrado no Quadro 1, no qual é exemplificada a forma como as informações dos vídeos das sessões de trabalho foram transcritas.

[4] O virabrequim é projetado com uma série de manivelas, ou "braços", que estão conectados aos pistões por meio de bielas. À medida que os pistões se movem para cima e para baixo nos cilindros, as bielas transferem esse movimento para o virabrequim, fazendo-o girar.

Quadro 1 - Instrumento para transcrição das seções

Momento. N.º: **Número do vídeo:** **Linhas: (1-8)** **Discussão:**	
Linha	**Conteúdo da transcrição**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Fonte: Sánchez (2020)

ANÁLISES

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos a partir da análise multissemiótico, isto é uma análise que considera diversos elementos, como imagens, ícones, gestos e desenhos em sua constituição realizada nos dados da pesquisa para descrever a aprendizagem geométrica que surge durante a simulação de um motor de dois tempos com o GeoGebra, especificamente na matematização do virabrequim. Para tal descrição, era essencial considerar os meios semióticos de objetivação (fala, linguagem corporal, gestos, desenhos etc.) usados pelos estudantes de uma turma da licenciatura integrada Ciências, Matemática e Linguagens para comunicar suas ideias geométricas.

Os resultados foram estruturados pelas duas tarefas principais que os alunos realizaram – matematização e trabalho matemático. Em cada uma dessas subseções, foram detalhados os nós semióticos, definidos como partes da atividade multimodal dos alunos em que diferentes recursos semióticos operam de forma crucial na produção de significado, esses recursos semióticos operam em sincronia e de forma crucial na produção de significado (Radford, 2023; Radford *et al.,* 2013), que surgiram na discussão entre alunos e professores – esses nós estão agrupados em torno das ideias geométricas que surgiram na discussão. No total, quatro nós semióticos foram reconhecidos durante a matematização e três nós semióticos, durante o trabalho matemático.

Matematização

Nessa primeira atividade de elaboração de simuladores com o GeoGebra, identificaram-se quatro nós semióticos que correspondem aos diferentes objetos geométricos que surgiram durante o trabalho conjunto.

Nó 1. A ideia de setor circular

Nesse primeiro momento, o nó é dividido em duas partes. Na primeira parte, após os participantes identificarem os objetos geométricos no desenho do virabrequim, ocorreu uma discussão sobre esses objetos identificados e sua ordem de construção no GeoGebra. A discussão inicia-se quando o Professor 1 solicita a E7 que explique aos colegas quais são os objetos geométricos que ele identificou no desenho.

E7 utiliza seu discurso oral de forma coordenada com gestos, apontando que, na parte inferior do esboço, identificou um círculo e, em seguida, no topo, um triângulo. Seu discurso é interrompido por E3, que indica verbalmente que a parte que E7 apontou para representar o círculo, na verdade, é um trapézio. No entanto, E7 opta por continuar sua explicação, comunicando que o que resta do esboço pode ser representado por um retângulo e um círculo.

61 Professor 1: aponte cada objeto geométrico que você reconheceu no desenho.

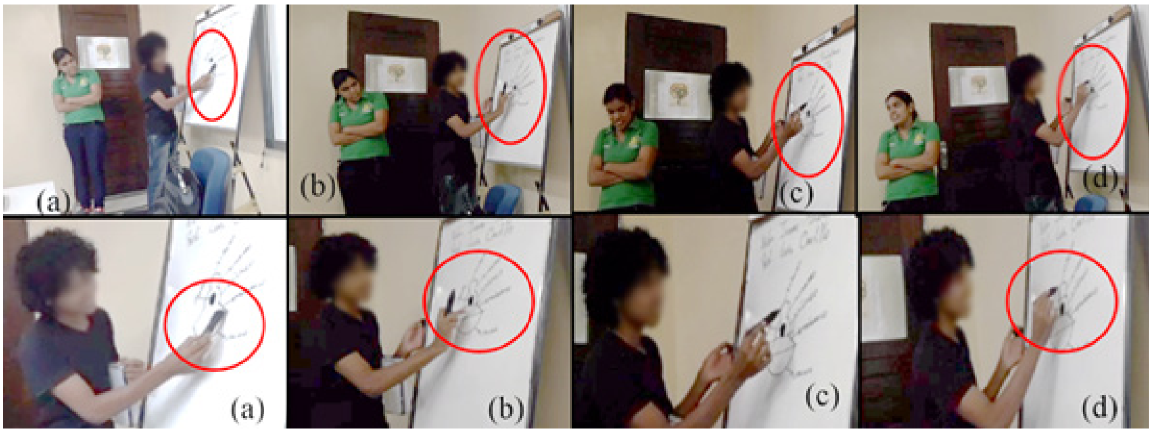
62 E7: Daqui para baixo [indica uma parte específica do desenho (Figura 3a)] é o círculo. Esta parte daqui [aponta para a parte do meio do desenho (Figura 3b)] é o triângulo.

63 E7: É trapézio [refere-se ao objeto indicado acima].

64 E7: Acima está o retângulo e o círculo (Figuras 3c e 3d).

A Figura 3 apresenta o aluno E7 explicando o que identificou no esboço.

Figura 3 - E7 explicando os objetos geométricos que identificou no esboço



Fonte: elaboração própria, realizada em 2020

Para chegar a um acordo com os alunos participantes na atividade sobre quais objetos serão representados no GeoGebra, o Professor 1 inicia uma discussão com eles sobre a parte inferior do desenho. O docente coordena suas palavras e gestos para lhes perguntar se concordam em representar a parte indicada como um círculo (apontando com o dedo indicador). Em resposta à pergunta, E3 diz que, para ele, pode ser representada como um setor circular.

Em seguida, E3 aproxima-se do quadro em que o desenho do virabrequim é feito e utiliza fala e gestos coordenados para indicar os objetos geométricos que reconheceu no esboço. Como existem algumas diferenças entre os objetos geométricos identificados, o Professor 1 propõe uma discussão sobre tais objetos e busca chegar a um acordo sobre sua representação no GeoGebra.

65 Professor 1: A seguir, discutiremos sobre os objetos geométricos que identificaram. Ele [Aluno 7] explicou que isso [aponta para o final do desenho (ver Figura 4a)] é um círculo, alguém concorda com ele?

66 E3: Não, para mim é um setor circular.

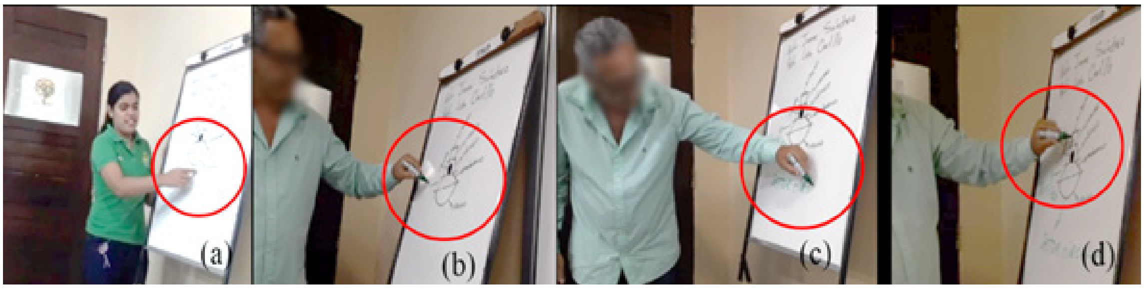
67 E3: Para você é um sector circular.

68 E3: Na minha visão, vejo um setor circular, um trapézio, depois um círculo, se alguém fizer a projeção, um quadrado e um círculo lá em cima [desenhe o círculo no desenho (ver Figuras 4b, 4c e 4d)].

69 Professor 1: Agora vamos falar sobre as diferentes figuras geométricas que E3 e E7 identificaram sobre o desenho. Vamos começar com o triângulo, como está sua representação gráfica? Desenhe um triângulo [peça para E7 desenhá-lo].

A Figura 4 mostra as ações ocorridas durante a discussão apresentada.

Figura 4 - E3 explicando os objetos geométricos que identificou sobre o esboço



Fonte: elaboração própria, realizada em 2020

Na segunda parte desse nó, o trabalho conjunto é orientado a considerar o setor de ciclismo como a melhor opção para representar a parte inferior do desenho do virabrequim. Para fazer isso, o Professor 1 argumenta em seu discurso que seria mais fácil usar o setor de ciclismo, pois teriam que construir apenas um único objeto geométrico, enquanto com os outros precisariam de mais de um.

O Professor 2 apoia a ideia do Professor 1, comentando que uma coisa importante na simulação é representar o fenômeno com o menor número possível de objetos geométricos. Essa reflexão ajuda os alunos a tomarem consciência disso e decidirem usar o setor circular para representar essa parte do virabrequim.

96 Professor 1: Agora, esta parte de baixo [aponta para uma parte do desenho], podemos construi-la [no GeoGebra] com um setor circular, portanto, apenas precisamos desenhar um único objeto geométrico e não dois para poder representar essa parte.

97 Professor 2: Queremos representar esta peça com a menor quantidade de objetos geométricos, por isso será um pouco mais fácil representá-la.

98 Professor 2: Em seguida, representaremos um setor circular, que seria um único objeto geométrico.

99 Professor 1: Então, todos concordamos em usar o setor circular para representar essa parte da peça?

100 Sim, nós concordamos.

Nó 2. A ideia de círculo

O trabalho continua, e a discussão, até o momento, gira em torno da ideia de um círculo e da representação desse objeto geométrico em um plano de duas dimensões e três dimensões. O Professor 1, por meio do discurso oral, reconhece que, devido à maneira como uma grande parte do esboço pode ser representada usando um círculo, é necessário que todos os alunos concordem com seus outros dois parceiros que já participaram. Para fazer isso, o Professor 1 pergunta aos alunos se essa parte do esboço pode ser representada como um círculo, para que eles associem uma parte da forma do esboço à forma do círculo.

No começo, todos pareciam concordar; no entanto, a participação de E3 deixa clara a dúvida que ele tem sobre a representação geométrica de dois objetos geométricos, referindo-se a que parte do esboço pode ser desenhada como uma esfera, porque está cheia, e não como um círculo. Todos na sala compreendem a confusão que E3 apresenta naquele momento, e é a participação de E2 que, através de seu discurso oral, faz com que E3 tome consciência de que os objetos geométricos que estão sendo usados para representar o virabrequim estão no plano. E2 é mais específico, mesmo quando comunica que são necessários dois círculos para representar essa parte do virabrequim.

71 Professor 1: Se continuarmos subindo no desenho, o que se segue é um círculo [Figura 5a].

71 E4: sim.

73 Professor 1: Todos nós concordamos?

74 Todos: dá certo.

75 E3: na verdade, essa parte preta pode ser uma esfera porque está cheia. [indicar com o dedo a forma da esfera no ar, Figura 5b]

76 E2: não, não é uma esfera porque estamos com figuras planas. É um círculo e um círculo.

77 E3: mmm, é verdade, você está certo.

78 Professor 1: É verdade, então teremos que representar dois círculos. Se continuarmos com o desenho, o E3 disse que poderia ser representado com um quadrado. Se olharmos novamente para a imagem de referência, ela pode ser um quadrado ou um retângulo.

A Figura 5 ilustra o que ocorreu no diálogo que viemos de apresentar.

Figura 5 - Discutir o uso do círculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho

Fonte: elaboração própria, realizada em 2020

Nó 3. A ideia do retângulo

Nesse momento da discussão, o trabalho é direcionado ao reconhecimento do retângulo no esboço. Contudo, o desenho feito no quadro não foi muito útil para indicar qual figura geométrica poderia ser usada, se o retângulo ou um quadrado, de modo que o Professor 1 pergunta aos outros alunos qual deve ser o objeto que deve ser representado na figura. E5 responde imediatamente – usando um discurso oral – que, para ele, é um retângulo, pois, olhando a imagem de referência (e não o esboço feito), dois dos lados são mais longos que os outros dois.

A explicação de E5 parece ser suficiente para que seus pares tomem consciência dessa identificação de um dos elementos que define um retângulo e, portanto, é a figura que deve ser representada. Quando E8 participa da discussão, concorda com E5 sobre representar essa parte do esboço com um retângulo.

78 Professor 1: Se olharmos novamente para a imagem de referência, ela pode ser um quadrado ou um retângulo.

79 E5: Eu acho que é um retângulo e não um quadrado.

80 Professor 1: Por que você acha que é um retângulo?

81 E5: O quadrado tem todos os seus lados iguais, enquanto o retângulo tem apenas os lados opostos. Se olharmos para a imagem de referência, existem dois lados um pouco mais longos que os outros dois, então é um retângulo.

82 E6: É verdade, apenas que o desenho não pode ser visto bem por que é muito pequeno, mas se vemos a imagem de referência, é um retângulo [o que temos que construir].

83 Professor 1: Então, ficamos com [construir] um retângulo.

84 Todos: sim.

Nó 4. A ideia do semicírculo

Nessa última parte do trabalho conjunto, é direcionado o reconhecimento do semicírculo como a opção mais relevante para representar o topo do desenho. Isso, levando em consideração a forma curva do esboço na parte superior e a representação geométrica do semicírculo no plano. A discussão começa quando E2 comenta que observa que essa parte pode ser representada como um círculo e que está por trás da forma retangular que pode ser vista no desenho.

A dúvida por parte do Professor 1 faz com que o aluno se levante e desenhe no quadro o círculo que está observando para representar essa parte do virabrequim. Ao observar o desenho feito pelo aluno, o Professor 1 concorda que ele pode ser representado como esse objeto geométrico. No entanto, ele pede aos alunos que observem apenas a parte que foi desenhada no desenho. O objetivo disso é que os alunos tenham consciência de que, se apenas a parte que foi desenhada for levada em consideração, ela poderá ser representada como um semicírculo, pois sua representação gráfica é muito semelhante. A reflexão feita pelo Professor 1 ajuda os alunos a alcançarem um certo grau de consciência e decidirem construir um semicírculo.

85 Professor 1: Falta a última parte do desenho [Ele aponta o quadro-negro com as mãos, Figura 6a].

86 E2: Eu vejo um círculo atrás do retângulo.

87 Professor 1: um círculo?

88 E2: sim, eu vejo um círculo sobreposto aqui [E2 desenha o círculo acima do retângulo, Figura 6b].

89 Professor 1: É verdade, mas, se olharmos para a parte que só é vista no desenho, podemos representá-la com um semicírculo [aponta o dedo indicador, Figura 6c], lembra-se?

90 E3: sim.

91 Professor 1: Então podemos construir esta parte [aponta para uma parte do novo desenho] com um semicírculo e não com um círculo.

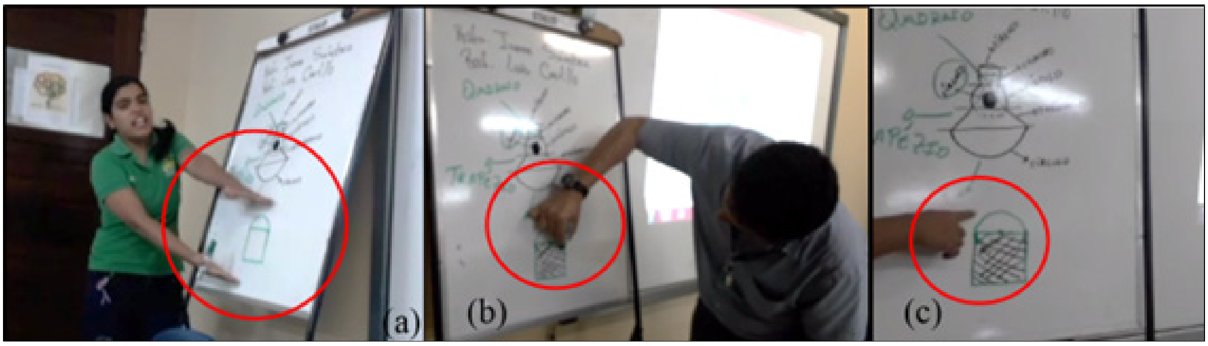
92 E2: É por isso que eu disse um círculo, porque se você sobrepuser [o retângulo sobre o círculo] a mesma figura será observada.

93 Professor 1: É verdade, mas a técnica de construção dos dois objetos não é a mesma. Existe uma diferença na técnica de construção entre um círculo e um semicírculo. Então, construímos um círculo ou um semicírculo?

94 E3 e E8: semicírculo.

Mostramos na Figura 6 as ações que permearam a discussão apresentada.

Figura 6 - Discutir o uso do semicírculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho



Fonte: elaboração própria, realizada em 2020

DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Nesta pesquisa, apoiamos a perspectiva histórico-cultural de aprendizagem da matemática. A TO explica os processos de objetivação em torno da noção do setor circular, mobilizados por estudantes e professores de matemática durante a construção de um virabrequim com o GeoGebra. Através de uma análise multissemiótico, conseguimos identificar alguns nós semióticos que nos fornecem informações sobre tais processos de objetivação do conhecimento geométrico que ocorreram nas tarefas de trabalho matemático utilizando GeoGebra. Essas descobertas estão relacionadas à atividade semiótica demonstrada.

A atividade semiótica exibida

Os resultados revelaram a variedade de signos (palavras, gestos, desenhos) e artefatos (virabrequim, lápis, papel, quadro) que compõem os diferentes nós semióticos identificados nas tarefas de matematização. Em relação aos gestos e desenhos, identificamos que esses recursos desempenhavam um importante papel mediador nos processos de objetivação, embora ocorressem de forma sincronizada com o discurso oral para revelar as ideias geométricas durante a atividade de matematização e as ideias geométricas implícitas na representação das formas do virabrequim usadas pelos estudantes. O conjunto de signos e suas relações em cada momento da discussão são exemplos do que Arzarello (2006) chama de Pacote Semiótico (*Semiotic Bundle*). No âmbito da atividade semiótica utilizada nos nós semióticos, os gestos foram utilizados pelos estudantes e pelos professores tanto para indicar os objetos geométricos necessários para representar o virabrequim no GeoGebra quanto para recriar certos movimentos dele.

Meio semiótico cinestésico

Os sinais emitidos por alunos e professores visam mostrar o objeto geométrico ao qual se referem. Essa sinalização pode ser para indicar a localização no desenho de algum objeto geométrico, alguma ferramenta do GeoGebra ou algo escrito no quadro. Também pode indicar alguma parte do fenômeno a simular. Ao longo das evidências coletadas, os resultados mostram que esse é um dos meios semióticos mais utilizados durante a matematização. O meio semiótico dos sinais foi utilizado para indicar que, para representar o virabrequim, era necessário decompô-lo em diversas formas geométricas.

Os gestos que representam movimentos no ar ou em alguma superfície – no papel, no quadro ou no GeoGebra – também foram usados por professores e alunos. Esse deslocamento estava relacionado à forma de algum objeto geométrico, como foi no caso dos professores, que usaram gestos com as mãos para indicar o movimento circular do virabrequim e a direção de uma reta perpendicular.

As escritas e os desenhos produzidos por alunos e professores durante as tarefas de matematização foram outro meio semiótico. Isso permite deixar um registro do que é considerado relevante durante o desenvolvimento da atividade.

Desenhos feitos por alunos e professores também são considerados meios semióticos de objetivação, na medida em que permitem funcionar como representação de objetos geométricos, relações geométricas, entre outros. Seu uso faz possível trazer para o plano material o que não pode ser expresso com palavras ou gestos e que se deseja mostrar aos outros participantes da atividade.

Meios semióticos linguísticos

Algumas das expressões técnicas linguísticas, utilizadas por alunos e professores para complementar e sincronizar gestos espaciais, foram: “este”, “lá” ou “aqui”. Os estudantes usaram “isto” para indicar um objeto geométrico específico que está desenhado no quadro. Além disso, “aqui” foi usado para indicar a localização de algum objeto geométrico, como, por exemplo, a localização do centro e das extremidades do setor circular, e todas as figuras geométricas identificadas pelos estudantes no desenho no quadro.

Meios semióticos físicos e tecnológicos

Durante as tarefas de matematização, alunos e professores usaram o quadro para fazer o desenho referente ao setor circular e às etapas da técnica utilizada. Além disso, também utilizaram o GeoGebra como recurso tecnológico para representar os objetos geométricos identificados.

Esse tipo de meio semiótico identificado em nossas análises corresponde àquelas relatadas em outras pesquisas. Primeiramente, McNeill (1992) caracteriza o uso das mãos (acompanhado por um lápis ou não) para indicar ou apontar qualquer parte do esboço, localizar pontos, linhas, curvas ou ângulos no desenho à mão livre e para simular o movimento de algumas partes do fenômeno, em duas categorias chamadas gestos icônicos e gestos dêiticos. Seguindo esse autor, podemos concluir que a dimensão icônica do trabalho conjunto esteve presente, pois, para alunos e professores, alguns gestos eram visualmente semelhantes às entidades que pretendiam descrever. Especificamente, destacamos uma cena do primeiro nó semiótico quando a professora faz um movimento da sua mão em alusão à transformação de rotação.

Outra dimensão identificada é a dêitica, que se refere à maneira pela qual os sujeitos indicam um objeto geométrico específico (ou alguns de seus aspectos característicos) representado no espaço do quadro. Sobre essa última categoria, poderíamos observá-la durante o nó 2, quando os estudantes apontaram no quadro as linhas e os pontos desenhados. Ambas as dimensões foram relatadas nos estudos de Gómez (2013) e Pantano (2014), embora com nomes diferentes. No caso de Gómez, ele as inclui em uma categoria chamada sinais cinestésicos. Por outro lado, Pantano é mais específico ao se referir a eles como sinais de dedo ou lápis.

Os desenhos também foram recorrentes durante a construção do setor circular. Segundo Laborde (1997), a interpretação de desenhos em geometria é uma prática que favorece o reconhecimento das propriedades espaciais associadas com as propriedades geométricas do objeto que o desenho tenta modelar. Em nossa pesquisa, constatamos que os professores fizeram grandes esforços para orientar a discussão na direção dos pontos de encontro entre o visual e o teórico, garantindo que cada toque que compõe o desenho signifique uma certa qualidade de um objeto geométrico.

Ressaltamos que, em pesquisas anteriores focadas na matematização em tarefas ESG (Sánchez; Brandemberg, 2019; Sánchez; Brandemberg; Castillo, 2020; Sánchez; Prieto, 2019b), tem sido evidente o modo como o uso consciente e crítico desses meios semióticos de objetivação por aqueles envolvidos em ESG dá conta das formas de produção do conhecimento geométrico, isso em relação ao conhecimento nos termos de Radford (2014, 2020).

Finalmente, reconhecemos que os resultados desta pesquisa representam um avanço na compreensão dos processos de objetivação produzidos durante as tarefas de trabalho matemático em torno da representação de um setor circular no GeoGebra. No entanto, consideramos que a análise de uma atividade específica desse tipo não garante o profundo reconhecimento desse fenômeno, por isso precisamos realizar outros estudos focados nos processos de objetivação que ocorrem durante o trabalho matemático em ESG, a fim de que os resultados obtidos contribuam para que nossos professores melhorem as condições de gestão de suas tarefas.

REFERÊNCIAS

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinioamericana de* **Investigación en Matemática Educativa**, México, n. esp. p. 267-299, 2006. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/335/33509913.pdf Acesso em: 10 abr. 2024.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Qualitative research for education**. An introduction to theory and methods. 5. ed. Londres: Pearson, 2007.

CASTILLO, L. A.; PRIETO, J. L. El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **UNION,** Espanha, v. 52, p. 250-262, 2018.

CASTILLO, L. A.; PRIETO, J. L.; SÁNCHEZ, I. C.; GUTIÉRREZ, R. E. Uma experiência de elaboração de um simulador com GeoGebra para o ensino do movimento parabólico. **Paradigma**, Maracay, v. 40, n. 2, p. 196-217, 2019. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p196-217.id764

CASTILLO, L. A.; SÁNCHEZ, I. C. As formas de colaboração humana durante a elaboração de um simulador com o GeoGebra. O caso de David e Carolina. **Revista Thema**, Pelotas, v. 17, n. 3, p. 572-583, 2020. https://doi.org/10.15536/thema.V17.2020.572-583.1110

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática***:* percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2012. Original publicado em 2006.

GÓMEZ, J. **La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas**: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo. 2013. Dissertação (Mestrado em Docencia de la Matemática) – Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Bogotá, 2013. Não publicada.

GUTIÉRREZ, R. E.; CASTILLO, L. A. Simuladores con el software GeoGebra como objetos de aprendizaje para la enseñanza de la física. **Tecné, Episteme Y Didaxis: TED**, Bogotá, n. 47, p. 201-216, 2020. https://doi.org/10.17227/ted.num47-11336

GUTIÉRREZ, R. E.; PRIETO. J. L.; ORTIZ, J. Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Educacion Matematica**, México, v. 29, n. 2, p. 37-68, 2017. https://doi.org/10.24844/EM2902.02

GUTIÉRREZ, R. E.; PRIETO. J. L.; SÁNCHEZ, I. C. Formas de alienação presentes na atividade de formação inicial de professores de matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 36, n. 74, p. 1062-1086, 2022. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a06

HEGEL, G. **The philosophy of history**. Kitchener: Batoche Books, 2001. Original publicado em 1837.

LABORDE, C. Cabri-Geómetra o una nueva relación con la Geometría. *In*: PUIG, L. (ed.). **Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática**. Bogotá: Una Empresa Docente, 1997. p. 33-48.

MCNEILL, D. **Hand and mind**: what gestures reveal about thought. Chicago: University of Chicago Press, 1992.

PANTANO, O. (2014). **Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales**. 2014. 120 f. Dissertação (Mestrado em Docencia de la Matemática) – Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Bogotá, 2014. Não publicada.

PRIETO. J. L.; CASTILLO, L. A.; MÁRQUEZ, M. Formas de colaboración humana entre profesores y alumnos durante la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 34, n. 66, p. 199-224, 2020. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a10

PRIETO. J. L.; ORTIZ, J. Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 33, n. 65, p. 1276-1304, 2019. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a15

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semioticcultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking and Learning**, Estados Unidos de America, v. 51, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación n Matemática Educativa**, México, v. 9, n. esp., p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education. *In*: VALLÈS, J.; ÁLVAREZ, D.; RICKENMANN, R. (ed.). **Teacher's activity**: Intervention, innovation, research. Nova Iorque: Springer Nature, 2011. p. 33-49.

RADFORD, L.; DEMERS, S.; GUZMÁN, J.; CERULLI, M. Calculators, graphs, gestures, and the production meaning. In N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), **Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (PME27 - PMENA25) (vol. 4, pp. 55-62). Universidad de Hawaii., 2013

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, Nariño, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014.

RADFORD, L. Mathematics Education as a Matter of Labor. *In*: VALERO, P.; KNIJNIK, G. (ed.). **Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory**. Section: Mathematics education philosophy and theory. Nova Iorque: Springer, 2016. p. 1409-1414.

RADFORD, L. Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. *In*: D'AMORE, B.; RADFORD, L. (ed.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y culturales. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a. p. 97-112.

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. *In*: D'AMORE, B.; RADFORD, L. (ed.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y culturales. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b. p. 115-136.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. **PNA**, Granda, v. 12, n. 2, p. 61-79, 2018a.

RADFORD, L. Saber, aprendizaje y subjetivación en la teoría de objetivación. *In*: **SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 5., 27-29 jun. 2018, Belém. *Anais* [...]. Belém: SBEM-PA, 2018b.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. *In*: GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (ed.). **Teoria da Objetivação**: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 15-42.

RADFORD, L. La ética en la teoría de la objetivación. *In*: RADFORD, L.; SILVA ACUÑA, M. (ed.). **Ética: Entre educación y filosofía**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2021. p. 107-141.

RADFORD, L. **La teoría de la objetivación**: una perspectiva Vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2023.

RUBIO, L.; PRIETO, J. L.; ORTIZ, J. La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre***. International Journal of Educational Research and Innovation***, Sevilla, v. 2, p. 90-111, 2016.

SÁNCHEZ, I. C. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra**. Um estudo de caso. 2020. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

SÁNCHEZ, I. C.; BRANDEMBERG, J. C. Aprendizagem geométrica e semiótica na matematização com GeoGebra: o caso do virabrequim. **REMATEC**, Belém, v. 32, p. 212-230, 2019. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2019.n32.p212-230.id213

SÁNCHEZ, I. C.; BRANDEMBERG, J. C.; CASTILLO, L. A. La objetivación de la noción de sector circular en el trabajo matemático con GeoGebra. **Paradigma**, Maracay, v. 41, n. extra 2, p. 448-475, 2020. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p448-475.id924

SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A. Potencialidades de los Comandos en Experiencias de Elaboración de Simuladores con GeoGebra **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Cuiabá, v. 2, n. 2, e2019001, 2019. https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2019001

SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A. A produção de conhecimento matemático na Elaboração de Simuladores com GeoGebra. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Cuiabá, v. 5, e2022003, 2022. https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2022003

SÁNCHEZ, I. C.; PRIETO, J. L. El aprendizaje geométrico en la elaboración de simuladores con GeoGebra. El caso de Elwin. **Revista Acta Latinoamericana de Matemática**, México, v. 32, p. 27-36, 2019a.

SÁNCHEZ, I. C.; PRIETO, J. L. Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de un simulador con GeoGebra. **PNA**, Granada, v. 14, n. 1, p. 230-251, 2019b.

SÁNCHEZ, I. C.; PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E.; DÍAZ-URDANETA, S. Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra. **Educación Matemática**, México, v. 32, n. 1, p. 99-131, 2020. https://doi.org/10.24844/EM3201.05

SÁNCHEZ, I. C.; SÁNCHEZ, I. C. Elaboración de un simulador con GeoGebra para la enseñanza de la física. El caso de la ley de coulomb. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, v. 8, n. 2, p. 40-56, 2020. https://doi.org/10.26571/reamec.v8i2.9557

SPINOZA, B. **Ethics including the improvement of the understanding**. Tradução de R. Elwes. Nova Iorque: Prometheus Books, 1989.

COMO CITAR — APA

Brandemberg, J. C.; Sánchez, I. C.; Castillo, L. A. (2024). A objetivação de formas geométricas em processos de matematização na elaboração de simuladores com GeoGebra . *PARADIGMA, XLV*(Edición Temática 2), e2024006. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024006.id1579.

COMO CITAR — ABNT

BRANDEMBERG, João Cláudio; SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. A objetivação de formas geométricas em processos de matematização na elaboração de simuladores com GeoGebra. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, Edición Temática n. 2, e2024006, Nov., 2024.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024006.id1579.

HISTÓRICO

Submetido: 15 de abril de 2024.
Aprobado: 13 de junio de 2024.
Publicado: 01 de noviembre de 2024.