

Características do pensamento matemático avançado: contribuições da pesquisa baseada em design no estudo das integrais de Riemann e de Lebesgue

Vanilde Bisognin¹  Ismael Batista Maidana Silvestre² 

Resumo

Este trabalho teve como objetivo investigar como os licenciandos compreendem o conceito de Integral de Riemann, suas limitações e a necessidade de um novo conceito, como o da Integral de Lebesgue, tendo como referencial teórico o Pensamento Matemático Avançado (PMA). Como metodologia de pesquisa, utilizou-se a Pesquisa Baseada em Design (PBD). Foi proposto e aplicado um produto educacional construído a partir de princípios de design definidos preliminarmente. As análises foram realizadas sobre as produções dos estudantes de uma turma de Análise Matemática, no primeiro ciclo da PBD. Para a análise, as imagens dos conceitos manifestados pelos estudantes nas respostas às atividades do produto educacional foram classificadas nos níveis: Inicial, Intermediário ou Avançado. Os resultados, com cerca de 75% das imagens nos níveis intermediário ou avançado, evidenciaram que os princípios foram validados ao longo da aplicação e que o produto educacional contribuímos para a compreensão dos conceitos.

Palavras-chave: Imagem e Definição do Conceito, Análise Matemática, Princípios de Design, Integrais Definidas.

Characteristics of advanced mathematical thinking: contributions of design-based research in the study of Riemann and Lebesgue integrals

Abstract

This study aimed to investigate how pre-service teachers understand the concept of the Riemann Integral, its limitations, and the need for a new concept, such as the Lebesgue Integral, using Advanced Mathematical Thinking (AMT) as a theoretical framework. The research methodology employed was Design-Based Research (DBR). An educational product was proposed and implemented, constructed based on preliminarily defined design principles. The analysis focused on the productions of students from a Mathematical Analysis class during the first DBR cycle. For the analysis, the conceptual images demonstrated by students in their responses to the activities in the educational product were classified into the following levels: Initial, Intermediate, or Advanced. The results, with approximately 75% of the images classified as intermediate or advanced, evidenced that the principles were validated throughout the implementation and that the educational product contributed to the understanding of the concepts.

Keywords: Concept Image and Definition, Mathematical Analysis, Design Principles, Definite Integrals.

Características del pensamiento matemático avanzado: aportaciones de la investigación basada en el diseño en el estudio de las integrales de Riemann y Lebesgue

Resumen

Este estudio tuvo como objetivo investigar cómo los futuros profesores comprenden el concepto de la Integral de Riemann, sus limitaciones y la necesidad de un nuevo concepto, como la Integral de Lebesgue, utilizando el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) como marco teórico. La metodología de investigación empleada

¹ Universidade Franciscana, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: vanilde@ufn.edu.br

² Universidade Franciscana, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: ismael.silvestre@ufn.edu.br

fue la Investigación Basada en Diseño (IBD). Se propuso e implementó un producto educativo construido a partir de principios de diseño definidos preliminarmente. El análisis se centró en las producciones de estudiantes de una clase de Análisis Matemático durante el primer ciclo de la IBD. Para el análisis, las imágenes conceptuales manifestadas por los estudiantes en sus respuestas a las actividades del producto educativo fueron clasificadas en los niveles: Inicial, Intermedio o Avanzado. Los resultados, con aproximadamente el 75 % de las imágenes clasificadas como intermedias o avanzadas, evidenciaron que los principios fueron validados a lo largo de la implementación y que el producto educativo contribuyó a la comprensión de los conceptos.

Palabras clave: Imagen y Definición del Concepto, Análisis Matemático, Principios de Diseño, Integrales Definidas.

INTRODUÇÃO

Estudos recentes indicam que o ensino e aprendizagem de Cálculo e Análise Matemática apresentam desafios significativos nos cursos de graduação das ciências exatas. As dificuldades enfrentadas estão associadas a fatores como: lacunas no entendimento conceitual devido ao foco excessivo em procedimentos (CADORNA, 2022), dificuldades dos estudantes em conectar teoria com prática (TAHER, 2023), falta de recursos visuais e tecnológicos contribui para as barreiras no aprendizado de conceitos abstratos em cálculo (NURJANAH, 2021), falta de fluência entre representações algébricas e geométricas persiste como barreira no aprendizado conceitual (WINSLØW, 2021). Um dos temas de preocupação que aparece nessas pesquisas é o tema da integral de Riemann.

Evidências das dificuldades dos alunos no tópico de integral de Riemann podem ser observadas nas provas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade), realizadas entre 2005 e 2021. O Quadro 1 apresenta o desempenho dos estudantes de cursos de licenciatura em Matemática, no Brasil, em questões relacionadas à integral de Riemann, destacando o índice de facilidade das questões com base no percentual de acertos obtidos em âmbito nacional.

Quadro 1: Índice de Facilidade e classificação de questões sobre Integral de Riemann nas provas do Enade

Ano	Questão	Índice de Facilidade	Classificação
2005	26	Entre 0,16 e 0,40	Difícil
2008	19	0,26	Difícil
2011	17	0,22	Difícil
2014	10	0,30	Difícil
2017	9	0,25	Difícil
	23	0,22	Difícil
2021	Não Teve	-	-

Fonte: Autoria própria, com base nos relatórios do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES).

Pelos resultados apresentados no quadro anterior, todas as questões foram classificadas como difíceis. Esse fato enfatiza as dificuldades que os estudantes de licenciatura em Matemática têm em relação ao conteúdo de integrais de Riemann.

Os reflexos das dificuldades dos estudantes nas disciplinas de Cálculo são sentidos na disciplina de Análise Matemática quando é exigida dos alunos a passagem do pensamento elementar para o pensamento avançado. Tall (2013) discute que a transição da matemática elementar, focada em cálculos e resolução de problemas, para a matemática avançada, com ênfase na compreensão de conceitos abstratos e na lógica formal, é um desafio significativo para muitos estudantes, principalmente em disciplinas como Análise Matemática.

Outro aspecto relacionado ao conceito de integral de Riemann é a limitação quanto à classe de funções que podem ser integradas. Apresentar a evolução conceitual do tema e demonstrar aos estudantes que existem abordagens mais abrangentes em termos de integração, como o caso da integral de Lebesgue, pode contribuir para a compreensão de que a matemática não é uma ciência pronta, mas, ao contrário, está em constante desenvolvimento. Essa visão da matemática como uma área em evolução é abordada por diversos autores, incluindo Lakatos (1976) e Davis, Hersh e Marchisotto (2012).

Com base nas ideias apresentadas, propomos o seguinte objetivo: analisar as imagens conceituais construídas por estudantes de licenciatura em Matemática sobre a integral de Riemann e suas limitações, bem como sobre a integral de Lebesgue, a partir de um produto educacional desenvolvido com suporte metodológico na pesquisa baseada em design e fundamentado nos pressupostos da teoria de Imagem do Conceito e Definição do Conceito.

Nesse trabalho descrevemos resultados de uma pesquisa que trata dos conceitos de integral de Riemann e de integral de Lebesgue, mostrando as limitações da primeira e a necessidade do segundo conceito. Utilizamos como referencial teórico o pensamento matemático avançado com uma proposta de classificação de imagens do conceito em três níveis: Inicial, Intermediário ou Avançado.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E IMAGEM DO CONCEITO E DEFINIÇÃO DO CONCEITO

De acordo com Tall (2002), o pensamento empregado por matemáticos profissionais em suas produções envolve, geralmente, o uso de representações mentais de definições, teoremas e axiomas para demonstrar a validade de propriedades matemáticas. Esse tipo de pensamento, que também aparece, geralmente, quando os estudantes se deparam com a matemática axiomática, é denominado pensamento matemático avançado. O PMA caracteriza-se pelo enfoque na matemática formal e abstrata, onde as propriedades dos objetos

são elaboradas com base em suas definições, apoiando-se em imagens conceituais, definições formais e deduções lógicas.

A criação de atividades voltadas para o desenvolvimento de imagens conceituais pode contribuir para uma aprendizagem sólida e significativa dos conceitos matemáticos. Isso, por sua vez, favorece o desenvolvimento de características associadas ao pensamento matemático avançado. Tall (2002) destaca que o PMA envolve a capacidade de construir representações mentais que permitem aos matemáticos compreenderem e explorar conceitos abstratos de maneira profunda, flexível e estruturada.

A definição de imagem do conceito refere-se à estrutura cognitiva global vinculada a um determinado conceito, abrangendo todas as representações mentais, propriedades e processos associados a ele. Já a definição do conceito é uma descrição verbal rigorosa que explica o conceito de maneira precisa e não circular (Vinner, 1983, p. 239). Contudo, conhecer a definição formal de um conceito não garante sua compreensão; para isso, é necessário construir uma imagem significativa do conceito (Vinner, 1991).

Na mesma linha, Domingos (2003), em sua tese, buscou identificar como estudantes ingressantes no ensino superior compreendem conceitos matemáticos, como: sucessões, funções, cálculo diferencial e integral. Para isso, o autor utilizou diferentes teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos, classificando as imagens conceituais manifestadas pelos participantes em três categorias: imagem do conceito incipiente, imagem do conceito instrumental e imagem do conceito relacional.

Tendo como suporte teórico a teoria de imagem do conceito e definição do conceito de Tall e Vinner (1981), a teoria de reificação³ de Anna Sfard (1991), a teoria APOS (Action, Process, Object, Schema) de Dubinsky (1991) e as categorias propostas por Domingos (2003), criamos uma classificação de imagens do conceito em três níveis: Inicial, Intermediário e Avançado.

O nível Inicial representa a etapa primordial no processo de compreensão matemática, em que os estudantes começam a explorar conceitos fundamentais. Nesse estágio, a imagem do conceito é rudimentar, refletindo uma visão simplificada, com representações visuais que capturam apenas propriedades básicas do conceito. A reificação encontra-se em processo, ainda em um nível preliminar. As ações sobre o conceito são limitadas, restringindo-se a operações matemáticas elementares. Os processos matemáticos estão em desenvolvimento, revelando uma visão fragmentada do raciocínio matemático, enquanto o objeto é visto de forma simplificada, com foco em aspectos básicos do conceito, caracterizando o início da construção do conhecimento matemático.

³ Sfard (1991) diz que reificação é o processo cognitivo pelo qual uma sequência de operações ou ações é transformada em um conceito que pode ser manipulado como um todo. Esse processo permite aos aprendizes pensar sobre um conceito matemático como uma entidade completa e independente, em vez de apenas uma série de ações ou processos.

O nível Intermediário reflete a transição para uma compreensão mais profunda, incorporando elementos mais complexos e avançados. Nesse nível, a imagem do conceito evolui, refletindo uma melhor compreensão do conceito. A reificação progride, com representações visuais mais completas das propriedades essenciais do conceito. A ação sobre o conceito se amplia, abrangendo uma gama mais ampla de operações matemáticas. Os processos são mais estruturados, indicando um raciocínio matemático mais complexo e fazendo melhor uso das propriedades essenciais relacionadas ao conceito. O objeto é visto de forma mais elaborada, mostrando maior compreensão e incorporando aspectos fundamentais do conceito.

O nível Avançado representa uma compreensão aprofundada e reflexiva dos conceitos, com representações complexas e elaboradas que refletem a compreensão do conceito. A imagem do conceito é enriquecida por elementos variados, permitindo transcender a visão puramente matemática, sendo possível a demonstração de aplicações práticas. A reificação está bem desenvolvida, o conceito é visto como objeto, com representações visuais completas das propriedades essenciais. A ação é diversificada, abrangendo uma gama de operações matemáticas com a possibilidade de aplicação prática do conceito em contextos do mundo real. Os processos são sofisticados e utilizados com compreensão. O objeto incorpora aspectos detalhados e complexos do conceito, sendo possível a visualização de implicações em situações reais.

No Quadro 2 destacamos as características principais das imagens do conceito em cada um dos níveis: Inicial, Intermediário e Avançado.

Quadro 2: Características das imagens do conceito em cada um dos níveis

Classificação de Imagens do Conceito			
	Inicial	Intermediário	Avançado
Objeto	I01) Representações visuais simples de objetos relacionados ao conceito, com destaque para características básicas. I02) Dificuldade em captar a complexidade do objeto matemático. I03) Ações realizadas não conduzem a processos possíveis de encapsular nos objetos que representam o conceito. I04) Os alunos podem concentrar-se em detalhes isolados do conceito, sem uma compreensão mais ampla, manifestação de ventriloquismo.	It01) Incorporação de elementos mais avançados. It02) Tentativa de representar a complexidade do objeto matemático. It03) Demonstração de uma compreensão mais profunda do conceito em comparação ao nível inicial.	A01) Representação visual complexa e elaborada, capturando detalhes sutis do objeto matemático. A02) Demonstração de uma compreensão profunda do objeto – o objeto é visto como um <i>proceito</i>⁴. A03) Possibilidade de inclusão de elementos adicionais que destacam a relevância do conceito em uma situação do mundo real. A04) Objetos mais elementares são coordenados e encapsulados em novos objetos.

⁴ Gray e Tall (1994) usam o termo *proceito* para a versatilidade no uso de um símbolo que opera tanto como um processo, quanto como um conceito.

Propriedades	IP1) Utiliza propriedades básicas, mas sem exploração ou compreensão profunda (ventriloquismo). IP2) Pode haver erros conceituais evidentes ou falta de precisão nas representações. IP3) Há uma tendência a usar símbolos sem uma apreciação completa do que eles representam. IP4) O estudante pode depender fortemente da memorização de fórmulas sem entender a origem ou a lógica por trás delas. IP5) Pode haver confusão ou falta de clareza sobre as propriedades fundamentais do conceito. IP6) Uso de nenhuma ou pouca linguagem simbólica.	ItP1) Boa utilização de propriedades básicas, com compreensão. ItP2) Depende da memorização de fórmulas, mas começa a entender a origem ou a lógica por trás delas. ItP3) Possível identificação e aplicação correta de propriedades básicas relacionadas ao conceito. ItP4) Menos erros conceituais em comparação ao nível inicial. ItP5) Maior uso de linguagem simbólica.	AP1) Demonstração de uma compreensão avançada das implicações matemáticas das propriedades. AP2) Pouca ou nenhuma dependência da memorização de fórmulas. AP3) Identificação e aplicação refinada de propriedades relacionadas ao conceito em atividades matemáticas e aplicadas. AP4) Nenhum ou poucos erros conceituais. AP5) Domínio da linguagem simbólica.
Tradução entre Representações	ITR1) Limitada ou nenhuma tentativa de traduzir entre diferentes formas de representação (gráficos, expressões matemáticas, palavras). ITR2) Falta de conexão clara entre representações (visual, algébrica, gráfica...) e conceitos matemáticos subjacentes. ITR3) Inconsistência entre Representações. ITR4) Relutância na utilização da representação simbólica.	ItTR1) Tentativas de traduzir entre diferentes formas de representação, como transição entre uma representação visual e uma expressão matemática. ItTR2) Melhor conexão entre a representação visual e os conceitos matemáticos subjacentes. ItTR3) Menor número de inconsistências entre representações. ItTR4) Maior utilização da representação simbólica.	ATR1) Transição fluida e precisa entre diferentes formas de representação. ATR2) Forte conexão entre a representação visual e a linguagem matemática. ATR3) Nenhuma ou poucas inconsistências entre representações. ATR4) Incorporação de notação matemática avançada e precisa. ATR5) Transição fluida entre a representação visual e uma descrição verbal ou escrita do contexto em que o conceito está sendo aplicado.
Processo e Pensamento <i>Proceitual</i>	IPPP1) Ausência de um processo claro ou pensamento <i>proceitual</i>. IPPP2) Falta de uma abordagem estruturada para resolver o problema. IPPP3) Possível dificuldade em expressar o raciocínio por trás da representação visual. IPPP4) Os estudantes podem seguir procedimentos de maneira mecânica, sem compreensão dos processos matemáticos envolvidos. IPPP5) Há uma tendência a depender de «receitas» ou passos fixos para resolver problemas sem entender o porquê de cada passo. IPPP6) O estudante pode se concentrar principalmente na obtenção da resposta correta, sem prestar muita atenção ao processo de resolução. IPPP7) Pouca reflexão sobre as estratégias escolhidas para resolver um problema ou sobre a eficácia dessas estratégias.	ItPPP1) Início do desenvolvimento de um processo mais elaborado. ItPPP2) Demonstração de uma abordagem mais estruturada para resolver o problema, embora ainda em desenvolvimento. ItPPP3) Os estudantes podem seguir procedimentos de maneira mecânica, mas com maior compreensão dos processos matemáticos envolvidos. ItPPP4) Há uma tendência a depender de «receitas» ou passos fixos para resolver problemas, porém, começando a entender o porquê de cada passo. ItPPP5) Maior reflexão sobre as estratégias escolhidas para resolver um problema ou sobre a eficácia dessas estratégias.	APPPP1) Desenvolvimento de um processo matemático elaborado e estruturado. APPPP2) Articulação clara das componentes processual e conceitual. APPPP3) Exploração de abordagens alternativas e extensões além do escopo básico. APPPP4) Os estudantes seguem poucos procedimentos de maneira mecânica, e quando seguem, tem total compreensão dos processos matemáticos envolvidos. APPPP5) Pouco uso de «receitas» ou passos fixos para resolver problemas, porém, se fazem, entendem o porquê de cada passo. APPPP6) Refletem sobre as estratégias escolhidas para resolver um problema ou sobre a eficácia dessas estratégias.

Fonte: autoria própria.

Essa classificação é uma forma de analisar as atividades desenvolvidas pelos estudantes e, a partir dos resultados, concluir se as atividades propostas e a metodologia em-

pregada foram capazes de promover a manifestação de uma boa concentração de imagens do conceito no nível avançado e desenvolver indícios de PMA.

A METODOLOGIA DE PESQUISA BASEADA EM DESIGN

Na pesquisa baseada em design (PBD), investigam-se intervenções educacionais com o propósito de promover aprendizagens específicas ou mudanças sistêmicas, bem como compreender os processos subjacentes a essas intervenções (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble, 2003; Gravemeijer e Cobb, 2013). A PBD assume que o conhecimento não se localiza nas pessoas consideradas como indivíduos, mas antes constitui um processo que envolve a pessoa que conhece o contexto em causa e a atividade em que esta participa (Barab e Squire, 2004).

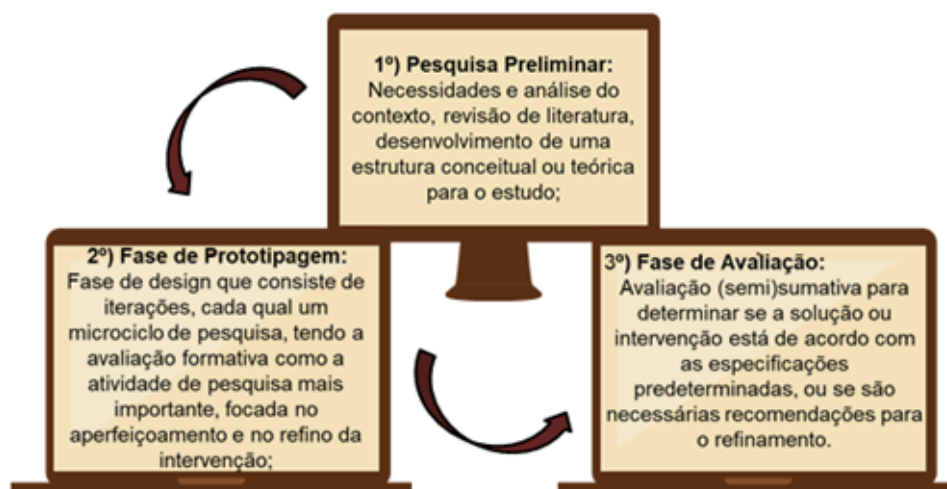
Autores como Cobb, Jackson e Dunlap (2015) indicam que a PBD apresenta cinco características fundamentais:

1. Incide sobre problemas enfrentados por profissionais (professores ou formadores, no caso educacional) no exercício de suas práticas pedagógicas, buscando promover a aprendizagem dos alunos ou a formação de docentes;
2. Baseia-se em intervenções, com o intuito de transformar processos que ocorrem em contextos reais;
3. Possui simultaneamente uma orientação teórica e pragmática;
4. Envolve a formulação, teste, revisão ou rejeição de hipóteses relacionadas aos processos de aprendizagem dos participantes e aos meios de promovê-los; e
5. Visa à generalização dos resultados, dada sua preocupação teórica.

Segundo Plomp (2007), um aspecto central da PBD é a constituição de grupos cooperativos, compostos por profissionais, pesquisadores, gestores e outros atores envolvidos. Com base em estudos prévios e na literatura existente, os pesquisadores, em cooperação, desenvolvem intervenções que atendem aos critérios de viabilidade prática e eficácia. Esse processo envolve a análise e a reflexão sistemática sobre versões sucessivas (ou protótipos) dessas intervenções no contexto-alvo, com o objetivo de produzir tanto produtos utilizáveis quanto princípios de design aplicáveis.

Independentemente de sua finalidade específica, o desenvolvimento de uma pesquisa baseada em design incorpora o desenho sistemático e iterativo de suas intervenções, organizado em ciclos. Embora existam divergências entre os pesquisadores quanto a alguns detalhes da abordagem, há consenso de que a PBD é composta por fases bem definidas. Nesse sentido, Plomp (2018) sugere que essas fases sejam estruturadas conforme apresentado no esquema da Figura 1.

Figura 1: Fases da Pesquisa Baseada em Design



Fonte: autoria própria, adaptado de Plomp (2018).

Com base na teoria e em estudos prévios, ou seja, na literatura científica, que chamaremos de T_1 , os pesquisadores elaboram a versão inicial do produto educacional, o protótipo 1, P_1 . Esse, utilizado e submetido à análise crítica, gera novos entendimentos teóricos T_2 . Com esse incremento nos entendimentos teóricos, é feito o refinamento/redesenho do protótipo P_1 gerando o protótipo P_2 , e assim sucessivamente.

$$T_1 \rightarrow P_1 \rightarrow T_2 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \begin{cases} T_n \\ P_n \end{cases}$$

Os ganhos teóricos (princípios de design) não devem ser vistos como regras, nem o sucesso como garantido. Para representar essa generalização como declarações heurísticas, Van den Akker (1999) desenvolveu o seguinte modelo:

Se você quiser projetar a intervenção X para o propósito/função Y no contexto Z, então é melhor você dar a essa intervenção as características A, B e C (ênfase substantiva), e fazer isso por meio dos procedimentos K, L e M (ênfase procedimental), por causa dos argumentos P, Q e R. (Van den Akker, 1999, p. 9)

Concordamos com a visão/discurso da necessidade de intervenções com origem na prática e para a prática. Para que isso ocorra de maneira efetiva, é imprescindível o envolvimento direto dos profissionais que atuam em sala de aula. As intervenções almejadas por pesquisadores que desenvolvem estudos na abordagem da PBD devem ser de alta qualidade, possuir validade teórica, demonstrar efetividade e apresentar viabilidade prática (praticidade).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho foi conduzido por meio de uma abordagem qualitativa, utilizando a metodologia de pesquisa baseada em design, conforme detalhado na seção anterior. As atividades foram estruturadas em três unidades, com o objetivo de promover a construção

dos seguintes conceitos: Integral de Riemann (Unidade 1), Primitivas (Unidade 2) e Integral de Lebesgue (Unidade 3). O Quadro 3 apresenta uma descrição sucinta de cada uma dessas unidades.

Quadro 3: Descrição do que foi trabalhado em cada unidade

	Objetivo	O que foi feito?
Unidade 1 Integral de Riemann	- Construir o conceito de integral de Riemann; - Mostrar que existem funções que não são integráveis à Riemann; - Evidenciar outros conceitos de integração, como o de Lebesgue.	- A atividade 1.1 busca evidenciar as limitações da geometria plana no cálculo de áreas; - Nas atividades 1.2 a 1.6, realiza-se a construção do conceito de integral de Riemann; - Nas atividades 1.7 e 1.8, os estudantes se deparam com funções que são, e outras que não são, integráveis em Riemann.
Unidade 2 Primitivas	- Construir o conceito de Primitivas; - Mostrar que existem funções que possuem ou não primitivas e que são ou não integráveis à Riemann.	- Na atividade 2.1 é feito a construção do conceito de Primitiva; - As atividades 2.2 a 2.5 buscam mostrar aos estudantes que existem funções que possuem ou não primitivas, que são ou não integráveis à Riemann e, além disso, sob quais condições uma função possui primitiva; - Na atividade 2.6 é feito a prova do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC); - Nas atividades 2.7 e 2.8 são abordadas funções em que o TFC pode ou não ser utilizado para o cálculo de área.
Unidade 3 Integral de Lebesgue	- Construir o conceito de integral de Lebesgue; - Mostrar que o conceito de integral de Lebesgue integra uma classe maior de funções do que o conceito de integral de Riemann.	- A atividade 3.1 procura mostrar a ideia utilizada na construção do conceito da integral de Lebesgue; - Nas atividades 3.2 a 3.4, é feita a construção do conceito de integral de Lebesgue; - Nas atividades 3.5 a 3.8, os estudantes se deparam com funções que são integráveis a Lebesgue, mas não a Riemann, e outras que são integráveis tanto a Riemann quanto a Lebesgue.

Fonte: autoria própria.

Em um primeiro momento, constituiu-se o grupo de cooperação, composto por pesquisador, professores e um aluno bolsista do curso de licenciatura em Matemática de um Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete (IFFar-CA), onde a pesquisa foi desenvolvida. Desde então, o grupo tem realizado encontros quinzenais, geralmente por meio da plataforma Google Meet. Esses encontros têm sido dedicados ao estudo da metodologia de pesquisa baseada em design, à colaboração na elaboração e aplicação do produto educacional, bem como para discussões sobre temas específicos considerados desafiadores no curso de licenciatura em Matemática.

Na fase preliminar da pesquisa, foram realizadas a análise do problema, a revisão de literatura e o levantamento dos princípios de design iniciais. Esses princípios foram, de forma preliminar, definidos como: 1) atividades organizadas com o uso de recursos tecnológicos facilitam a compreensão dos conceitos de integral de Riemann e de Lebesgue; e 2) atividades que promovem a busca por padrões, abstrações e generalizações, utilizando a noção de área como raiz cognitiva, são fundamentais para o ensino da integral de Riemann.

Durante a fase de prototipagem, foram elaboradas oito atividades para cada unidade, conforme detalhado no Quadro 3. Tanto no desenvolvimento de cada atividade quanto no planejamento geral das unidades, buscou-se atender aos princípios de design estabe-

lecidos, acreditando que esses possibilitariam a construção de atividades eficazes na promoção da compreensão dos conceitos abordados. As atividades foram validadas a partir de revisão de teses, dissertações e livros amplamente utilizados no ensino de Cálculo e Análise Matemática, além de ter contado com a experiência profissional dos colaboradores do grupo de pesquisa.

O produto educacional foi projetado para aplicação em três semanas, no contexto da disciplina de Fundamentos de Análise Matemática, com carga horária semanal de 4 horas, ofertada no último semestre do curso de licenciatura em Matemática do IFFar-CA. Os estudantes participantes já haviam estudado os conceitos de integral de Riemann e Primitivas em Cálculo Diferencial e Integral II. A aplicação das atividades ocorreu de forma presencial, com pouca intervenção do pesquisador, de modo a privilegiar a autonomia dos estudantes na construção dos conceitos.

As atividades foram aplicadas entre novembro e dezembro de 2022, com a participação de nove estudantes matriculados na disciplina de Fundamentos de Análise Matemática. Eles foram organizados em quatro duplas e um estudante realizou as atividades individualmente, identificados como D1, D2, D3, D4 e E1, respectivamente. A coleta de dados concentrou-se na produção escrita dos participantes obtida a partir da resolução das atividades propostas nas três unidades.

Na fase de avaliação, as produções dos estudantes foram analisadas à luz do aporte teórico do pensamento matemático avançado, adotando-se a classificação nos níveis Inicial, Intermediário e Avançado, conforme detalhado em seção anterior. No próximo tópico, são apresentadas e detalhadas as resoluções fornecidas pelos participantes para algumas atividades consideradas “chaves” do ponto de vista conceitual. Essas atividades exigem a manifestação das imagens dos conceitos de integral de Riemann e integral de Lebesgue, sendo acompanhadas por discussões e reflexões geradas a partir das respostas dos estudantes.

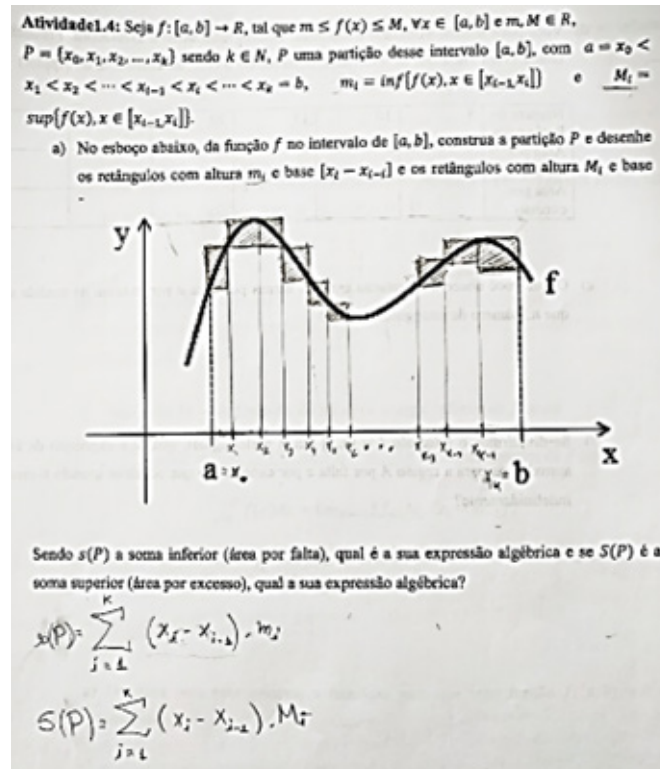
| ANÁLISE DOS DADOS

A Unidade 1 teve como objetivo desenvolver o conceito de integral de Riemann, relacionando-o à ideia de cálculo de áreas e à construção do conceito por meio do limite das somas de Riemann. Além disso, foram exploradas as condições de integrabilidade das funções e as limitações associadas ao conceito.

A atividade 1.4a, que faz parte da unidade 1, tem como objetivo determinar as expressões algébricas das somas inferiores, $s(P)$, e superiores, $S(P)$, das áreas delimitadas pela função $f(x)$, pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelo eixo x . Os estudantes elaboraram as expressões

para e utilizando as definições de ínfimo e supremo, as bases de cada retângulo e a definição de somatório. Na Figura 2 está a imagem da resposta da dupla D1.

Figura 2: Resposta da dupla D1 à atividade 1.4a



Fonte: Autoria própria.

Entendemos que se trata de uma imagem do conceito no nível Avançado. No Quadro 4 destacamos as evidências que forneceram subsídios para essa classificação.

Quadro 4: Análise da resposta da dupla D1 para a atividade 1.4a

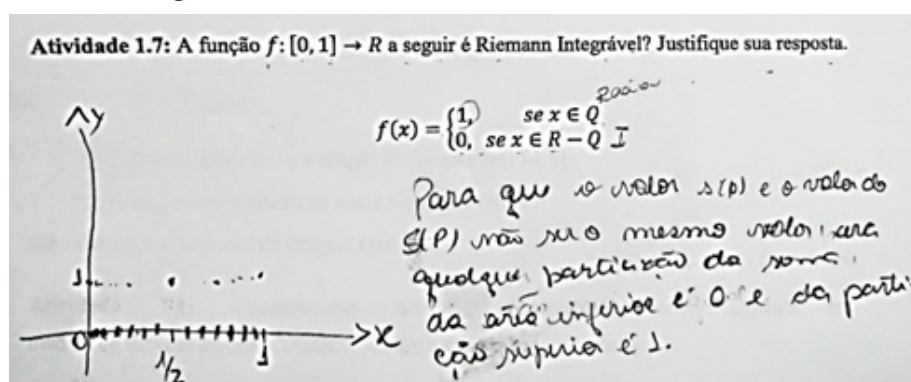
Termo de Caracterização	Descrição	Evidências
Objeto	Os estudantes mostraram ter uma compreensão profunda do conceito, os processos realizados sobre objetos mais elementares são coordenados e encapsulados em novos objetos, nesse caso as somas inferior e superior	As áreas de todos os retângulos são apresentadas na forma de somatório. Utilizam a amplitude de cada intervalo, de forma generalizada, para representar as bases dos retângulos e de forma semelhante, utilizam os conceitos de ínfimo e supremo para representar as alturas.
Propriedades	Ocorre identificação e aplicação refinada de propriedades relacionadas ao conceito, sem erros conceituais e apresenta domínio da linguagem simbólica	Parecem compreender o significado dos símbolos utilizados, nesse caso a notação de somatório, fazem bom uso desse conceito e relacionam com o conceito de integral superior e integral inferior.
Tradução entre Representações	A solução apresenta fluidez na tradução da representação gráfica para a algébrica, sem a necessidade de processos elementares.	A dupla faz a tradução da representação gráfica, onde fizeram alguns traços mostrando as diferenças entre a área de retângulos por falta e por excesso e, ao fazer tradução para a representação algébrica, faz bom uso da linguagem simbólica sem necessitar de processos elementares.

Processos e Pensamento Proceitual	O processo matemático é elaborado e estruturado, ocorre a articulação clara e detalhada do pensamento <i>proceitual</i> por trás do conceito matemático	Quando são feitas as inscrições algébricas das somas, a dupla D1 mostra a tradução simbólica do conceito: ao mesmo tempo, utiliza como processo, ao perceber que o símbolo de somatório representa a soma das áreas de retângulos menores (área por falta) quando utiliza o ínfimo como altura e, de forma semelhante entende o processo da área por excesso. Por fim, entende como um conceito de área por falta e por excesso.
--	---	--

Fonte: autoria própria.

A atividades 1.7, integrante da Unidade 1, foi elaborada para avaliar a compreensão dos estudantes sobre o conceito de integral de Riemann. A Figura 3 apresenta a resposta de D4 à atividade 1.7.

Figura 3: Resposta da dupla D4 para a atividade 1.7



Fonte: Autoria própria.

Nesse caso as evidências mostram que se trata de uma imagem do conceito no nível Intermediário. O Quadro 5 mostra a análise detalhada dessa resposta.

Quadro 5: Análise da resposta da dupla D4 para a atividade 1.7

Termo de Caracterização	Descrição	Evidências
Objeto	Não acontece o encapsular dos objetos matemáticos que dão origem ao objeto, integral de Riemann. Existe uma tentativa de representar a complexidade do objeto matemático.	Mesmo induzindo que a função de Dirichlet não é integrável a Riemann, a dupla confunde-se na utilização dos conceitos de área inferior e área superior para então concluir sobre a integrabilidade dessa função.
Propriedades	Ocorre a identificação e aplicação de propriedades relacionadas ao conceito, no caso a necessidade da igualdade entre as somas por falta e por excesso.	Percebemos dificuldade da dupla na tentativa de justificar a não integrabilidade. Além disso, mostram ter dificuldade no uso de símbolos: A dupla tenta fugir da linguagem simbólica e consequentemente não utiliza a representação algébrica.
Tradução entre Representações	Tentativas de traduzir entre diferentes formas de representação.	A dupla mostra dificuldade de realizar a tradução simbólica de forma completa exigida para essa fase da graduação: o que ocorre é uma tentativa de conexão entre a representação visual e os conceitos matemáticos subjacentes para responder a atividade.
Processos e Pensamento Proceitual	Demonstração de uma abordagem estruturada para resolver o problema, embora ainda em desenvolvimento.	Entende que a função não é integrável a Riemann ao perceber que as somas por falta e por excesso não convergem para o mesmo valor, no entanto necessita melhorar a escrita e utilizar mais a linguagem simbólica.

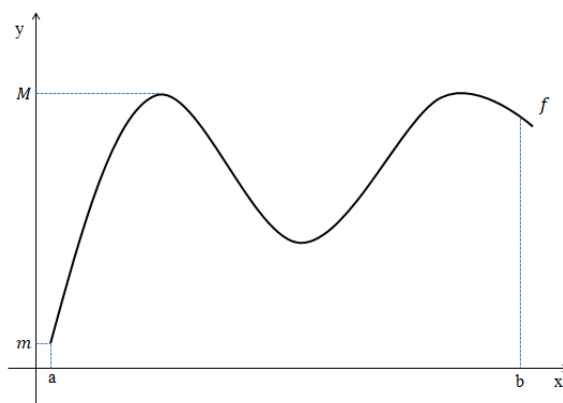
Fonte: autoria própria.

A Unidade 2 abordou estudos sobre a existência ou não de primitivas. Durante esse período, os alunos puderam discutir e distinguir os conceitos de integral de Riemann e primitivas, além de identificar as limitações do conceito de integral de Riemann. Isso proporcionou a compreensão da necessidade de expandir a classe de funções integráveis, introduzindo o conceito da Integral de Lebesgue.

A atividade apresentada no Quadro 6 integra a Unidade 3 e foi planejada para desenvolver o conceito de integral de Lebesgue, além de ilustrar sua evolução em relação à integral de Riemann. Para isso, o conceito de medida de conjuntos foi previamente discutido com os alunos.

Quadro 6: Atividade 3.3 que faz parte da Unidade 3

Atividade 3.3: A partir esboço do gráfico da função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, realize as atividades que seguem.

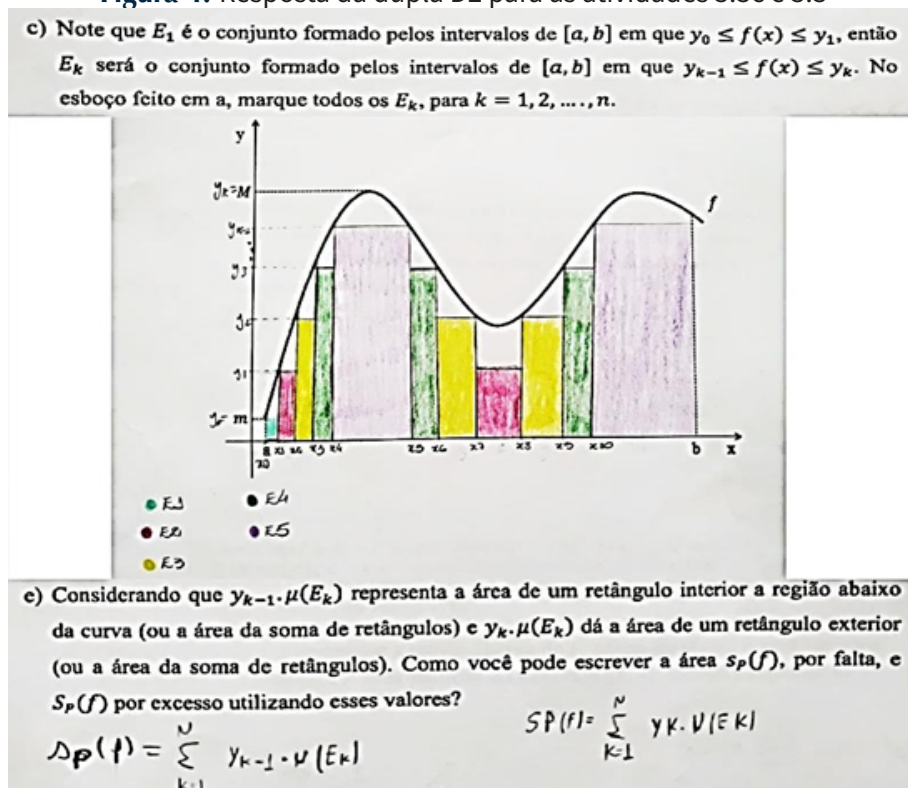


- Construa uma partição do intervalo $[m, M]$, onde $m = \inf f(x)$ e $M = \sup f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, ou seja, $P = \{y_0 < y_1 < \dots < y_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$. Represente os intervalos correspondentes em $[a, b]$. Faça o esboço no gráfico.
- Se E_1 é o conjunto formado pelos intervalos de $[a, b]$ em que $y_0 \leq f(x) \leq y_1$, ou seja: $E_1 = \{x \in [a, b] / y_0 \leq f(x) \leq y_1\}$. Quantos E_1 aparecem no teu esboço?
- Note que E_1 é o conjunto formado pelos intervalos de $[a, b]$ em que $y_0 \leq f(x) \leq y_1$, então E_k será o conjunto formado pelos intervalos de $[a, b]$ em que $y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k$. No esboço feito em a, marque todos os E_k , para $k = 1, 2, \dots, n$.
- Como você atribuiria uma medida $\mu(E_k)$, nesse caso de um função contínua, para E_k ?
- Considerando que $y_{k-1} \cdot \mu(E_k)$ representa a área de um retângulo interior a região abaixo da curva (ou a área da soma de retângulos) e $y_k \cdot \mu(E_k)$ dá a área de um retângulo exterior (ou a área da soma de retângulos). Como você pode escrever a área $s_p(f)$, por falta, e $S_p(f)$ por excesso utilizando esses valores?

Fonte: autoria própria.

A Figura 4 mostra a resposta da dupla D2 para alguns itens da questão do quadro anterior.

Figura 4: Resposta da dupla D2 para as atividades 3.3c e 3.3

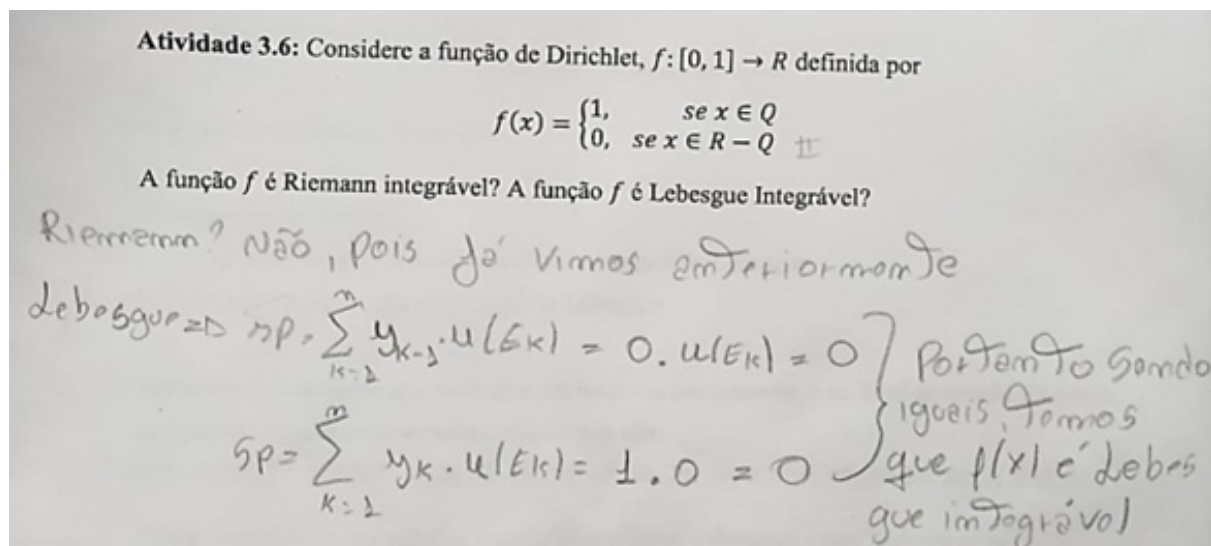


Fonte: autoria própria.

A resposta, para a atividade “c”, evidencia uma imagem do conceito intermediário. Percebemos a tentativa de representar a complexidade do objeto matemático, no entanto mostra dificuldades no processo de abstração e generalização, ao realizar a partição genérica do intervalo $[m, M]$ confunde-se com o consequente número de conjuntos E_k . Faz bom uso de propriedades básicas, parece compreender a composição dos E_k ao separar por cores iguais os intervalos que fazem parte do mesmo conjunto. Faz a tradução da representação algébrica para a gráfica, com poucas inconsistências. Percebemos o início do desenvolvimento de um processo bem elaborado ao particionar o intervalo $[m, M]$, no entanto, ainda mostram dificuldades no processo de generalização. Já no item “e” a imagem do conceito é avançada. É possível vermos que a dupla tem compreensão do objeto – os objetos, $s_p(f)$ e $S_p(f)$ são vistos como *proceitos*, representam o processo de somar áreas de retângulos e ao mesmo tempo são vistos como o conceito de área por falta e por excesso, respectivamente. Os processos realizados sobre objetos mais elementares (nesse caso, a amplitude de intervalos, medida de conjuntos, área de retângulo e somatório) são coordenados e encapsulados em novos objetos – as somas por falta e por excesso. Mostram domínio da linguagem simbólica. Fazem a transição fluida e entre a representação gráfica e algébrica e utilizam os símbolos de forma correta. Por fim, percebemos a articulação das componentes processual e conceitual.

Com a atividade 3.6 foi possível mostrar a existência de funções que são integráveis a Lebesgue e que não são integráveis à Riemann. Na Figura 5 é possível visualizar a resposta do estudante E1.

Figura 5: Imagem da resposta do estudante E1 para a atividade 3.6



Fonte: autoria própria.

Do ponto de vista das imagens conceituais caracterizamos como avançada. No Quadro 7 destacamos as principais evidências que caracterizam essa imagem nesse nível.

Quadro 7: Análise da resposta do estudante E1 para a atividade 1.7

Termo de Caracterização	Descrição	Evidências
Objeto	Objetos mais elementares são coordenados e encapsulados em novos objetos.	Os conceitos de somas por falta e por excesso assumem o estatuto de objetos matemáticos e quando vistos como processos são coordenados e encapsulados no conceito de integral de Lebesgue.
Propriedades	Demonstração de uma compreensão avançada das implicações matemáticas das propriedades e domínio da linguagem simbólica.	O estudante faz uso correto dos símbolos e propriedades, demonstrando entendimento dos significados.
Tradução entre Representações	Não apresenta inconsistências entre representações e utiliza notação matemática precisa.	Os conceitos são traduzidos simbolicamente sem erros conceituais. O estudante faz a escrita algébrica das somas por falta e por excesso utilizando a notação de somatório e conclui sobre a integrabilidade a Lebesgue.
Processos e Pensamento Proceitual	Desenvolvimento de um processo matemático altamente elaborado e estruturado e articulação clara das componentes processual e conceitual.	É possível observar os componentes processual e conceitual em interação, por exemplo: ele observa que, independentemente do particionamento, as somas inferiores são sempre 0 (considerando que é o menor valor da função em cada um dos intervalos da partição) e as somas superiores são sempre 1 (considerando que é o maior valor da função em cada um dos intervalos da partição). A partir disso, o estudante conclui que, devido às propriedades da função de Dirichlet, os limites das somas inferior e superior convergem para o mesmo valor. Portanto, sendo integrável à Lebesgue.

Fonte: autoria própria.

Ao analisarmos as imagens conceituais dos estudantes, classificadas nos níveis inicial, intermediário ou avançado em relação às atividades das unidades 1 e 3, constatamos que aproximadamente 75% dessas imagens encontram-se nos níveis intermediário ou avançado. Esse resultado evidencia que o produto educacional contribuiu significativamente para que os alunos compreendessem o conceito de integral de Riemann, suas limitações, e o conceito de integral de Lebesgue. Ademais, os escritos e as falas dos grupos reforçaram essas conclusões, como segue:

D1: [...] a função $1/x^2$, no intervalo não é integrável à Riemann porque as somas das áreas por falta e por excesso não convergem para o mesmo valor...ah, claro, não teria como ter um valor pra área, essa função não é limitada nesse intervalo.

E1: [...] essa função [a de Dirichlet] não é integrável a Riemann por causa da partição do intervalo $[a,b]$, em cada parte sempre vai ter ínfimo 0 e supremo 1[...] no caso de Lebesgue, particionar $[m,M]$, não tem a ver com ínfimo e supremo [...], mas com a medida dos conjuntos, aí não tem esse problema.

D2: [...] a escolha da partição no eixo elimina o problema de infinitos pontos de descontinuidade, no caso dessa função [de Dirichlet].

D1: [...]mas em ambos os tipos de integrais, é preciso ter convergência das somas, por falta e por excesso.

As falas dos alunos da dupla D1, que enfatizam a necessidade de convergência das somas, por falta e por excesso, para que uma função seja integrável a Riemann e, de forma análoga, integrável a Lebesgue, juntamente com as observações de E1 e D2, que destacam as diferenças nas definições dos dois conceitos de integração, evidenciam que os estudantes compreenderam os conceitos, souberam diferenciá-los e reconheceram as limitações inerentes ao conceito de integral de Riemann.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os princípios de design iniciais (1) e (2), descritos no item 4, foram fundamentais para a caracterização do produto educacional. Com base neles, foi possível planejar atividades que proporcionaram resultados promissores no ensino e na aprendizagem dos conceitos abordados, além de contribuírem para a validação do produto educacional em termos de validade, praticidade e efetividade.

No que diz respeito à efetividade, acreditamos tê-la validado com base nos resultados expressivos alcançados em termos de imagens conceituais no nível avançado nas atividades de síntese de cada unidade. Foram poucas as imagens do conceito classificadas

no nível inicial, embora tenhamos identificado dificuldades relacionadas a conhecimentos prévios e à realização de processos por parte de alguns estudantes da turma.

As características das atividades e a estrutura do produto educacional, organizadas nas três unidades temáticas–Unidade 1: Integral de Riemann, Unidade 2: Primitivas e Unidade 3: Integral de Lebesgue –, foram cruciais para que os estudantes diferenciasssem os conceitos de integral de Riemann e primitivas. Além disso, essas atividades permitiram que percebessem a natureza dinâmica da matemática, ao explorarem um novo conceito de integração. O estudo da integral de Lebesgue, em particular, favoreceu a compreensão de conceitos previamente abordados, abrangendo desde noções elementares, como a partição de uma função em subintervalos, até conceitos de matemática avançada, como ínfimo, supremo e aspectos relacionados à teoria da medida.

O grupo de colaboração desempenhou um papel determinante, participando ativamente de todas as etapas da pesquisa. Esse envolvimento foi um dos grandes diferenciais da pesquisa baseada em design, possibilitando o desenvolvimento de um produto educacional robusto que atendeu às necessidades do público-alvo. Os profissionais do grupo contribuíram desde os estudos iniciais até a proposição e análise das atividades que compuseram o produto educacional, além de acompanharem a aplicação em sala de aula. Nesse processo, observamos múltiplas aprendizagens para os participantes, incluindo a análise de problemas em seus contextos de trabalho, revisões bibliográficas sobre o tema de estudo, elaboração de atividades e avaliação de intervenções. Durante a aplicação, o grupo contribuiu com críticas e revisões das atividades. Assim, a pesquisa também fomentou a cooperação entre os docentes do curso, constituindo um verdadeiro processo de formação continuada.

Por fim, concluímos que os licenciandos compreenderam o conceito de integral de Riemann, suas limitações e a necessidade de um novo conceito, como o da integral de Lebesgue. As atividades desenvolvidas promoveram boas imagens conceituais, evidenciando aspectos do pensamento matemático avançado.

AGRADECIMENTOS

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences*, v. 13, n. 1, p. 1-14, 2004.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Exame*

Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2005 – Matemática. Brasília, DF, 2005.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2008 – Matemática*. Brasília, DF, 2009.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2011 – Matemática*. Brasília, DF, 2011.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2014 – Matemática*. Brasília, DF, 2016.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2017 – Matemática Bacharelado/Licenciatura*. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2021 – Matemática Licenciatura*. Brasília, DF, 2022.

CADORNA, E. F.; DOMONDON, C.; RIN, E. Challenges in learning calculus: A focus on integrals and exponential functions. *Science International (Lahore)*, v. 34, n. 6, p. 1-4, 2022.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISSESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBE, L. Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: An analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Org.). *Handbook of international research in mathematics education*. 3. ed. New York: Routledge, 2015. p. 481-503.

DAVIS, P. J.; HERSH, R.; MARCHISOTTO, E. A. *The mathematical experience: Study edition*. Boston: Birkhäuser, 2012.

DOMINGOS, A. M. D. *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A matemática no início do superior*. 2003. 407 f. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) – Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, 2003.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 95-123. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_6. Acesso em: 15 jan. 2025.

GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from the learning design perspective. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Org.). *Educational design research, Part A: An introduction*. Enschede: SLO, 2013. p. 72-113.

GRAY, E. M.; TALL, D. O. Dualidade, ambiguidade e flexibilidade: uma visão proceptual do simples aritmética. *Journal of Research in Mathematics Education*, v. 26, n. 2, p. 115-141, 1994.

LAKATOS, I. *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, 2007. p. 1-14.

NURJANAH, A.; AHMAD, I. Visual representations and technological integration in calculus education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 108, n. 3, p. 456-478, 2021.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: Um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. *VIDYA*, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014.

PINTO, M. M. F. *Student's understanding of real analysis*. 1998. 354 f. Thesis (Doctor of Philosophy) – University of Warwick, Institute of Education, England, 1998.

PLOMP, T. Educational design research: An introduction. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Org.). *An introduction to educational design research*. Enschede: SLO, 2007. p. 9-35.

PLOMP, T. Pesquisa-aplicação em educação: Uma introdução. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N.; NONATO, E.; MATTA, A. (Org.). *Pesquisa-aplicação em educação*. São Paulo: Artesanato Educacional, 2018. p. 26-67.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. Research on calculus: What do we know and where do we need to go? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, v. 46, n. 4, p. 507-515, 2014.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). *Educação matemática no ensino superior: Pesquisa e debates*. Recife: SBEM, 2009. p. 81-98.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 1-36, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00302715>. Acesso em: 15 jan. 2025.

SOUSA, G. C. Impacto de programas auxiliares na disciplina de cálculo diferencial e integral I. In: *Anais do 6º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Pirenópolis, 2015.

TAHER, S.; AHMAD, R.; MALIK, Z. Bridging the gap: Connecting theoretical concepts to practical applications in advanced mathematics. *International Journal of Mathematical Education*, v. 45, n. 2, p. 123-135, 2023.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, 1995. p. 161-175.

TALL, D. *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 3-21.

VAN DEN AKKER, J. Princípios e métodos de pesquisa de desenvolvimento. In: VAN DEN AKKER, J.; BRANCH, R. M.; GUSTAFSON, K.; NIEVEEN, N.; PLOMP, T. (Org.). *Design abordagens e ferramentas na educação e treinamento*. Boston: Kluwer, 1999. p. 1-14.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Org.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65-81.

WINSLØW, C.; KONDRATIEVA, M. From practices to concepts: Advanced mathematical thinking in the transition to university. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, v. 7, n. 1, p. 1-23, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00117-w>. Acesso em: 15 jan. 2025.

Apêndice—Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 18 de Febrero de 2025.

Aprobado: 21 de Junio de 2025.

Publicado: 05 de Julio de 2025.

Como Citar — APA

Bisognin, V., & Silvestre, I. B. M. (2025). Características do pensamento matemático avançado: contribuições da pesquisa baseada em design no estudo das integrais de Riemann e de Lebesgue. *PARADIGMA*, XLVI(2), e2025030. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025030.id1698>.

Como Citar — ABNT

BISOGNIN, Vanilde; SILVESTRE, Ismael Batista Maidana. Características do pensamento matemático avançado: contribuições da pesquisa baseada em design no estudo das integrais de Riemann e de Lebesgue. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVI, n. 2, e2025030, Jul./Dic., 2025. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025030.id1698>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a revista **Paradigma** los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista **Paradigma** tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativas en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (**Open Access**) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (**Article Processing Charges - APCs**). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.



Licencia de uso

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.



Comprobación de similitud

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto **iThenticate** de Turnitin, a través del servicio de **Similarity Check** de la Crossref.



Proceso de evaluación

Revisión por pares a doble ciego (**Double blind peer review**).

Editor

Fredy E. González

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista Paradigma obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

