

Conocimiento especializado para la enseñanza de la optimización del área de un rectángulo, que construyen profesores en formación a través de un estudio de clases

Martha Cecilia Mosquera Urrutia¹  Flor Edilma Días Laguna² 

Resumen

El espacio de Práctica Pedagógica I, busca que los Profesores en Formación, realicen una observación institucional y de aula para recoger evidencia sobre los aspectos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, de los objetos matemáticos en el contexto en que se realiza; esta observación constituye el primer peldaño del proceso de investigación que reconoce y problematiza aspectos disciplinares, pedagógicos, didácticos, curriculares y creencias, que conforman el Conocimiento Especializado del/a Profesor/a que enseña Matemáticas. Así, se realiza una aproximación teórica y metodológica a corrientes y autores que permitan comprender el pensamiento matemático como un eje central sobre el cual se estructura el currículo de matemáticas, evidenciando la importancia de la enseñanza centrada en procesos de conceptualización que posibiliten la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para la vida cotidiana. En el presente artículo se ilustra el proceso en relación con la optimización del área de un rectángulo.

Palabras clave: Optimización del área, Metodología de Estudio de Clases, Conocimiento Especializado del Profesor De Matemáticas, Currículo de Matemáticas, Estándares Curriculares.

Specialized knowledge for teaching the optimization of the area of a rectangle, which is built by pre-service teachers through lesson study

Abstract

The Pedagogical Practice I space seeks for Pre-service Teachers to conduct institutional and classroom observations to gather evidence on the aspects involved in the teaching-learning process of mathematical objects in the context in which they are carried out; this observation constitutes the first step in the research process that recognizes and problematizes disciplinary, pedagogical, didactic, curricular, and belief aspects that make up the Specialized Knowledge of the Teacher who teaches Mathematics. Thus, a theoretical and methodological approach is made to currents and authors that allow us to understand mathematical thinking as a central axis around which the mathematics curriculum is structured, highlighting the importance of teaching centered on conceptualization processes that enable the construction of agile, flexible, meaningful, and significant thinking for everyday life. This article illustrates the process in relation to optimizing the area of a rectangle.

Keywords: Area Optimization, Lesson Study Methodology, Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher, Mathematics Curriculum, Curriculum Standards.

¹ Doctora en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Universidad Surcolombiana (USCO), Neiva, Huila, Colombia. Correo electrónico: martha.mosquera@usco.edu.co .

² Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Surcolombiana (USCO), Neiva, Huila, Colombia. Correo electrónico: 20192183847@usco.edu.co

Conhecimento especializado para o ensino da otimização da área de um retângulo, que é construído por futuros professores através de um estudo de classe

Resumo

O espaço Prática Pedagógica I busca que Professores em Formação realizem observação institucional e de sala de aula para coletar evidências sobre os aspectos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem de objetos matemáticos no contexto em que é realizado; Esta observação constitui o primeiro passo do processo de pesquisa que reconhece e problematiza aspectos disciplinares, pedagógicos, didáticos, curriculares e de crenças que compõem o Conhecimento Especializado do Professor que ensina Matemática. Assim, é feita uma aproximação teórica e metodológica a correntes e autores que permitem compreender o pensamento matemático como eixo central em torno do qual se estrutura o currículo de matemática, destacando a importância de um ensino centrado em processos de conceituação que possibilitem a construção de um pensamento ágil, flexível, com sentido e significado para a vida cotidiana. Este artigo ilustra o processo relacionado à otimização da área de um retângulo.

Palavras-chave: Otimização de Área, Metodologia de Estudo de Aulas, Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, Currículo de Matemática, Padrões Curriculares.

INTRODUCCIÓN

El Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, durante el proceso de autoevaluación, que condujo a la primera acreditación, reconoció y analizó las debilidades que se presentaban en el Plan de Estudios adoptado en el 2010, en relación con las nuevas exigencias en la formación de profesores de Matemáticas, así como también, las normas que regulaban el servicio, y la teleología del programa con el fin de establecer concordancia con la teleología institucional para la formulación un nuevo plan de estudios (Acuerdo 010 de 11 marzo 2016).

Para tal fin, fueron tenidos en cuenta los ejercicios de autoevaluación, las observaciones de los pares académicos, la reflexión sobre las necesidades del contexto, algunas investigaciones recientes y los aportes de docentes, estudiantes y egresados. Como resultado de este análisis, el Consejo de Facultad de la Universidad Surcolombiana mediante el Acuerdo 227 de 2016 y el Acuerdo 289 de 2017, aprobó el Plan de estudios del Programa de Licenciatura en Matemáticas que se ajustaba a los requerimientos internos establecidos por la Universidad y a las exigencias normativas dadas por el Ministerio de Educación Nacional a través de sus decretos y resoluciones.

En este plan de estudios (2017-2), aún vigente, se asume la formación del profesor de matemáticas como un campo de investigación; sin embargo, con el paso de los años, se han generado tensiones en relación con la organización curricular, la práctica pedagógica y la formación matemática de los profesores; continuamente se escuchan quejas de un lado y de otro y se hacen afirmaciones que afectan los procesos y la estima de los profesores en formación, así como la vida del programa. Esta situación no es nueva, ni atañe solamente a nuestro Programa, ya en 2013 en el Informe sobre la Formación inicial y continua de Profe-

sores de Matemáticas en Colombia, aludiendo a las normas para la formación de profesores, los autores afirmaban que...

Esta directriz, para el caso de los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas, se interpretó efectivamente, en la mayoría de los casos, en la apertura de un importante lugar para los discursos provenientes de la Educación Matemática (la Didáctica de las Matemáticas o la Matemática Educativa) como parte de los currículos de formación. Esto implicó la discusión, en los colectivos de formadores, acerca del lugar e intensidad de la formación en Matemáticas y más precisamente de los aspectos curriculares que la definirían, así como en una cierta rivalidad por un “territorio” entre los formadores en aspectos matemáticos disciplinares y los formadores en aspectos del conocimiento didáctico del contenido matemático, en el que fundamentalmente los discursos humanísticos fueron los desplazados o disminuidos. (Guacaneme, Obando, Garzón y Villa-Ochoa. P. 24-25)

En cuanto al marco metodológico se propone implementar el Estudio de Clases, a través de la reflexión sobre: ¿por qué y para qué estudiar las clases de matemáticas?, con el fin de buscar solución a las dificultades y problemas que surgen en el ejercicio docente, debido a la falta de motivación sobre la complejidad y naturaleza de los objetos matemáticos de conocimiento. Se acoge esta metodología con el objetivo de mejorar la articulación entre los contenidos matemáticos, los marcos teóricos sobre los que se fundamentan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, las exigencias curriculares, los problemas relativos al aprendizaje de los objetos matemáticos y el ejercicio de la práctica docente. (figura 1)

Y finalmente, centrar la mirada en el Conocimiento Especializado del Profesor que Enseña Matemáticas, a partir de un problema sobre optimización del área de un rectángulo, esto permitirá el uso de documentos Curriculares esenciales como: Los Lineamientos Curriculares y Los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas e implementar las acciones de mejora que se propusieron para el Curso de Práctica Pedagógica I, que se está desarrollando en el primer semestre de 2025; terminado el semestre se hará una evaluación de impacto y se ajustará la propuesta de la Práctica Pedagógica II; esto con el objetivo de realizar un proceso de investigación acción participativa que tendrá una duración de cuatro semestres.

Figura 1: Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria



Fuente: Elaborado por Mosquera-Urrutia Martha 2020

LOS PRIMEROS PASOS

Con el fin de *romper el hielo* se propuso un concurso, en el cual se pretendía promover una experiencia en la que pudieran usar modelos matemáticos ya construidos y reflexionar sobre sus conocimientos previos, errores y creencias.

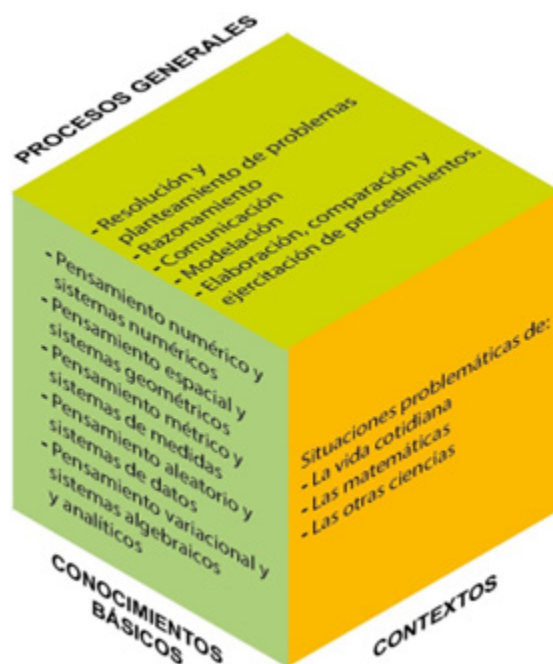


Recibirá un premio, el equipo de encuentre de entre todos los rectángulos cuyo perímetro es 47 cm, aquel que tenga mayor área

Aspectos teóricos

La pregunta del concurso se constituye en el medio para reflexionar con los PF sobre varios aspectos: el primero es ¿Cuál es el problema que se debe resolver?, el segundo ¿Cuál es la matemática involucrada en la resolución del problema? Y finalmente ¿Cuál es el soporte teórico matemático necesario para abordar ese problema en una clase? Con el fin de responder a esos interrogantes y brindar a los PF fundamentos teóricos para la reflexión se consultaron en primer lugar, los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, estos, establecen la base conceptual y filosófica sobre la que se construyen los demás componentes del currículo y orientan el diseño de los programas de estudio, las estrategias de enseñanza y la evaluación, y estructuran el currículo en tres grandes aspectos: los procesos generales, los conocimientos básicos y los contextos (MEN, 1998, p. 18).

Figura 2: Estructura del Currículo Colombiano en Matemáticas

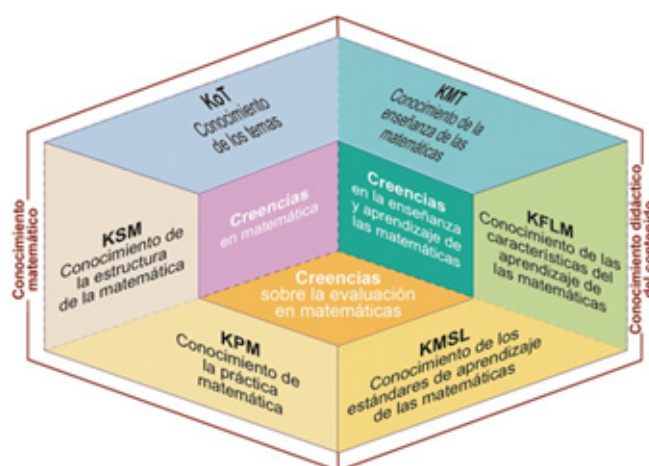


Fuente: MEN (1998, p. 20)

En segundo lugar, los Estándares Básicos de Competencias para el Área de Matemáticas, que son criterios claros y públicos que permiten juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad; expresan una situación deseada en cuanto a lo que se espera que todos los estudiantes aprendan durante la Educación Básica y Media. El conocimiento de los Estándares permite establecer relaciones entre los diferentes tipos de pensamiento e ir alcanzando un nivel superior de abstracción de los objetos matemáticos, a medida que se progresa en el nivel escolar. (MEN, 2006).

En tercer lugar, *el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* o Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor que Enseña Matemáticas, en adelante MTSK, es un modelo teórico desarrollado con fines de exploración analítica del conocimiento del profesor que enseña matemáticas; dicho modelo propone unos dominios, subdominios y categorías para el conocimiento del profesor de matemáticas; su uso en el curso de Práctica Pedagógica I, permite generar espacios de reflexión con los PF en relación con sus necesidades de formación. (CARRILLO, 2014).

Figura 3: Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)



Fuente: Adaptado por Mosquera con fines didácticos

Y finalmente el Estudio de Clases o Lesson Study (LS), se asume el LS como una metodología de investigación de origen japonés cuyo objeto de estudio es la clase; como marco teórico, el LS permitirá un acercamiento a teorías de la educación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y como marco metodológico, será la guía que permita diseñar la gestión de la práctica pedagógica. (Ver Figura 4).

METODOLOGÍA

Se realiza un estudio de tipo exploratorio descriptivo, que pretende identificar elementos del MTSK, que construyen PF cuando realizan un estudio de clases, en este caso sobre optimización del área de un rectángulo; se espera que los resultados del estudio sirvan

como punto de partida para la reestructuración de este curso en el marco de la reforma al plan de estudios de la carrera.

Figura 4: Ciclo de Estudio de Clases

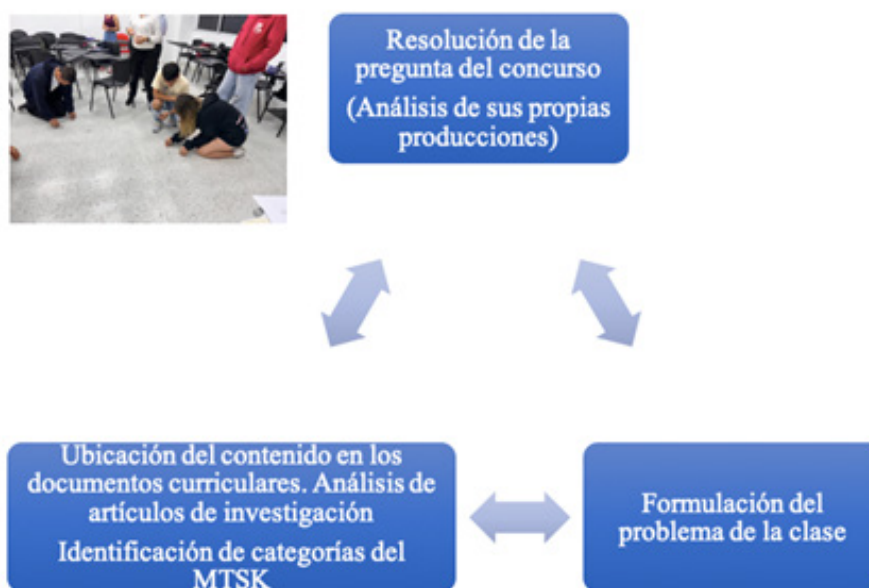


Fuente: Adaptado como recurso didáctico por Mosquera

El caso que corresponde a este artículo se desarrolla entre las semanas 4 a la 7, para iniciar se propuso como actividad, un concurso consistente en la siguiente cuestión: “Recibirá un premio el equipo que encuentre, de entre todos los rectángulos cuyo perímetro es 47cm, aquel que encierre el área máxima” como resultado de aprendizaje de esta sesión, se espera que los FP identifiquen y planteen problemáticas derivadas de sus preocupaciones y dificultades para abordar el planteamiento y resolución del problema y formulen el problema de la clase que ellos ofrecerán.

La recolección y análisis de la información se hace en tres momentos (Ver Figura 6):

Figura 5: Etapas de la investigación



Fuente: Elaborado por las autoras

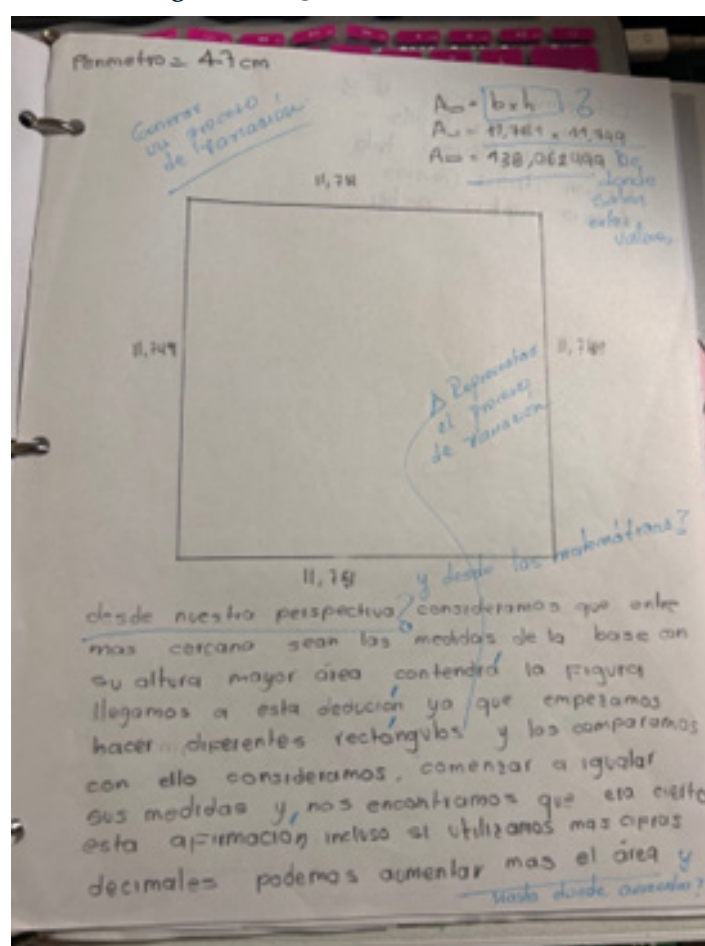
RESULTADOS Y ANÁLISIS

Por encontrarse en curso, la presente investigación, los resultados corresponden a las etapas de resolución de la pregunta del concurso y ubicación del contenido en los documentos curriculares e identificación de algunas categorías del MTSK.

Los participantes organizados en cinco equipos de trabajo, participaron en el concurso, para el artículo, tomamos el portafolios de Yuliana (PFY) (Ver Figura 6) quien está en el equipo de trabajo con Kevin (PFK), Brayan (PFB) y Andrés (PFA), porque ellos encontraron el rectángulo “más grande” con un área de $138,062499\text{cm}^2$... Ellos son estudiantes de tercer y cuarto semestre de la carrera, lo cual implica que por lo menos han cursado y aprobado el cálculo diferencial, enseñanza y aprendizaje de la aritmética y la geometría, así que se espera que cuenten con los conceptos previos necesarios para desarrollar el problema.

A partir de la resolución de la pregunta del concurso

Figura 6: Página de portafolios PFY



Fuente: Portafolios participante

Para hacer el análisis, solicitamos a cada equipo de trabajo, analizar la solución del problema, con el fin de identificar aciertos, errores y dificultades. (Ver Cuadro 1) para ello, formulamos varias preguntas orientadoras.

Cuadro 1: Respuestas de la PFY, ante las preguntas a cerca de su producción

¿Considera que el rectángulo que encontraron es el que tiene mayor área?	PFY:—sí porque tomamos tres cifras decimales en cada uno de los lados, además nos dimos cuenta que mientras más cifras decimales, más grande es el área.
¿Podrían demostrar que ese es el mas grande?	PFY:—es posible encontrar otros de mayor área, aumentando las cifras decimales...
¿Considera si o no que resolvieron la pregunta del concurso?	PFY:—ahora que me hace caer en cuenta, opino que no, porque podríamos seguir tomando cifras decimales y el rectángulo se iría <i>agrandando</i>

Fuente: Elaborado por las autoras

Revisando las respuestas de Yuliana, es posible notar que hay dificultad para generar un proceso de variación, los FP hicieron algunos cálculos y observaciones y procedieron a dar la respuesta, sin verificar que ésta fuese correcta; por otra parte, presentaron un razonamiento importante, al notar que *mientras más cercanas sean las medidas de la base y la altura, mayor área contendrá la figura*, sin embargo, al analizar la justificación del razonamiento, nos damos cuenta que los FP no aceptan que el rectángulo pueda ser un cuadrado, ya que los últimos valores que toman son *11,749 y 11,751 siempre cercanas, pero nunca iguales*.

En un segundo momento, hicimos a los equipos las preguntas relacionadas con el problema del concurso, la matemática involucrada y el soporte teórico matemático necesario para abordar ese problema en una clase.

Cuadro 2: lo matemático y lo didáctico

¿Cuál es el problema que se debe resolver?	PFY:—¿Cuál es el rectángulo de mayor área y perímetro 47?
¿Cuál es la matemática involucrada en la resolución del problema?	PFY:—área del rectángulo, perímetro del rectángulo.
¿Cuál es el soporte teórico matemático necesario para abordar ese problema en una clase?	PFY:—área y perímetro de un rectángulo.

Fuente: Elaborado por las autoras

De las respuestas dadas por Yuliana, es posible observar que los FP, se ciñen de manera estricta a enunciados que tradicionalmente se encuentran en libros de texto, sin embargo, ese es un enunciado coherente con la pregunta del concurso; en cuanto a la matemática involucrada en la resolución del problema, ellos consideran que solamente se trata del área y el perímetro del rectángulo, al igual que con el soporte matemático necesario para abordar el planteamiento y la resolución del problema en una clase.

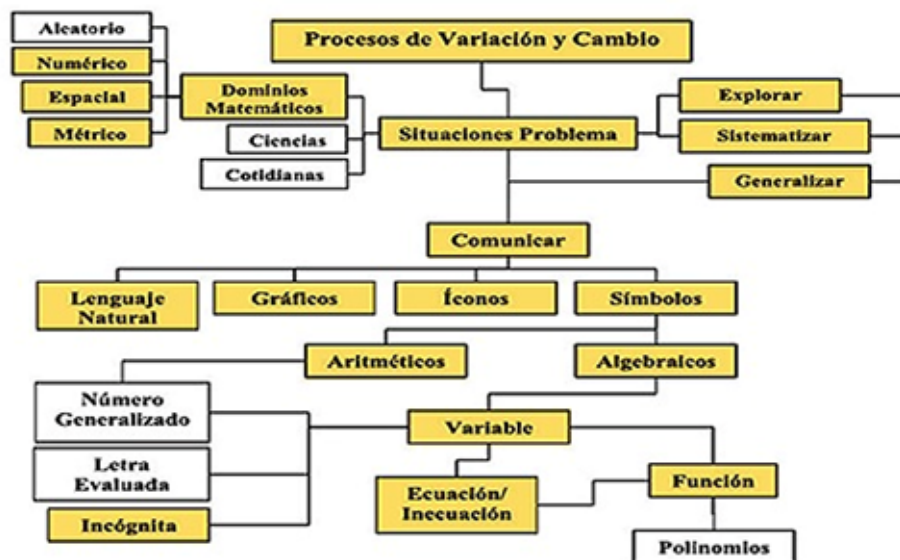
En ese sentido podemos inferir que los FP limitan el planteamiento y la resolución del problema al área y perímetro de un rectángulo, pero no ven ese contenido en ningún otro contexto, a pesar que lo ubicaron en el grado octavo.

Ubicación del contenido en los documentos curriculares.

De acuerdo con la estructura propuesta en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, 1998), *la optimización del área de un rectángulo*, se ubica en el pensamiento variacional al interior de los sistemas algebraicos y analíticos, en la mayoría de los casos, este concepto se desarrolla en los cursos de cálculo diferencial, como una aplicación de las derivadas; sin embargo, en espacio académico de Práctica Pedagógica, se busca acercar a los profesores en formación a la comprensión de los fenómenos de variación como alternativa para mejorar los desempeños en lo referente al álgebra escolar.

Determinar el cuadrado de mayor área, exige el tratamiento matemático de la variación y el cambio; pensar un rectángulo en el cual *las medidas de los lados cambian* y medir, calcular y predecir las consecuencias de esos cambios; analizar patrones de *covariación* de la misma o distintas magnitudes en subprocesos que se pueden ir registrando en una tabla de valores y que posteriormente permitirán la elaboración de modelos a partir del análisis matemático de contextos de las matemáticas, desde las ciencias o desde la vida cotidiana. (Figura. 7)

Figura 7: Optimización del área en los documentos curriculares



Fuente: Adaptado de POSADA (2005, p. 54)

Al analizar la situación problema a partir de los procesos de variación, se logró visualizar la forma como este pensamiento involucra los otros tipos de pensamiento matemático, en la Figura 8, podemos observar estos elementos; la situación problema: *de todos los rectángulos cuyo perímetro es 47cm, ¿cuál es el de mayor área?* Hace parte del dominio matemático e involucra pensamientos de tipo numérico, espacial y métrico. Esto permitió lograr de manera ágil un mayor nivel de abstracción, reconociendo estructuras invariantes en medio de la variación y cambio, además de ofrecer herramientas para modelar la situación a través de una función como resultado de la cuantificación de la variación.

En la etapa de planificación, también se logró que los FP, comprendieran el sentido de formular algunas capacidades susceptibles de desarrollar por parte de sus estudiantes, en relación con lo que se plantea en los documentos curriculares, estas se organizaron en capacidades para visualizar, comunicar, razonar y realizar procedimientos:

Para visualizar:

- Reconoce información codificada en la representación geométrica de un rectángulo (vértices, ángulos rectos, congruencia o desigualdad en las medidas de sus lados)
- Identifica diferencias entre rectángulos en cuanto a su forma y área
- Identifica diferentes rectángulos con igual perímetro

Para comunicar:

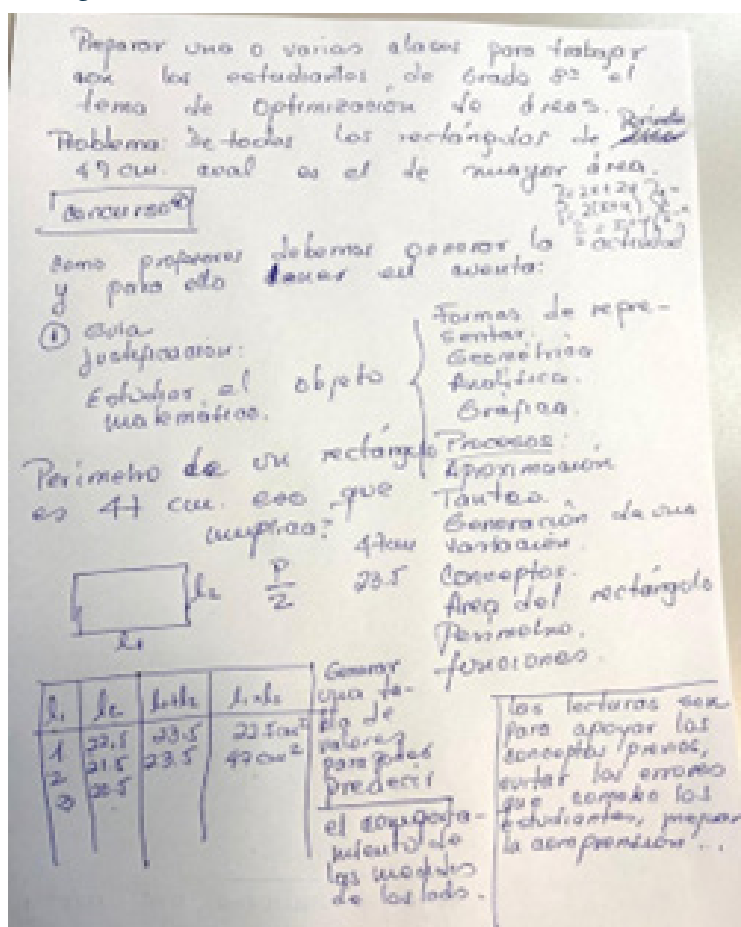
- Lee e interpreta correctamente el enunciado de un problema y discrimina los datos que le son útiles para resolverlo
- Comunica correctamente los procedimientos usados para dibujar un rectángulo
- Traduce del lenguaje matemático al lenguaje verbal la solución de un problema
- Registra las características de los rectángulos considerados en una tabla
- Expresa ante el grupo conjeturas que parten de la visualización preliminar de un rectángulo

Para razonar:

- Determina el área de un rectángulo
- Establece relaciones de dependencia entre las medidas de los lados y el área de un rectángulo
- Analiza los datos consignados en una tabla

Para realizar procedimientos:

- Cuadricula rectángulos usando tramas de puntos isométricas o cuadradas
- Determina el valor del área de los rectángulos por aproximación
- Comprende cómo varía el área de un rectángulo a medida que la medida de uno de los lados cambia
- Representa rectángulos en el Geoplano físico o virtual
- Estima el área de un rectángulo siguiendo un patrón

Figura 8: Página de protafolios PFY, apuntes-asesoría

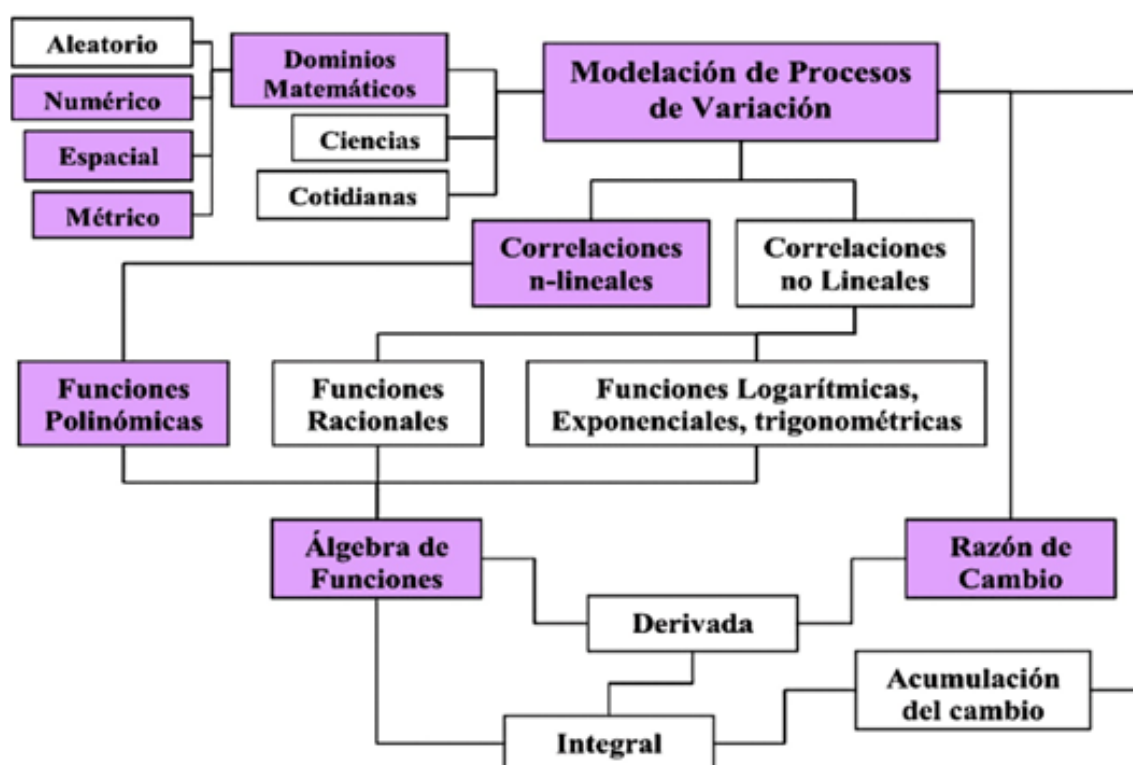
Fuente: Portafolios participante

Desde el punto de vista metodológico, permitió organizar el grupo y brindar algunos recursos que permitieron hacer el experimento y llegar a las metas deseadas.

A través de estos procesos de experimentación, reflexión y construcción de significados, llegamos a la expresión de algunas funciones, aquí cobra importancia el hecho de manejar los procesos de variación. (Figura 9).

Entre los conceptos que se pusieron en juego encontramos: rectángulo, longitud de un segmento, perímetro del rectángulo, área del rectángulo, variable, constante, variable dependiente, variable independiente, función, razón, razón de cambio, variación; entre los procedimientos: medir la longitud de los lados del rectángulo, calcular las medidas de los lados del rectángulo dado su perímetro, calcular el área del rectángulo dadas las medidas de los lados, dibujar un rectángulo, establecer relaciones entre la longitud de los lados y el perímetro del rectángulo, entre la longitud de los lados y el área, y entre el perímetro y el área del rectángulo. Es importante anotar que los procesos no desbordan el álgebra, inclusive la razón de cambio se trabaja como una noción, no aún en el sentido de la derivada.

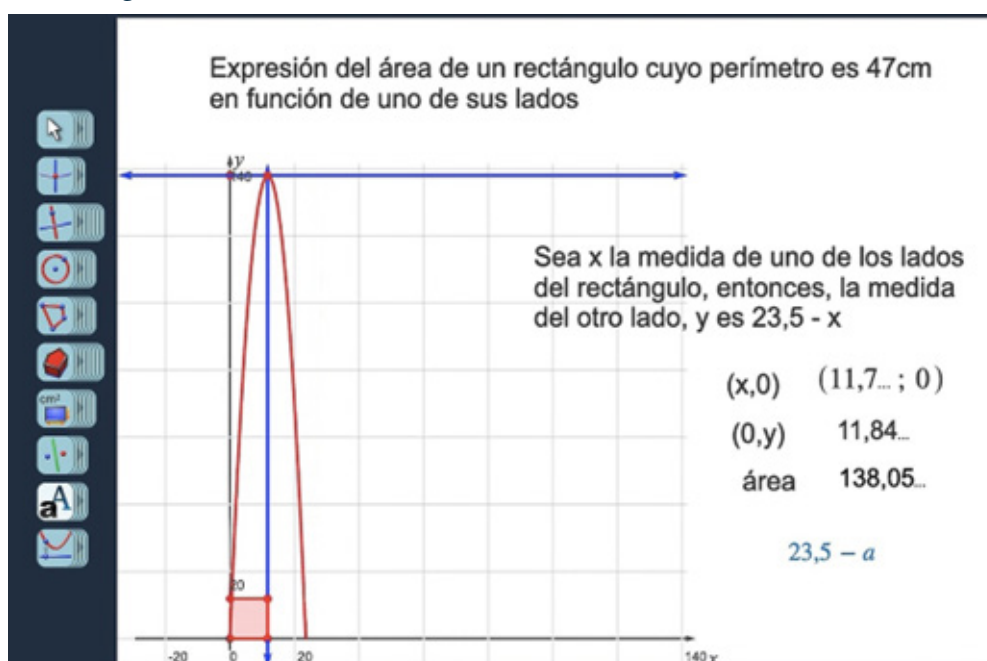
Figura 9: Modelación de procesos de variación



Fuente: Adaptado de POSADA (2005, p. 56)

Modelar los procesos de variación implicó, establecer algunas relaciones de dependencia entre los lados de un rectángulo, entre el área y el perímetro y definir algunas funciones, establecer relaciones entre los conceptos y los procedimientos a través de la interpretación de los datos, determinar cómo cambia uno de los lados del rectángulo en relación con el otro y otros elementos del pensamiento variacional como las variables, las constantes y las funciones. (ver figura 10).

Al utilizar el software se ponen en juego los dominios numérico para hacer los cálculos y asignar las medidas a los lados, el perímetro y el área del rectángulo; métrico para comparar los objetos con las magnitudes correspondientes; geométrico para dibujar los segmentos, los rectángulos, las rectas; espacial al asignar las posiciones relativas a los objetos (perpendicular, paralelo...) y gráfico al determinar el lugar geométrico de los puntos en el plano, dados por las expresiones algebraicas y las funciones. La potencia del software de geometría dinámica es que permite observar y cuantificar la variación, así como la invarianza y el cambio respectivamente.

Figura 10: Expresión del área del rectángulo en función de un lado

Fuente: Elaboración propia con el software CABRI EXPRESS

Para finalizar el ejercicio se propuso a los PF un taller de análisis de estándares para aclarar dudas y sistematizar la información (Figura 11), es de anotar que entre las mayores dificultades, se encuentra el hecho que los FP no están acostumbrados a realizar este tipo de ejercicios, por el contrario en las planificaciones se presentan en ocasiones un listado de estándares, de los cuales no es posible dar cuenta durante el desarrollo de las clases y menos en la evaluación.

Figura 11: Estándares curriculares para los procesos algebraícos por grupos de grados

PROCESOS ALGEBRAICOS	Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas	Construir ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre datos numéricos.	Utilizar métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.	Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
	Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.			Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.

Fuente: Adaptado de POSADA (2005, p. 58)

El análisis de los documentos curriculares, nos permitió movilizar el pensamiento variacional desde tres ejes conceptuales que permiten diversas realaciones entre diferentes formas de promover procesos de variación. En la figura 12, se pueden observar las conexiones conceptuales que es posible hacer entre los tres ejes temáticos que se explicitan.

Figura 12: Pensamiento variacional



Fuente: Adaptado de POSADA (2005 p. 57)

Identificación de algunas categorías del MTSK

Durante la etapa de planificación, la discusión llevó a trabajar en las cuatro preguntas que guían la determinación de los saberes previos (Figura 13):

- ¿Qué es lo que los estudeiantes deben saber?
- ¿Qué es lo que los estudiantes deben saber hacer?
- ¿Cuáles son los posibles errores que los estudiantes pueden cometer al abordar las tareas de aprendizaje y por qué ocurren?
- ¿Cuáles son las dificultades que subyacen a estos errores?

Figura 13: Elaboración de la matriz de cambio conceptual en la etapa de planificación



Fuente: Foto trabajo en clase

En la tabla a continuación se sintetiza un aparte de la planificación en la etapa de determinación de los saberes previos (Figura 14)

Figura 14: Plan de clase, determinación de saberes previos

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DEL DOCENTE	EVALUACION DE LA MARCHA DE LA CLASE
0. Indicaciones de la clase. 1. Presentar objetivo de la clase: "Utilizar diferentes métodos para solucionar problemas relacionados con las medidas en un rectángulo." Tema: Resolución de problemas a partir del área. 2. Conocimientos Previos: a. ¿Qué es un rectángulo? b. ¿Cuál es el largo y el ancho de un rectángulo? c. ¿Cómo se haya el área de un rectángulo? Posibles respuestas: a. -Una figura de cuatro lados. -Una figura geométrica. -Una figura donde sus lados opuestos son iguales. b. -El largo son las líneas horizontales y el ancho las líneas verticales. -El largo es el alto y el ancho es lo grueso. -El largo es la parte más grande y el ancho la parte más pequeña. c. -Sumando las medidas de sus cuatro lados. -Multiplicando las medidas del ancho por el largo. -Multiplicando las medidas sus cuatro lados.	0. Explicar lo que se va a desarrollar en la clase. 1. Pegar el objetivo de la clase. Escribir el tema. 2. a. Cuestionar al alumno sobre la idea de rectángulo. Posición relativa de los lados del rectángulo, los cuadrados también son rectángulos. Se confrontan las posibles respuestas con la idea de cuadriláteros, frente a otras posibles figuras, como romboídes, trapecios, paralelogramos, etc.; mediante el uso de diapositivas que contienen figuras con las mismas características.  b. Se dibuja un rectángulo y se le pregunta ¿cuál es el ancho y el largo? Se buscan ejemplos en el entorno, pidiendo a los alumnos identificar rectángulos, se realizan preguntas respecto a su orientación, (vertical, horizontal) con el fin de verificar si no hay dudas o imprecisiones en las nociones y conceptos de las medidas de los tipos de rectángulo, aclarar que cuando se habla de un largo y ancho, se trata de un tipo de rectángulo de forma alargada, sea vertical u horizontal. Posibles respuestas: -El tablero -El cuaderno (forma rectangular) -La puerta.....	¿Los estudiantes demuestran interés por participar? ¿Reconocen el rectángulo, sus dimensiones y orientación? ¿Los estudiantes demuestran saber cómo hallar el área del rectángulo, sea de forma intuitiva, mediante el análisis o aplicación de la fórmula? ¿Se cumplen las actividades dentro del tiempo y logística planificada?
2.1. 2.2. Los alumnos plantean ideas sobre las características del		

Fuente: Elaboración propia

El problema que se planteó es pertinente para el grado octavo, es coherente con los conceptos previos que se indicaron y hace evidente que los PF conocen el tema, y diferentes formas de resolverlo. Las diferentes formas de resolver el problema y comprobar los resultados indican conocimiento de diferentes procedimientos y formas de validación KoT, KFLM, KMT

En la determinación de los conceptos previos, predicción de las posibles respuestas de los estudiantes del grado octavo a la pregunta ¿qué es un rectángulo? Y reacciones del PF frente a las posibles respuestas de los estudiantes

Las diferentes preguntas y actividades que los PF proponen para activar los conceptos previos, así como las posibles respuestas o contrapreguntas para los estudiantes dan cuenta del conocimiento de diferentes conexiones entre los temas, (KSM), al fijar objetivos y resultados de aprendizaje (KMLS) al dar cuenta de varias formas de demostrar, de representar, usar la simbología propia (KPM)

En las etapas en donde los FP, no solo determinan diferentes modos de pensar el problema, (KPM) sino que además muestran capacidad para determinar la causa de los errores

que cometen los estudiantes (KFLM y KSM) también dan evidencia de conocer el uso de la simbología, recolección de datos y organización a partir de tablas dan cuenta de KoT.

A pesar que se nota un buen ejercicio, es importante tener en cuenta que en esta etapa los PF, no fueron más allá de los saberes previos relacionados a la definición y aspectos generales del rectángulo, pero en ninguno de los casos se logró una aproximación a los procesos algebraicos, a las funciones o a la variación.

A continuación se deja la síntesis trabajada sobre el MTSK esperado y socializado con los FP con fines didácticos.

Figura 15: Categorías del MTSK

CATEGORÍAS MTSK			
	Subdominios		
Conocimiento matemático	Conocimientos de los tópicos KoT	Procedimientos. Es la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos y de rutina. Ejemplo: Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.	¿Cómo se hace? ¿Cuándo puede hacerse? ¿Por qué se hace así? Características del resultado
		Conocimiento conceptual. Conocimiento teórico producido por la actividad cognitiva.	Definiciones, propiedades y fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejidad. Se relacionan contenidos con otros anteriores.	
		Conexiones de simplificación. Relación con contenidos posteriores.	
		Conexiones transversales. Contenidos a bases de cualidades y características.	
		Conexiones auxiliares. Contenidos que sirven de apoyo o vehículo.	
	Conocimiento de la práctica matemática KPM	Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos.	
		Formas de validación y demostración.	
		Papel de símbolos y uso del lenguaje formal.	
		Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.	
		Prácticas particulares del quehacer matemático.	
		Procesos generales: Formular y resolver problemas, modelar los procesos y fenómenos de la realidad, comunidad, razonar y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.	
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	Teorías de aprendizaje. (Aprendizaje autónomo)	
		Fortalezas y dificultades.	
		Formas de interacción con un contenido matemático.	
		Intereses y expectativas.	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza.	
		Recursos materiales y virtuales. (Material didáctico)	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. (Tareas para el profesor y formador)	
		Expectativas de aprendizaje.	
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMSL	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado.	
		Secuencias en relación con temas anteriores y posteriores en una etapa particular.	
		- Estándares - DBA	

Fuente: Elaboración propia

REFLEXIONES FINALES

Dado que este ejercicio se realiza en el curso de Práctica Pedagógica I, el análisis de los resultados de este ejercicio, implica tomar acciones correctivas con el fin que los estudiantes logren el objetivo de *planificar e implementar un estudio de clases sobre optimización del área de un rectángulo cuyo perímetro es fijo, para ser desarrollado en grado octavo*.

Con el fin de ubicar el objeto matemático en los documentos curriculares se propuso la consulta de los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias para el Área de Matemáticas (MEN, 2008) y el documento sobre Implementación e Interpretación de los Estándares de Matemáticas (POSADA, 2005), se espera que los PF logren desarrollar una planificación completa, considerando las problemáticas y oportunidades que ofrece la enseñanza de estos conceptos y procesos en grado octavo.

El trabajo desde esta forma de ver el pensamiento matemático, permitió ver de manera general los ejes temáticos en los que es posible agrupar los contenidos relacionados con los procesos de variación, esto ofrece otra perspectiva en relación con el desarrollo conceptual, el álgebra escolar y el MTSK esperado.

En relación con el MTSK, esperado, los FP identificaron algunas categorías relacionadas y en un próximo artículo esperamos entregar la síntesis de sus avances.

Se espera además que, al implementar el estudio de clases, los FP logren entablar buena comunicación con los Profesores en ejercicio y como resultado de la interacción, desarrollarse en su carrera.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a los participantes en este proceso en especial a la PF. Yuliana, por sus comentarios y disposición para el proceso de reflexión. En igual forma a los docentes del Programa de Licenciatura en Matemáticas, por facilitar los espacios para realizar el ejercicio.

REFERENCIAS

- ATIENZA, Encarna. EL PORTAFOLIO DEL PROFESOR COMO INSTRUMENTO DE AUTOFORMACIÓN. **Marco ELE. Revista de Didáctica Español Lengua Extranjera**. Núm. 9, julio-diciembre, 2009. Pp. 1-19. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=92152528004> Acceso 9 de febrero de 2025.
- BALDÍN, Yuriko Yamamoto; RAMÍREZ-MONTES, Guillermo Enrique; NEVES, Regina da Silva Pina; GUTIÉRREZ-FALLAS, Luis Fabián. COLABORACIÓN BRASIL-COSTA RICA EM LA CONSTRUCCIÓN DE ESTUDIOS DE CLASE INTEGRANDO FORMADORES Y FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA, **Zetetiké**, Campinas, SP, v.32, p. 1-24, 2024. Disponible en DOI: 10.20396/zet.v32i00.8677101. Acceso en 17 de marzo de 2025.

- CARRILLO, José. EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO (TEDS-M ESPAÑA) DESDE LA PERSPECTIVA DE SU ESPECIALIZACIÓN. **Investigación en Educación Matemática**, Vol. 18. Enero a diciembre, 2014. Pp 115-123.
- COLOMBIA. Ministerio de Educación Nacional. **Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas**: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: 2006. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf. Acceso en: 18 de marzo de 2025.
- COLOMBIA. Ministerio de Educación Nacional. **Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas**. Establece las bases de la Educación Matemática en Colombia. Bogotá: 1998. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf. Acceso en: 17 de marzo de 2025.
- GIRALDO, Christian Ferney; VALDERRAMA, Verónica; LOPERA, Marisol; MÉNDEZ-ROMERO, Rafael. **Voces y escenarios de Docentes Investigadores**. 1ª ed Bogotá: Editorial Universidad del Rosario, 2025. EPUB. 10.12804/urosario978958005044
- GÓMEZ, Julián Ricardo; OROZCO, José Luis; REALPE, Germán Darío; BENAVIDES, Gloria; NAVARRO, Ninfa; GUACANEME, Edgar Alberto. ¿PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LIBROS DE TEXTO?: UNA PREGUNTA QUE NOS PERMITE APRENDER COMO DOCENTES. **Matemática Educativa.**, 2013, p. 472-478. Disponible en: <https://core.ac.uk/download/pdf/147430303.pdf#page=458> Acceso en 14 de mar. 2025.
- POSADA, M. E. **Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas**. Gobernación de Antioquia. Secretaria de Educación para la Cultura. Antioquia. 2005. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Gilberto-Obando/publication/324859029_Interpretacion_e_Implementacion_de_los_Estandares_Basicos_de_Matematicas/links/5ae7d23c45851588dd7f910a/Interpretacion-e-Implementacion-de-los-Estandares-Basicos-de-Matematicas.pdf Acceso 16 de marzo de 2025.

Apéndice - Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 19 de Enero de 2025.

Aprobado: 17 de Julio de 2025.

Publicado: 5 de Septiembre de 2025.

Como Citar — APA

MOSQUERA, M. C., & DÍAS, F. E. (2025). Conocimiento especializado para la enseñanza de la optimización del área de un rectángulo, que construyen profesores en formación a través de un estudio de clases. *PARADIGMA*, XLVI(Edición Temática 1), e2025004. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025004.id1710>.

Como Citar — ABNT

MOSQUERA, Martha Cecilia; DÍAS, Flor Edilma. Conocimiento especializado para la enseñanza de la optimización del área de un rectángulo, que construyen profesores en formación a través de un estudio de clases. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVI, Edición Temática 1, e2025004, Sep., 2025. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025004.id1710>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a revista **Paradigma** los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista **Paradigma** tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativas en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (**Open Access**) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (**Article Processing Charges - APCs**). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.

**Licencia de uso**

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.

**Comprobación de similitud**

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto **iThenticate** de Turnitin, a través del servicio de **Similarity Check** de la Crossref.

**Proceso de evaluación**

Revisión por pares a doble ciego (**Double blind peer review**).

Editor

Fredy E. González

Editoras convidadas

Ettiène Cordeiro Guérios

Edvonete Souza de Alencar

Martha Cecilia Mosquera Urrutia

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista Paradigma obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

