

Conhecimento Matemático Especializado do professor no âmbito da transformação geométrica isométrica reflexão e da simetria: elementos críticos para uma prática interpretativa

Miguel Ribeiro¹  Caroline Silva²  Sandra Menezes³ 

Resumo

No conteúdo do conhecimento matemático especializado que nos cumpre deter, enquanto professores de matemática, existem elementos que são considerados críticos, e que apenas podem ser desenvolvidos em contextos formativos com essa intencionalidade. O nível de conhecimento que o professor detém determina a prática interpretativa que desenvolve, e essa prática especializada é sustentada no denominado Conhecimento Interpretativo – que fundamenta interpretar as produções dos alunos, e escutar as suas formas de pensar, sejam corretas, incorretas ou não usuais. Buscando melhor compreender os elementos críticos que levam ao desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo de professores de matemática, focamos a atenção nos tópicos reflexão e simetria, por serem problemáticos para alunos e professores, e discutimos o conhecimento revelado por professores que participam de um contexto formativo envolvendo duas Tarefas Interpretativas. Os elementos críticos identificados referem-se ao conhecimento matemático especializado de procedimentos, propriedades, fundamentos de reflexão e simetria, além do conhecimento de registros de representação de simetria. A partir desses elementos críticos, discutem-se as propostas formativas especializadas para o seu desenvolvimento.

Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo, Conhecimento Matemático Especializado, Formação de Professores, Reflexão, Simetria.

Specialised Mathematical Knowledge of the teacher in the scope of isometric geometric transformation reflection and symmetry: critical elements for an interpretative practice

Abstract

As part of the specialised mathematical knowledge that we, as mathematics teachers, are required to possess, there are elements that are considered critical and that can only be developed in formative contexts with such intention. The level of teacher's knowledge determines the interpretative practice that (s)he develops, and this interpretative specialised practice is grounded on the so-called Interpretative Knowledge – which underpins interpreting students' productions and listening to their ways of thinking, whether correct, incorrect or unusual. Aiming at to better understand the critical elements leading to the development of mathematics teacher's Interpretative Knowledge, we focus our attention on the topics of reflection and symmetry. These are two problematic topics for students and teachers, and here we discuss the knowledge revealed by a group of teachers, which were part of a formative context, using for such Interpretative Tasks. The critical elements identified refer to specialised mathematical knowledge of procedures, properties, foundations of reflection and symmetry, as well as knowledge of registers of representations in the scope of symmetry. Grounded on such critical elements, we discuss the specialised formative proposals for their development.

Keywords: Interpretative Knowledge, Specialised Mathematical Knowledge, Teacher for Education, Reflection, Symmetry.

¹ Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Brasil. E-mail: cmribas78@gmail.com

² Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Brasil. E-mail: caroldesouza86@gmail.com

³ Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Brasil. E-mail: sandra.smenezes@hotmail.com.br

Conocimiento Matemático Especializado del profesor en el ámbito de la transformación geométrica isométrica reflexión y de la simetría: elementos críticos para una práctica interpretativa

Resumen

En el contenido del conocimiento matemático especializado que nosotros, como profesores de matemáticas, debemos poseer, hay elementos que se consideran críticos, y que sólo pueden ser desarrollados en contextos de formación con este objetivo. El nivel de conocimiento que posee el profesor determina la práctica interpretativa que desarrolla y esta práctica especializada se sustenta en el llamado Conocimiento Interpretativo – que fundamenta la interpretación de las producciones de los alumnos, y la escucha de sus formas de Pensar, sean correctas, incorrectas o inusuales. Buscando comprender mejor los elementos críticos que conducen al desarrollo del Conocimiento Interpretativo de los profesores de matemáticas, enfocamos nuestra atención en los tópicos de reflexión y simetría, ya que son problemáticos para alumnos y profesores, y discutimos el conocimiento revelado por profesores que participan en un contexto formativo involucrando dos Tareas Interpretativas. Los elementos críticos identificados se refieren al conocimiento matemático especializado de procedimientos, propiedades, fundamentos de reflexión y simetría, además del conocimiento de registros de representación de simetría. A partir de estos elementos críticos, se discuten propuestas de formación especializada para su desarrollo.

Palabras clave: Conocimiento Interpretativo, Conocimiento Matemático Especializado, Formación de Profesores, Reflexión, Simetría.

INTRODUÇÃO

Assumindo que o conhecimento do professor necessita ser desenvolvido tanto na formação inicial quanto na continuada, de modo que ocorra o tão esperado impacto que a formação deve, efetivamente, ter na prática profissional do professor, a formação de professores de matemática necessita considerar as especificidades do conhecimento do professor, e não as generalidades (Ribeiro, 2018). Tal especificidade leva em consideração que existe um conjunto de conhecimento que é específico e especializado para a prática profissional de possibilitar que os alunos entendam e desenvolvam o seu conhecimento matemático, a partir do que e como conhecem (Ribeiro et al., 2021a).

Entendemos que a pesquisa e a formação de professores são indissociáveis e, nesse sentido, as perspectivas formativas, com foco no desenvolvimento do conhecimento especializado do professor, são concebidas de forma imbricada, assumindo-se a conceitualização do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK⁴ (Carrillo et al., 2018) e do Conhecimento Interpretativo (Jakobsen et al., 2014).

O MTSK esquadrinha o conhecimento do professor, conceitualizando-o como um todo especializado nas dimensões matemáticas (Conhecimento Matemático Especializado) e pedagógicas (Conhecimento Pedagógico Especializado). O Conhecimento Interpretativo corresponde ao conhecimento matemático especializado que fundamenta, também, a prática interpretativa do professor (Ribeiro, 2024), que, por sua vez, permite interpretar e atri-

⁴ Utilizamos a nomenclatura em inglês, reconhecida internacionalmente, e considerando que a tradução implica numa des-significação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.

buir significado aos raciocínios e formas de Pensar matematicamente dos alunos que são exteriorizadas por suas produções (Jakobsen et al., 2014).

Ambas conceitualizações (MTSK e CI) possuem entrelaçamentos (Silva et al., 2025), possibilitando compreender o conhecimento esperado que o professor venha a deter em cada tópico matemático, para que possa, posteriormente, implementar uma prática profissional que permita aos alunos desenvolverem seu conhecimento e competências matemáticas. Nesse sentido, as propostas formativas necessitam desenvolver o conteúdo do conhecimento do professor, possibilitando uma prática matemática inovadora (Ribeiro & Silva, 2024).

Alguns dos elementos constituintes desse Conhecimento Matemático Especializado, que cumpre ao professor de matemática deter, são entendidos como críticos, sem os quais (sem esse conhecimento profundo) se torna impossível efetuar uma prática interpretativa de mais elevado nível. Para identificar e desenvolver esses elementos críticos, e tendo em mente que o conhecimento matemático especializado necessita de contextos formativos para ser desenvolvido – não se desenvolve na prática com os alunos (Ribeiro et al., 2013) –, temos vindo a conceitualizar e implementar Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro et al., 2021a), sendo as Tarefas Interpretativas (Mellone et al., 2020) um tipo de TpF que permite aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo. Todas as TpF que conceitualizamos são entendidas como instrumento de coleta de informações para a pesquisa (sempre possuem uma questão de pesquisa associada) e como recurso para as discussões de desenvolvimento de conhecimento do professor.

Essas TpF centram-se em tópicos matemáticos problemáticos para alunos (e professores). Dois desses tópicos referem-se à transformação geométrica isométrica reflexão e à simetria (e.g., Karadeniz et al. (2015) e Son (2006) para dificuldades de professores, e Bulf (2010), Kuchemann (1980) e Ribeiro et al. (2021b) para dificuldades de alunos).

Para entender o conteúdo do Conhecimento Especializado e Interpretativo do professor, e os elementos críticos que os compõem, conceitualizamos e implementamos um contexto formativo envolvendo 15 professores de matemática dos Anos Finais e Ensino Médio, em que, em um dos encontros, a Tarefa Interpretativa associada focou a transformação geométrica isométrica reflexão e, em outro encontro, o foco da Tarefa Interpretativa foi a simetria. Associada às Tarefas Interpretativas, elencamos a questão de pesquisa⁵: que elementos críticos promovem o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo de professores de matemática no âmbito da reflexão e da simetria, e como esses elementos impactam em diferentes tipos de práticas interpretativas?

⁵ Uma versão prévia deste artigo discute-se no VII Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (VII CIMTSK).

ALGUMAS DISCUSSÕES TEÓRICAS

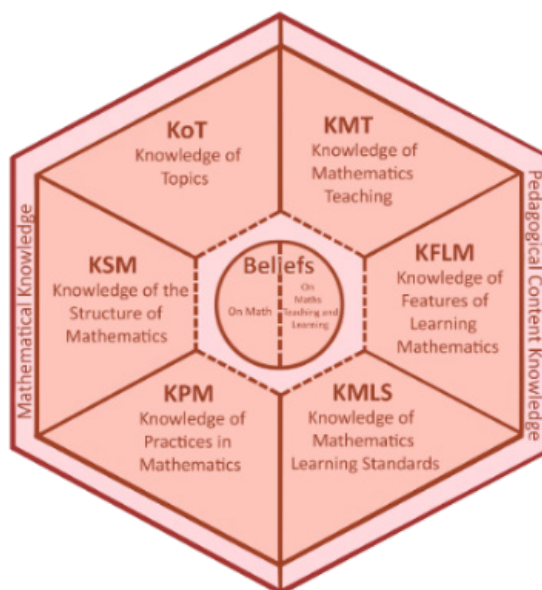
Há uma relação entre o conhecimento do professor e os resultados dos alunos à matemática (Grossman, 2010). Se buscamos contribuir para melhorar os resultados dos alunos, pela melhoria da qualidade das suas aprendizagens é, portanto, fundamental direcionar a atenção para os elementos críticos do conhecimento do professor (e alunos) em cada tópico. Isso porque, esse conhecimento impacta diretamente na prática profissional do professor. No contexto da Geometria, observa-se que os alunos revelam dificuldades, por exemplo, nas transformações geométricas isométricas (translação, reflexão e rotação) e na simetria.

Dentre essas isometrias, focamos na reflexão, que corresponde a uma transformação efetuada em uma figura a partir de um eixo (reflexão axial) ou de um ponto (reflexão central), e as principais dificuldades dos alunos referem-se a: (i) distinguir entre reflexão central e axial (Bulf, 2010); (ii) realizar a reflexão; (iii) diferenciar reflexão de simetria (Ribeiro et al., 2021b). Da mesma forma, os professores apresentam, também, dificuldades ao diferenciar, por exemplo, reflexão de rotação (Son, 2006) e efetuar a reflexão com eixos oblíquos – assim como os alunos (Karadeniz et al., 2015).

Simetria é uma propriedade de algumas figuras; pode haver simetrias do tipo central (identificada a partir de um ponto), axial (identificada a partir de um eixo), radial (identificada a partir de um mesmo ângulo) ou translacional (identificada a partir de um vetor). Aqui, centramos as discussões na simetria axial, em que as maiores dificuldades dos alunos são: (i) identificar todos os eixos de simetria que uma figura possui (Yetiş & Ludwig, 2013); (ii) identificar um eixo de simetria corretamente, ou não reconhecer um eixo de simetria correto (Jones, 2012); (iii) diferenciar reflexão de simetria (Bulf, 2010; Ribeiro et al., 2021b). Já as dificuldades dos professores no âmbito da simetria relacionam-se a: (i) distinguir reflexão de simetria (Ribeiro et al., 2021b); (ii) identificar o eixo de simetria (Turgut et al., 2014).

O conhecimento profundo, que se espera que o professor detenha, não envolve apenas um conhecimento da matemática *pura* por si só, nem um conhecimento que cumpre a qualquer professor conhecer (conhecimento pedagógico geral). Corresponde, portanto, a um conhecimento que é específico do professor de matemática, e que é entendido como especializado, por ser singular a sua prática profissional de possibilitar que os alunos entendam matemática. Tal conhecimento é entendido, aqui, a partir das conceitualizações do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018) e do Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen et al., 2014).

O MTSK corresponde a uma conceitualização teórica e analítica do conhecimento profissional do professor de matemática, e é representado em um modelo (Figura 1). Embora seja organizado em três domínios (*Mathematical Knowledge*, *Pedagogical Content Knowledge* e *Beliefs*) focamos no *Mathematical Knowledge*, pois seu conteúdo define o Conhecimento Interpretativo (Ribeiro, 2024; Silva & Ribeiro, 2025).

Figura 1 - Domínios do modelo MTSK

Fonte: Carrillo et al., (2018, p. 241)

O *Mathematical Knowledge* (MK) consiste no conhecimento matemático do professor, contextualizado dentro da disciplina científica matemática (Carrillo et al., 2018). Para fins organizacionais e analíticos, consideram-se os subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Aqui, discutimos o conteúdo do KoT, apresentando exemplos de seu conteúdo no escopo dos tópicos reflexão axial e simetria axial⁶.

Knowledge of Topics (KoT) refere-se ao conhecimento do professor em cada um dos tópicos matemáticos, abrangendo conhecer uma lista (não exaustiva) das propriedades de cada tópico e, destas, quais são as fundamentais, que o sustentam, além de considerar quais serão as propriedades minimais utilizadas nas possíveis definições. Inclui, também, o conhecimento dos procedimentos (para além de aplicar a regra), dos distintos registros de representação que podem ser empregues para representar um determinado tópico ou um elemento associado, e da fenomenologia e aplicações de cada tópico (Carrillo et al., 2018). Constitui-se em quatro categorias: (i) procedimentos; (ii) definições, propriedades e fundamentos; (iii) registros de representação; (iv) fenomenologia e aplicações.

Em (i) procedimentos, inclui-se o conhecimento dos diversos procedimentos em matemática para resolver *algo* (problema ou exercício), e relaciona-se a conhecer como se faz, quando se pode fazer e porque se faz esse *algo*, além das características do resultado. No escopo da reflexão consiste, por exemplo, conhecer que para efetuar a reflexão de uma figura (em 2D) no plano, a partir de um determinado eixo de reflexão, podem ser seguidas as seguintes etapas: (1) escolher um ponto qualquer pertencente à figura, traçando uma

⁶ A partir de agora, onde se lê reflexão deverá ser entendido como reflexão axial, e onde se lê simetria deverá ser entendida como simetria axial.

reta perpendicular ao eixo e que o contenha; (2) marcar o ponto de intersecção entre essa reta e o eixo; (3) medir a distância entre o ponto da figura e o ponto de intersecção entre a reta e o eixo; (4) transpor essa distância para o lado oposto ao eixo de reflexão, marcando o ponto refletido; (5) repetir as etapas anteriores, procedendo, de forma análoga, para alguns outros pontos da figura, escolhendo estrategicamente os que minimizarão tal repetição; (6) unir os pontos refletidos, obtendo a imagem. Concernente à simetria, inclui conhecer que um exemplo das etapas utilizadas para identificá-la, em uma figura, são: (1) dividir a figura, traçando uma reta (eixo de simetria); (2) verificar que as duas partes obtidas são realmente congruentes e se sobrepõem totalmente.

A categoria (ii) definições, propriedades e fundamentos será apresentada seguindo uma sequência naturalmente lógica do ponto de vista matemático, para uma melhor compreensão, em que primeiro se discute a componente propriedades; depois, os fundamentos e, por fim, as definições.

Relativo a (ii) propriedades, incorpora o conhecimento do professor sobre os atributos matemáticos que são comuns aos elementos de uma mesma classe de equivalência do tópico. Um exemplo em reflexão envolve conhecer que se trata de uma isometria (preserva distâncias), transformando uma figura em outra congruente. Em simetria inclui, por exemplo, conhecer que algumas figuras podem ter um ou mais eixos de simetria.

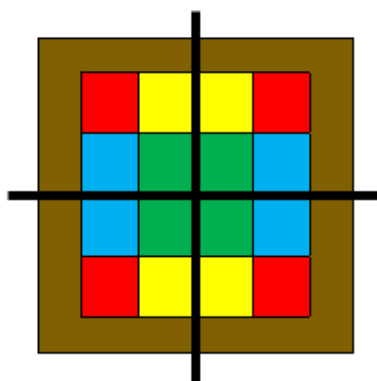
Já (ii) fundamentos, refere-se ao conhecimento de que, dentre o conjunto de propriedades de um tópico, existem aquelas que são fundamentais, garantindo sua existência. Logo, os fundamentos são um subconjunto das propriedades. Em reflexão contempla, por exemplo, conhecer que o eixo de reflexão é um de seus fundamentos. Em simetria consiste, por exemplo, conhecer que o eixo de simetria é um de seus fundamentos.

Referente a (ii) definições, abrange o conhecimento de um conjunto minimal de propriedades que permitem identificar, univocamente, o ente matemático, sendo que existem múltiplas definições para cada tópico. No âmbito da reflexão refere-se a, por exemplo, conhecer que uma possível definição de reflexão corresponde à transformação geométrica isométrica efetuada a partir de um eixo de reflexão no plano, que deixa invariante cada ponto de e e transforma cada ponto P em um ponto P' diferente, tal que e é a mediatriz do segmento de reta PP' . Em relação a simetria inclui, por exemplo, conhecer que uma possível forma de definir simetria é: uma figura tem simetria axial a partir de um eixo l , quando coincide com sua imagem pela reflexão a partir de l .

Em (iii) registros de representação engloba o conhecimento das diferentes maneiras de representar um tópico, logo, dos diversos tipos de registros passíveis de utilização, como os gráficos, algébricos, aritméticos, pictóricos, considerando a linguagem escrita ou verbal. Um exemplo, no âmbito da reflexão, consiste em, por exemplo, conhecer que uma figura (ou cada um de seus pontos) e sua imagem podem ser representados algebricamente por uma

letra maiúscula latina, e essa mesma letra acrescida com um apóstrofo, ou seja, e , respectivamente, podendo o ponto pertencente à imagem ser lido (representação em linguagem verbal) como *linha*. No escopo da simetria consiste, por exemplo, conhecer que um registro de representação pictórico ao se identificar a simetria em uma figura é apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Exemplo de registro de representação pictórico no âmbito da simetria



Fonte: Elaboração própria

No tocante à (iv) fenomenologia e aplicações, abrange o conhecimento dos fenômenos relacionados a cada tópico e dos contextos (sejam internos ou externos à matemática) que permitem sua aplicação. Dependendo das aplicações do tópico, seus vários sentidos (que evocam as distintas maneiras de interpretar o tópico) surgem, permitindo compreendê-lo de modos variados. No âmbito da reflexão envolve, por exemplo, conhecer que a reflexão é entendida como um movimento rígido de uma figura (em 2D) em que se efetua uma operação com a figura que é refletida em relação a uma reta (eixo), obtendo-se pontos correspondentes da imagem que se localizam inversamente à figura em relação a esse eixo de reflexão. Em simetria abarca, por exemplo, conhecer que a simetria é entendida como uma propriedade de algumas figuras, de modo que essas figuras podem, sempre, ter sido obtidas por transformações geométricas isométricas.

O Conhecimento Interpretativo (CI) é definido, de acordo com a Enciclopédia Springer Nature, como:

[...] o conhecimento matemático amplo e profundo que permite aos professores apoiarem os alunos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento matemático tendo como ponto de partida seus próprios raciocínios e produções, independentemente de serem não usuais ou incorretas. O CI complementa o conhecimento de erros típicos ou estratégias dos alunos, com o conhecimento de possíveis origens de erros típicos e atípicos e o conhecimento do uso dos erros como uma efetiva fonte de aprendizagem [...] (Di Martino *et al.*, 2020, p. 426).

O CI, enquanto um conhecimento matemático especializado, fundamenta a prática interpretativa do professor, que permite interpretar as formas de Pensar dos alunos expressas nas suas produções, envolvendo atribuir significado aos raciocínios e estratégias (Silva & Ribeiro, 2025), mesmo que sejam matematicamente inadequados ou não usuais – podem

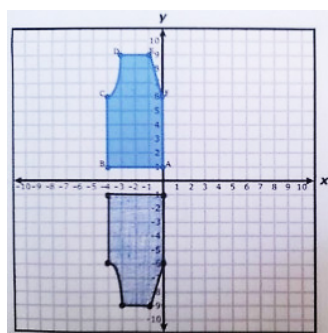
ser matematicamente adequadas, mas são inesperadas para o professor (Jakobsen et al., 2014).

Nesse sentido, a prática interpretativa (tipo e foco de interpretação associada) depende diretamente do nível de CI do professor (Silva & Ribeiro, 2025), e consideram-se quatro níveis (e.g., Mellone et al. (2017) e Silva e Ribeiro (2024)). Esses níveis de CI não envolvem uma gradação discreta, mas sim contínua,⁷ e são exteriorizados por diferentes práticas interpretativas: (i) interpretação equivocada; (ii) interpretação avaliativa; (iii) interpretação para a prática letiva; (iv) interpretação como pesquisa.

A (i) interpretação equivocada (nível 0 de CI) envolve interpretar como matematicamente adequada uma produção que não é. Isso não equivale à ausência de conhecimento, mas relaciona-se a um baixo nível de Conhecimento Matemático Especializado que não permite, sequer, validar (ou não) a matemática presente na produção. Em relação a (ii) interpretação avaliativa (nível 1 de CI), refere-se ao conhecimento que leva o professor a considerar matematicamente adequada toda produção de aluno que tenha correspondência com a sua, assumindo as demais como inadequadas. Sobre a (iii) interpretação para a prática letiva (nível 2 de CI), corresponde com o conhecimento que permite projetar as etapas educacionais, levando em consideração o que interpreta nas produções. Já a (iv) interpretação como pesquisa (nível 3 de CI), condiz com o conhecimento que fundamenta escutar e entender as formas de Pensar matemático dos alunos (Mellone et al., 2023) e os porquês das estratégias utilizadas para resolver um determinado problema, ainda que não sejam adequadas, logo, o professor até revê sua própria formalização matemática.

Para um melhor entendimento dessas práticas, se exemplifica cada uma delas, considerando uma Tarefa para o aluno, cujo problema consiste em obter a frente de uma camiseta e, para tal, é necessário realizar uma reflexão com uma figura localizada no 2.º quadrante do plano cartesiano, obtendo a imagem no 1.º quadrante, de modo que o eixo de reflexão definido coincida com o eixo das ordenadas. Contudo, o aluno efetua uma reflexão considerando o eixo das abscissas como eixo de reflexão, e sua produção é apresentada na Figura 3.

Figura 3 - Exemplo de uma produção de aluno no âmbito da reflexão



Fonte: Arquivo da pesquisa

⁷ A forma como o desenvolvimento do CI ocorre pode ser associada à densidade dos números racionais.

Em uma interpretação equivocada, essa produção seria interpretada como adequada, já que o aluno efetuou uma reflexão, utilizando adequadamente os procedimentos, *apenas* desconsiderou o eixo de reflexão adequado para resolver o problema. Em relação uma interpretação avaliativa, essa produção é interpretada, somente, como matematicamente inadequada. Já em uma interpretação para a prática letiva, a produção é interpretada como matematicamente inadequada, mas não só, pois o professor assume (em futuras implementações de tarefas neste âmbito), a necessidade de discutir com os alunos a posição do eixo a ser considerado. Relativo a uma interpretação como pesquisa, por se referir a um nível mais elevado de CI, o professor interpreta tal produção como matematicamente inadequada, todavia, evidencia como ponto de partida para as discussões o que e como o aluno já conhece, relativo aos procedimentos adequados da reflexão e até algumas propriedades, como a equidistância entre todos os pontos da figura e seus correspondentes refletidos na imagem. Consequentemente, por não haver coerência matemática em relação ao que foi efetuado e ao que foi solicitado na tarefa – sustentado na comum dificuldade dos alunos em interpretar a matemática requerida para resolver o problema e não apenas em *saber fazer* –, o professor com esse nível de CI discute as possíveis direções que o eixo de reflexão pode assumir, e qual dessas determina um eixo que resolve a tarefa.

CONTEXTO E MÉTODO

A partir de um contexto formativo (40 horas – nove encontros) visou-se aceder e desenvolver o CI de 15 professores de matemática dos Anos Finais e Ensino Médio (lecionam para alunos entre 11 e 18 anos, no cenário brasileiro), no âmbito das transformações geométricas isométricas e simetria. Nesse contexto formativo, englobou cinco Tarefas Interpretativas – TI (Mellone et al., 2020), e os dois primeiros autores deste texto foram os formadores.

As TI têm como objetivo aceder e desenvolver (pela discussão especializada que se efetua) o Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor de matemática em tópicos matemáticos considerados problemáticos diante das dificuldades que os alunos e professores revelam. São estruturadas em três partes: Parte Preliminar, focada em direcionar a atenção do professor para o tópico e categorias que se discutirão por meio de perguntas associadas ao seu conhecimento e experiências anteriores com esse tópico; Parte I, que contém uma Tarefa para o aluno (Ta) a partir da qual consideram-se questões direcionadas para discutir e desenvolver o conteúdo de algumas das categorias do conhecimento especializado do professor; Parte II, que sempre visa aceder e desenvolver o CI e que, aqui, contempla algumas produções de alunos para a Ta, que servem de elemento detonador para a interpretação e atribuição de significado e proposição de *feedback* construtivo para tais produções.

Buscando aceder e desenvolver o conhecimento dos participantes relativamente à diferença entre reflexão e simetria coletamos as produções dos professores durante o encontro três (15 professores presentes), cuja TI se focava na reflexão, e no encontro seis (13 professores presentes), em que a TI focou a simetria.

A TI implementada no encontro três (Figura 4) tem o objetivo formativo de possibilitar o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo no âmbito da reflexão axial, com foco nas conexões com outros tópicos e a estrutura matemática que a permeia, além de diferenciar a reflexão das demais transformações e simetria. Discutem-se, aqui, as questões que são foco de análise, em que se objetiva (questão 1. da Parte I) aceder e desenvolver o conhecimento relativo aos procedimentos, propriedades e fundamentos da reflexão. Além disso, propõem-se quatro produções de alunos para serem interpretadas (questão 1. (a) da Parte II), porém, foca-se em uma (produção de Lucas), em que se visa fomentar a compreensão crítica que sustenta escutar o Pensar matemático do aluno e desenvolver o conhecimento necessário para que se entendam as dificuldades dos alunos em determinar adequadamente o eixo de reflexão. Também, objetiva-se (questão (b) da Parte II) promover o desenvolvimento do CI para interpretar o raciocínio matemático envolvido.

Figura 4 - Parte da Tarefa Interpretativa no âmbito da reflexão

Entendendo e diferenciando a reflexão [...] Parte I [...]
Tarefa 2: Refletindo o desenho (Deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...) 1. O filho da Dona Margarida é professor de matemática e ao observar sua mãe costurando, resolveu levar para sala de aula a ideia, relacionando-a com o Plano Cartesiano. Complete a imagem abaixo representando exatamente o que a Dona Margarida obterá após abrir o tecido.

Considere a tarefa anterior:

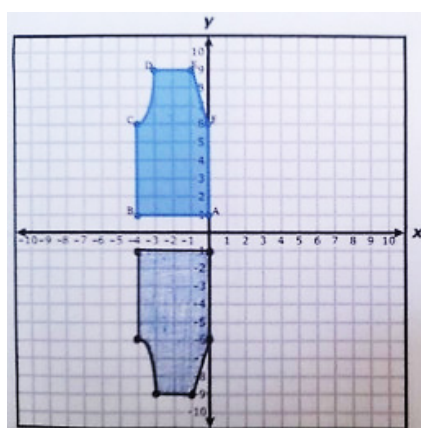
(i) Resolva a Tarefa por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).

[...]

Parte II

1. A professora Regina estava com dificuldades em entender algumas produções de seus alunos referente à Tarefa 2 e resolveu discuti-las com alguns colegas de matemática durante a reunião pedagógica:

[...]



Produção de Lucas

- (a) Após analisar essas produções considera que alguma está matematicamente incorreta? Justifique.
- (b) Qual considera que pode ter sido o raciocínio matemático dos alunos em cada uma das produções?

[...].

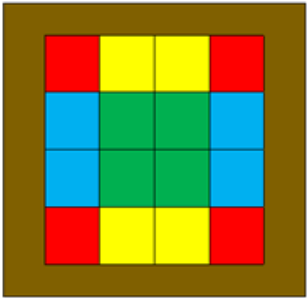
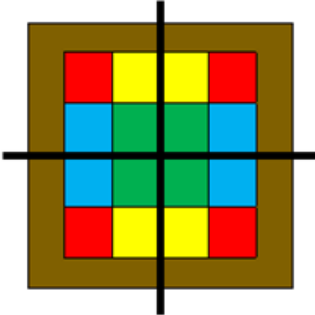
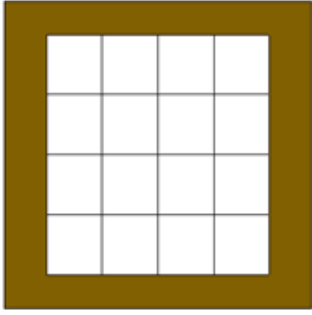
Fonte: Arquivo da pesquisa

A produção de Lucas foi incluída com o objetivo de discutir a dificuldade dos alunos em reflexão, associada a determinar adequadamente o eixo. Lucas efetuou uma reflexão considerando os procedimentos de modo matematicamente adequado, mas o eixo de reflexão utilizado (coincidente ao eixo das abscissas) é incorreto, pelo que a resposta está incorreta para a pergunta efetuada – não tem correspondência com o problema (obter a frente da camiseta).

A TI implementada no encontro seis (Figura 5) tem o objetivo formativo de possibilitar o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo no âmbito da simetria, com foco nas conexões com outros tópicos e a estrutura matemática que a permeia, além de diferenciá-la das demais transformações. Considerando para a discussão somente as questões que são foco de análise, visa-se (questão (c) (ii) da Parte I) aceder e desenvolver o conhecimento envolvido em identificar (quantificando-os) e determinar (procedimentos para traçar) eixos de simetria ao efetuar alguns movimentos (transformações geométricas isométricas). Além disso, objetiva-se, também, (questão 2. da Parte II) aceder e desenvolver o CI envolvido em

interpretar uma produção de aluno (Sofia), que é matematicamente incompleta, considerando o que é solicitado na tarefa e, a partir dessa interpretação, validar uma produção matematicamente adequada (Inês), em que é requerido ao professor determinar os possíveis procedimentos efetuados para obter quatro eixos de simetria.

Figura 5: Parte da Tarefa Interpretativa no âmbito da simetria

Entendendo por que simetria não é sinônimo de transformação geométrica isométrica	
Tarefa: Em busca da simetria (Deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...) 1. O tabuleiro do jogo “Em busca da simetria” é um quadrado de 4 por 4, em que cabem 16 peças (quadrados menores coloridos de diferentes cores de um dos lados e todos da mesma cor do outro lado). A seguir, apresenta-se um tabuleiro cujas peças são coloridas com quatro cores diferentes:  Imagine que você está jogando e tem as peças organizadas como na imagem acima. [...] (c) É possível movimentar as peças para ter: [...] (ii) Quatro eixos de simetria? Justifique e trace os eixos de simetria se for possível [...]	
1. Considere a tarefa anterior: (i) Resolva a Tarefa por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino). Parte II [...] 2. No momento seguinte, Sofia mostrou para a professora Joana a sua produção e disse que só tinha encontrado dois eixos de simetria. Inês olhou para a produção de Sofia e fez uma pequena mudança em sua produção e disse que obteve quatro eixos de simetria. O que Inês poderá ter feito? É possível que Inês esteja correta? Qual poderá ser a produção de Inês?	
 Produção de Sofia	 Produção de Inês

Fonte: Arquivo da pesquisa

A produção de Sofia foi incluída porque permite discutir, a partir de uma figura simétrica, a quantificação dos eixos de simetria, tendo em mente que os alunos têm mais facilidade em identificá-los quando estão dispostos nas direções horizontal e vertical, em comparação com as direções oblíquas. Para resolver o problema (traçar os quatro eixos de simetria), a cor das peças deve ser considerada para que a figura seja simétrica. Isso deve ser feito utilizando apenas peças de três cores (vermelho e verde), obtendo-se a terceira cor *virando* as peças (azul e amarelo), uma vez que as peças têm o outro lado da mesma cor.

A implementação de ambas as TI ocorreu seguindo a mesma estrutura, em que os professores discutiram e responderam as TI, organizados em quatro pequenos grupos (G1, G2, G3 e G4) de três ou quatro, constituídos sempre pelos mesmos integrantes. Após terminarem de responder, ocorreu a discussão em plenária.

Para a análise, coletou-se as produções dos professores (escritas e em áudio e vídeo) referente às respostas para as TI. As produções escritas foram transcritas *ipsis litteris* e, após esse processo, as transcrições foram codificadas de forma que, por exemplo, (E6II2CI_G2) corresponde a uma produção do encontro seis (E6), da Parte II da TI (II), referente à questão 2(2), e que se remete ao Conhecimento Interpretativo (CI) do grupo 2 (G2).

Em cada uma das produções foram identificadas evidências de conhecimento, e agruparam-se as do mesmo tipo considerando os subdomínios e categorias do MTSK ou do CI – considerando as práticas interpretativas definidas por Mellone et al. (2017). Nesse processo de identificação, as evidências de conhecimento especializado foram destacadas com cores específicas, utilizando as cores presentes nos livros da Coleção CIEspMat – Formação. Essa é uma opção nas pesquisas que se desenvolvem no grupo CIEspMat⁸, pois possibilita que, quando se discute a análise no seio do grupo, todos estejam no mesmo ponto de partida. Já para a identificação das evidências de CI, utilizou-se a cor cinza, bem como identificaram-se palavras-chave (alternando a cor da fonte para vermelho) associadas a uma validação (ou não) do conhecimento considerado nas produções dos alunos que são interpretadas.

Além disso, as evidências de conhecimento são associadas a descritores, que são identificados por acrônimos. Esses descritores são apresentados sempre de forma matematicamente adequada, e, quando o conhecimento revelado é matematicamente inadequado, utiliza-se *; quando se refere a um conhecimento incompleto utiliza-se **; quando não foi revelado algum conhecimento que é necessário para a discussão inclui-se o acrônimo do descritor entre colchetes []. O acrônimo, por exemplo, KoTpS1 associa-se a um descritor de conhecimento do *Knowledge of Topics* (KoT), relativo a propriedades (p) de simetria (S), em que se tem, pela primeira vez, no texto de análise (1).

⁸ O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. <http://ciespmat.com.br>

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Iniciamos por apresentar a análise focando no Conhecimento Matemático Especializado (MK) revelado e, posteriormente, no Conhecimento Interpretativo (CI).

Para a questão da Tarefa para o aluno no âmbito da reflexão (encontro três), trazemos as produções dos professores do G3 e G4, que são mais representativas das categorias a que pertencem, e porque as produções dos demais grupos (G1 e G2) são do mesmo tipo do G3.

Figura 6: Produções dos professores do G3 e G4 para a questão 1 da Tarefa para o aluno no âmbito da reflexão



Fonte: Arquivo da pesquisa

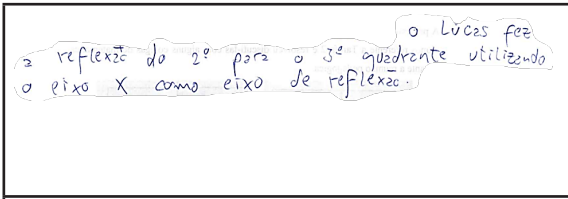
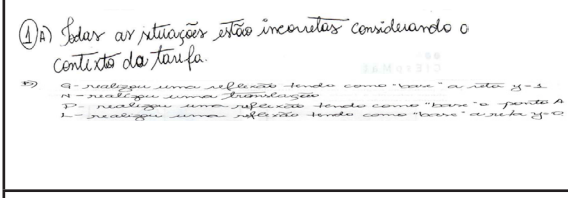
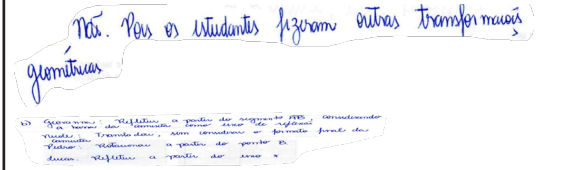
Todos os grupos apresentaram uma resposta que, do ponto de vista matemático, não é adequada. Ao efetuarem a reflexão da figura não traçaram o segmento para fechar a figura (o que é necessário), e não coloriram a sua parte interna (também necessário para representar que os pontos internos da figura são refletidos e não apenas sua fronteira). Assim, revelam um conhecimento incompleto, relativamente às condições necessárias e suficientes de procedimentos de reflexão, que, sendo completado, se refere a conhecer que um conjunto de procedimentos para efetuar a reflexão de uma figura, envolve considerar alguns dos pontos, refleti-los a partir de um eixo de reflexão, obtendo a imagem ao unir todos os pontos refletidos (KoTpE1**).

Além disso, apenas os constituintes do G4 denominaram os pontos da imagem e, revelando conhecer que, na reflexão, todos os pontos originais são transformados e fazem parte da nova figura – imagem (KoTppE1).

Relativamente à interpretação (Parte II), os grupos apresentam as produções a seguir (Figura 7).

Figura 7: Produções dos professores para a questão 1. (a) e (b) da TI no âmbito da reflexão com foco na produção de Lucas

Produção	Transcrição com evidência destacada
1a - Em relação a tarefa pedida que é construir a camiseta, todas estas incorretas, porém, pensando na reflexão as produções de Giovana, ~~Lucas~~ e Lucas ~~fez~~ ~~uma~~ ~~reflexão~~ ~~no~~ ~~eixo~~ ~~pedido~~ são possíveis mas não no eixo pedido. 1b - Giovana fez uma reflexão em relação ao eixo da camiseta, mas não fez uma reflexão no eixo da camiseta. Lucas fez uma reflexão no eixo da camiseta, mas não fez uma reflexão no eixo da camiseta.	E3IIaCI_G1: 1a – Em relação a tarefa pedida que é construir a camiseta, todas estão incorretas, porém, pensando na reflexão as produções de [...] Lucas [...] são possíveis mas não no eixo pedido. E3IIbCI_G1: Lucas fez uma reflexão no eixo das abscissas.

	E3IIaCI_G2: [...]. E3IIbCI_G2: o Lucas fez a reflexão do 2º para o 3º quadrante utilizando o eixo X como eixo de reflexão.
	E3IIaCI_G3: Todas as situações estão incorretas considerando o contexto da tarefa. E3IIbCI_G3: L – realizou uma reflexão tendo como “base” a reta .
	E3IIaCI_G4: Não. Pois os estudantes fizeram outras transformações geométricas E3IIbCI_G4: Lucas: Refletiu a partir do eixo x

Fonte: Arquivo da pesquisa

Os professores do G1 e G3 assumiram, explicitamente, a produção do aluno como incorreta (G1: (...) *todas estão incorretas* (...)), e ambos estão situados no nível 2 de CI que sustenta uma interpretação para a prática letiva (Mellone et al., 2017), uma vez que justificam porque consideraram a produção como incorreta, pautando-se no conhecimento matemático de Lucas ao efetuar reflexão.

Assim, os elementos do G1 revelaram conhecer que o raciocínio de Lucas se refere a uma reflexão (*pensando na reflexão as produções de [...], Lucas [...] são possíveis*) e apontam que o erro consistiu em desconsiderar o eixo de reflexão adequado (*fez uma reflexão no eixo das abscissas.*), sustentado em conhecer que, a depender do eixo de reflexão que se considera, obtém-se a imagem em um determinado local do plano (KoTfE1).

Os constituintes do G3, por sua vez, revelaram um conhecimento de que o raciocínio matemático de Lucas também envolveu uma reflexão, mas que se trata de uma produção matematicamente inadequada, pois o eixo considerado (*[...] a reta*) não permite resolver o problema da tarefa – *contexto da tarefa* (KoTfE1).

Os integrantes dos demais grupos (G2 e G4) não assumiram a produção de Lucas como matematicamente incorreta. Ainda que os professores do G2 não explicitaram que a produção de Lucas é incorreta, revelando conhecer que seu raciocínio consistiu em efetuar uma reflexão (*do 2º para o 3º quadrante utilizando o eixo X como eixo de reflexão*). Essa interpretação enquadra-se como sendo avaliativa (nível 1 de CI), pois somente identifica o erro, e correspondente a conhecer que, ao se efetuar uma reflexão assumindo o eixo das abscissas como eixo de reflexão, uma figura que está localizada no 2.º quadrante, ao ser refletida, em termos de características do resultado, sua imagem sempre será localizada no 3.º quadrante [(KoTpE2)].

Em G4, ao explicitarem que “*não*”, que nenhuma produção está matematicamente incorreta, efetuaram uma prática interpretativa que se associa a uma interpretação equivocada (nível 0), uma vez que assumiram como matematicamente adequada uma produção que é matematicamente inadequada (Silva & Ribeiro, 2024). Revelaram conhecer que como a forma de Pensar de Lucas envolveu uma reflexão (*Refletiu a partir do eixo x*), a sua resposta é matematicamente adequada – e aqui, apesar de ter sido efetuada uma reflexão, não tem relação com o solicitado na tarefa. Esses professores revelaram deter um conhecimento matemático de baixo nível, que se exterioriza pela não identificação do erro na produção. Apesar de revelarem conhecer a que corresponde efetuar uma reflexão a partir de um eixo horizontal, esse conhecimento não é suficiente para associar a resposta à pergunta que foi formulada, e que demanda, também, conhecer como identificar a imagem (figura transformada) obtida por uma reflexão [(KoTpE3)]. O fato de esse conhecimento não ter sido mobilizado na prática interpretativa, ilustra que não é suficiente deter um conhecimento matemático de *saber fazer a reflexão* (que se considera de um nível baixo dos alunos e, portanto, do nível mais baixo do conhecimento especializado do professor) para que seja efetuada uma interpretação adequada.

No encontro seis, cuja TI é no âmbito da simetria, quando responderam à primeira pergunta da Parte I, os professores do G1 e G3 afirmaram não ser possível obter os quatro eixos. Os elementos do G2 consideraram ser possível, mas traçaram erroneamente os dois eixos na direção oblíqua, e os professores do G4 propuseram uma estratégia que torna possível traçar quatro eixos. As produções dos quatro grupos estão apresentadas na Figura 8.

Figura 8: Produções dos professores para a questão 1. (c) (ii) da Tarefa para o aluno no âmbito da simetria

Produção	Transcrição
	E6IciiCE_G1: (c) ii) não! Pois quando conseguimos a simetrias das diagonais não conseguimos os eixos vertical e horizontal. Assim limitando a duas simetrias por vez
	E6IciiCE_G2: (ii) Considerando os eixos horizontal e vertical já traçados, adicionando um dos eixos na diagonais manterá a simetria.
	E6IciiCE_G3: (ii) (Sim, vide “figura 3”.) Não é possível. (ou mo)

ii) é Sim. Vide folha anexa. iii) impossível utilizando os lados coloridos. iii) impossível	E6IciiiCE_G4: (ii) Impossível utilizando os lados coloridos.
--	---

Fonte: Arquivo da pesquisa

Os professores do G1 revelaram um conhecimento de que não é possível ter quatro eixos de simetria, pois uma vez que se identifica os eixos nas direções oblíquas, que coincidem com as duas diagonais (*a simetrias das diagonais*) do quadrado – tabuleiro que integra o jogo –, não existe nenhum movimento – transformação geométrica isométrica – a ser efetuado que garanta: manter as quatro cores das peças e identificar os eixos nas direções vertical e horizontal. Tal conclusão fundamenta-se em conhecer que o eixo de simetria pode ser localizado nas direções vertical, horizontal e oblíqua (KoTfS2).

Os professores constituintes do G2 revelaram conhecer que é possível ter quatro eixos de simetria (*eixos horizontal e vertical [...] dois eixos na diagonais manterá a simetria*), contudo, na sua própria produção pictórica (que é matematicamente inadequada) os dois segmentos de reta oblíquos não são eixos de simetria (por não serem retas e por não permitirem obter uma parte como reflexão da outra). Tal dificuldade em identificar eixos de simetria também é uma das dificuldades dos alunos (Jones, 2012). E esse conhecimento, revelado pelos professores do grupo, impactou na prática interpretativa realizada posteriormente, associada a um nível baixo de conhecimento, e que requeria conhecer que a simetria é identificada em figuras cujo eixo de simetria divide a figura em duas metades congruentes e idênticas [(KoTppS2)].

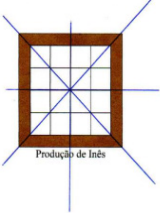
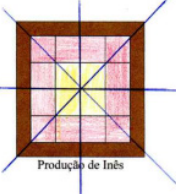
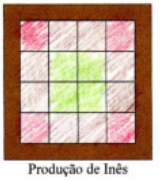
Também, os integrantes do G3 revelaram um conhecimento do mesmo nível do que sustenta as dificuldades dos alunos em identificar todos os eixos de simetria que possui uma figura (Yetiş & Ludwig, 2013). Assumiram, inicialmente, que era possível considerar quatro eixos de simetria, mas riscaram a sua resposta (Sim, vide “figura 3”), respondendo, por fim, que não é possível identificar quatro eixos de simetria, mas sem justificar o porquê. Para que pudessem responder corretamente à questão (recorde-se que é da Tarefa para os alunos, mas obviamente que forma parte do conhecimento especializado do professor), teriam de conhecer que, para identificar um eixo de simetria, seguem-se etapas: (1) dividir a figura exatamente ao meio traçando uma reta (eixo de simetria); (2) verificar que as duas partes obtidas são realmente congruentes e se sobrepõem totalmente [(KoTpS4)].

G4 é composto por professores que revelaram conhecer ser “impossível” ter quatro eixos de simetria, considerando as peças coloridas, e apresentam como solução todas as peças *viradas*, obtendo um único quadrado marrom. Nesse sentido, traçaram os quatro eixos de simetria que são propriedades de todo o quadrado (eliminando o contexto da cor). O conhecimento revelado por eles relaciona-se a conhecer que um quadrado possui quatro

eixos de simetria, sendo dois coincidentes com as duas retas mediatrizes dos seus lados e os outros dois coincidentes com as duas retas que contêm as suas diagonais (KoTpp3).

Os professores, ao interpretarem a produção de aluno presente na questão 2 (Parte II) apresentaram as seguintes produções (Figura 9).

Figura 9: Produções dos professores para a questão 2 da TI no âmbito da simetria

Produção	Transcrição
 Não há possibilidade de uma pequena mudança resultar em uma figura com 4 eixos, por conta das cores utilizadas. (analisando a figura sem cores há possibilidade de 4 eixos de simetria).	E6II2CI_G1: Não há possibilidade de uma pequena mudança resultar em uma figura com 4 eixos, por conta das cores utilizadas. (analisando a figura sem cores há possibilidade de 4 eixos de simetria).
2) Ela (Inês) rotacionou a figura e sua imagem traçou as diagonais 	E6II2CI_G2: 2. Ela (Inês) rotacionou a figura e sua imagem traçou as diagonais
2- Sim, pois ela modificou usando duas cores ou uma. 	E6II2CI_G3: Sim, pois ela modificou usando duas cores ou uma.
Inês pode estar correta Produção na folha 	E6II2CI_G4: Inês pode estar correta Produção na folha.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Os professores do G1 revelaram um conhecimento de que a aluna está matematicamente incorreta, ao não utilizar uma estratégia *menos extrema* e matematicamente válida, e por isso, propõe uma estratégia e produção matematicamente adequada, entretanto, sem correspondência com o problema. Logo, ao considerarem não ser matematicamente possível a produção de Inês (*Não há possibilidade de uma pequena mudança resultar em uma figura com 4 eixos, por conta das cores utilizadas.*), valeram-se de uma estratégia matematicamente válida, e apresentaram uma produção pictórica traçando quatro eixos de simetria, que representando o tabuleiro do jogo sem as peças (*analisando a figura sem cores*

há possibilidade de 4 eixos de simetria), o que se associa à mesma forma de proceder que os professores do G4 quando responderam a questão 1. (c) (ii) da Tarefa para o aluno. Com essa estratégia revelaram conhecer que um quadrado (monocolor) sempre possui quatro eixos de simetria (KoTppS4). Os professores do G1 situam-se, portanto, em um nível mais elevado de conhecimento que sustenta a interpretação avaliativa (nível 1 de CI), porém que não atinge a interpretação como pesquisa (nível 2 de CI) – o que ilustra a continuidade gradativa desses níveis de conhecimento.

Nos demais grupos (G2, G3 e G4) os professores consideraram que a produção de Inês é matematicamente possível, mas efetuaram interpretações distintas.

Os professores do G2 revelaram conhecer (inadequadamente) que bastava rotacionar a produção de Sofia e traçar as diagonais (*rotacionou a figura e sua imagem traçou as diagonais*). Realizaram, assim, uma prática interpretativa que considera a produção de aluno como matematicamente adequada (e de fato é), mas não conseguiram explicitar essa produção, apresentando uma outra produção que é matematicamente inadequada. Esse tipo de prática demanda que uma outra categoria de interpretação seja ponderada – interpretação insuficiente –, que corresponde ao nível 0 de CI, que, por sua vez, se fundamenta em um conhecimento matemático do professor que não permite responder a uma pergunta para os alunos (nível de conhecimento do aluno) e corresponde ao nível mínimo do conhecimento matemático especializado do professor. A inadequação matemática na produção escrita do G2, é evidenciada em sua produção pictórica, pois as duas retas traçadas nas direções oblíquas não correspondem a eixos de simetria que se esperava obter. Os professores replicaram a sua própria resposta quando responderam à Tarefa para o aluno (questão (c) (ii)) no momento de interpretação da produção da aluna, que coaduna com a situação em que os professores apresentaram o mesmo tipo de dificuldade que os alunos, a qual se relaciona com o nível de conhecimento que possuem.

Ambos os grupos (G3 e G4) efetuaram uma interpretação como pesquisa (nível 2 de CI), considerando a produção de Inês com sendo matematicamente correta, buscando indícios de conhecimento matemático adequado e de estratégias coerentes com a Tarefa, mas considerando estratégias distintas.

Em G3 assumiram que a “pequena mudança que Inês efetuou em sua produção” envolveu utilizar peças em duas ou uma cor (*modificou usando duas cores ou uma.*), apresentando como resposta o uso de peças em duas cores e traçando os quatro eixos de simetria que se sustenta em conhecer que se podem representar todos os eixos de simetria de uma figura simétrica (KoTrrS2).

Os elementos de G4, por sua vez, apresentaram a possível produção de Inês, valendo-se da estratégia pautada em conhecer que, ao utilizar três cores para as peças, obtém-se uma figura simétrica com quatro eixos de simetria, contudo não os traçaram. Assim, para

uma completude do que revelaram, se faz necessário conhecer que, para identificar se uma figura possui simetria axial, um dos procedimentos associa-se a utilizar uma linha reta e identificar se existem pontos por onde essa linha passe, de modo a dividir a figura ao meio e, se isso ocorrer, então a figura é simétrica [(KoTpS5)].

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um conhecimento matemático especializado do professor permite diferenciar a reflexão das demais isometrias e entender que reflexão e simetria não pertencem ao mesmo conjunto, identificando todos os eixos de simetria em figuras simétricas. Um conhecimento profundo, nesse âmbito, sustenta uma prática interpretativa que possibilita ao professor validar (ou não) as formas de Pensar matematicamente presentes nas produções dos alunos, pela escuta desse pensamento matemático (Mellone et al., 2023). O conhecimento matemático especializado, revelado pelos professores no âmbito do tópico, impacta a prática interpretativa, sendo, portanto, o conteúdo desse conhecimento um elemento crítico para uma prática interpretativa de nível superior (níveis 2 ou 3 de CI).

Da análise e discussões realizadas emergiu uma nova categoria de prática interpretativa, denominada por *interpretação insuficiente*, e que se associa a um nível 0 de CI. Esse tipo de interpretação demonstra a necessidade de um nível mínimo de Conhecimento Matemático Especializado no âmbito do tópico que se discute, para que o professor possa realizar uma prática interpretativa que contribua para as aprendizagens matemáticas dos alunos e para o desenvolvimento de competências matemáticas.

Sintetizamos, em seguida (Quadro 1), o conteúdo de conhecimento matemático especializado revelado (adequado, inadequado e ausente) que informa os pontos críticos a focar, e nos guia para a conceitualização de próximos contextos formativos com esse fito de desenvolver o CI dos professores (inclusive, de futuros professores – formação inicial) nesses tópicos.

Quadro 1: Descritores de Conhecimento Matemático Especializado revelados pelos professores no âmbito da reflexão e da simetria

Subdomínio e categoria	Descritor de Conhecimento Matemático Especializado
KoT – procedimentos	Conhecer que um conjunto de procedimentos para efetuar a reflexão de uma figura, envolve considerar alguns dos pontos, refleti-los a partir de um eixo de reflexão, obtendo a imagem ao unir todos os pontos refletidos (KoTpE1**).
	Conhecer que, ao se efetuar uma reflexão assumindo o eixo das abscissas como eixo de reflexão, uma figura que está localizada no 2.º quadrante, ao ser refletida, em termos de características do resultado, sua imagem sempre será localizada no 3.º quadrante [(KoTpE2)].
	Conhecer como identificar a imagem (figura transformada) obtida por uma reflexão [(KoTpE3)].
	Conhecer que, para identificar um eixo de simetria, seguem-se etapas: (1) dividir a figura exatamente ao meio traçando uma reta (eixo de simetria); (2) verificar que as duas partes obtidas são realmente congruentes e se sobrepõem totalmente [(KoTpS4)].
	Conhecer que, para identificar se uma figura possui simetria axial, um dos procedimentos associa-se a utilizar uma linha reta e identificar se existem pontos por onde essa linha passe, de modo a dividir a figura ao meio e, se isso ocorrer, então a figura é simétrica [(KoTpS5)].
KoT – definições, propriedades e fundamentos	Conhecer que, na reflexão, todos os pontos originais são transformados e fazem parte da nova figura – imagem (KoTppE1).
	Conhecer que a simetria é identificada em figuras cujo eixo de simetria divide a figura em duas metades congruentes e idênticas [(KoTppS2)].
	Conhecer que, a depender do eixo de reflexão que se considera, obtém-se a imagem em um determinado local do plano (KoTfE1).
	Conhecer que o eixo de simetria pode ser localizado nas direções vertical, horizontal e oblíqua (KoTfS2).
KoT – registros de representação.	Conhecer que se podem representar todos os eixos de simetria de uma figura simétrica (KoTrrS2).

Fonte: Arquivo da pesquisa

Os elementos críticos revelados pertencem ao subdomínio KoT e a algumas de suas categorias, e isso justifica-se por ter sido este o foco de atenção neste texto. No entanto, é expectável que, ampliando-se a discussão, esses elementos passem a integrar, também, os demais subdomínios do Conhecimento Matemático Especializado. Tal foco de atenção emergiu das evidências obtidas, e pode ter ocorrido pelo cerne das questões que constituem as Tarefas Interpretativas implementadas, bem como a discussão em que se centrou.

Ainda que haja diversas pesquisas focadas no conhecimento matemático do professor, almejando caracterizá-lo (e.g., Herrera et al., 2023), em uma perspectiva de continuação da pesquisa, consideramos a necessidade de conceitualizar novas Tarefas Interpretativas

nesses mesmos tópicos matemáticos (reflexão e simetria), mas abrangendo os demais subdomínios do *Mathematical Knowledge* (MK) do MTSK. Por forma a guiar a mudança e a perspetivar uma linha de trabalhos futuros, deixamos algumas das questões que formam parte do nosso itinerário:

1. *Que feedback (tipo e conteúdo) é proposto por professores de matemática quando são solicitados a interpretar produções dos alunos no âmbito da composição de transformações geométricas isométricas?*
2. *Como ocorre o desenvolvimento profissional de professores com foco no desenvolvimento do Conhecimento Matemático Especializado e do Conhecimento Interpretativo?*
3. *Que indícios de Desenvolvimento Profissional do professor de matemática pode-se considerar ao desenvolver o seu Conhecimento Matemático Especializado e o seu Conhecimento Interpretativo?*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho faz parte dos projetos de pesquisa financiados pelo CNPq (404959/2021-0, 172354/2023-4 e 317937/2023-5) e pela Capes (Código de Financiamento 001).

REFERÊNCIAS

- Bulf, C. (2010). The effects of the concept of symmetry on learning geometry at French secondary school. Em V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 726–735). Institut National de Recherche Pédagogique and ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). Interpretative Knowledge. Em S. Lerman (Org.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 424–428). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1
- Grossman, P. (2010). Policy brief: Learning to practice: The design of clinical experience in teacher preparation. Partnership for Teacher Quality. Washington, DC: AACTE.
- Herrera, J. P. V., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2023). Análisis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre clasificación de poliedros con futuros maestros de educación primaria. *PARADIGMA*, 44(4), 293–320. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p293-320.id1404>

- Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19, 135–150.
- Jones, K. (2012). Geometrical and spatial reasoning: Challenges for research in mathematics education. Em H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes. (Eds.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM XXIII)* (pp. 3–10). Associação de Professores de Matemática. <https://eprints.soton.ac.uk/446098/>
- Karadeniz, M. H., Baran, T., Bozkuş, F., & Gündüz, N. (2015). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Yansıma Simetrisi ile İlgili Yaşadıkları Zorluklar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 6(1), Artigo 1. <https://doi.org/10.16949/turcomat.71538>
- Kuchemann, D. (1980). Children's Difficulties with Single Reflections and Rotations. *Mathematics in School*, 9(2), 12–13.
- Mellone, M., Jakobsen, A., Ribeiro, M., & Parlati, A. (2023). Ethical dimension in the use of interpretative tasks in mathematics teacher education: Fraction division. Em P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztanyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. TWG20, Número 23, pp. 3835–3842). Alfréd Rényi Institute of Mathematics. <https://hal.science/hal-04407634>
- Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., & Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, 22(2), 154–167. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557>
- Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., & Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. Em T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2948–2955). DCU Institute of Education and ERME. <https://hal.science/hal-01949034>
- Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). *Characterizing Prospective Teachers' Knowledge in/for Interpreting Students' Solutions*, 4, 89–96. <https://www.iris.unina.it/handle/11588/586250>
- Ribeiro, M. (2018). Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo. Em A. M. P. Oliveira, & M. I. R. Ortigão (Orgs.), *Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática* (pp. 167–185). SBEM.
- Ribeiro, M. (2024). Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. *Debates em Educação*,

- 16(38), e16020. <https://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe16020>
- Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021a). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da educação matemática*, 14(35), 1–32.
- Ribeiro, M., Gibim, G. F. B., & Souza, C. A. (2021b). *Coleção CIEspMat – Professor: Reflexão e Simetria* (Vol. 1). CRV.
- Ribeiro, M., & Silva, C. (2024). Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 19(n. esp. 2), e024073–e024073. <https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553>
- Silva, C., Menezes, S., & Ribeiro, M. (2025). Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge e Conhecimento Interpretativo: Tecendo relações teóricas no âmbito da transformação geométrica isométrica rotação. *Educação, Matemática e Pesquisa*. (A aparecer).
- Silva, C., & Ribeiro, M. (2024). Conhecimento Interpretativo de professores de matemática dos Anos Finais e do Ensino Médio ao atribuírem significado a produções de alunos no âmbito da transformação geométrica isométrica translação. *IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Natal, RN, Brasil. <https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/208>
- Silva, C., & Ribeiro, M. (2025). Specialized mathematical knowledge in the scope of geometric isometric transformation translation and its impact on teacher’s levels of Interpretive Knowledge. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bozen-Bolzano, Italy.
- Son, J. (2006). Investigating preservice teachers’ understanding and strategies on a student’s errors of reflective symmetry. Em Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings of the 30th of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 145–152. Prague: PME.
- Turgut, M., Yenilmez, K., & Anapa, P. (2014). Symmetry and rotation skills of prospective elementary mathematics teachers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 383–402. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a19>
- Yetiş, S., & Ludwig, M. (2013). Plane geometry: Diagnostic and individual support of children through guided interviews-a preliminary study on the case of line symmetry and axial reflection. Em B. Ubuz, C. Hacer, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 715–724). Middle East Technical University and ERME.

Apéndice - Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 25 de Enero de 2025.

Aprobado: 24 de Julio de 2025.

Publicado: 5 de Septiembre de 2025.

Como Citar — APA

Ribeiro, M., Silva, C., & Menezes, S. (2025). Conhecimento Matemático Especializado do professor no âmbito da transformação geométrica isométrica reflexão e da simetria: elementos críticos para uma prática interpretativa. *PARADIGMA, XLVI*(Edición Temática 1), e2025021. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025021.id1738>.

Como Citar — ABNT

RIBEIRO, Miguel; SILVA, Caroline; MENEZES, Sandra. Conhecimento Matemático Especializado do professor no âmbito da transformação geométrica isométrica reflexão e da simetria: elementos críticos para uma prática interpretativa. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVI, Edição Temática 1, e2025021, Sep., 2025. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025021.id1738>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a revista **Paradigma** los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista **Paradigma** tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativas en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (**Open Access**) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (**Article Processing Charges - APCs**). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.



Licencia de uso

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.



Comprobación de similitud

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto **iThenticate** de Turnitin, a través del servicio de **Similarity Check** de la Crossref.



Proceso de evaluación

Revisión por pares a doble ciego (**Double blind peer review**).

Editor

Fredy E. González

Editoras convidadas

Ettiène Cordeiro Guérios

Edvonete Souza de Alencar

Martha Cecilia Mosquera Urrutia

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista **Paradigma** obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

