

Análisis de la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza de la probabilidad por futuros profesores de educación secundaria

Rocío Álvarez-Arroyo¹  Carmen Batanero²  María M. Gea³ 

Resumen

La enseñanza efectiva de la probabilidad requiere la competencia del profesorado para analizar propuestas de enseñanza. En este trabajo se analiza la valoración de la adecuación de una secuencia de enseñanza de la probabilidad y los cambios sugeridos para mejorarla que realiza un grupo de futuros profesores de matemáticas españoles de educación secundaria, al finalizar una acción formativa. Para ello se estudian 39 protocolos producidos por 69 futuros profesores trabajando en pequeños grupos cuando analizan los nueve indicadores de idoneidad epistémica, justificando su valoración y proponiendo sugerencias para mejorar dicha idoneidad de la secuencia analizada. Los resultados muestran una competencia razonable de análisis de los indicadores de la idoneidad epistémica y menor competencia para elaborar propuestas de mejora de la enseñanza. Se concluye la necesidad de potenciar la práctica reflexiva en torno al análisis didáctico de los futuros profesores sobre probabilidad.

Palabras clave: Formación de Profesores, Educación Secundaria, Competencia de Análisis Didáctico, Idoneidad Epistémica.

Analysis of the epistemic suitability of a probability teaching process by prospective secondary school teachers

Abstract

The effective teaching of probability requires the competence of teachers to analyze teaching proposals. This paper analyzes the evaluation of the suitability of a probability teaching sequence and the changes suggested to improve it by a group of Spanish prospective secondary school mathematics teachers after a training action. For this purpose, 39 protocols produced by 69 future teachers working in small groups were studied when analyzing the nine indicators of epistemic suitability, justifying their evaluation and proposing suggestions to improve the suitability of the sequence analyzed. The results showed a reasonable competence in analyzing the indicators and low competence in elaborating proposals to improve teaching. We conclude that there is a need to strengthen the reflective practice around the didactic analysis of future teachers in the field of probability.

Keywords: Teacher Education, Secondary Education, Didactic Analysis Competence, Epistemic Suitability.

Análise da idoneidade epistémica de um processo de ensino da probabilidade por futuros professores do ensino secundário

Resumo

O ensino efetivo das probabilidades requer a competência dos professores para analisar propostas de ensino. Este artigo analisa a avaliação da idoneidade de uma sequência de ensino de probabilidades e as alterações que fariam para a melhorar por parte de um grupo de professores de matemática do ensino secundário espanhol em formação no final de uma ação de formação. Para este efeito, são estudados 39 protocolos produzi-

¹ Universidad de Granada (UGR), España. E-mail: rocioaarroyo@ugr.es

² Universidad de Granada (UGR), España. E-mail: batanero@ugr.es

³ Universidad de Granada (UGR), España. E-mail: mmgea@ugr.es

dos por 69 futuros professores, trabalhando em pequenos grupos, quando analisam os nove indicadores de idoneidade epistémica, justificando a sua avaliação e propondo sugestões para melhorar esta idoneidade da sequência analisada. Os resultados mostram uma competência razoável na análise dos indicadores de idoneidade epistémica e uma competência baixa na elaboração de propostas de melhoria do ensino. Conclui-se que é necessário reforçar a prática reflexiva na análise didática dos futuros professores no domínio da probabilidade.

Palavras chave: Formação de Professores; Ensino Secundário; Competência da Análise Didática; Idoneidade Epistémica.

INTRODUCCIÓN

La probabilidad es una de las ramas de la matemática de mayor interés en la Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años) y Bachillerato (17-18 años), por permitir matematizar los fenómenos aleatorios y ser la base del estudio de la inferencia estadística (Álvarez-Arroyo *et al.*, 2024). Además, permite conectar con otros muchos temas, como estadística, combinatoria, proporcionalidad, álgebra o cálculo, e introduce un modo propio de razonamiento en el estudio de la matemática (Van Dooren, 2014). Estas razones han llevado a proponer en la Educación Secundaria Obligatoria española (ESO) el cálculo de la probabilidad, aplicando la regla de Laplace, las técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos y su aplicación a la toma de decisiones (MEFP, 2022a). Se añade en Bachillerato (MEFP, 2022b) el estudio de la probabilidad compuesta y condicional, teorema de Bayes y distribuciones de probabilidad binomial y normal.

Puesto que una enseñanza eficaz de la probabilidad requiere la formación adecuada del profesorado, diferentes autores indican que es necesario fortalecer su preparación para enseñar probabilidad (Batanero, 2022; Elbehary, 2022). Dicha formación ha de estar basada en una evaluación previa de sus conocimientos y competencias, que deben permitirle analizar y valorar los procesos instruccionales, planificados o implementados, y proponer mejoras de estos (Font *et al.*, 2023; Giacomone *et al.*, 2018).

En este trabajo se analiza dicha competencia de análisis y valoración, utilizando el instrumento proporcionado por la teoría de la idoneidad didáctica (Font *et al.*, 2023; Godino, 2013; 2024; Godino *et al.*, 2023) para analizar una secuencia de enseñanza de la probabilidad dirigida a los primeros cursos de ESO. En concreto, se plantean dos preguntas de investigación: 1) ¿Qué competencia muestran los futuros profesores de matemática de educación secundaria en formación para analizar la idoneidad epistémica de una secuencia de enseñanza de la probabilidad? y 2) ¿Son capaces de aportar sugerencias para mejorar dicha idoneidad en la secuencia analizada?

En lo que sigue se describe el marco teórico utilizado, los antecedentes del trabajo, método empleado, resultados y conclusiones obtenidas.

MARCO TEÓRICO

El trabajo se apoya en elementos del Enfoque Onto Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2024; Godino *et al.*, 2019), en el que los objetos matemáticos se consideran emergentes de las prácticas realizadas al resolver problemas relacionados con los mismos y el significado (institucional o personal) del objeto se concibe como el sistema de prácticas (institucionales o personales) ligadas con el objeto. Dichos objetos pueden ser situación-problema, lenguaje, concepto-definición, proposiciones-propiedades, procedimientos o argumentos; que se relacionan entre sí formando configuraciones epistémicas, si las prácticas matemáticas son consideradas dentro de una institución, o cognitivas, si se trata de prácticas personales (Godino, 2024).

Dentro de este marco teórico se ha desarrollado la teoría de la idoneidad didáctica, que adopta un enfoque global u holístico al tratar de abarcar las diferentes dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, sus relaciones con otras disciplinas y el contexto ecológico en que tienen lugar (Godino, 2013; Godino *et al.*, 2023).

La idoneidad didáctica se concibe como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte del mismo) posee ciertas características que lo hacen apropiado para lograr que los significados personales de los estudiantes (aprendizajes) se acerquen a los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), y en el que se tenga presente el contexto y los recursos disponibles (entorno). Constituye una herramienta útil para el profesor, pues permite valorar los procesos de enseñanza o su diseño (Godino, 2013; Font *et al.*, 2023) y se compone de seis facetas o componentes:

- *Faceta epistémica*: Grado de representatividad del significado institucional pretendido o implementado para un determinado contenido matemático, respecto a su significado de referencia (conjunto de situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, lenguajes y argumentos incluidos en la enseñanza) que debe ser adecuado al nivel educativo y las orientaciones curriculares.
- *Faceta cognitiva*: Alcance o punto hasta el cual se posibilitan los niveles de desarrollo, comprensión y competencia matemática de los estudiantes y se resuelven sus dificultades y errores respecto al contenido pretendido. Para lograrla, los contenidos deben tener una dificultad razonable ajustada al nivel educativo al que se dirigen, y las situaciones-problemas propuestas deben considerar diferentes niveles de complejidad.
- *Faceta afectiva*: Si se tienen en cuenta las emociones, actitudes, creencias, valores, intereses y necesidades de los estudiantes respecto a los contenidos y al proceso de estudio.
- *Faceta ecológica*: Relaciones del contenido con otros temas y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan y condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- *Faceta mediacional*: Adecuación de los recursos materiales y tecnológicos disponibles para la enseñanza y posibles formas de utilizarlos, así como el tiempo asignado para su estudio.
- *Faceta interaccional*: Organización del discurso en el aula y las interacciones entre el profesorado y los estudiantes, dirigidas al logro de los objetivos educativos, teniendo en cuenta las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y la negociación de significados.

ANTECEDENTES

Varias investigaciones se han centrado en la competencia de futuros profesores para analizar la idoneidad didáctica de procesos de instrucción o materiales curriculares. Así, respecto a los futuros profesores de educación primaria en formación, Arteaga *et al.* (2012) describen la evaluación de la idoneidad epistémica de un proyecto de análisis de datos que realizan una muestra de 108 sujetos. El método se basa en el conjunto de indicadores propuestos para esta componente de la idoneidad didáctica por Godino (2013) y las respuestas al análisis de cada uno de ellos se clasifican en cuatro niveles: 0) si no se completa la pregunta; 1) si la respuesta no se centra en la enseñanza o el contenido de la misma; 2) si se utiliza la situación, pero solo se hace referencia a aspectos anecdóticos o no matemáticos de esta; y 3) si se responde correctamente. Sus resultados indican que pocos participantes hicieron una valoración adecuada de las situaciones-problema propuestas en el proyecto (en particular, las de representación) o de la posibilidad de que el estudiante generase otras nuevas. Los participantes analizaron adecuadamente la variedad de lenguaje en el proyecto y su accesibilidad a los estudiantes, pero la valoración de conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y relaciones fue pobre. Fueron mejores los resultados de Batanero *et al.* (2018) en la evaluación de 65 futuros profesores de educación secundaria, quienes analizaron la idoneidad epistémica de otro proyecto de análisis de datos dirigido a estudiantes de Bachillerato. Los participantes mostraron un alto conocimiento del contenido del proyecto, y fueron capaces de valorar adecuadamente los diferentes indicadores de la idoneidad epistémica del mismo.

Castillo *et al.* (2022) solicitan a una muestra de futuros profesores de educación primaria analizar la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad, tomada de un libro de texto, y proponer mejoras de dicha lección. Analizaron cualitativamente las valoraciones de los participantes, sin centrarse específicamente en la idoneidad epistémica. Respecto a las propuestas de mejora, aunque muchos participantes encontraron puntos débiles en la lección analizada, propusieron pocos cambios a la misma, siendo los más frecuentes para mejorar la idoneidad epistémica añadir más problemas y ejemplos o fomentar la argumentación.

Otros trabajos, que apoyan el uso de la teoría de la idoneidad didáctica al elaborar guías para su análisis, son los de Pallauta y Batanero (2024) sobre tablas estadísticas, los de

Beltrán-Pellicer *et al.* (2018), Cotrado *et al.* (2022) y Hernández-Solís y Batanero (2023) sobre probabilidad o Alsina y Domingo (2010) sobre geometría.

MÉTODO

Muestra y contexto

La muestra estuvo formada por 69 estudiantes matriculados en el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato (especialidad de matemática) de la Universidad de Granada. Dicho máster es requerido para trabajar como profesor de educación secundaria en España en un centro público o privado. La mitad de los participantes había cursado una titulación universitaria en matemáticas y el resto otras titulaciones científicas (estadística, física, arquitectura o ingeniería), incluyendo en todas ellas al menos un curso de estadística y probabilidad.

La evaluación de la idoneidad didáctica fue parte del desarrollo de un taller en la asignatura de Innovación Docente e Iniciación a la Investigación en Matemática, que fue cursada por los futuros profesores, trabajando individualmente o en parejas. En total, se entregaron 39 protocolos con los resultados de su análisis. Previamente los participantes habían analizado las ideas fundamentales de probabilidad definidas por Heitele (1975) y habían sido instruidos sobre razonamiento probabilístico y sus componentes. Además, habían resuelto dos tareas de probabilidad basadas en noticias tomadas de los medios de comunicación, cuya finalidad era desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. También habían trabajado en la identificación de los objetos matemáticos y los errores previsibles de los estudiantes en las mismas. Junto con el enunciado de la tarea, los participantes recibieron un resumen de los contenidos de probabilidad en el currículo de ESO y Bachillerato.

Secuencia analizada y cuestionario propuesto a los participantes

A los participantes en el estudio se les pidió evaluar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza de dos sesiones de clase de 55 minutos cada una dirigido a los estudiantes de 2º curso de ESO. Se les proporcionó una descripción de dicha secuencia (ver Anexo) y los contenidos curriculares de probabilidad para la ESO.

La secuencia didáctica presenta las tareas que se emplean en cada sesión, adaptadas de la literatura de investigación (Gómez-Torres, 2014; Sanabria y Núñez, 2017), junto a una breve descripción de la gestión del docente para desarrollar los contenidos de probabilidad. Se indica a los futuros profesores que los estudiantes a los que iba dirigida la enseñanza habían estudiado en cursos previos probabilidad en los enfoques frecuencial y clásico (1º curso de ESO). Por ello, la finalidad de la secuencia era profundizar en dicho conocimiento y aplicarlo a la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. También se pretendía

evidenciar la importancia del tema en situaciones reales de toma de decisiones, como componente fundamental del razonamiento probabilístico (Batanero *et al.*, 2023).

Junto con la secuencia se proporcionó a los futuros profesores un cuestionario que les sirviese de guía para el análisis de la idoneidad epistémica. Dicho cuestionario es una adaptación, en forma de preguntas con respuesta abierta, de los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por Godino (2013). Los dos primeros evalúan la idoneidad de las situaciones-problema incluidas en la secuencia de enseñanza; el tercero y cuarto evalúan la calidad los procesos de interpretación y representación del lenguaje matemático; siguen dos que valoran la forma en que se consideran los conceptos y propiedades; otros dos para la manera en que se tiene en cuenta la argumentación; y se finaliza con una pregunta sobre el modo en que se relacionan los diferentes objetos matemáticos en la enseñanza.

Figura 1 - Cuestionario propuesto a los participantes

- | |
|---|
| P1. Las situaciones-problema que se presentan, ¿te parece que son útiles para contextualizar, aplicar y ejercitar los contenidos de probabilidad? ¿Por qué? |
| P2. ¿Se proponen situaciones para que el alumno de educación secundaria invente nuevos problemas? ¿Cuáles? |
| P3. ¿Se usan diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre las mismas? ¿Cuáles? |
| P4. ¿Hay actividades de representación e interpretación del lenguaje matemático? ¿Cuáles? |
| P5. ¿Qué conceptos, propiedades y procedimientos en probabilidad habría que explicar previamente para trabajar esta secuencia de enseñanza? |
| P6. ¿Se proponen tareas donde los alumnos tengan que reconocer definiciones, propiedades o procedimientos? ¿Cuáles? |
| P7. ¿Son las explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas para educación secundaria? |
| P8. ¿Se incluyen situaciones donde el alumno tenga que argumentar? ¿Cuáles? |
| P9. ¿Los contenidos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí en el diseño de enseñanza? |

Fuente: Elaboración propia

Análisis

Recogidas las respuestas escritas de participantes, trabajando en el taller individualmente o en parejas, se llevó a cabo un análisis de su contenido (Badzinski *et al.*, 2021). Las respuestas a cada pregunta se puntuaron de 0 a 3 con el siguiente criterio: 0) No responde; 1) Incorrecta o no responde a lo que se pregunta; 2) Parcialmente correcta, pues se responde adecuadamente a lo que se pregunta pero en forma incompleta; y 3) Correcta, si se responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada. En la siguiente sección de resultados presentamos ejemplos de respuestas proporcionadas por los participantes, clasificadas según su puntuación (de 1 a 3) para cada indicador.

RESULTADOS SOBRE LA VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD EPISTÉMICA

Para responder a la primera pregunta de investigación y describir la competencia de los futuros profesores de matemática de educación secundaria en formación al analizar la idoneidad epistémica de una secuencia de enseñanza sobre probabilidad, se describen y discuten, a continuación, los resultados según los diferentes indicadores (Figura 1).

Situaciones-problema

Para la valoración de las situaciones-problema se formularon a los futuros profesores dos preguntas que describimos a continuación, junto con los criterios para calificarlas.

P1. Las situaciones-problema que se presentan, ¿te parece que son útiles para contextualizar, aplicar y ejercitar los contenidos de probabilidad? ¿Por qué? La secuencia de enseñanza analizada está constituida por dos sesiones, en las que se presentan cinco situaciones-problema. La finalidad de la primera sesión es valorar las intuiciones probabilísticas de los estudiantes de 2º curso de ESO ante situaciones de incertidumbre, y la aplicación del cálculo de la probabilidad de sucesos junto a la esperanza matemática en variables aleatorias que se consideran para tomar decisiones adecuadas. Se usan una variedad de contextos cercanos al estudiante (juegos de azar, paga semanal, cultivos, meteorología), que contextualizan experimentos aleatorios, sucesos, probabilidad y su cálculo, variable aleatoria y esperanza matemática. En la segunda sesión se conectan entre sí los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, realizando una aproximación a los experimentos aleatorios y probabilidad compuesta, y se estudia la variable aleatoria, su distribución y esperanza matemática. Se espera que los futuros profesores consideren que las situaciones-problema propuestas en la secuencia son útiles para contextualizar y aplicar estos contenidos. Las respuestas se codificaron del siguiente modo:

1. *Incorrecta*, cuando no se responde a lo que se pregunta, como el participante E1, que no valora los problemas propuestos para contextualizar diferentes contenidos de probabilidad, sino que se centra en que podrían presentarse en su vida diaria. E1: Sí, porque son problemas que podrían presentarse en la vida diaria de los estudiantes.
2. *Parcialmente correcta*. Se responde a lo que se pregunta correctamente, pero de forma incompleta, como E37, que indica que la actividad de la segunda sesión no es adecuada, aunque permite introducir el significado frecuencial de la probabilidad y conectarlo con el significado clásico, que es un contenido indicado para 2º curso de ESO. Además, debido a la utilización de los applets se puede resolver la tarea con poca formalización, ya que se propone la ayuda de la simulación para llegar a una conclusión; por tanto, no se sustenta su argumento basado en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

E37: Las tareas 1 y 2 me parecen útiles porque las situaciones-problema presentadas son tareas ricas, con contenidos marcados en las orientaciones curriculares para el tema y nivel escolar. La tarea de la segunda sesión no es adecuada, porque es más para un nivel de Matemáticas de 3º de ESO orientada a las enseñanzas académicas, donde se plantea la toma de decisiones correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.

3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta de forma detallada, como E3, que se hace mención a que las situaciones permiten contextualizar los contenidos pretendidos, y se siguen las orientaciones curriculares en cuanto al contenido, la forma de enunciarlas y la adecuación del lenguaje utilizado. E3: Las tareas me parecen una forma bastante útil de ejemplificar los conceptos principales acerca de los contenidos de probabilidad reflejados en las orientaciones curriculares para el nivel en cuestión. Plantean varios ejemplos diarios, bien ajustados a la vida real y cotidiana, que no solo se limitan al aprendizaje algorítmico, para entender cómo funciona la probabilidad y cómo podemos usarla a nuestro favor o no. Supone una buena forma de relacionar el contenido matemático que se quiere transmitir y las diferentes reglas y argumentos que se utilizan para llegar hasta él, por medio de un lenguaje verbal y simbólico adecuados, y una presentación limpia y correctamente enunciada.

P2. ¿Se proponen situaciones para que el alumno de educación secundaria invente nuevos problemas? ¿Cuáles? En la secuencia propuesta no hay una petición explícita a los estudiantes para que ellos inventen nuevos problemas. Sin embargo, hay varias situaciones que pueden dar lugar a dicha creación. Por ejemplo, en la Tarea 1 el alumno se puede preguntar a partir de qué cantidad es rentable jugar. También podría hacerse la misma pregunta en la Tarea 5. En general, el estudiante podría variar cualquiera de los enunciados para plantear nuevos problemas. La codificación de las respuestas es como sigue:

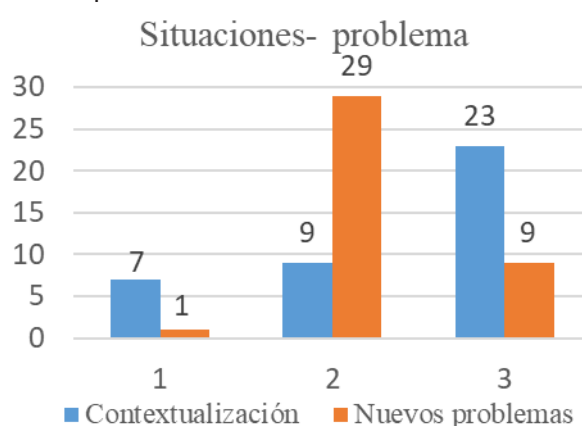
1. *Incorrecta*, como E12, quien ha interpretado que la pregunta se refiere a si se promueve suficiente argumentación en la secuencia y no a la invención de problemas. E12: No se proponen implícitamente, pero sí explícitamente, ya que tienen que justificar si estas probabilidades son realistas y compararlas con su propia experiencia.
2. *Parcialmente correcta*, como el ejemplo de E5, quien responde a lo que se pregunta correctamente, pero no se indica que no hay situaciones en que explícitamente se pida al estudiante inventar problemas. E5: En las tareas de la segunda sesión, utilizando el applet de lanzamientos de monedas que se muestra, el alumno puede inventarse nuevos problemas, modificar a su antojo el número de repeticiones, la probabilidad de cada una de las

caras para probar con monedas trucadas también) y poder practicar con todas estas situaciones que él mismo ha construido. O en la Tarea 3 del centro meteorológico, puede aplicarlo a cualquier parte meteorológico que consulte en la web.

3. *Correcta*: responde correcta y detalladamente a lo que se pregunta, indicando que no hay una petición explícita de invención de problemas. E6: Habría que responder que no hay situaciones explícitas de este tipo, pero puede inventarlo variando las tareas. Por ejemplo, en la Tarea 2 se pueden cuestionar el beneficio que se puede obtener si se decidiese vender las lechugas, por lo que habría que añadir el coste de las semillas, el coste de producción y el precio de venta para poder deducir una recomendación adecuada. En el ejercicio de la segunda sesión se pueden preguntar cuál es el importe mínimo del premio que creen conveniente para que sea rentable jugar.

Los resultados de las puntuaciones de valoración de las situaciones-problema se presentan en la Figura 2, donde se obtuvo mejor resultado al valorar la contextualización de las situaciones que el hecho de que se propongan situaciones de invención de problemas. En ambos casos son muy escasas las valoraciones incorrectas, siendo los resultados mucho mejores que los de Arteaga *et al.* (2012), donde pocos futuros profesores llegaron a hacer un análisis de las situaciones-problema, al menos, parcialmente correcto de estos indicadores. También, en Batanero *et al.* (2018), fue mejor el análisis de la contextualización de los problemas que de la invención por parte de los participantes.

Figura 2 - Frecuencia de puntuaciones en la valoración de las situaciones-problema



Fuente: Datos de la investigación

Lenguaje y representaciones

Respecto a la valoración del lenguaje matemático utilizado en la secuencia de enseñanza se plantearon dos preguntas, cuyo análisis se describe a continuación.

P3. ¿Se usan diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos? ¿Cuáles? En la secuencia de enseñanza se

hace uso del lenguaje probabilístico verbal y numérico en el enunciado de las tareas. Los estudiantes utilizarán el lenguaje simbólico en su resolución. Se propone también la elaboración de una tabla en la segunda sesión y los applets utilizados incorporan el lenguaje gráfico e icónico. Se espera que los futuros profesores reconozcan esta variedad de lenguajes, sus traducciones y conversiones. Las respuestas se clasificaron como sigue:

1. *Incorrecta*: no se valora la calidad y variedad del lenguaje matemático; así, en el siguiente ejemplo, E31 indica que el único tipo de lenguaje es verbal y algún símbolo. E31: No se utilizan diferentes modos de expresión, la única usada es la verbal (aunque se incluye algún símbolo, como € o %). No se encuentran gráficos u otros tipos de lenguaje en los problemas.
2. *Parcialmente correcta*: responde correctamente, pero en forma incompleta, como E12, quien mezcla la expresión matemática gráfica con la modelización. E12: Sí, se desarrollan diferentes modos de expresión matemática, por ejemplo, modelizar el problema en la Tarea 1 viendo las ganancias y las pérdidas, así como reconocer el riesgo de jugar. También se desarrolla la representación gráfica mediante el recurso GeoGebra a través de un diagrama de barras representando la frecuencia relacionada al lanzamiento de los dados.
3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada, indicando los diferentes tipos de lenguaje utilizados en la secuencia, así como sus conversiones y traducciones. E37: En los enunciados de las tareas, solo se utilizan modos de expresión verbal. Con la resolución de las tareas es previsible que se produzcan otros modos de expresión matemática, simbólica y numérica, así como representaciones gráficas en tablas de anotación de resultado de la simulación del lanzamiento de 20 veces la moneda y uso del programa Geogebra. En el caso del juego de dados, expresiones de fórmulas casos favorables/casos posibles, y representación en tablas de las combinaciones.

P4. *¿Hay actividades de representación e interpretación del lenguaje matemático? ¿Cuáles?* En la secuencia analizada se deben representar en lenguaje simbólico los datos, operaciones y resultados de la mayor parte de las tareas propuestas, y en la segunda sesión se deben representar los datos de la simulación en una tabla o gráfico. Los estudiantes han de interpretar el lenguaje verbal en que se les presenta las diferentes tareas e igualmente se deben interpretar los resultados de la resolución de estas y los resultados de la simulación que se proporcionan en lenguaje gráfico. Las respuestas se clasifican como siguen:

1. *Incorrecta*: no se identifican situaciones donde se pide representar o interpretar lenguaje matemático; por ejemplo, E4 no responde si hay actividades de representación o interpretación del lenguaje, pero sí que las hay de toma de decisión.

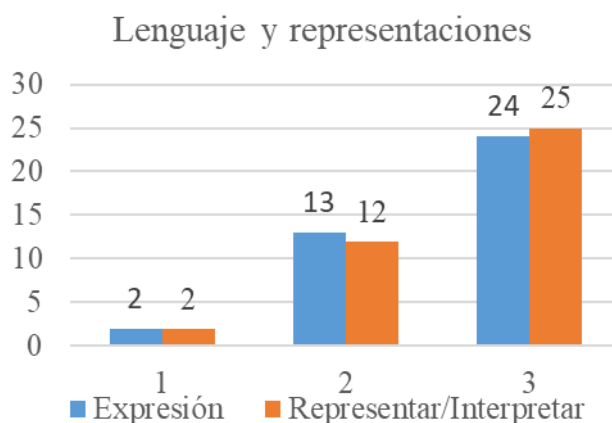
E4: Sí, en la mayoría de las preguntas hay que tomar una decisión en base a los resultados obtenidos.

2. *Parcialmente correcta*: responde a lo que se pregunta correctamente, pero en forma incompleta. En la respuesta que reproducimos a continuación (E40) se ponen algunos ejemplos de este tipo de actividades, pero no se hace referencia ni al lenguaje verbal ni al simbólico. E40: Vemos una representación tabular en el ejercicio de la segunda sesión. En la sesión 1, la tarea 1 podría ser lenguaje pictórico.

3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada, como la respuesta de E23. E23: Sí, especialmente a la hora de interpretar el lenguaje simbólico del enunciado como porcentajes. También se trabaja la representación, como tablas o diagrama en árbol en la resolución. Además, en la sesión 2 se puede usar applets para la simulación, donde hay que interpretar los gráficos.

Los resultados de las valoraciones de estos dos indicadores se presentan en la Figura 3, que muestra un comportamiento casi idéntico en las dos preguntas, siendo mayoría las valoraciones totalmente correctas y casi inexistentes las incorrectas. También en este caso los resultados son mucho mejores que en Arteaga et al. (2012) y algo mejor que en Batanero et al. (2018), donde la frecuencia de valoración incompleta de la representación e interpretación fue mayor que en nuestro estudio.

Figura 3 - Frecuencia de puntuaciones en la valoración del lenguaje y representaciones



Fuente: Datos de la investigación

Conceptos, propiedades y procedimientos

La resolución de las tareas planteadas requiere el uso de diferentes conceptos, propiedades y procedimientos que el estudiante debe recordar y discriminar, para lo que se le pide analizar la secuencia de enseñanza en torno a dos preguntas relacionadas.

P5. *¿Qué conceptos, propiedades y procedimientos de probabilidad habría que explicar previamente para trabajar esta secuencia de enseñanza?* Son muchos los conceptos ma-

temáticos implícitos en las soluciones de las tareas propuestas; en particular, los de aleatoriedad, experimento aleatorio simple y compuesto, sucesos y sus tipos, probabilidad simple y compuesta, variable aleatoria y esperanza matemática, convergencia y frecuencia relativa. Cada uno de ellos conlleva diferentes propiedades, como la suma de probabilidades que es igual a la unidad, la regla de la suma y del producto o la regla de Laplace, entre otras. Respecto a los procedimientos, serían necesarios los de cálculo de probabilidades simples y compuestas, así como de representación tabular y gráfica de datos. Se han codificado las respuestas en la forma que sigue:

1. *Incorrectas*: no se encontraron ejemplos de respuestas incorrectas para este indicador.
2. *Parcialmente correcta*: si responde a lo que se pregunta correctamente, pero en forma incompleta, como E7, que obvia la mayor parte de los objetos que se requieren en la solución de las tareas al considerar que solo serían necesarios en una resolución formal. E7: Dependería del tipo de razonamiento que queremos en los alumnos, puesto que varios ejercicios pueden resolverse con o sin herramientas matemáticas de nivel avanzado (la Tarea 1 de la primera sesión, por ejemplo, podría ser resuelta por un estudiante de primaria que aún no conoce el concepto de función masa de probabilidad de una variable aleatoria). El único concepto complejo a explicar sería el de probabilidad.
3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada y se describe una parte importante de los objetos matemáticos implícitos en la secuencia didáctica analizada, como el caso de E22. E22: Se deberían trabajar previamente los contenidos de experimento aleatorio, variable aleatoria, probabilidad de una variable aleatoria, espacio muestral, porcentajes, álgebra de números reales, probabilidad condicionada y propiedades de la probabilidad.

P6. ¿Se proponen tareas donde los alumnos tengan que reconocer definiciones propiedades o procedimientos? ¿Cuáles? Aunque formalmente no se pide reconocer explícitamente los objetos matemáticos o proporcionar sus definiciones, en las diferentes tareas se deben reconocer para aplicarlos, de lo que resultan los siguientes tipos de respuesta:

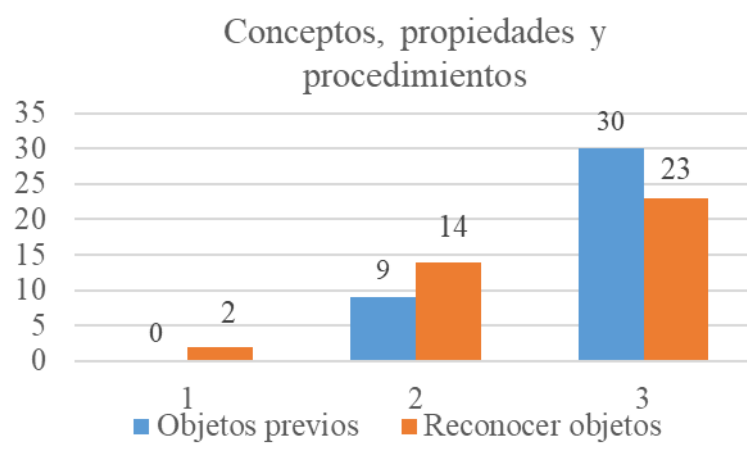
1. *Incorrecta*: cuando no se identifican situaciones-problema donde se requiera reconocer definiciones, propiedades o procedimientos para su resolución; como el siguiente ejemplo (E23), pues para evaluar conocimientos previos se requiere resolver las tareas de introducción y esto implica su identificación, aunque no se pida definirlos sino simplemente aplicarlos. E23: Respecto a la primera sesión: no las tienen que reconocer como tal, ya que son actividades de introducción, para evaluar su intuición con respecto al tema.

No pueden reconocer definiciones, propiedades o procedimientos si todavía no los han visto.

2. *Parcialmente correcta*: responde a lo que se pregunta correctamente, pero en forma incompleta, como la que sigue, ya que solo se hace referencia a una actividad.
E13: Sí, por ejemplo, en la Tarea 1 están presentes conceptos como suceso aleatorio, suceso independiente, espacio muestral (CC, CX, XC, XX) y esperanza.
3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada.
E22: Sí, la regla de adición en la sesión 2, probabilidad condicionada en la Tarea 3 y espacio muestra en la Tarea 1 y en la segunda sesión.

Los resultados del análisis de las valoraciones se presentan en la Figura 4, superando las valoraciones correctas en la identificación de los objetos previos para realizar las actividades previstas, aunque en ambos indicadores los resultados son muy buenos y mejores que en los trabajos de Arteaga *et al.* (2012) y Batanero *et al.* (2018).

Figura 4 - Frecuencia de puntuaciones en la valoración de conceptos, propiedades y procedimientos



Fuente: Datos de la investigación

Argumentación y relaciones

Finalmente, los últimos indicadores se refieren al papel de la argumentación en la secuencia y al modo en que los diferentes objetos matemáticos se relacionan entre sí en esta.

P7. *¿Son las explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas para educación secundaria?* La secuencia de enseñanza va dirigida a estudiantes de 2º curso de ESO, aun no suficientemente preparados para el uso de demostraciones deductivas formales. Por este motivo, el lenguaje empleado para explicar el tema a los estudiantes es sencillo y se utilizan algunos applets para sustituir, mediante la simulación, otro tipo de justificaciones más abstractas. En este sentido, la clasificación de las respuestas ha sido la siguiente:

1. *Incorrecta*: cuando no se evalúa la adecuación de la argumentación, como el ejemplo de E8, que no evalúa el tipo de justificación empleada, sino el que

las tareas incluyan la toma de decisiones y fomenten el razonamiento crítico.

E8: Sí, ya que además de realizar cálculos relacionados con los contenidos de probabilidad, se les pide que sean capaces de tomar decisiones en base a los datos obtenidos y así se fomenta el desarrollo del pensamiento crítico.

2. *Parcialmente correcta*: se responde a lo que se pregunta, pero en forma incompleta; por ejemplo, en el caso que sigue, pues no se justifica la respuesta.

E9: Sí, e incluso lo serían para niveles inferiores.

3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada.

E22: Las tareas se ajustan a los contenidos estipulados en el Real Decreto 1105/2014. Sin embargo, creemos que los razonamientos y reflexiones que requieren son más complejos que la aplicación o reproducción de los contenidos, por lo que quizás las explicaciones más teóricas puedan comprenderse por completo en algún curso superior a 2º de ESO en el que el conocimiento hipotético-deductivo del alumnado esté completamente desarrollado.

P8. *¿Se incluyen situaciones donde el alumno tenga que argumentar? ¿Cuáles?* A lo largo de la secuencia didáctica hay variadas situaciones donde se pide argumentación, ya que se pide al alumnado razonar sus respuestas y soluciones a las tareas. La clasificación de las respuestas es como sigue:

1. *Incorrecta*: no responde a lo que se pregunta, como E13, que considera que el trabajo en gran grupo es equivalente a relacionar los objetos matemáticos entre sí.

E13: Sí, predominantemente en la primera sesión. En efecto, a lo largo de ésta guarda gran peso la discusión en gran grupo para poder evaluar los conocimientos previos del alumnado y, de esta forma, repasarlos inevitablemente.

2. *Parcialmente correcta*: como en el caso que sigue, donde la primera frase se refiere al empleo de conceptos y no a la argumentación.

E38: Sí, ya que todas las tareas se basan en situaciones reales en las que tienen que utilizar conceptos matemáticos. Encontramos preguntas de ¿Por qué? en cada tarea a la que se tienen que enfrentar los alumnos. Esto provoca que tengan que reflexionar y argumentar su pensamiento.

3. *Correcta*: se responde correcta y detalladamente.

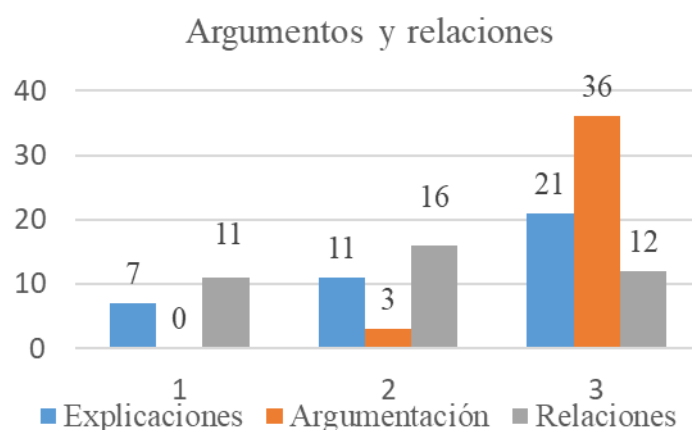
E22: Sí, en todas las cuestiones se debe razonar el porqué de su respuesta, que requiere de una argumentación y reflexión por parte del alumnado. La tarea 1 es el primer ejemplo, en el que el alumnado debe estudiar las dos situaciones posibles y recomendar, en base a criterios sólidos, qué opción podría ser la más rentable a corto y a largo plazo.

P9. *¿Los contenidos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí en el diseño de enseñanza?* En la secuencia didáctica se observa la conexión de diferentes situaciones-problema, por ejemplo, las diferentes preguntas de la

Tarea 3 y de la Tarea 5 de la segunda sesión. En la Tarea 1 se conectan los conceptos de sucesos complementarios con el cálculo de su probabilidad y la decisión a tomar, y ésta con su argumentación. En la Tarea 2 se conecta el cálculo y comparación de probabilidades con la toma de decisión y argumentación. La Tarea 3 conecta la interpretación de una probabilidad frecuencial con la esperanza matemática y con un resultado poco probable. En la segunda sesión se conectan entre sí los significados clásico y frecuencial de la probabilidad, el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos independientes, la variable aleatoria y su esperanza matemática, y la simulación. Las repuestas a la pregunta se han codificado en la forma siguiente:

1. *Incorrecta*: no se responde a lo que se pregunta; por ejemplo, E2 indica que las tareas permiten desarrollar habilidades en el estudiantado. E2: Sí, porque la resolución de todas ellas conlleva técnicas adecuadas a este nivel.
2. *Parcialmente correcta*: como en el siguiente ejemplo, donde E7 se limita al análisis de la conexión entre las situaciones-problema: E7: Sí, todos los problemas están relacionados entre sí mediante los contenidos introductorios de probabilidad de segundo de la ESO (concepto de probabilidad, probabilidad de sucesos equiprobables...)
3. *Correcta*: responde correctamente a lo que se pregunta en forma detallada. E31: Sí, todas las tareas de las sesiones requieren más de un contenido matemático para su resolución y a su vez las tareas están relacionadas entre sí, tanto en contexto como en la similitud para resolverlas.

Figura 5 - Frecuencia de puntuaciones en la valoración de la argumentación y relaciones



Fuente: Datos de la investigación

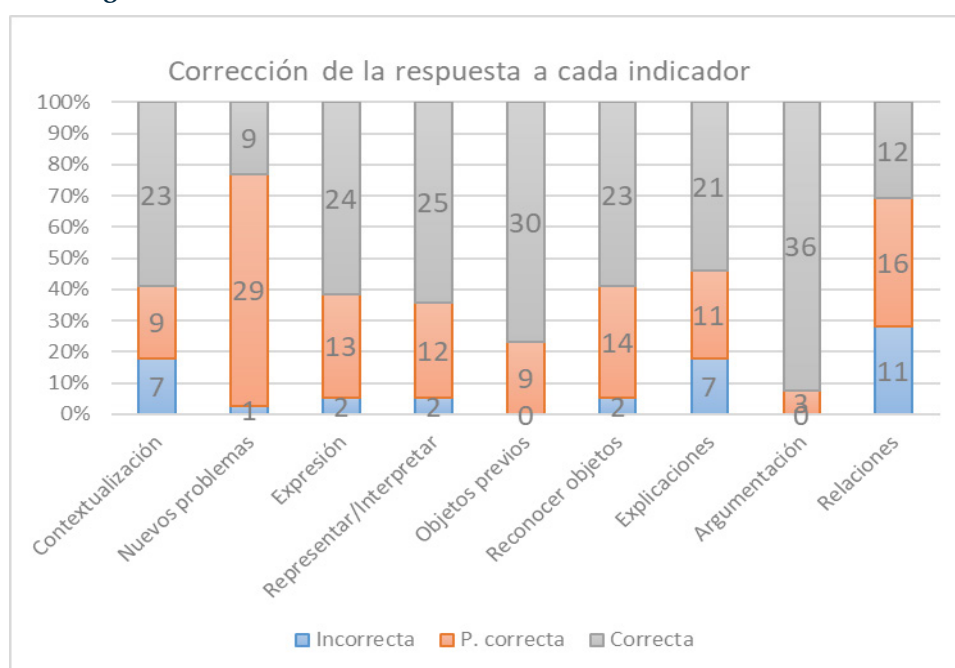
Los resultados de valorar estos indicadores se presentan en la Figura 5, donde se puede notar que el mejor resultado es el referido a la valoración de las situaciones de argumentación, que fueron claramente identificadas por los futuros profesores; y el peor resultado corresponde a la forma en que las situaciones y objetos matemáticos se relacionan

entre sí en la secuencia de aprendizaje. Los resultados fueron peores en Arteaga *et al.* (2012) y en Batanero *et al.* (2018), excepto para la argumentación.

Síntesis de resultados

Para tener una visión global de la competencia de valoración de los indicadores de la idoneidad epistémica, presentamos una síntesis de estos resultados en la Figura 6. En general, los resultados son buenos y priman las respuestas correctas, con excepción del indicador P2 (se plantean situaciones donde el alumno deba inventar nuevos problemas), donde bastantes participantes olvidaron indicar que explícitamente no se plantean estas situaciones, pero casi todos reconocen que implícitamente sí se hace.

Figura 6 - Síntesis de resultados en la valoración de los indicadores



Fuente: Datos de la investigación

El indicador más sencillo fue el P8 (se plantean situaciones en las que el alumnado deba argumentar), pues la mayoría reconocieron correctamente la necesidad de razonar y argumentar en prácticamente todas las tareas propuestas. En general, fueron muy pocas las respuestas incorrectas, no encontrando ninguna en el indicador P5 (conceptos, propiedades y procedimientos necesarios para trabajar la sesión), pues prácticamente todos los participantes reconocieron los objetos que era necesario conocer previamente para trabajar con ellas de manera correcta o parcialmente correcta.

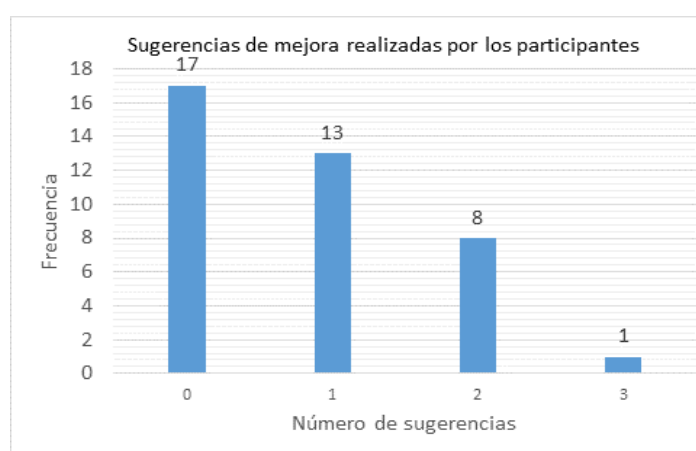
En resumen, los profesores en formación de nuestro estudio mostraron una competencia adecuada de análisis de los indicadores de la idoneidad epistémica de la propuesta planteada, coincidiendo con los resultados de Batanero *et al.* (2018), también con futuros profesores de educación secundaria. Los resultados fueron bastante mejores que los de otros trabajos realizados con futuros profesores de educación primaria, como el de Arteaga

et al. (2012), lo cual es razonable dado el mayor conocimiento matemático de los participantes en nuestro estudio.

PROPUESTAS DE MEJORA DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Para responder la segunda pregunta de investigación se pidió a los participantes aportar sugerencias de mejora de la situación didáctica analizada. El número aportado por cada grupo participante se presenta en la Figura 7, donde podemos observar que la mayor parte no llegó a aportar ninguna mejora y lo más frecuente fue aportar solo una o dos.

Figura 7 - Distribución del número de sugerencias aportadas para mejorar la idoneidad epistémica de la secuencia analizada



Fuente: Datos de la investigación

Se han clasificado las sugerencias aportadas (Tabla 1) en tres tipos, según se refieran a las situaciones-problema planteadas en la secuencia, a otros objetos matemáticos u otro tipo de sugerencias.

Tabla 1 - Sugerencias realizadas por los futuros profesores para mejorar la idoneidad epistémica de la secuencia analizada

Componente	Sugerencia de mejora	Frecuencia
Situaciones- problema	Mejorar la presentación de las tareas	12
	Atención a la diversidad, actividades de refuerzo o diferentes niveles de problemas	10
	Planteamiento de problemas por los estudiantes	4
	Más ejercicios teóricos	1
	Situaciones que confronten a los estudiantes con sus sesgos probabilísticos	1
Otros objetos matemáticos	Mayor número de representaciones gráficas	7
	Atención a la argumentación matemática	2
	Avanzar con los conceptos	1
	Mayor peso de los procedimientos	1
Otras sugerencias	Más innovación o uso de tecnología	7

Uso de material manipulativo	4
Discusión en pequeños grupos	4
Ajuste de tiempos o continuidad en las sesiones	2

Fuente: Datos de la investigación

Sobre las situaciones-problema

Respecto a las situaciones-problema, 10 informes indican la importancia de tener en cuenta la diversidad de estudiantes, incluir tareas que permitan reforzar el aprendizaje o bien proponer problemas de diferente nivel de dificultad para estudiantes con mayor o menor capacidad.

E30: Lo único que se me ocurre a mejorar es una atención más fuerte a la diversidad, sobre todo para alumnos de altas capacidades que puedan desarrollar aún más este tipo de ejercicios.

Doce informes sugieren mejorar la presentación de las tareas, por ejemplo, introducir menor ambigüedad en las preguntas, no dar los datos en forma textual, o presentar situaciones cotidianas.

E4: Favorecer el diseño de nuevas tareas y situaciones cotidianas donde se vea la probabilidad.

El planteamiento de problemas por parte de los estudiantes ha suscitado el interés de los investigadores de didáctica de la matemática por ser, además de fundamental en el trabajo científico, un gran recurso de aprendizaje de las matemáticas (Cai *et al.*, 2024; Silber y Cai, 2021). Como se ha indicado, la propuesta didáctica no incluía explícitamente situaciones de invención de problemas, aunque sí implícitamente, por lo que en 4 informes se indica que esto sería un punto para mejorar en la propuesta.

E30: Quizás nos ha faltado que los alumnos puedan realizar modificaciones a las tareas en función de sus gustos para su posterior resolución y entrega.

Por último, en un informe se sugiere introducir problemas teóricos adaptados al nivel educativo al que corresponde la enseñanza (2º curso de ESO) para poder evaluar el nivel de comprensión profunda de los contenidos matemáticos. Es decir, añadir problemas menos intuitivos que los dados y que requieran un conocimiento más formal del tema.

E31: En el tema que nos ocupa sería conveniente, por ejemplo, proponer tareas que pongan a prueba conceptos como el de probabilidad, su definición como un número entre 0 y 1 o el de espacio muestral.

En este mismo informe se propone añadir a la secuencia didáctica algunos ejercicios que permitan poner a prueba y confrontar a los estudiantes con sus concepciones incorrectas sobre el azar. Esto surge después de que los propios participantes resolvieran en sesiones previas del curso algunas tareas en las que pudieron observar sus propias concepciones incorrectas (Álvarez-Arroyo *et al.*, 2024), donde apreciaron el interés de este tipo de tareas para concienciar a sus estudiantes de los posibles sesgos de razonamiento. Ejemplo de ello

fue la confusión entre condicionamiento y causalidad, también detectada por Brückler y Milin Šipuš (2023), en otros estudios.

E31: Ejercicios que desafíen posibles concepciones erróneas, pero que se puedan resolver con lo estudiado, como el problema de Monty Hall.

Sobre otros objetos matemáticos

En unos pocos informes (11) encontramos aportaciones para mejorar la idoneidad epistémica de la secuencia, relacionadas con otros objetos matemáticos diferentes de las situaciones-problema. En relación con el lenguaje, en 7 informes se sugiere realizar más representaciones gráficas a partir de los enunciados, para hacer la tarea más visual. Esta sugerencia tiene en cuenta también la edad de los estudiantes a los que va dirigida la propuesta, menos habituados a los enunciados formalizados y dados en lenguaje matemático.

E7: Podría ser interesante completar los enunciados de algunas de las tareas con sencillos esquemas gráficos que favorezcan la comprensión del problema y sirva como una herramienta modélica para que los alumnos prueben a realizar esquemas o pequeños dibujos en sus estrategias de resolución.

En relación con la argumentación, 2 informes indican que conviene utilizar argumentaciones puramente matemáticas para tomar una decisión, incluso cuando ello ocurre en situaciones como las descritas en la secuencia.

E8: Además, creo que algunas argumentaciones pueden estar demasiado fuera de las matemáticas (por ejemplo, argumentar que no jugarías a un juego de dados porque no te gusta el riesgo), por lo que yo me quedaría en los razonamientos más puramente matemáticos.

Respecto a los conceptos, en un informe se sugiere avanzar algo en la parte conceptual y no limitarse a repasar lo ya conocido, no dando suficiente importancia a las actividades de refuerzo. En otro informe, por su parte, se propone incluir más tareas procedimentales, que no son realmente tan necesarias en el estudio de la probabilidad simple, puesto que los procedimientos de cálculo son muy elementales.

E5: No se avanza en conceptos y es simplemente repaso, algo que podría también mejorarse.

E8: Yo incluiría algún tipo de ejercicio más procedimental, para que los estudiantes practicasen el cálculo de probabilidades y sus operaciones.

Otras sugerencias de mejora

Siete participantes inciden en la importancia de la innovación y el uso de tecnología, por ejemplo, para simular los experimentos y cómo ayudar a la comprensión de estos.

E30: Yo propongo la utilización de mayor material del tipo representativo. Se podría utilizar el mismo GeoGebra para llevar a cabo distintos diagramas estadísticos para que la interpretación de los datos se más rica si cabe. También se podrían utilizar herramientas como el Excel para llevar a cabo distintos cálculos y así fomentar la competencia digital.

Cuatro proponen utilizar material manipulativo, como dados, para reproducir los experimentos descritos en la secuencia y estimar la probabilidad mediante su aproximación frecuencial.

E13: Para alumnos con dificultades, igual sería necesario en uso de material manipulativo.

Otros 4 resaltan la importancia de organizar discusión en pequeños grupos para que los mismos estudiantes puedan debatir entre ellos sus soluciones y la interacción entre ellos favorezca la argumentación.

E18: Añadir apartados que impliquen el trabajo e interacción de los estudiantes en pequeños grupos.

Otras 2 sugerencias se refieren a la organización del tiempo docente o la continuidad de las sesiones, como el caso de E2.

E2: Quizás reajustaría los tiempos, ya que para la segunda sesión no estoy seguro de que se pudiese hacer todo lo que se plantea.

En resumen, los participantes en el estudio mostraron poca competencia para proponer mejoras en la idoneidad epistémica de la propuesta, y la mayor parte de las realizadas se centraron en el tipo de situaciones-problema planteadas.

| DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La preparación efectiva del profesorado para enseñar probabilidad debe tener en cuenta y desarrollar en lo posible su competencia de análisis y valoración de los procesos de enseñanza previstos o desarrollados en materiales curriculares (lecciones de probabilidad, directrices curriculares, etc.) así como para proponer mejoras de los mismos (Font *et al.*, 2023; Giacomone *et al.*, 2018). Para este propósito, la teoría de idoneidad didáctica se ha evidenciado de gran utilidad en torno a diversidad de contenidos (Alsina y Domingo, 2010; Arguedas *et al.*, 2017; Aroza *et al.*, 2016; Beltrán-Pellicer *et al.*, 2018; Castillo *et al.*, 2022; Esqué y Breda, 2012; Parra y Ávila, 2015).

En esta investigación se analiza dicha competencia utilizando el instrumento proporcionado por dicha teoría (Godino, 2013; 2024; Godino *et al.*, 2023) en su componente epistémica, junto a las aportaciones de mejora que plantean al analizar una secuencia de enseñanza en probabilidad prevista para desarrollarse en el 2º curso de ESO en España.

Los participantes mostraron una competencia razonable de análisis de la idoneidad epistémica de esta secuencia de enseñanza, siendo los resultados mucho mejores que los obtenidos por Arteaga *et al.* (2012) con futuros profesores de educación primaria y similares a los obtenidos por Batanero *et al.* (2018) con futuros profesores de educación secundaria, en ambos casos valorando la idoneidad epistémica de un proyecto de análisis de datos.

Por el contrario, fue menor la competencia de los participantes en el estudio para sugerir mejoras a la misma. Aunque la mayor parte de sugerencias ofrecidas son razonables y adecuadas, casi en la mitad de los informes no se aporta ninguna, y en pocos se indica el interés de completarla con material manipulativo o tecnológico, que favoreciese la simulación, de gran importancia para conectar los diferentes significados de la probabilidad (Beltrán-Pellicer *et al.*, 2018; Cotrado *et al.*, 2022). Tampoco se hicieron propuestas en relación con los diferentes significados de la probabilidad, aunque la segunda sesión se prestaba a ello.

Reconocemos que el tamaño de la muestra es limitado y que el tiempo dedicado al taller formativo no fue muy extenso, por lo que sería de interés completar este trabajo con otros donde se realicen más análisis de propuestas de enseñanza dirigidas a otros cursos escolares y con otras muestras participantes. Aun así, se aportan resultados originales en el terreno de la preparación del profesorado para enseñar probabilidad, que complementa los dedicados a otros temas como los de Arteaga *et al.* (2012), Batanero *et al.* (2018), Breda *et al.*, 2017 o Giacomone *et al.* (2018).

AGRADECIMIENTO

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE

REFERENCIAS

- Alsina, Á.; Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 7-32.
- Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C. y Gea, M.M. (2024). Probabilistic literacy and reasoning of prospective secondary school teachers when interpreting media news. *ZDM Mathematics Education* 56, 1045–1058. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01586-8>
- Arguedas, C., Concari, S., Giacomone, B. (2017). La idoneidad didáctica de los laboratorios remotos como recursos para la enseñanza y aprendizaje de la física. *Revista de Enseñanza de la Física*, 29(extra), 511-517.
- Aroza, C. J., Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES*, 6(6), 1-29.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Gea, M. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 279-297.

- Badzinski, D. M., Woods, R. H. y Nelson, C. M. (2021). Content analysis. En S. Engler y M. Stausberg (Ed.), *The Routledge handbook of research methods in the study of religion* (pp. 180-193). Routledge.
- Batanero, C., Gea, M. M., Arteaga, P., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2018). Conocimiento del contenido sobre correlación y regresión de futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(3), 325-348. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2134>
- Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). La educación del razonamiento probabilístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 25(2), 127-144. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p127-144>
- Batanero, C. (2022). Training teachers to teach probability: A promising research area. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 729-734. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00234-1>
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(61), 526-548. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11>
- Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. DOI 10.12973/eurasia.2017.01207a.
- Brückler, F. M. y Milin Šipuš, Ž. (2023). Pre-service mathematics teachers' understanding of conditional probability in the context of the COVID-19 pandemic. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(1), 89-104. <https://doi.org/10.30935/scimath/12436>
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., y Jiang, C. (2024). Advances in research on mathematical problem posing: Focus on task variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 76, 101186. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101186>
- Castillo, M. J., Burgos, M., y Godino, J. D. (2022). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 234-252. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.14>
- Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de educación secundaria en probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36, 888-922. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a12>
- Elbehary, S. G. A. (2022). Rethinking mathematics teachers' professional knowledge for teaching probability from the perspective of probabilistic reasoning: A proposed

- framework. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0695. <https://doi.org/10.29333/iejme/12145>
- Esqué, D y Breda, A. (2012). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta". *Uniciencia*, 35(1), 38-54.
- Font, V., Calle, E. y Breda, A. (2023). Uso de los criterios de idoneidad didáctica y la metodología Lesson Study en la formación del profesorado de matemáticas en España y Ecuador. *Paradigma*, 44(2), 376-397. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p376-397.id1424>.
- Giacomone, B., Godino, J. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, e172011. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011>.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), em2270. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13187>
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Gómez-Torres, E. (2014). Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria [Tesis doctoral]. Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/34020>
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205.
- Hernández-Solís, L. A. y Batanero, C. (2023). Indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de Probabilidad del currículo de Matemática Costarricense. *PädiUAQ*, 6(11), 1-18.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022a). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76, de 30 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022b). Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 82, de 6 de abril de 2022. <https://www.boe.es/>

eli/es/rd/2022/04/05/243/con

- Pallauta, J. D. y Batanero, C. (2024). Guía para el análisis de la idoneidad epistémica y cognitiva de lecciones sobre tablas estadísticas en libros de texto. *Bolema*, 38, e230088. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230088>
- Parra, F. J. y Ávila, R. (2015). Hacia una idoneidad didáctica en una clase de Física”. *Latin American Journal of Physics Education*, 9(S1), 1-7.
- Sanabria, G. y Núñez, F. (2017). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 17(2), 1-13.
- Silber, S. y Cai, J. (2021). Exploring under prepared undergraduate students’ mathematical problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 53(4), 877-889. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01272-z>
- Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: Analyses from a psychological perspective. In E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

| ANEXO. SECUENCIA DE ENSEÑANZA ANALIZADA

PRIMERA SESIÓN: Introducción al tema

Esta sesión es de inicio al tema de probabilidad en 2º curso de ESO y se espera que algunos estudiantes no recuerden conceptos tratados en cursos previos (1º curso de ESO o últimos cursos de educación primaria), por lo que son fundamentales los momentos de discusión en gran grupo para evaluar sus conocimientos previos y esto ocupará parte del tiempo de clase.

Se trata de valorar las intuiciones probabilísticas que tienen ante situaciones de incertidumbre, así como la aplicación del cálculo de la probabilidad de sucesos y la esperanza matemática en variables aleatorias para responder correctamente y tomar decisiones acordes a los resultados obtenidos.

Se presentarán las tareas una a una por parte del docente, mediante la pizarra digital (o proyector) y de manera secuenciada; es decir, tras la resolución y corrección de una tarea se pasará a la siguiente. El docente se asegurará que los estudiantes comprenden correctamente cada enunciado.

Los estudiantes responderán a las tareas por parejas, en aproximadamente unos 5-10 minutos en cada tarea, tras lo que se dedicarán unos 10 minutos aproximadamente para discutir cada una de sus respuestas. Según se avance en el desarrollo de las tareas los tiempos podrán ir ajustándose más y que la Tarea 4 la entreguen en clase y se discuta su resolución también en clase.

Tarea 1. Marina recibe 5 € a la semana, pero la madre propone un cambio: darle 3 euros como base y tirar una moneda para jugar por una cantidad adicional. Si en el lanzamiento se obtiene “cara”, Marina se lleva 8 euros, pero si sale “cruz”, no se lleva ningún premio. ¿Qué opción le recomiendas a Marina escoger? ¿Por qué?

Tarea 2. En la huerta de la tía de Joaquín de cada 30 lechugas, 10 son mordidas por caracoles; en la huerta biológica del tío de Joaquín, de cada 100 lechugas, 40 son mordidas por caracoles. Joaquín tiene 20 semillas de lechuga y puede elegir plantarlas en el jardín de su tía o su tío. Como el objetivo de Joaquín es obtener ganancia de la venta de las lechugas: ¿Dónde recomendarías a Joaquín plantar sus semillas? ¿Por qué?

Tarea 3. El Centro Meteorológico de Santiago de Compostela da una predicción de 70% de posibilidad de lluvia para el mes de febrero de 2022.

- a. Si la predicción es buena, ¿cuántos días, aproximadamente, esperas que llueva durante ese mes?
- b. Supongamos que este Centro Meteorológico informa que esta semana hay un 80% de posibilidades de lluvia en Santiago, pero el lunes no llueve. ¿Piensas que su predicción es todavía válida? ¿Por qué?
- c. Y si no llueve ni el lunes ni el martes, ¿piensas que su predicción es todavía válida? ¿Por qué?

Tarea 4. Elige entre: (a) Una ganancia segura de 3 euros; (b) Participar en una lotería en la que hay una probabilidad de 80% de ganar 4 euros y un 20% de no ganar nada.

SEGUNDA SESIÓN

Al comienzo de la sesión, los estudiantes entregan la resolución individual de la Tarea 4 (plantada en la sesión previa), aunque puede que algunos estudiantes ya la entregaran al finalizar la sesión del día anterior. A continuación, se ponen en común las resoluciones de los estudiantes, en modo de discusión en gran grupo. Se resuelven las dudas que se generen y se incide en la relación de los conceptos explicados (duración de 10 minutos).

En el tiempo restante, se resuelve individualmente la Tarea 5, presentada por el docente de manera que se asegure que los estudiantes comprenden correctamente cada pregunta. La gestión será del siguiente modo: en los primeros 10-15 minutos responden de manera individual a los apartados a), b) y c). Se hace una discusión general (5 minutos aproximadamente) a propósito del apartado d) y se entrega al profesor la resolución del resto de apartados en los 10-15 minutos restantes.

Tarea 5. En tu Instituto se ha organizado una feria para celebrar el Día de las matemáticas el próximo 14 de marzo de 2022. Entre los talleres que se han organizado hay uno de JUEGO a DADOS en el que por 1€ se puede jugar una partida que consiste en lanzar dos

dados distintos y si la suma de sus resultados es menor o igual a 6 se gana 50 céntimos, pero si el resultado de la suma es superior a 6 no se gana nada. Como debes tomar la decisión de jugar o no a este juego, responde a las siguientes preguntas:

- a. Analiza y describe las repercusiones de las diferentes decisiones que puedes tomar.
- b. Antes de tomar tu decisión, juega en clase veinte veces para analizar la situación. Representa en una tabla las sumas obtenidas en tus 20 jugadas.
- c. Con los datos obtenidos en el juego realizado en clase, ¿tomarías la decisión de jugar en este taller de la feria? ¿Por qué?
- d. Compara tu decisión con la de tus compañeros y compañeras de clase. ¿Has cambiado de decisión? Fundamenta tus razones tanto si has cambiado como si mantienes la decisión tomada en el apartado c).
- e. Si en el juego la ganancia del premio fuese de 2€ en lugar de 50 céntimos, ¿cambiarías tu decisión?
- f. Tu amigo Manuel quiere jugar 200€ en el juego, por lo que paga 200 partidas en el JUEGO a DADOS con la intención de recuperar el dinero invertido y obtener ganancia. ¿Cuál es la ganancia esperada de Manuel al finalizar las 200 partidas? ¿Aconsejarías a Manuel jugar o no jugar en este taller de la feria con las circunstancias que plantea? Fundamenta tu postura ante la decisión de Manuel.

Se finaliza la sesión corrigiendo la tarea, compartiendo de manera razonada cada una de las decisiones ante la postura de Manuel de jugar 200€. El docente mostrará razones por las que no es rentable jugar al JUEGO a DADOS, mediante simulación con el applet <https://www.rossmanchance.com/applets/2021/oneprop/OneProp.htm> basadas en la variabilidad y representatividad muestral, donde evidenciará la relación de los significados intuitivo, clásico y frecuencial de la probabilidad, a propósito de la situación que han resuelto.

Apéndice – Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 25 de Enero de 2025.

Aprobado: 16 de Junio de 2025.

Publicado: 05 de Julio de 2025.

Como Citar — APA

Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C., & Gea, M. M. (2025). Análisis de la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza de la probabilidad por futuros profesores de educación secundaria. *PARADIGMA*, XLVI(2), e2025022. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025022.id1651>.

Como Citar — ABNT

ÁLVAREZ-ARROYO, Rocio; BATANERO, Carmen; GEA, María M. Análisis de la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza de la probabilidad por futuros profesores de educación secundaria. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVI, n. 2, e2025022, Jul./Dic., 2025. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025022.id1651>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a revista **Paradigma** los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista **Paradigma** tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativas en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (**Open Access**) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (**Article Processing Charges - APCs**). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.

**Licencia de uso**

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.

**Comprobación de similitud**

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto **iThenticate** de Turnitin, a través del servicio de **Similarity Check** de la Crossref.

**Proceso de evaluación**

Revisión por pares a doble ciego (**Double blind peer review**).

Editor

Fredy E. González

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista Paradigma obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

