

O método fluxional de Colin MacLaurin e o ensino de derivadas

Iran Abreu Mendes¹   Evanildo Costa Soares²  

Resumo

Esse artigo aborda o processo de constituição e institucionalização do conceito de derivada fundamentado do método fluxional desenvolvido, a priori, por Newton e, posteriormente, aprimorado por Colin Maclaurin, baseado em seu trabalho intitulado *A Treatise of Fluxions* (Tratado das Fluxões), publicado em 1742. Com base da realização de uma análise histórica e epistemológica do tratado de Maclaurin sobre o método fluxional, apontamos indicativos para uma abordagem conceitual e didática do assunto associada aos modos de abordagem presentes nos principais livros de cálculo diferencial e integral no Ensino Superior com base no movimento sequencial histórico (MSH) proposto por Mendes (2021b; ; 2023a; 2023b).

Palavras-chave: Método fluxional, Tratado das fluxões, História das derivadas, Ensino de cálculo.

Colin Maclaurin's fluexional method and the teaching of derivatives

Abstract

This article addresses the process of constitution and institutionalization of the concept of derivative based on the fluxional method developed, a priori, by Newton and, later, improved by Colin Maclaurin, based on his work entitled *A Treatise of Fluxions*, published in 1742. Based on a historical and epistemological analysis of Maclaurin's treatise on the fluxional method, we point out indications for a conceptual and didactic approach to the subject associated with the modes of approach present in the main books on differential and integral calculus in Higher Education based on the historical sequential movement (HSM) proposed by Mendes (2021b; 2023a; 2023b).

Keywords: Fluxional method; Treatise on fluxions; History of derivatives; Teaching of calculus.

El método fluxional de Colin MacLaurin y la enseñanza de los derivados

Resumen

Este artículo aborda el proceso de constitución e institucionalización del concepto de derivada a partir del método fluxional desarrollado, a priori, por Newton y, posteriormente, mejorado por Colin Maclaurin, a partir de su obra titulada *A Treatise of Fluxions*, publicada en 1742. Basado en un análisis histórico y epistemológico del tratado de Maclaurin sobre el método fluxional, señalamos indicaciones para un abordaje conceptual y didáctico del tema asociado a los modos de abordaje presentes en los principales libros sobre cálculo diferencial e integral en Educación Superior basada en el movimiento secuencial histórico (MSH) propuesto por Mendes (2021b; 2023a; 2023b).

Palabras clave: Método fluxional, Tratado sobre fluxiones, Historia de los derivados, Enseñar cálculo.

¹ E-mail: iamendes1@gmail.com

² E-mail: nildo_23@hotmail.com

INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos o desenvolvimento de uma investigação histórica que teve como objeto principal o método das fluxões desenvolvido inicialmente por Isaac Newton no século XVII e posteriormente ampliado por Colin Maclaurin. Nossa principal intenção é mostrar que se trata de uma interpretação matemática baseada em uma análise explicativa acerca da trajetória de uma partícula e de sua velocidade. O termo referente ao percurso da partícula está relacionado a área da Física, mais especificamente à cinemática newtoniana, que trata da ocorrência de um aumento ou diminuição de grandezas num determinado tempo sobre uma linha ou reta, considerando uma velocidade específica no percurso. A teoria desenvolvida por Newton sobre fluxões está implicada em uma forma de interpretação dos conceitos relacionados aos estudos sobre derivada e integral, posteriormente estabelecidos por outros matemáticos dos séculos XVII e XVIII.

Assim, as primeiras formulações a respeito do método fluxional se tornaram um marco histórico ao se configurarem como o primeiro estudo acerca do cálculo, no século XVII, denominado de cálculo infinitesimal. No que concerne a invenção do método fluxional, nota-se que se trata de uma forma de abordar os processos de cálculo, que foi bastante significativa para se entender e desvendar os desafios que giravam em torno de problemas surgidos na Grécia Antiga, como o problema da trissecção do ângulo e da quadratura do círculo, entre outros que apareceram ao longo do tempo. A notável experiência de Newton ao propor a ideia sobre a fluxão se fundamentava em uma prática empírica que estava inserida numa relação entre os estudos oriundos da relação entre a Física e a Matemática sob os seguintes termos: movimento, espaço, tempo, velocidade, acréscimos e decréscimos, entre outros, que podem ser expressos por meio de métodos algébricos e equações.

Foi desse modo que a proposta desenvolvida por Newton sobre o método fluxional, ficou marcada por inovações significativas que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Nota-se que as construções científicas em torno desse método obtiveram avanços que auxiliaram diversos estudiosos do século XVII na resolução de problemas matemáticos relacionados à quadratura de curvas, os quais foram fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos de derivada e integral. Embora sua importante explicação referente aos movimentos dos corpos, relacionada às fluxões, tenha impactado na sociedade científica de sua época, Newton não propôs um estudo mais amplo do tema, pois se mostrava contrário a teoria dos infinitésimos (os acréscimos e decréscimos) que estavam relacionados a teoria das fluxões. A partir da análise demonstrativa do método fluxional com a presença dos acréscimos ou decréscimos de grandezas, Newton incorporou elementos importantes: o tempo e a velocidade.

A esse respeito, a transcrição sobre o tempo e a velocidade era marcada pela trajetória da partícula, momento em que a quantidade gerada (velocidade) é obtida num determi-

nado acréscimo ou decréscimo de uma partícula sobre a reta. O trabalho realizado em torno desse tema sobre fluxão lhe renderam dois trabalhos notáveis: o *De Analysis* e o *De Methodis*. Foi a partir de um estudo reelaborado com base no *De Methodis* que Newton desenvolveu, em 1671, uma obra intitulada: *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (Tratado sobre os métodos de séries e fluxões). Nessa obra ele estruturou sua compreensão sobre três conceitos centrais de seu trabalho: quantidade fluente, fluxão e momento, posto que até então não existia uma definição clara para o conceito de velocidade.

O conceito de velocidade proposto por Newton foi adquirido a partir do trabalho de outros estudiosos ou de outros pontos interpretativos retirados de estudos sobre o movimento dos corpos (posteriormente relativos à Física), podendo ser utilizado como uma grandeza intensiva, no sentido de que só pode ser mensurada indiretamente por outras grandezas. A indecisão de Newton em relação à caracterização prática da velocidade e aos termos usuais sobre a fluxão lhe renderam críticas de estudiosos, principalmente de George Berkeley em *O Analista* (1734). Essa incerteza acerca do método fluxional fez com que Newton retardasse sua publicação, o que provavelmente permitiu a Leibniz desenvolver, posteriormente, as primeiras construções do cálculo por meio do uso de curvas e suas tangentes em 1673.

Posteriormente, coube a Colin Maclaurin, um estudioso e discípulo de Newton, também no século XVII, reescrever de forma sistemática, as construções referentes ao método fluxional, que foi publicado em 1742 sob o título *A Treatise of Fluxions* (O Tratado das Fluxões). Nesse trabalho, Maclaurin propõe de forma clara e concisa que os cálculos realizados por Newton a respeito do método fluxional não continham erros. Houve uma sistematização do conceito de velocidade, principalmente transcrita pelo movimento de uma partícula ao longo de uma reta, na qual a velocidade seria a mesma durante o percurso realizado uniformemente. Ele adota também o termo *quantidade gerada* para dar precisão aos cálculos explorados pelo uso das fluxões nas equações algébricas, sanando e corrigindo as dúvidas inerentes ao cálculo idealizado por Newton.

As inovações a respeito do termo fluxão foram orientadas por caminhos metodológicos que lhe conferiram uma nova interpretação conceitual do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. As mudanças foram projetadas para dar suporte a uma construção que seria e proporcionaria uma nova compreensão relacionada aos conteúdos posteriores a respeito de derivada e integral. Neste artigo, discorreremos sobre o conceito de fluxão conectado ao estudo relativo à derivada, bem como desdobramentos importantes fundamentados na utilização de métodos, propriedades, identidades, fórmulas e resoluções imprescindíveis para a construção da identidade do cálculo diferencial e integral.

Portanto, argumentamos que a consistência e o aprimoramento do estudo sobre derivada impacta na melhoria da abordagem do referido conteúdo desenvolvido nos cursos de

licenciatura em Matemática. Neste sentido, esse trabalho busca construir uma nova abordagem sobre o estudo da derivada, fundamentada com base no método fluxional idealizado por Maclaurin, de modo que possa complementar e ampliar os conhecimentos presentes nos principais livros de cálculos utilizados no curso de licenciatura em Matemática. Além disso, abordaremos de forma concisa um quadro comparativo entre as fórmulas inerentes ao método fluxional e suas respectivas derivadas, destacando as semelhanças presentes entre ambas, o que é importante para uma nova configuração identitária do cálculo diferencial e integral.

| GÊNESE DO MÉTODO FLUXIONAL NA CONCEPÇÃO NEWTONIANA

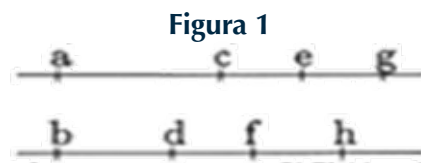
Para Silva (2010) o marco inicial do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral aconteceu no período do Renascimento, que culminou com a queda da cidade de Constantinopla em 1453 – Capital do Império Bizantino; a invenção da imprensa – em 1500 por Gutenberg, e a conquista da América, em 1492. Esse período foi marcado pela influência da Europa Ocidental sobre as restantes regiões do planeta, momento em que as Ciências Naturais demarcaram conexões como nos campos da Matemática e da Física, inserindo mudanças nos estudos científicos, que originaram novas formas de pensar sobre o universo – o heliocentrismo, bem como cálculos astronômicos estabelecidos pelas novas leis explicativas do movimento e da rotação da terra em torno do sol conhecida como leis de Kepler³.

A configuração do termo fluxão foi primeiramente utilizada por Isaac Newton (1642-1727), tornando-o o primeiro homem a desenvolver esse estudo, o que marcou a construção lógica e aritmética do cálculo. De acordo com Panza (2002), ainda muito jovem, Newton se apoiou nos trabalhos de vários cientistas e estudiosos do século XVII, conforme comenta o autor:

Muito trabalho para um estudante que acabara de fazer vinte anos. E, no entanto, se julgarmos por seus escritos, entre dezembro de 1664 e novembro de 1665, não foi o estudo da filosofia natural que Newton dedicou mais energia, mas a Matemática. Ele leu partes dos Elementos de Euclides, superficialmente. Provavelmente ele também leu a Opera Matemática de François Viète, o Clavis Mathematicæ de William Oughtred, o Exercitation um mathematicarum de Frans van Schooten e o De ratiociniis in ludo alæ de Huygens, textos entre os mais importantes publicados durante os trinta anos (mesmo que o primeiro desses textos seja um resumo de tratados escritos entre o final do século XVI e o início do século XVII), mas foi a Geometria de Descartes e a Arithmetica infinitorum de John Wallis que realmente o fascinou. Foi a leitura desses dois livros que deu início às pesquisas que, em dois anos, fizeram de Newton o maior matemático de sua época, levando-o à primeira formulação da teoria das fluxões (Panza, 2002, p. 6, tradução nossa).

³ As leis do movimento planetário de Kepler são conhecidas como: lei das órbitas elípticas, lei das áreas e lei dos períodos. Juntas estas explicam como funciona o movimento de qualquer corpo orbitando algum astro massivo, como planetas ou estrelas.

Para Smestad (1995) a concepção de fluxo parte de duas concepções concebidas por Newton. No primeiro momento, o cientista trouxe uma ressignificação para o método da fluxo ao considerar linhas como geradas por pontos em movimento, planos como gerados por linhas em movimento e sólidos como gerados por planos em movimento. O que estava em movimento, ele chamou de *fluents*, e sua velocidade de *fluxões*. Dentro de uma lógica da Física, todo corpo em movimento possui uma velocidade instantânea, independentemente de como a velocidade ocorrerá, podendo configurar determinadas mudanças, conforme mostra a figura 1 a seguir.



De acordo com Soares (2023) o objetivo da utilização do movimento para definir a fluxo serviu de base para a compreensão desse método, quando Newton o escreveu em 1665. Sua ideia consistia, primeiramente, em elaborar e formular a concepção do que seria a fluxo, a partir do movimento gerado pela partícula sobre uma reta. Para isso, propôs o seguinte lema:

Se dois corpos A e B se movem uniformemente y^e , um de a para c, e, g & c e y^e outro de b para d, f, h & c em y^e ao mesmo tempo. y^n são y^e linhas ac & ce & eg & c e bd & df & fh & c como suas velocidades p e q . Embora eles não se movam uniformemente ainda são y^e linhas infinitamente pequenas w^{ch} a cada momento movimentam suas velocidades w^{ch} que eles têm enquanto as descrevem. Como se y^e o corpo A w^{th} y^e velocidade p descreva y^e sua linha infinitamente pequena o em um momento. No y^t momento y^e , o corpo B w^{th} y^e velocidade q descreverá y^e linha oq/p . Se $p : q$, então $o : x + o$ & $y + oq/p$ em y^e (Smestad, 1995, p. 13-14, tradução nossa).

As formulações sobre a ideia da fluxo recaíam sobre a noção dos infinitesimais. Ao notar que Newton não era adepto da teoria dos infinitésimos, ele propôs uma mudança ao descrever o movimento da partícula sobre uma reta fosse finita. Isso o levou a entender que as fluxões das quantidades estão na primeira razão de suas partes nascentes e desaparecem na última parte, por um processo de defluxão⁴. As construções sobre o estudo das fluxões foram consolidadas por Newton quando propôs a divulgação de dois trabalhos: *O De Analysis* e o *De Methodis*, conforme já mencionamos anteriormente.

Dessa forma, o *De Analysis* é considerado a primeira apresentação pública da teoria das fluxões, uma vez que se “configurou como uma espécie de *instant book* escrito para expor alguns de seus resultados referentes a problemas sobre curvas” (Panza, 2010, p. 516). Esse trabalho de Newton inclui vários exemplos de análises aristotélicas operacionalizadas por meio do estudo proposto por Viète sobre curvas. A divulgação do trabalho sobre *De*

⁴ Termo usado por Isaac Newton para se referir ao processo inverso da fluxo, ou seja, a diminuição gradual da velocidade de um movimento ou processo.

Analysis foi significativa para a impressão de famílias de curvas algébricas e de certas curvas transcendentais por meio de equações da forma $y = ax^\lambda + bx^\mu + cx^\nu$, onde λ, μ, ν são expoentes racionais, tendo o significado de que os membros do lado direito são uma soma finita ou infinita. De acordo com este autor foi possível aplicar a essas curvas a seguinte regra da quadratura:

$$y = ax^\lambda \rightarrow A(y) = ; A(y+z) = A(y) + A(z),$$

Em que $A(w)$ denota a área delimitada pela curva da ordenada ortogonal cartesiana w , que, em termos modernos corresponde a $\int w(t)dt$, supondo que $w(0) = 0$. Esta é uma pequena parte da enorme quantidade de resultados que Newton obteve entre 1663 e 1666. Dessa maneira, foi praticamente na redação do Tratado de Outubro de 1666 que Newton realizou um estudo mais relevante sobre curvas envolvendo movimento.

Sendo assim, Newton iniciara uma série de redações com o propósito de desenvolver e explicitar a “generalidade da solução geométrica para problemas cinemáticos de composição de movimentos, sustentando que as soluções algébricas são, na verdade, casos particulares” (Calazans, 2014, p.57). O referido tratado, posteriormente, resultou na produção do *De Methodis*, no qual, de um total de oito proposições presentes no estudo, as seis primeiras são relacionados a composição do movimento. De modo geral, seus problemas são reformulações ou extensões dos problemas das tangentes e das áreas, os quais foram apreciados por importantes matemáticos da época.

De acordo com Panza (2010) os esforços de Newton sobre a construção do *De Methodis* consistiam em expor uma teoria que envolvia movimento e velocidade, para solucionar os problemas geométricos; neste trabalho, então, introduziu a concepção de cinemática, em que adverte sobre a redução de vários problemas matemáticos a somente dois problemas gerais:

Mas, antes de tudo, devo observar que todas as dificuldades desse tipo podem ser reduzidas aos dois problemas a seguir, que me sejam concedidos propor a respeito do espaço percorrido por qualquer movimento local acelerado ou retardado como quer que seja: Dada a distância do espaço continuamente (isto é, em qualquer tempo), encontrar a velocidade do movimento em qualquer tempo indicado. Dada a velocidade do movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço descrito em qualquer tempo indicado (Panza, 2010, p. 519).

A esse respeito Panza reitera que na visão newtoniana, esses dois problemas consistem em definir a velocidade de um movimento contínuo envolvendo espaço e tempo. Com isso, percebe-se que, ao descrever o movimento, Newton pressupõe que as figuras geométricas em movimento recebam acréscimos ou decréscimos contínuos quando são descritos. Assim, ele utiliza o acréscimo ou decréscimo de grandezas no sentido de incorporar conceitos importantes extraídos de sua notável experiência da interpretação empírica, como o tempo e a velocidade. Fundamentado em sua cinemática, ocorre um aumento ou diminui-

ção de grandezas em determinado tempo, representado por meio da linha ou reta, marcando a existência exata da velocidade durante o percurso.

De certa forma, observa-se que quando o “movimento é acelerado ou retardado, as linhas e os planos recebem acréscimos ou decréscimos de grandeza” (Calazans, 2008, p.32). Desse modo, Newton começa a recompor o pensamento sobre essa teoria e comentou que uma unidade em pontos ou linhas infinitamente pequenas segue a visão dos antigos geometras, que consideravam proporções deste método semelhantes ao uso dos indivisíveis. Assim, em 1680, em sua *Geometria Curvilínea*, ele propôs uma nova análise do método fluxional na tentativa de evitar os infinitesimais.

Desse modo, o segundo trabalho de Newton, o *De Methodis*, surgiu em um momento de criatividade matemática e nele se encontram as mais avançadas técnicas newtonianas de expansão em série, uma exposição dos conceitos básicos e regras do método fluxional, “a aplicação do método direto de fluxão ao cálculo de tangentes e curvaturas e os catálogos sistemáticos de curvas, que trazem a quadratura das curvas à perfeição” (Guicciardini, 2009, p. 341, tradução nossa). De fato, nas linhas de abertura do *De Methodis*, ele incorporou e expandiu o *De Analysis* apresentando métodos de série por meio de divisão extensa, extração de raízes e resoluções abrangidas por meio do estudo de equações.

O *De Methodis* foi reelaborado em 1671 sob o título: *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (Um Tratado com Método de Séries e Fluxões). Neste trabalho não existe uma definição própria do conceito de velocidade. Entende-se que ele adquiriu esse conceito de outros estudiosos e cientistas renomados. Tem-se uma visão interpretativa de que a velocidade seja uma grandeza intensiva, no sentido de que ela só pode ser mensurada indiretamente por outras grandezas.

Segundo Soares (2023), o trabalho desenvolvido por Newton não teve uma divulgação científica, e não se sabe exatamente os motivos que o levaram a não querer divulgar tal trabalho. No entanto, alguns estudiosos do século XVIII, como George Berkeley (1685-1753), criticaram a precisão dos cálculos concebidos pelo método fluxional. Após a realização do referido trabalho, Newton buscou divulgar suas pesquisas nas áreas de óptica, astronomia, gravidade e a fluxão, que culminaram com a publicação do *Principia* em 1687. Posteriormente, ele foi acometido por uma depressão e, devido à doença, afastou-se de suas pesquisas, passando a residir em Londres. Em 1703, tornou-se presidente da Real Academia de Ciência e ocupou a chefia do setor financeiro da casa moeda, onde permaneceu até o seu falecimento em 1727.

Na obra do *De Methodis* de 1671, Newton estruturou sua concepção sobre três conceitos centrais: Quantidade fluente, fluxão e momento. Para Calazans (2008, p. 36) “A quantidade fluente nada mais é do que a própria quantidade espacial descrita pelo movimento” e é representada pelas linhas, planos e sólidos. Os símbolos utilizados nas equações para

tais quantidades são representadas pelas letras finais do alfabeto: v, x, y , e z . Neste caso, as quantidades fluentes são descritas pelo movimento que contém alguma velocidade. As velocidades pelas quais toda fluente é aumentada pelo seu movimento gerador é chamada de *fluxão* e são representadas por letras pontuadas, $\dot{x}$, $\dot{y}$, e $\dot{z}$. Podem também ser empregadas neste método o uso de constante representadas pelas letras iniciais do alfabeto a, b, c e d . Na última concepção, os momentos das quantidades fluentes, segundo Guicciardini (2009, p. 230), são “as adições infinitamente pequenas pelas quais essas quantidades aumentam durante cada intervalo de tempo infinitamente pequeno”, conforme mostra a figura 2 a seguir.

Figura 2: Representação do movimento descrito



Fonte: Guicciardini (2009).

Sendo assim, considera-se um ponto que flui com velocidade variável ao longo de uma reta. Entende-se que a distância percorrida num determinado instante é a *Fluente*, a velocidade adquirida no percurso é a *Fluxão*. Newton observou ainda que os *momentos* são como a velocidade do fluxo (ou seja, as fluxões). De acordo com Calazans (2008, p. 37) “se duas quantidades fluentes são representadas por x e y , os seus *momentos* entrarão nas equações, respectivamente, com os seguintes símbolos: $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$. Dessa forma, existe uma multiplicação entre a fluxão com o símbolo o (letra grega ômicron). A principal função desta letra grega é marcar a presença do tempo, a qual é representada pelo infinitamente pequeno gerado pelo percurso da fluente sobre a reta.

Dessa forma, os *momentos* são representados pela fluxão da quantidade fluente e estão relacionados a multiplicação pelo marcador tempo. Sendo assim, “se pensarmos a fluxão como análoga à velocidade, ao multiplicá-la pelo tempo, obteríamos o espaço percorrido” (Calazans, 2014, p. 78). Com isso, o momento pode ser acrescentado à quantidade fluente (grandeza espacial), resultando em um aumento dessa quantidade quando sofre naquela parcela indefinidamente pequena do tempo. Esses momentos são representados por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$. Nisto, percebe-se uma semelhança com a ideia de limite ou do infinitamente pequeno, que naquela época estava relacionada à noção de infinitésimos.

Ao realizar de forma sistemática uma construção notória sobre a fluxão, Newton apesar de tecer os primeiros conceitos e regras sobre o método fluxional, tornou-se o primeiro a realizar um trabalho voltado para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Seu trabalho não aparece nos livros de cálculo, pois coube a Leibniz, em 1673, desenvolver e divulgar um trabalho referente a derivada e integral envolvendo o estudo sobre curvas e retas tangentes. Essa discussão a respeito de temas conectados ao estudo do cálculo marcou um embate entre esses dois notáveis cientistas naquele século.

O trabalho sobre fluxão só foi publicado oficialmente após a morte de Newton. Assim, coube a Conduit publicar em 1736 um trabalho sobre o método da fluxão sob o título:

The Method fluxions and infinite séries (O método das fluxões e séries infinitas), com as mesmas características da primeira versão, escrita em 1671. Nesse trabalho, Newton afirmou que deve haver “velocidades comparativas de aumento e diminuição, durante tais gerações, cujas relações são fixas e determináveis, e podem, portanto (problematicamente), ser propostas para serem encontradas” (Newton, 1736, p.11, tradução nossa). Um aprofundamento sobre essa temática só foi possível quando Maclaurin, discípulo de Newton, realizou um magnífico trabalho sobre o Tratado das Fluxões, publicado em 1742.

| GÊNESE DO MÉTODO FLUXIONAL NA CONCEPÇÃO DE MACLAURIN

A concepção do termo fluxão adotada por Maclaurin buscou responder às críticas, especialmente as de George Berkley, em relação aos cálculos realizados através do método fluxional desenvolvido por Newton. O estudo realizado por Maclaurin superou as expectativas dos críticos intelectuais ao propor uma nova análise das fluxões, sem perder de vista as principais características idealizadas por Newton ao conceber o conceito de fluxão em seus trabalhos relacionados à Física e o *Principia*, publicado em 1687.

A principal característica idealizada por Maclaurin centrava-se em não envolver a independência dos infinitesimais. Para reescrever essa obra, ele seguiu as ideias adotadas por Robins (1707-1751) e organizou seu tratado em duas partes principais. A primeira buscava explicar a veracidade da noção de fluxão, conforme denotada por Isaac Newton em seu livro que tratava do método das fluxões e dos estudos sobre séries infinitas, partindo do pressuposto de que não há dificuldade em conceber velocidade onde quer que haja movimento. As quantidades geradas pelo movimento e suas velocidades são utilizadas como uma ferramenta básica e indefinida, direcionadas pela ideia de fluxão, concretizada por meio do percurso envolvendo Movimento Uniforme.

A proposta realizada por Maclaurin, *a priori*, buscou dar mais notoriedade ao trabalho de Newton sobre o método fluxional. Ao adotar o Movimento Uniforme em seus métodos empíricos referente ao percurso da partícula sobre a reta, ele propôs que a velocidade, que era indefinida por Newton, age de forma constante em seus movimentos sobre a reta, o plano e os sólidos. A quantidade gerada em seu processo contínuo formaliza uma nova compreensão do método fluxional e de seus princípios fundamentais para a construção do cálculo infinitesimal no século XVIII.

Sendo assim, Maclaurin formalizou um estudo sobre o Tratado das Fluxões, publicado em dois volumes, em 1742. Este trabalho tem como objetivo mostrar que o cálculo proposto por Newton está mais relacionado à ideia de quadratura de uma curva do que ao estudo dos infinitesimais. A esse respeito, Rezende (2003, p. 202) adverte que “Newton assume a noção de velocidade como elemento fundamental do seu cálculo fluxional: uma quantidade variável se constitui, portanto, através do movimento contínuo de pontos, linhas e

planos, e não como uma coleção de elementos infinitesimais”. O trabalho idealizado por Maclaurin rendeu construções e projeções que alcançaram os principais críticos, sanando as dúvidas inerentes ao método fluxional.

O trabalho publicado sobre o Tratado das Fluxões em 1742, é um conjunto de novos e antigos resultados baseados em uma axiomatização e um rigor que busca eliminar as ambiguidades e polêmicas. O objetivo da divulgação deste trabalho tratava inicialmente de uma resposta baseada em uma axiomática, com alguns resultados demonstrados, que evoluíram para uma apresentação mais sistemática e ampla do cálculo newtoniano que foram imprescindíveis para o progresso da Física e da Matemática no século XVIII. Reiteramos que a obra sobre o Tratado das Fluxões foi estruturada em dois livros, os quais possuem uma base sistemática para a construção e compreensão do estudo envolvendo derivada e integral, cuja tema são abordados na disciplina de cálculo diferencial e integral no Ensino Superior (Soares, 2023).

Quanto a caracterização e a abordagem, esses dois livros trazem uma compreensão teórica e demonstrativa a respeito do estudo sobre as *fluxões* e a *fluente*. O primeiro livro direciona seu olhar através da inspiração geométrica, ou seja, traduz todos os problemas para a linguagem da geometria, oferece definições implementando figuras geométricas. Maclaurin se apresenta como defensor da axiomatização dedutiva, cujas demonstrações são fornecidas por meio do método conhecido como dupla redução ao absurdo. O segundo livro é um tratamento algébrico com métodos, regras, princípios e resoluções apresentados aos problemas relativos ao primeiro livro, fornecendo mecanismos viáveis para uma interpretação coerente e demonstrativa dos métodos de fluxão e fluente na concretização de seus cálculos algébricos (Soares, 2023).

Assim, embora os matemáticos continentais do século XVIII não dessem tanto crédito aos fundamentos, eles ainda apreciavam o *Tratado das Fluxões*, pois podiam explorá-lo em busca de resultados e técnicas para resolver problemas e cálculos relacionados à quadratura da parábola, bem como outros resultados que auxiliavam na precisão dos cálculos de áreas varridos por uma curva, além de obtenção de volumes de sólidos geométricos e de revoluções em torno do eixo de movimentação fluxional. Desse modo, o trabalho de Maclaurin teve influência continental, mas com uma exceção importante: sua base geométrica para o cálculo. Dominar essa caracterização com novo olhar para o cálculo, fornece um mecanismo de aprendizagem essencial para o estudante da disciplina de cálculo que será um futuro professor, ao buscar direcionar seus estudos sobre derivada, fundamentados na noção de fluxão, e sobre a integral, com base na noção de fluente.

FUNDAMENTOS DO MÉTODO FLUXIONAL NA FORMALIZAÇÃO DO ESTUDO DE DERIVADA

Maclaurin (1742) formaliza a noção de fluxo seguindo o método direcionador de Newton. Ao tratar deste conteúdo, foi necessário implementar princípios e postulados que pudessem explicar de forma nítida a existência real deste método, ao considerar o ponto como um termo limite de uma linha, e o momento como um termo limite do tempo. Ao estruturar essa ideia, o método demonstrativo inventado por Maclaurin se mostra coerente e compreensível, facilitando o entendimento para aqueles que buscam estudá-lo, principalmente o público a quem este tratado se destina.

Com esse intuito Maclaurin se baseia nos antigos geômetras como Arquimedes e Euclides quando utiliza a sua geometria, bem como no próprio trabalho sobre curvas universais publicado em 1620. Tal como descreveu Newton, Maclaurin argumentava que seu método estava amparado em duas regras gerais: *o método direto*, quando as quantidades geradas são sempre iguais a cada uma, os movimentos geradores devem ser sempre iguais; e *o método inverso*, quando os movimentos geradores são sempre iguais entre si, as quantidades geradas ao mesmo tempo devem ser sempre iguais.

Desse modo, vale destacar dois princípios no *Tratado das Fluxões*: o primeiro aparece quando a quantidade gerada pelo fluxo é chamada de *Fluente*. Isto ocorre porque as quantidades deveriam ser aumentadas, diminuídas ou totalmente geradas pelo movimento, ou por um fluxo contínuo análogo a ele. O segundo, que é a velocidade com que uma quantidade flui, em qualquer período do tempo em que deve ser gerada, é chamada de *Fluxão*, que pode sempre ser medida pelo acréscimo ou decréscimo gerado em um dado momento por esse movimento, desde que seja continuamente uniforme a partir desse período, sem qualquer aceleração ou retardamento. Pode ser ajustado pela quantidade gerada em um determinado tempo que é igual ao movimento gerador naquele período.

A definição de movimento adotada por Maclaurin é bem semelhante à utilizada por Newton e próxima à de Berkley em sua obra *O Analista*, publicada em 1734. A interpretação de Maclaurin tornou essa teoria mais consistente ao recusar considerar o tempo ou espaço como indivisíveis. Para ele, o tempo e espaço são dados geométricos, a velocidade é considerada como uma relação entre espaço e tempo, sendo a proporção do espaço percorrido durante um determinado tempo parte integrante do campo da geometria. Com isso, entende-se que velocidade de um movimento uniforme é:

Medida pelo espaço que é percorrido em um determinado tempo. Se a ação da grandeza varia, sua ação em cada período de tempo não é medida pelo efeito que efetivamente produz após cada período, mas pelo efeito que teria produzido se sua ação tivesse continuado uniformemente após esse período; da mesma forma, a velocidade de um movimento variável, em cada período de tempo dado, não é medida pelo espaço que é realmente percorrido após esse período em um determinado tempo,

porém pelo espaço que teria sido percorrido se o movimento tivesse continuado uniformemente após este tempo (Maclaurin, 1749b, vol. I. p. 4-5, tradução nossa).

Desse modo, Maclaurin propõe uma definição de velocidade em um ponto completamente livre da estrutura das primeiras e últimas razões ou infinitesimais, evitando assim as críticas e os métodos funcionais ao uso da velocidade defendida por Newton quando desenvolveu os fundamentos que sustentam a base dos estudos e da utilidade da fluxão na área da Física e da Matemática. Para Maclaurin, a velocidade adquirida pela partícula em uma trajetória reta ocorre sempre com movimento uniforme e é representada por razões de quantidade finita. A ideia proposta que o diferencia da abordagem newtoniana, considera a velocidade nesse percurso, a qual possui um movimento constante na trajetória. Essa caracterização conceitual da fluxão, proposta por Maclaurin, serve de base construtiva para corrigir os erros direcionados pelos principais críticos de sua época e para reformulação desse tema, publicada em 1736, envolvendo a velocidade de um percurso na forma de uma linha ou reta.

Assim, ao detalhar esse método direto, Maclaurin (1742), seguindo as orientações e os trabalhos realizados por Newton, representou as quantidades variáveis ou fluentes, pelas letras finais do alfabeto, como x , y , z ; suas primeiras fluxões pelas mesmas letras pontuadas uma vez, através de $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$; suas segundas fluxões pelas mesmas letras pontuadas duas vezes, como por $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ e $\ddot{z}$; a terceira fluxões pelas letras pontuadas três vezes, como por $\dddot{x}$, $\dddot{y}$ e $\dddot{z}$ e assim por diante. O número de pontos serve para mostrar a ordem da fluxão em relação a primeira fluente; e a diferença desses números mostra qual é a fluxão de ordem que as procedem, como por $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ e $\ddot{z}$ é a primeira fluxão de $\dot{y}$, mas a segunda fluxão de $\dot{y}$. A esse respeito Maclaurin, menciona que:

O Sr. Leibniz representou as diferenças infinitamente pequenas de x , y , z , por dx , dy , dz ; suas segundas diferenças por ddx , ddy , ddz ; e suas diferenças infinitesimais de qualquer ordem n , por $d^n x$, $d^n y$, $d^n z$. O símbolo, ou dx , expressa a fluxão de x geralmente, sem determinar se deve ser considerado positivo ou negativo, isto é, se x aumenta ou diminui em relação aos outros fluentes. Quantidades invariáveis são representadas pelas primeiras letras do alfabeto, como a , b , c , etc. Estas não têm fluxões; e da mesma maneira, quando qualquer fluxão é supostamente constante, sua fluxão desaparece. Sir Isaac Newton compreendeu a maioria das regras do método direto em uma proposição geral; mas é mais comum representá-los separadamente e pode ser útil passar gradualmente dos casos simples para os mais complexos (Maclaurin, 1742, p. 591–592, tradução nossa).

Nesse sentido, observa-se que a ideia de fluxão está relacionada à velocidade da partícula, corpo ou figura nesse processo contínuo gerado pela quantidade com a presença do tempo, o que pode ser denominada de *derivada*. Portanto, Maclaurin estabelece que os fundamentos do estudo relacionado ao cálculo infinitesimal, proposto por Newton, estão mais próximos da ideia de fluxão, envolvendo o estudo de quadratura da curva, explorado por meio dos conteúdos sobre séries infinitas e de potências. Desse modo, a obra de Maclaurin (1742) é, de certa forma, mais abrangente que o trabalho desenvolvido por Newton (1736),

pois menciona este método das fluxões de forma mais sistematizada ao fazer uso do método algébrico com variáveis destacando suas propriedades, métodos, técnicas e aplicações, que são viáveis para o estudo do cálculo diferencial e integral, conforme abordado nos livros de cálculo no Ensino Superior.

Assim, as fluxões são responsáveis pelos processos de derivação, os quais estão relacionados a disciplina de cálculo diferencial e integral, embora não apareçam nos livros de cálculo no Ensino Superior. Dessa maneira, os estudos oriundos do processo de derivação abordados sobre este método, em seus processos geradores de quantidades, buscarão configurar uma representação do termo geral de derivada, bem como suas propriedades, métodos, regras e demonstrações, os quais caracterizarão um novo método de análise conceitual envolvendo esta temática (Mendes e Soares, 2022).

O MÉTODO FLUXIONAL NA REPRESENTAÇÃO DE UM TERMO GERAL DA DERIVADA

A ideia de fluxão, que caracteriza uma noção seminal de derivada, foi analisada sem se levar em consideração o modo de definir derivada com base no uso direto do conceito de limite de uma função, conforme apresentam a maioria dos livros de cálculo. O propósito pelo qual esse método foi inicialmente estruturado pressupõe um movimento de quantidades geradas com o deslocamento de um objeto/partícula/figura realizadas por meio do movimento uniforme no decorrer do tempo. Assim, Maclaurin (1742, p. 59) estabeleceu quatro axiomas que foram fundamentais para o estudo desse método:

Axioma I: O espaço descrito por um movimento acelerado é maior do que o espaço que teria sido descrito no mesmo tempo, pois o movimento não havia sido acelerado, mas continuava uniforme desde o início do tempo.

Axioma II: O espaço descrito por um movimento enquanto ele é acelerado, é menor do que o espaço que é descrito em um tempo igual pelo movimento que é adquirido por aquela aceleração continuada uniformemente.

Axioma III: O espaço descrito por um movimento retardado é menor do que o espaço que teria sido descrito no mesmo tempo, se o movimento não tivesse sido retardado, mas continuasse uniforme desde o início do tempo.

Axioma IV: O espaço descrito por um movimento enquanto ele é retardado é maior do que o espaço que é descrito em um tempo igual pelo movimento que permanece após esse retardamento, continuamente uniforme (Ibid., p. 59, tradução nossa).

A composição desses axiomas foi bastante elucidativa, favorecendo a argumentação de Maclaurin na proposição de teoremas, lemas e outras proposições, com vistas a proporcionar uma compreensão mais adequada dos estudos relacionados a fluxão, quando conectados ao estudo de derivada. Isso é representado por meio da compreensão e determinação da velocidade da partícula sobre a reta perpassando, assim, uma configuração ao plano

das figuras e dos sólidos geométricos. Maclaurin buscou decifrar as quantidades geradas ao considerar os acréscimos e os decréscimos sucessivos para o desenvolvimento dos cálculos fluxionais.

Dessa forma, Maclaurin (1742) assevera que as fluxões das quantidades devem, portanto, compreender quaisquer medidas de suas taxas repetitivas de aumento ou diminuição, à medida que variam (ou fluem) conjuntamente. Nesse contexto, a fim de decifrar essa ideia, Maclaurin propôs que o problema central consistia no seguinte: *Dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação entre suas fluxões, e reciprocamente*. O método de Newton aplicado a $y = x^n$ determina a fórmula da fluxão enésima conforme descrito a seguir:

Se o é um “intervalo de tempo infinitamente pequeno”, $\dot{x}o + \dot{y}o$ são os crescimentos infinitesimais pequenos de x e de y . Substituindo $y + \dot{y}o$ e $x + \dot{x}o$ na relação (entre as quantidades fluentes) $y = x^n$ obtém-se: $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$

$$y + \dot{y}o = x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 + \dots$$

Substituindo-se $y = x^n$ e cancelando, tem-se:

$$\begin{aligned} x^n + \dot{y}o &= x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 + \dots \\ \dot{y}o &= nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 \end{aligned}$$

Agora, dividindo por o , a série, obtém-se:

$$nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o + \dots$$

Sendo assim, conclui-se:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o + \dots$$

Newton elimina todos os termos que contém o como fator para obter: $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$

Dessa forma, Newton não calculava a fluxão de uma quantidade isoladamente, mas sim a razão entre duas fluxões. Ele formalizou esse método utilizando adequadamente as noções das primeiras e últimas razões. Para ilustrar seu método, Newton apresentou um caso algébrico, após ter discutido alguns procedimentos de limite geométrico semelhantes aos que ele desenvolveu em geometria curvilínea e no Principia.

Com esse resultado, Guicciardini (2009) observa que o aumento o é finito e que o cálculo visa determinar o limite da razão $\frac{(x+o)^n - x^n}{o}$ à medida que o tende a zero. O limite é alcançado precisamente quando as duas quantidades desaparecem simultaneamente. Com isso, não se trata de um limite calculado quando as quantidades diferem de zero por

uma quantidade infinitesimal. O processo descrito anteriormente equivale, de fato, ao cálculo da derivada enésima conforme mencionam os livros de cálculo:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A ideia proposta por Newton em seus cálculos, conforme mencionamos anteriormente, não possuía uma definição formal de limite, embora seus trabalhos já revelassem uma noção de limite, que só se tornou amplamente reconhecida no século XIX.

A análise interpretativa para a compreensão e caracterização do termo geral $y = x^n$ envolvendo o estudo sobre fluxão desenvolvido por Maclaurin, não segue o mesmo critério proposto por Newton ao ser apresentado em sua obra sobre o *Método Fluxional*, publicado em 1736. Baseado na relação das quantidades fluentes e na busca por encontrar a relação entre suas fluxões, seu foco estava centrado em determinar de forma coerente a quantidade gerada adequadamente a partir dos aumentos ou diminuição sucessivos dos termos. Sendo assim, a formulação da relação do termo geral $y = x^n$ e expressa através de uma proposição: A “fluxão da raiz A sendo considerado igual a , a fluxão da potência x^n será nax^{n-1} ” (Maclaurin, 1742, p. 172).

Segundo Mendes e Soares (2023) Maclaurin utiliza o método de redução ao absurdo para chegar a esse resultado, diferenciando-se do método proposto por Newton. Para Bruneau (2005), esse resultado só será possível quando se utilizarem os acréscimos sucessivos de x^n , que são representados por $x^n - (x - u)^n$ e $(x + u)^n - x^n$, onde u é um acréscimo de A , e são crescentes, conforme mostram os artigos 709 e 710. Assim, usando a axiomática dos artigos 703-705, a fluxão de x^n se situa entre essas duas diferenças. Para abordar o assunto utilizaremos a representação Fl (fluxão). Primeiramente, ele assume que $Fl(x^n) > nax^{n-1}$. Seja r positivo tal que $Fl(x^n) = nax^{n-1} + r$. Seja k um acréscimo positivo tal que

$$k = \sqrt[n-1]{x^{n-1} + \frac{r}{na}} - x$$

Portanto, $na(x+k)^{n-1} = nax^{n-1} + r = Fl(x^n)$. Seja u tal que $u < k$. Então, como $\frac{a}{u} = \frac{na(x+k)^{n-1}}{nu(x+k)^{n-1}}$, assumindo que $Fl(x) = u$, temos que $Fl(xn) = nu(x+k)^{n-1}$. Sabendo que $nu(x+k)^{n-1} > nu(x+u)^{n-1} > (x+u)^n - x^n$, o que gera uma contradição pelo fato de que $Fl(x^n) < (x+u)^n - x^n$. Logo, a $Fl(x^n) \leq nax^{n-1}$.

No segundo momento, ele assume que a $Fl(x^n) < nax^{n-1}$. Sabendo que a $Fl(x^n) = nax^{n-1} - r$, onde r é positivo e k é um decréscimo. Logo, $na(x-k)^{n-1} = nax^{n-1} - r = Fl(x^n)$.

Seja u tal que $u > k$. Então, como $\frac{a}{u} = \frac{na(x+k)^{n-1}}{nu(x+k)^{n-1}}$, assumindo que $Fl(x) = u$, temos que $Fl(xn) = nu(x-k)^{n-1}$. Sabendo que $nu(x-k)^{n-1} < nu(x-u)^{n-1} < xn - (x-u)^n$, o que gera uma

contradição, pois a Fl $(x^n) > x^n - (x - u)^n$. De acordo com o art.705, a conclusão é que não pode ser maior e nem menor, mas igual, de forma que a Fl $(x^n) = nax^{n-1}$.

Portanto, os princípios e métodos propostos por Maclaurin podem subsidiar o entendimento sobre a ideia de derivada, uma vez que este autor define inicialmente como sendo a velocidade com que uma quantidade flui numa partícula com movimento uniforme e sobre a noção de integral, ao focar na descrição do espaço ou área direcionada pela trajetória da curva. Assim, a fluxão, interpretada como a representação da velocidade, consiste em uma compreensão do que seja a derivada, que, em outras palavras, é o momento em que a curva se torna reta para a função num determinado ponto ou momento em que a quantidade gerada (velocidade) é obtida num determinado acréscimo ou decréscimo de uma partícula. As técnicas empregadas sobre esta proposta para entender fluxão enésima (x^n) torna possível a compreensão da derivada enésima, suas propriedades, fórmulas e resoluções.

O MÉTODO FLUXIONAL E SUAS IDENTIDADES, MÉTODOS E RESOLUÇÕES

No que se refere ao método fluxional e suas identidades, métodos e resoluções, Maclaurin propôs uma sistematização conceitual para explicar a expressão da derivada e integral, bem como o uso de propriedades, identidades e regras contendo métodos, fórmulas e demonstrações que contribuíram com estudos teóricos relacionados ao cálculo diferencial e integral. Para Maclaurin (1742), a flexibilidade do estudo relativo ao método fluxional ocorre pelo uso de operações algébricas, como adição (+), Subtração (-), Multiplicação (×) e divisão (/) e pela explicação do uso de números negativos e imaginários. Esse fato acontece quando a fluxão é formada pelos acréscimos (positivo) ou decréscimos (negativo) de quantidades geradas no processo.

Com isso, o teor algébrico utilizado neste processo de interpretação é obtido quando a letra é representada pela quantidade gerada pelo movimento no processo fluxional. Para Maclaurin, as evidências do método só se tornam significativos quando se emprega uma quantidade numérica de símbolos, que tem por objetivo subsidiar os princípios, proposições e suas demonstrações. Assim, a fim de evitar quaisquer suspeitas ao descrever o método da fluxão de uma maneira que pudesse representar os teoremas objetivamente, sem sinais ou caracteres particulares, busca-se uma compreensão mais concisa de seu contexto de interpretação e da concretização dos resultados (Soares, 2023).

Segundo Maclaurin (1742), ao discorrer sobre estes princípios e regras que embasam determinadas propriedades envolvendo o estudo da fluxão, observa-se o recurso utilizado sobre o tratamento de grandezas geométricas, as quais são concebidas para serem geradas pelo movimento. Este método fluxional se apropria de algumas vantagens ao comparar as taxas de aumento ou diminuição de forma natural e concisa. Dessa forma, a teoria atribuída

a esse método nos proporciona uma melhor compreensão sobre o real significado do método fluxional, que pode ser designada ao estudo sobre derivadas, bem como às identidades e técnicas de cálculo que orientam caminhos importantes para o ensino de cálculo diferencial e integral nos cursos de licenciatura em Matemática.

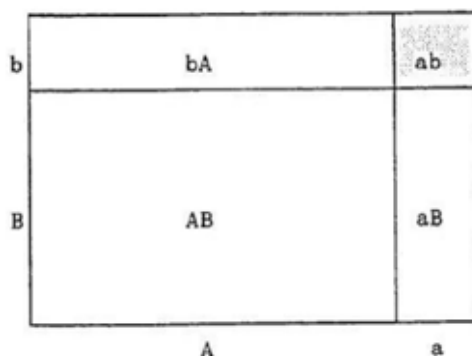
Segundo Smestad (1995) a determinação da fluxão de x^n proposta por Maclaurin (1742) em seu tratado, estabelece um método de abordagem diferente do que foi apresentado no estilo newtoniano, que envolvia o estudo de curvas e séries. Maclaurin não se utiliza da ideia de polinômios para concluir seus resultados, mas emprega o método de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) para provar as proposições que garantam o resultado da fluxão, por meio de argumentos os quais fundamentam essa teoria conforme já calculado anteriormente. Detalharemos de forma breve como Maclaurin chegou ao resultado de algumas identidades, regras e propriedades do método fluxional. Mesmo ao utilizar fórmulas e propriedades operacionais em seus cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão, ele também incluiu cálculos inerentes ao método fluxional, como funções exponenciais e logarítmicas.

Para Mendes (2021), o trabalho realizado por Maclaurin sobre o tratado das fluxões é um exemplo de criatividade fundamental para o desenvolvimento das construções do cálculo diferencial e integral. Ao estudar o método fluxional, é possível entender como as construções lógicas do cálculo oferecem ressignificações consistentes para compreensão das noções que norteiam o entendimento da ideia de derivada, seus métodos, regras e resoluções. A esse respeito apresentamos a seguir as principais regras, métodos e propriedades envolvendo as operações básicas da Matemática através do uso da fluxão desenvolvida por Maclaurin:

Regra 1: A soma e a subtração da fluente é igual à soma e a subtração das fluxões. Nesse sentido, a fluxão de $x + y - z$ é $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z}$. Como exemplo, Maclaurin utiliza a fluxão de $ax + by - cz$ é $a\dot{x} + b\dot{y} - c\dot{z}$, onde a , b e c são constantes.

Regra 2: A fluxão de um produto de quaisquer duas fluentes é a soma de vários produtos quando a fluxão de cada fator é multiplicada pelo outro fator. Dessa forma, a fluxão de xy é $\dot{x}y + x\dot{y}$. Esta regra é conhecida como *regra do produto*.

Newton, ao tentar explicar o cálculo notável do produto do retângulo A.B, o que trouxe muita reflexão sobre os acréscimos necessários para encontrar a área do retângulo, conforme mostra a figura 3 a seguir.

Figura 3: Produto Fluxional AB

Ao realizar uma análise interpretativa do cálculo de área realizado por Newton, tem-se: $A = (A+a)(B+b) - AB = Ab + aB + ab$, onde ab representa o acréscimo da expressão, o que levou a muitos estudiosos a questionarem seus cálculos. Para tentar relacionar de forma coerente os seus cálculos, Maclaurin fornece uma nova interpretação para o produto fluxional entre duas fluentes x e y . Ele parte do mesmo princípio da determinação da quantidade gerada e dos acréscimos ou decréscimos sucessivos. Assim, entende-se:

Supondo que as fluxões de x e y sejam iguais e $\dot{x}$, respectivamente, a fluxão de $x + y$ será igual $\dot{x} + \dot{y}$. Desse modo, a fluxão de $(x + y)^2$, ou $xx + 2xy + yy$, será $2 \cdot (x + y) \cdot (\dot{x} + \dot{y})$ ou $2x\dot{x} + 2x\dot{y} + 2y\dot{x} + 2y\dot{y}$, de acordo com a proposição 1: Supondo-se que a fluxão da raiz A seja igual a a , a fluxão do Quadrado AA será igual a $2A \times a$ ou $2Aa$ presente no segundo livro sobre o Tratado das Fluxões. A fluxão de $xx + yy$ é $2x\dot{x} + 2y\dot{y}$, da mesma forma, consequentemente, a fluxão de $2xy$ é $2x\dot{y} + 2y\dot{x}$. Logo, a fluxão de xy será $x\dot{y} + y\dot{x}$, ou seja, $xy = \dot{x}y + x\dot{y}$ (fórmula da regra do produto entre duas fluxões). A fórmula encontrada para a regra do produto entre duas fluxões tem semelhança com a regra do produto envolvendo derivada entre duas funções, conforme apresentada em notação moderna nos cursos de cálculo do Ensino Superior.

Regra 3: A fluxão de qualquer fração é encontrada multiplicando a fluxão do numerador pelo denominador, subtraindo o produto da fluxão do denominador multiplicado pelo numerador, e dividindo o restante pelo quadrado do denominador. Neste caso, compreende-se que: a fluxão da fração $\frac{x}{y}$ é $\frac{\dot{x}y + x\dot{y}}{y^2}$. Esta regra é chamada de regra do quociente.

Para demonstrar a fluxão de quaisquer fração, Maclaurin utiliza a regra do produto entre duas fluentes. Para isso, ele faz uso de uma proposição ao fundamentar-se no produto envolvendo vários fatores. Desse modo, Maclaurin (1742) ao supor que P seja o produto dos fatores A, B, C, D, E , etc., (ou $P = ABCDE$, etc.), a fluxão de P, A, B, C, D, E , etc., será respectivamente igual a p, a, b, c, d, e , etc., e p/P será igual a $p = \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D} + \frac{e}{E}$ etc., utilizando essa proposição, ele deduz a fórmula da fluxão entre o quociente de dois valores algébricos.

Assim, seja $P = xy$, e a fluxão de P for p , então $p = \dot{x}y + x\dot{y}$, e dividindo por P , ou xy , encontramos $\frac{p}{P} = \frac{\dot{x}y + x\dot{y}}{xy} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y}$. se $Q = x/y$, e q for a fluxão de Q , então $Qy = x$, $\frac{q}{Q} + \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{x}}{x}$ ou;

$\frac{q}{Q} = \frac{\dot{x}}{x} - \frac{\dot{y}}{y}$ e consequentemente $q = \frac{Q\dot{x}}{x} - \frac{Q\dot{y}}{y} = \frac{\dot{x}}{y} - \frac{xy}{yy} = \frac{\dot{x}y - xy}{yy} = \frac{\dot{x}y - xy}{y^2}$ (regra do quociente entre duas fluentes). Isso também é válido quando qualquer uma das quantidades diminuem, sendo a fluxão considerada negativa. A fórmula que gera a regra do quociente.

Regra 4: A fluxão de uma potência de qualquer expoente invariável é encontrada multiplicando pelo expoente, subtraindo uma unidade no índice da potência e multiplicando pela fluxão da raiz. Isso pode ser representado da seguinte forma: A fluxão da potência x^n será $n\dot{x}x^{n-1}$, sendo x e sua fluxão $\dot{x}$. Como exemplo, o autor utiliza as respectivas fluxões de x^2 , x^3 , x^4 , etc. e são $2x^{2-1}\dot{x}$ ou $2x\dot{x}$, $3x^{3-1}\dot{x}$ ou $3x^2\dot{x}$, $4x^{4-1}\dot{x}$ ou $4x^3\dot{x}$, etc. Esta regra recebe o nome de Regra da Cadeia ou fluxão enésima da potência. Desta regra, derivam outras propriedades importante no processo fluxional:

Propriedade 1: A fluxão de uma potência de qualquer expoente fracionário invariável é determinada multiplicando-se pelo expoente, subtraindo uma unidade no índice da potência, e multiplicando-se pela fluxão da expressão algébrica. Dessa propriedade, obtém-se: A fluxão de $x^{\frac{m}{n}}$ é $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\dot{x}$. Como exemplo, Maclaurin busca encontrar a fluxão de $\sqrt{x}$ ou é $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\dot{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}}$. Esta regra consiste na fluxão da raiz enésima.

Propriedade 2: A inversa da fluxão da potência x^n segue o mesmo raciocínio da regra 4, sendo a potência inversa $1/x^n$ ou x^{-n} , cuja fluxão será $-n.x^{-n-1}\dot{x}$ ou $\frac{-n\dot{x}}{x^{n+1}}$. Para esta propriedade, tem-se os seguintes exemplos: a fluxão de $1/x$ ou x^{-1} , $1/x^2$ ou x^{-2} , ou $1/x^3$ ou x^{-3} , são respectivamente

$$-1x^{-1-1}\dot{x} \text{ ou } \frac{-\dot{x}}{x^2}, -2x^{-2-1}\dot{x} \text{ ou } \frac{-2\dot{x}}{x^3}, -3x^{-3-1}\dot{x} \text{ ou } \frac{-3\dot{x}}{x^4}$$

Propriedade 3: Se os fatores forem supostos iguais entre si, e seu número for igual a n , quando $P = x^n$. Sabendo que suas grandezas geradoras são proporcionais aos fluxos. Logo, encontramos que $\frac{p}{P} = \frac{na}{x} \Rightarrow p = \frac{nPa}{x} = nx^{n-1}\dot{x}$, de acordo com a Proposição II, gera a fluxão da potência enésima.

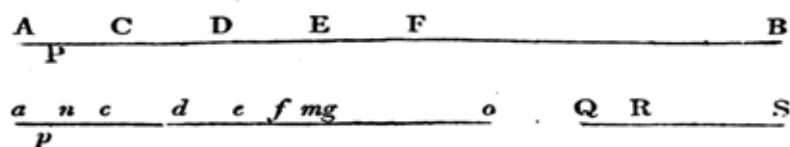
MÉTODOS FLUXIONAIS ENVOLVENDO A EXPONENCIAL E O LOGARITMO

Existem conteúdos na área da Matemática que são imprescindíveis para o estudo das fluxões. Dois desses conteúdos, apresentados por Maclaurin no seu Tratado das Fluxões, são mencionados pelo autor: *A exponencial e o logaritmo*. Ambos podem ser expressos na forma proporcional envolvendo o uso de progressões aritméticas e geométricas, pois podem ser comparados para a obtenção dos resultados numa razão contínua. Para Maclaurin

(1742), os logaritmos foram inventados para facilitar cálculos em aritmética e trigonometria por John Napier (1550-1617), e desde então têm sido considerados de grande utilidade na geometria superior, particularmente no método das fluxões.

Inicialmente, Maclaurin (1742), fundamentado em seu trabalho sobre fluxões, apresenta uma abordagem sobre os estudos de logaritmos concebido a partir da ideia de que uma linha aumenta igualmente quando o ponto que a descreve se move sobre espaços iguais em tempos iguais. Para ele, considerando A partindo sobre a reta que a descreve pelo fluxo ou movimento de P, ao fluir de A para C no primeiro momento (ou em qualquer parte do tempo de C para D, no segundo momento, de D para E, no terceiro) e assim sucessivamente descrevendo sempre em partes iguais AC, CD, DE, EF, etc., em tempos iguais. Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se que a reta diminui proporcionalmente quando o ponto que descreve as partes em tempos iguais sempre estão na mesma razão constante nas retas das quais são subdividas, ou para as distâncias desse ponto no início desse tempo a partir de um determinado termo na linha, conforme mostra a Figura 4 a seguir:

Figura 4: Linha proporcional dos logaritmos



Fonte: Maclaurin (1742)

Sendo assim, seguindo as regras viáveis de proporcionalidade mencionadas pelo uso do método fluxional de Maclaurin, obtém-se mecanismo notáveis para encontrar a razão:

Seja a razão de QR para QS qualquer razão dada; com isso, *ac* está para *ao*, *cd* para *co*, *de* para *do*, *ef* para *eo*, *fg* para *fo*, &c. sempre na mesma proporção invariável de QR para QS. Suponha que o ponto *p* parta de *a*, descrevendo *ac*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, &c. em partes iguais do tempo; e que o espaço descrito por *p* em qualquer tempo dado esteja sempre na mesma razão da distância de *p* de *o* no início desse tempo. Então, diz-se que a linha direita *po* diminui proporcionalmente. É evidente que os segmentos *ao*, *co*, *do*, *eo*, *fo*, &c. ou as distâncias do ponto *p* de *o* em intervalos de tempo sucessivos iguais, estão em uma progressão geométrica contínua (Maclaurin, 1742, p. 159, tradução nossa).

Para isso, a presença da razão com base no uso proporcional nos permite comparar progressões aritméticas e geométrica, a fim de encontrar os respectivos logaritmos, seguindo a lógica da razão. Assim, supondo um movimento uniforme do ponto P ao descrever a linha AB é igual ao movimento com que *p* parte de *a* ao descrever a linha *ao*. Então, tem-se que a linha AP que é descrita por P com o movimento uniforme, tendo ao mesmo tempo *ao* decrescendo proporcionalmente, torna-se igual a *op*, que é o seu logaritmo. Desse modo, AC, AD, AE, AF, etc., são os logaritmos de *oc*, *od*, *oe*, *of*, etc., respectivamente, e *oa* é a quantidade cujo logaritmo é supostamente igual a zero.

Da mesma forma, Maclaurin (1742) formaliza sua ideia sobre o que seja o logaritmo em termos fluxionais, quando supõe que a reta ao aumente proporcionalmente. Ao mover o ponto p ao longo da reta de modo que ao produza, além de o , e em quaisquer tempos iguais, os espaços descritos sejam proporcionais às suas distâncias iniciando-se em o em cada tempo, de forma que os aumentos ac , cd , de , ef , etc., possa ser descrito proporcionalmente quando ac está para ao , cd para co , de para do , ef para eo , etc, estejam sempre na mesma razão invariável. Levando em consideração a razão e a forma contínua proporcionalidade das retas. Quando o ponto p se move de a para o , op diminui proporcionalmente, e o movimento de p é continuamente decrescente, pois os espaços descritos por ele em quaisquer igualdades de tempo, diminuem, neste caso, na mesma proporção que op diminui.

Para isso, Maclaurin (1742, p. 175, tradução nossa) entende que o logaritmo de qualquer quantidade no primeiro sistema de Napier “se torna igual ao logaritmo da mesma quantidade em qualquer outro sistema, cujo módulo é oe , multiplicando-o pelo número que expressa a razão de oe para ao ”. Seguindo essa ideia, e tomando como referência o primeiro esquema de Napier, e ao mesmo tempo em que op deve ser igual a ao torna-se igual a 10 vezes ao , o ponto P descreve uma linha cuja razão para ao é de 2,3025809, etc., ou $\ln 10$ para unidade. No entanto, foi considerado conveniente que o logaritmo de dez fosse supostamente igual a 1.

Sendo assim, se supormos que o ponto P seja subtraído do espaço descrito e fosse igual apenas a ao . Desse modo, sua velocidade, neste caso, for supostamente menor que a velocidade anterior na mesma razão em que 1 seja menor que 2,3025809, etc. Se oe tornar menor que ao , na mesma razão, a velocidade de P será, neste caso, será igual à velocidade de p em e . Com isso, oe será o módulo deste sistema que, entretanto, pode ser expresso por 0,4342944, etc., ou $1/\ln 10$ com ao representando a unidade (Soares, 2023).

Portanto, quando uma razão for dada, sua medida é sempre o *módulo do sistema*. A mesma razão invariável é sempre medida pelo módulo do sistema, o qual é chamado por *Cotes de Razão Modular*. Esta razão é a de om para oe , se op inicialmente aumenta proporcionalmente, torna-se igual de oe para om , ao mesmo tempo que P pelo seu movimento uniforme descreve uma reta igual ao módulo oe (Maclaurin, 1742, tradução nossa).

Para Maclaurin (1742), a fluxão dos logaritmos sendo supostamente invariável, as fluxões de quaisquer quantidades N e M estará na mesma proporção dessas próprias quantidades. Isso ocorre porque sua propriedade fundamental dos logaritmos estabelece que, em qualquer progressão aritmética, as quantidades cujos logaritmos estão sempre em progressão geométrica. Assim, supondo que os logaritmos aumentem por diferenças iguais, essas quantidades aumentarão ou diminuirão por diferenças aumentando ou diminuindo na mesma proporção das próprias quantidades.

Diante disso, surge uma nova proposição sobre a fluxão do logaritmo: *A fluxão de qualquer quantidade N está para a fluxão de seu logaritmo assim como N está para o módulo do sistema logarítmico*. Supondo que as quantidades e seus logaritmos aumentem ou diminuam conjuntamente, quando a quantidade aumenta ou diminua na mesma razão do logaritmo, ela é então igual ao *módulo*. Se essa quantidade em relação ao *módulo* for M, e como a fluxão de N está para a fluxão de M assim como N está para M, resulta que a fluxão de N está para a fluxão de seu logaritmo assim como N está para o seu módulo (Soares, 2023).

Então, se $N = A^e$, e sendo qualquer expoente invariável, o $\log N = e \times \log A$, consequentemente, assumindo que as fluxões de N e A são supostamente iguais a n e a respectivamente, $\frac{Mn}{N} = \frac{eMa}{A}$, e $n = \frac{eNa}{A} = eA^{e-1}a$ ou $eA^e \cdot A^{-1} \cdot a = \frac{1}{A} eA^e a$. Se admitirmos o logaritmo com base fixa e logaritmando variável, encontrar a fluxão de $\log_b A$? Sabendo que $N = \log_b$ ou $N = \frac{1}{\ln b}$ uma vez que e será invariável e igual à velocidade de A em e , conforme detalha Maclaurin. Tem-se que: $n = \frac{Na}{A}$. Disso resulta a conclusão de que a sua fluxão será concedida por $n = \frac{a}{A \ln b}$, onde a é a fluxão de A, tornando-se semelhante à fórmula da derivada da função logarítmica.

De acordo com o mecanismo adotado por Maclaurin, sabendo que as fluxões logarítmicas derivam das exponenciais, pois os logaritmos das potências e seus expoentes estão sempre na mesma razão podendo *oq* ser expresso por A^x , o qual é chamado de *Quantidade Exponencial* de primeiro grau, conforme define Leibniz em sua notação em resposta a uma carta enviada por Newton ao Sr. Oldenburgh, de 24 de outubro de 1676. Maclaurin (1742) mostra que A^x , com uma quantidade variável no expoente denominando de exponencial ou *quantidade recorrente*⁵ e sua fluxão é dada por $x/C + x \cdot A^{x-1} \cdot a$, onde X é a fluxão de x e a é a fluxão de A e U é a fluxão de u e C é uma constante qualquer.

Ao demonstrar essa fluxão, Maclaurin supõe que $A^x = u$, então aplicando o log em ambos os lados, obtemos $\log A^x = \log u$, pela propriedade logarítmica do expoente, tem-se $x \cdot \log A = \log u$. Ao usarmos a regra do produto envolvendo fluxões, conforme vimos anteriormente, chegaremos no seguinte resultado: $X \cdot \log A + x \cdot \frac{Ca}{A} = \frac{C \cdot U}{u}$. Consequentemente, o valor que multiplica U, divide a expressão antes da igualdade, isto é $\frac{X \cdot \log A + x \cdot \frac{Ca}{A}}{\frac{C}{u}}$, a fluxão de A^x , ou $U = \frac{uX}{C} \cdot \log A + x \cdot \frac{ua}{A}$ ou $U = \frac{uX}{C} \cdot \log A + \frac{uxa}{A}$. Com isso, Sabendo que $u = A^x$, e ao substituir na equação de U, obtemos que: $U = \frac{uX}{C} \cdot \log A + \frac{uxa}{A} = \frac{X}{C} \cdot A^x \cdot \log A + \frac{A^x xa}{A}$. Logo, tem-se que: $\frac{X}{C} \cdot A^x \cdot \log A + \frac{A^x xa}{A} = \frac{X}{C} \cdot A^x \cdot \log A + xA^{x-1}a$.

Portanto, a fluxão de A^x é $\frac{X}{C} \cdot A^x \cdot \log A + x \cdot A^{x-1} \cdot a$. Ao desprezar as fluxões enésimas de tais expressões, obtemos $\frac{X}{C} \cdot A^x \cdot \log A$. Sabendo que as constantes podem ser omitidas em tais expressões envolvendo fluxões, concluímos $X \cdot A^x \cdot \log A$, ou seja, o logaritmo não tem uma

⁵ Acta Eruditorum Lipsiae, 1694.

base fixa e invariável. Se adotarmos uma base fixa invariável e na expressão logarítmica ou por conveniência de uma mudança de base adequada, chega-se à seguinte conclusão $X.A^x$. $\log_e A$ ou $X.A^x \cdot \ln A$, onde X é a fluxão de x . Este resultando de certo modo se assemelha com a derivada da função exponencial, conforme abordam os livros de cálculo atualmente.

Dessa forma, das fluxões da exponencial e da logarítmica derivam-se importantes propriedades que marcam o estudo sobre a fluxão da exponencial é a do logaritmo natural ou neperiano. Esses dois tópicos aparecem nos principais livros de cálculo avançado, especialmente nos estudos envolvendo derivada e integral. Com isso, a derivada apresenta as seguintes propriedades:

Propriedade 1: A fluxão do logaritmo natural de x ou $\ln x$. Conforme vimos na regra que gera a fluxão do logaritmo é dado por $\frac{\log_a e \cdot \dot{x}}{x}$. Sabendo que a base do logaritmo natural é o e (*logaritmo neperiano*). Assim, $\frac{\log_e e \cdot \dot{x}}{x} = \frac{1 \cdot \dot{x}}{x}$ ou $\frac{\dot{x}}{x \ln a} = \frac{\dot{x}}{x \ln e} = \frac{\dot{x}}{x}$. Portanto, a fluxão de $\ln x$ é $\frac{1 \cdot \dot{x}}{x}$.

Propriedade 2: A fluxão da exponencial e^x , conforme já detalhamos, tem-se: a fluxão de e^x é obtida da fórmula $\dot{x} \cdot a^x \cdot \log_e a$ ou $\dot{x} \cdot a^x \cdot \ln a$. Ao usar $\dot{x} \cdot a^x \cdot \log_e a = \dot{x} \cdot e^x \cdot \log_e e = \dot{x} \cdot e^x \cdot 1 = \dot{x} \cdot e^x$. Por outro lado, se usarmos $\dot{x} \cdot a^x \cdot \ln a = \dot{x} \cdot e^x \cdot \ln e = \dot{x} \cdot e^x \cdot 1 = \dot{x} \cdot e^x$.

A proposta elaborada por Maclaurin acerca dos métodos fluxionais trouxe abordagens e construções contendo regras, propriedades, métodos e resoluções que não se encontram presentes nos livros de cálculo convencionais. No entanto, esse método fluxional segue os mesmos princípios norteadores quando se busca compreender conceitos, regras, métodos e resoluções envolvendo o estudo de derivada nas disciplinas de cálculo diferencial e integral no Ensino Superior. A seguir, apresentamos um aspecto comparativo das principais regras, métodos, propriedades das fluxões, que produzem direcionamentos semelhantes para alcançar as mesmas respostas sobre derivadas, conforme abordam os principais livros de cálculo da atualidade, desenvolvidos a partir dos estudos sobre funções de acordo com Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Quadro comparativo entre fluxões e derivadas

Fluxões e Derivadas					
Fluxões: Método algébrico			Derivada: Funções		
Fluentes	Fluxões	Método	Funções	Derivadas	Método
$x + y - z$	$\dot{x} + \dot{y} - \dot{z}$	Fluxão da Soma e Subtração	$F(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$	Derivada da Soma e Subtração
xy	$x\dot{y} + y\dot{x}$	Fluxão do Produto	$F(x).g(x)$	$f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$	Derivada do produto
$\frac{x}{y}$	$\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{y^2}$	Fluxão do quociente	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(x).g'(x) - g(x).f'(x)}{g(x)^2}$	Derivada do quociente
x^n	$nx^{n-1}\dot{x}$	Fluxão da potência	$F(x) = x^n$	$F'(x) = nx^{n-1}$	Derivada da potência
x^n	$nx^{n-1}\dot{x}$	Regra da cadeia	$y(x) = f(g(x))$	$y'(x) = f'(g(x)).g'(x)$	Regra da cadeia
$\frac{m}{x^n}$	$\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\dot{x}$	Fluxão da raiz enésima	$f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$	$f'(x) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$	Derivada da raiz enésima
$\frac{1}{x^n}$ ou x^{-n}	$-n.x^{n-1}\dot{x}$ ou $\frac{-n\dot{x}}{x^{n+1}}$	Fluxão da inversa da potência	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ou x^{-n}	$f'(x) = -n.x^{n-1}$	Derivada da inversa da potência
$\log_a x$	$\frac{\dot{x}}{x \ln a}$	Fluxão do logaritmo de x na base a	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	Derivada da função logarítmica
a^x	$\dot{x}.a^x \ln a$	Fluxão da exponencial de x de base a	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	Derivada da função exponencial
$\ln x$	$\frac{1}{x} \cdot \dot{x}$	Fluxão do logaritmo natural de x	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	Derivada do Logaritmo natural
e^x	$\dot{x}.e^x$	Fluxão do logaritmo neperiano de x	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	Derivada do neperiano de x

Fonte: Elaborado pelos autores.

Este quadro comparativo destaca os principais métodos de cálculos sobre fluxões e derivadas, demonstrando que os estudos oriundos sobre o método fluxional esclarecem conceitos, regras, propriedades, métodos e resoluções, os quais servirão de suporte teórico para auxiliar os professores e futuros docentes na apreensão do estudo envolvendo derivada. Embora não existam estudos no Brasil que apresentem evidências sobre o método das fluxões relacionadas ao cálculo diferencial e integral, vale destacar a importância sobre a possibilidade da utilização do método fluxional como forma de nortear a construção do cálculo como algo que esteja conectado ao ensino de Matemática, de modo a complementar o que os livros de cálculos abordam sobre esta temática a fornecer novas ideias e caminhos através de orientações para propiciar uma melhor compreensão do estudo de derivada, bem como, suas regras e métodos de resoluções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise do método fluxional estabelecido em nossa pesquisa trouxe novos caminhos interpretativos e novos indicativos para abordagem conceitual e didática do tema que apontaram uma nova perspectiva para a construção identitária do cálculo diferencial e integral. A análise histórica e investigativa dos dois volumes do *A Treatise of Fluxions* (O Tratado das Fluxões) de Colin Maclaurin, evidenciou a potencialização de um novo estudo dimensional sobre o ensino de cálculo com propostas que poderão ser importantes para a compre-

ensão dos conceitos relacionados à derivada, bem como os métodos, regras, propriedades e resoluções de problemas concernentes a esse tema.

Notamos, inicialmente, que a ideia sobre a fluxão foi idealizada por Newton e aperfeiçoada por Maclaurin, tornando-se uma ferramenta significativa e um instrumento importante para a abordagem do conceito de derivada e conseqüentemente para o ensino de cálculo nos cursos de Licenciaturas em Matemática. Neste sentido, asseveramos que essa ideia, concernente a fluxão de Newton, cumpriu um papel significativo para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral ao possibilitar conceitos que poderão servir como subsídios para a formação conceitual desse assunto junto a futuros professores de Matemática. Uma abordagem fundamentada no trabalho de Maclaurin associada ao desenvolvimento matemático proposto nos livros de cálculo atuais certamente permitirá um exercício de aprendizagem compreensiva do assunto por parte dos estudantes de graduação em Matemática, o que, posteriormente, poderá se desdobrar no aperfeiçoamento do processo de ensino que promova aprendizagem na disciplina cálculo diferencial e integral.

Portanto, reiteramos que um movimento que envolva um sequencial histórico do desenvolvimento epistemológico do tema, conectado aos modos de abordagem propostos nos livros didáticos e programas disciplinares do curso de cálculo pode representar uma dinâmica de incorporação histórico-conceitual do tema com o modo de abordagem atual presente nos livros de cálculo, eliminando, assim, as discontinuidades referentes ao desenvolvimento conceitual do assunto, de modo a ressignificar e complementar a abordagem conceitual presente nesses livros de cálculo. Assim, fortalecerá os processos de compreensão dos conceitos necessários à aprendizagem de tópicos relacionados ao estudo de derivadas e suas aplicações no processo de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral.

Portanto, reafirmamos que este artigo poderá alcançar novos direcionamentos para estudos relacionados às derivadas, bem como suas regras e as propriedades. Isto porque os métodos fluxionais apresentam semelhanças, aproximações e detalhamento esclarecedores referentes aos processos de derivação presentes nos principais livros atuais de cálculo adotados no Ensino Superior. As bases construtivas que nortearam Newton e Leibniz a desenvolver suas ideias sobre esse tema, no século XVII e XVIII, possuem uma identidade específica que configuraram o desenvolvimento do cálculo infinitesimal ao longo dos séculos XVIII e XIX. Desse modo, as regras, propriedade, métodos e resoluções trouxeram um novo entendimento sobre derivada a partir do método fluxional.

Apesar de tais métodos terem surgido a partir de concepções distintas acerca do estudo sobre derivada, ambos apresentam regras e métodos semelhantes com resoluções de fórmulas idênticas, as quais servirão para auxiliar os professores e futuros docentes na com-

preensão desse estudo, oferecendo novas práticas voltadas para o ensino de Matemática na disciplina de cálculo diferencial e integral.

REFERÊNCIAS

- BRUNEAU, Olivier. **Pour une Biographie intellectuelle de Colin Maclaurin (1698- 1746): ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien**. 2005. 477f. Tese (Doutorado em Epistemologie, Histoire des Sciences et des Techniques)–Université de Nantes, França, 2005.
- CALAZANS, Alex. **Newton e Berkeley: As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões n' O Analista**. 2008. 111f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Centro de Educação Letras e Artes da Universidade Federal de Paraná–UFPR, Curitiba, 2008.
- CALAZANS, Veronica Ferreira Bahr. **A Filosofia da matemática nos Principia de Newton e suas implicações ontológicas**. 2014. 156f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 2014.
- GUICCIARDINI, Niccolò. **Isaac Newton on mathematical certainty and method**. London: MIT Press, 2009.
- MACLAURIN, Colin. **A Treatise of Fluxions**. In Two Books. Edinburgh: Printed by T.W. and T. Ruddimans, 1742.
- MENDES, Iran Abreu. Relações conceituais entre história, cognição e aprendizagem matemática. In: MENDES, Iran Abreu (Org.). **A história como um agente de cognição na educação Matemática**. 2. ed. Revista e ampliada. São Paulo: LF Editorial, 2023.
- MENDES, Iran Abreu. História como um agente cognitivo de aprendizagem matemática compreensiva. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 25, n. 2, p.329-355, 2023 –25 anos da revista EMP.
- MENDES, Iran Abreu. Historical Creativities for the Teaching of Functions and Infinitesimal Calculus. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 16, n. 2, p.1-21, 2021a.
- MENDES, Iran Abreu. Sobre processos criativos nas histórias da criação matemática. In: Pereira, A. C. C.; Martins, E. B. (Orgs.). **Investigações científicas envolvendo história da Matemática sob o olhar da pluralidade**. Curitiba: Editora CRV, 2021b. p. 63-74
- MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. Das fluxões às derivadas: uma abordagem fundamentada na obra de Colin MacLaurin. **Seminário Nacional de História da Matemática**, v. 15, 2023. Disponível em: <https://snhm.com.br/anais/article/view/92>.
- MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. Uma história das fluxões às derivadas na Obra de Colin Maclaurin. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, n. 45, p. 82–105, 2022. <https://doi.org/10.47976/RBHM2022v22n4582-10>.
- NEWTON. Isaac. **The Method of fluxions and infinite series**. Londres, 1736.

PANZA, Marco. **Newton**. Paris: Belles Lettres, 2002.

PANZA, Marco. Das velocidades as fluxoes. **Scientiæ Zudia**, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 509-546, 2010.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da. **Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral**: dos gregos a Newton. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, Natal, 2010.

SMESTAD, Bjørn. **Foundations for Fluxions. Noruega**: Universidade de Oslo, 1995.

SOARES, Evanildo Costa. **Um estudo do tratado das fluxões de Colin Maclaurin e suas conexões com o ensino de cálculo diferencial e integral**. 2023. 187f. Tese de doutorado (Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra – UFRN, Natal, 2023.

Apêndice–Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 11 de Junio de 2024.

Aprobado: 08 de Diciembre de 2024.

Publicado: 20 de Enero de 2025.

Como Citar — APA

Mendes, I. A., & Soares, E. C. (2025). O método fluxional de Colin MacLaurin e o ensino de derivadas. *PARADIGMA*, XLVI(1), e2025008. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025008.id1599>.

Como Citar — ABNT

MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. O método fluxional de Colin MacLaurin e o ensino de derivadas. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVI, n. 1, e2025008, Ene./Jun., 2025. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025008.id1599>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a revista **Paradigma** los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista **Paradigma** tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativas en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (**Open Access**) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (**Article Processing Charges – APCs**). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.



Licencia de uso

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.



Comprobación de similitud

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto **iThenticate** de Turnitin, a través del servicio de **Similarity Check** de la Crossref.



Proceso de evaluación

Revisión por pares a doble ciego (**Double blind peer review**).

Editor

Fredy E. González

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista Paradigma obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

