

O papel dos registros de representação semiótica na Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas

Pedro Aurélio Cardoso da Silva¹   Janine Freitas Mota²  

Resumo

O estudo se insere no campo da Educação Matemática, com foco no ensino e na aprendizagem de conteúdos de Cálculo Integral por meio de tarefas fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e apoiadas por Tecnologias Digitais. O objetivo consiste em analisar conhecimentos mobilizados por licenciandos ao resolver uma sequência de tarefas que utilizam diferentes registros de representação sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. A relevância do estudo está em compreender como futuros professores de Matemática articulam registros algébricos, gráficos e geométricos na resolução de tarefas, especialmente em temas que exigem visualização tridimensional, interpretação de limites de integração e transição entre múltiplas representações. Tecnologias, como o GeoGebra, apresentam potencial para superar dificuldades persistentes em Cálculo Integral. A pesquisa adotou a Engenharia Didática para orientar a elaboração, implementação e análise das tarefas. Participaram do estudo oito licenciandos do 5º ao 8º período do curso de Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros. Os resultados mostraram avanços na manipulação dos registros, especialmente com o suporte do GeoGebra para representar regiões e sólidos no espaço tridimensional. Contudo, permaneceram dificuldades na conversão do registro gráfico para o algébrico, particularmente na definição de limites de integração em integrais triplas. A articulação entre TRRS e Tecnologias Digitais mostrou-se promissora para favorecer a compreensão dos conceitos envolvidos. O estudo reforça a importância de práticas que enfatizem a articulação entre registros e o papel do professor como mediador desse processo. Recomenda-se ampliar investigações envolvendo outras ferramentas digitais, analisar práticas colaborativas e explorar intervenções que fortaleçam a conversão entre registros no contexto das Mudanças de Coordenadas.

Palavras-chave: Cálculo Integral, Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, Registro de Representação Semiótica.

The role of representational registers in Multiple-Integral Coordinate Change

Abstract

The study falls within the field of Mathematics Education, focusing on the teaching and learning of Integral Calculus content through tasks grounded in the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS) and supported by Digital Technologies. The objective is to analyze the knowledge mobilized by undergraduate students when solving a sequence of tasks that utilize different representational registers on Change of Coordinates in Multiple Integrals. The relevance of the study lies in understanding how future Mathematics teachers articulate algebraic, graphical, and geometric registers in solving tasks, especially in topics that require three-dimensional visualization, interpretation of integration limits, and transition between multiple representations. Technologies, such as GeoGebra, show potential to overcome persistent difficulties in Integral Calculus. The research adopted Didactic Engineering to guide the elaboration, implementation, and analysis of the tasks. Eight undergraduate students from the 5th to 8th semesters of the Mathematics course at the State University of Montes Claros, Brazil, participated in this study. The results showed progress in manipulating the records, especially with the support of GeoGebra to represent regions and solids in three-dimensional space. However, difficulties remained in converting the graphical record to the algebraic one, particularly in defining integra-

¹ Mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). Professor da Secretaria Municipal de Educação de Montes Claros (SME-MOC), Montes Claros, Minas Gerais, Brasil. E-mail: pedro.silva@edu.montesclaros.mg.gov.br

² Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, (PUC-SP). Professora da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), Montes Claros, Minas Gerais, Brasil. E-mail: janine.mota@unimontes.br

tion limits in triple integrals. The articulation between TRRS and Digital Technologies proved promising in promoting the understanding of the concepts involved. The study reinforces the importance of practices that emphasize the articulation between records and the teacher's role as a mediator in this process. It is recommended to expand investigations involving other digital tools, analyze collaborative practices, and explore interventions that strengthen the conversion between records in the context of Changes of Coordinates.

Keywords: Integral Calculus, Change of Coordinates in Multiple Integrals, Semiotic Representation Register.

El papel de los registros de representación en el Cambio de Coordenadas en Integrales Múltiples

Resumen

El estudio se enmarca en el campo de la Educación Matemática, centrándose en la enseñanza y el aprendizaje de Cálculo Integral mediante tareas basadas en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) y con el apoyo de Tecnologías Digitales. El objetivo es analizar el conocimiento que los estudiantes de pregrado utilizan al resolver una secuencia de tareas que utilizan diferentes registros de representación sobre Cambio de Coordenadas en Integrales Múltiples. La relevancia del estudio radica en comprender cómo los futuros profesores de Matemáticas articulan los registros algebraicos, gráficos y geométricos en la resolución de tareas, especialmente en temas que requieren visualización tridimensional, interpretación de límites de integración y transición entre representaciones múltiples. Tecnologías como GeoGebra muestran potencial para superar las dificultades persistentes en Cálculo Integral. La investigación adoptó la Ingeniería Didáctica para guiar la elaboración, implementación y análisis de las tareas. Participaron de este estudio ocho estudiantes de pregrado de los semestres 5° a 8° de la carrera de Matemáticas de la Universidad Estatal de Montes Claros, Brasil. Los resultados mostraron avances en la manipulación de los registros, especialmente con el apoyo de GeoGebra para representar regiones y sólidos en el espacio tridimensional. Sin embargo, persistieron dificultades para convertir el registro gráfico al algebraico, en particular para definir los límites de integración en integrales triples. La articulación entre TRRS y las Tecnologías Digitales resultó prometedora para promover la comprensión de los conceptos involucrados. El estudio refuerza la importancia de las prácticas que enfatizan la articulación entre registros y el rol del docente como mediador en este proceso. Se recomienda ampliar las investigaciones que involucren otras herramientas digitales, analizar prácticas colaborativas y explorar intervenciones que fortalezcan la conversión entre registros en el contexto de los cambios de coordenadas.

Palabras clave: Cálculo Integral, Cambio de Coordenadas en Integrales Múltiples, Registro de Representación Semiótica.

INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente no contexto das Integrais Múltiplas e Mudanças de Coordenadas, apresenta desafios que vão além do emprego de regras matemáticas. Entre os desafios, destaca-se a necessidade de compreender conceitos que exigem visualização espacial e a capacidade de alternar entre diferentes formas de representação, como gráficos, expressões algébricas e descrições geométricas, sobretudo em contextos tridimensionais.

Nesse cenário, é fundamental que as práticas de ensino de Matemática superem abordagens centradas no mecanicismo, valorizando propostas que promovam aprendizagens mais significativas e conectadas ao desenvolvimento conceitual dos estudantes (Bueno; Alencar; Oviedo, 2017).

Essa perspectiva amplia a discussão para além das dificuldades cognitivas enfrentadas pelos estudantes, alcançando também a constituição da identidade profissional docen-

te. Conforme Barbosa e Lopes (2020), a identidade profissional deve ser entendida como um processo dinâmico e em constante transformação, que articula dimensões pessoais, situacionais e profissionais, influenciada pelos contextos de atuação e pelas experiências formativas.

Nessa direção, Oliveira e Lopes (2023) ressaltam a relevância de experiências formativas inovadoras que possibilitem ao licenciando refletir criticamente sobre sua futura prática docente, favorecendo a construção de uma identidade profissional alinhada às demandas contemporâneas do ensino de Matemática. Assim, o ensino de Cálculo deve ser compreendido não apenas como campo de desenvolvimento conceitual dos estudantes, mas também como espaço de formação identitária para o professor que coordena esse processo.

Essas questões são particularmente relevantes na aprendizagem de transformações matemáticas complexas, como a Mudança de Coordenadas em contextos tridimensionais, que incluem sistemas cilíndricos e esféricos.

Nessa perspectiva, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval (2003, 2009, 2011, 2012), oferece um importante referencial teórico para analisar essas dificuldades no ensino de Matemática. De acordo com essa teoria, a compreensão de conceitos matemáticos exige que os estudantes, além de manipularem representações em um mesmo registro, realizem conversões entre diferentes registros de forma articulada.

No caso das Mudanças de Coordenadas, isso implica interpretar e conectar representações gráficas das regiões de integração com suas correspondentes formulações algébricas. Contudo, como argumentam Cometti (2018) e Ragoni (2021), essa transição entre registros, longe de ser espontânea, representa uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Considerando as restrições inerentes ao pensamento e à teoria, fica evidente a necessidade de ferramentas que promovam a conexão entre diferentes formas de representação, a exemplo das tecnologias digitais. O uso dessas tecnologias, como o GeoGebra, tem sido amplamente reconhecido por sua capacidade de facilitar a visualização e a manipulação de objetos matemáticos.

Por conseguinte, estudos como os de Pavanelo e Lima (2017), Almeida (2021), Mota (2021) e Thieghi (2021) argumentam que o *software* permite aos estudantes interagir de forma dinâmica com representações algébricas e geométricas, auxiliando na superação de barreiras cognitivas e na integração entre registros de representação. Essa abordagem não apenas torna o aprendizado mais acessível, mas também potencializa a compreensão dos conceitos relacionados às Mudanças de Coordenadas e Integrais Múltiplas.

Diante do que foi exposto, o estudo tomou forma e teve como objetivo analisar conhecimentos mobilizados por licenciandos ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. O estudo integra uma pesquisa mais ampla (Silva, 2025) — desenvolvida no Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GPEMAT), no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Montes Claros — em que foram identificadas dificuldades relativas à aprendizagem de Integrais Múltiplas a partir de uma revisão de literatura.

Em publicação anterior (Silva; Mota, 2024) é apresentada a implementação de uma atividade diagnóstica que evidenciou dificuldades dos licenciandos com Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, principalmente na conversão entre diferentes registros semióticos. Embora alguns tenham mostrado habilidade em interpretar representações gráficas, muitos apresentaram dificuldades ao traduzi-las em expressões algébricas. Além disso, a visualização tridimensional e a interpretação de regiões geométricas complexas se mostraram desafiadoras, dificultando o desenvolvimento de cálculos mais abstratos. Esses resultados indicam a necessidade de estratégias pedagógicas que integrem múltiplos registros e articulem visualizações geométricas e operações algébricas.

Assim, ferramentas digitais, como o GeoGebra, se apresentam como importantes recursos de suporte para superação desses problemas, facilitando a construção de significados e permitindo uma abordagem mais integrada e dinâmica na aprendizagem de conceitos relacionados às Integrais Múltiplas.

A proposta do estudo foi desenvolvida com base nas dificuldades e limitações identificadas com a revisão de literatura e na atividade diagnóstica. Os detalhamentos desse contexto podem ser consultados em Silva e Mota (2024) e em Silva (2025). Foi implementada uma sequência de tarefas com a colaboração de oito estudantes matriculados entre o 5º e o 8º períodos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes).

Destaca-se que o estudo passou pela análise e aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da universidade³ por respeitar os preceitos éticos que regem pesquisas com seres humanos.

Além desta *Introdução*, o artigo se organiza nestas seções: *Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas*, que evidencia as transformações mais comuns e os desafios conceituais associados à sua aplicação no ensino e na aprendizagem; *Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Educação Matemática*; *Metodologia e Análise*. Ao final, são apresentadas as *Considerações Finais*.

³ Parecer consubstanciado sob a indicação n. 6.238.670, de 14 de agosto de 2023, com Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) n. 72823723.5.0000.5146.

MUDANÇA DE COORDENADAS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

A Mudança de Coordenadas é uma importante ferramenta no estudo de Integrais Múltiplas, especialmente ao lidar com problemas complexos que demandam simplificação para facilitar o processo de integração⁴. Esse recurso permite reinterpretar a região de integração e as funções envolvidas em um novo sistema de coordenadas, mais adequado à geometria do problema.

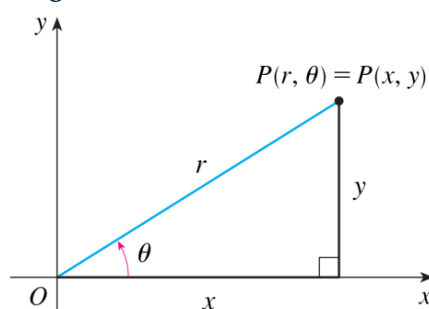
Na mudança de variável em Integrais, introduz-se uma nova variável com o objetivo de simplificar o cálculo. Esse procedimento requer a substituição da variável original e a adaptação do diferencial correspondente. Entretanto, quando se trata de Integrais Múltiplas, a mudança adquire nível de complexidade superior por estar em duas ou três dimensões. Nesses casos, é fundamental considerar o uso do jacobiano da transformação, cujo papel é ajustar o diferencial no novo sistema. A escolha das novas variáveis deve assegurar a preservação das relações geométricas do problema, exigindo compreensão mais aprofundada da geometria que envolve o cálculo das Integrais.

As mudanças de coordenadas evidenciam a complexidade envolvida na transição entre diferentes sistemas de referência. Essas transformações exigem não apenas o domínio das fórmulas e cálculos associados, como também uma compreensão geométrica das relações envolvidas e a capacidade de articular representações algébricas, gráficas e geométricas de maneira integrada.

Entre os sistemas mais utilizados na resolução de integrais múltiplas, estão as coordenadas polares, cilíndricas e esféricas. No sistema em coordenadas polares, segundo Stewart (2013), um ponto P com coordenadas retangulares tem por coordenadas polares, em que r é a distância do ponto P à origem e θ é o ângulo formado pela semirreta positiva das abscissas e o segmento de reta que liga a origem ao ponto P .

Ainda, conforme Stewart (2013), essa Mudança de Coordenadas é dada por $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, em que r varia em um intervalo da forma $[a, b]$, em que θ é um ângulo fixado.

Figura 1 - Coordenadas Polares



Fonte: Stewart (2013, p. 895)

⁴ O processo de integração refere-se a um conjunto de técnicas matemáticas utilizadas para calcular a integral de uma função..

O jacobiano da aplicação é dado por: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$

Então, para o autor, se é uma função contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

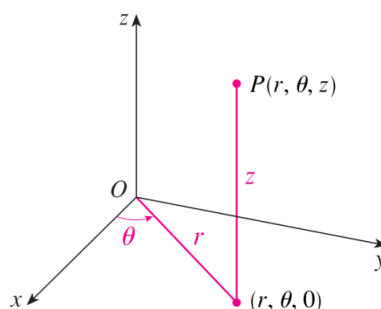
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Quanto às Coordenadas Cilíndricas, de acordo com Stewart (2013), um ponto P de coordenadas tem coordenadas cilíndricas, em que e são as coordenadas polares da projeção de P no plano.

Ainda, para o autor, essa Mudança de Coordenadas é dada por

, em que, varia em um intervalo da forma e no intervalo.

Figura 2 - Coordenadas Cilíndricas



Fonte: Stewart (2013, p. 895)

O jacobiano da aplicação é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

Então, como afirma Stewart (2013), se é uma função contínua no sólido E , com

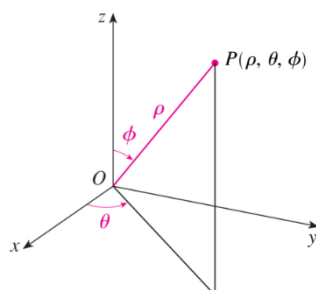
$E = \{(x, y, z); (x, y) \in R, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$, então

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

Já para as coordenadas esféricas, consoante Stewart (2013), um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem por coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , em que ρ é a distância do ponto P à origem; θ é o ângulo formado pelos valores positivos da abscissa e o segmento de reta que liga os pontos $(0, 0)$ a (x, y) ; e ϕ é o ângulo formado pela semirreta positiva da cota e o segmento de reta que liga P à origem.

Ainda para o Stewart (2013), essa Mudança de Coordenadas é dada por $g(x,y,z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$, em que $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ varia em um intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.

Figura 3 - Coordenadas Esféricas



Fonte: Stewart (2013, p. 895)

Nesse caso, o jacobiano da aplicação é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

Logo, se f é contínua em Q

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

em que Q é uma cunha esférica dada por

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi); a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}.$$

A próxima seção discute as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para compreender e abordar as dificuldades enfrentadas nesse processo.

TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O estudo se fundamentou na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval (2003, 2009, 2011, 2012). O teórico defende que a formação de conceitos matemáticos complexos, como aqueles envolvidos na Mudança de Coordenadas e no Cálculo Integral, é facilitada pelo uso de dois ou mais registros de representação.

Consoante Duval (2003), realizar ao menos uma operação cognitiva de conversão é condição necessária, ainda que não suficiente, para a aprendizagem em Matemática. Para compreender plenamente um conteúdo, o estudante deve mobilizar três atividades cognitivas fundamentais presentes em um sistema: formar representações que identifiquem o objeto matemático, realizar operações de tratamento em um mesmo registro e efetuar conversões entre registros de sistemas semióticos diferentes (Duval, 2009). Logo, a compreensão

matemática requer que os estudantes interpretem, manipulem e alternem entre diferentes formas de representação semiótica.

Duval (2009) salienta que os objetos matemáticos apresentam desafios à compreensão, pois não são diretamente observáveis, por isso, as representações se tornam essenciais para acessá-los e compreendê-los. Nesse viés, o autor formula a lei fundamental que rege o funcionamento cognitivo do pensamento: “Não há *noésis* (aquisição conceitual de um objeto) sem *semiós* (apreensão ou produção de uma representação semiótica)” (Duval, 2009, p. 17). Essa proposição evidencia a importância dos sistemas semióticos como meio para a construção de conceitos matemáticos.

Para Duval (2011), os signos e as representações têm a função de trazer à tona o que está ausente ou de transmitir um pensamento que não é evidente para todos. Na Matemática, há uma ampla diversidade de representações semióticas disponíveis, como a língua natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras, que desempenham um papel fundamental para facilitar a compreensão de seus conteúdos.

Ainda segundo Duval (2009), o desenvolvimento conceitual, envolvendo a mobilização e a articulação dos registros de representação, exige a compreensão de duas atividades cognitivas fundamentais: o tratamento e a conversão. O tratamento consiste em transformar uma representação semiótica em outra, mantendo-se dentro de um mesmo registro. De acordo com Duval (2009, p. 57), “um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema”.

No Quadro 1, apresenta-se um exemplo dessa atividade cognitiva.

Quadro 1 - Exemplo de tratamento

Determine a intersecção entre o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 4$.

Solução:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 4^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$$

Fonte: Elaboração própria

Observa-se que a solução é expressa no registro algébrico, em que são realizadas transformações internas desse mesmo sistema. A resolução se inicia e se conclui no sistema algébrico, sem transitar por outros registros de representação.

Duval (2009, p. 57) salienta um exemplo prático da atividade de tratamento: “A paráfrase é uma transformação interna ao registro do discurso da língua natural: ela ‘reformula’ um enunciado dado em outro, seja para substituí-lo, seja para explicá-lo”. Dito de outro modo, mesmo dentro da língua natural, podem-se perceber exemplos de tratamento.

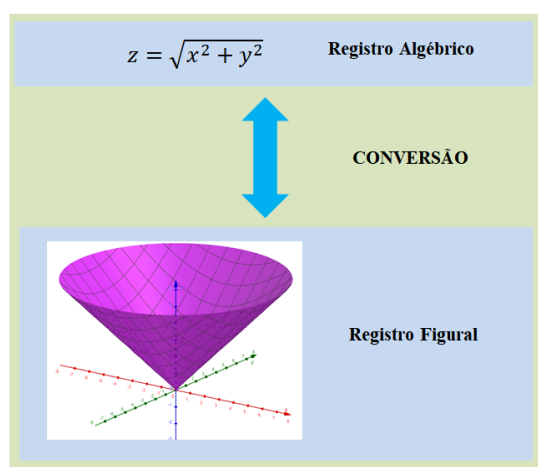
Em obra posterior, Duval (2012) afirma que cada registro de representação possui regras específicas de tratamento, que variam em natureza e quantidade de acordo com o sistema. Essas regras incluem, por exemplo, derivação, coerência temática e associações

por contiguidade e similitude. No registro da língua natural, há muitas regras externas para a conformidade discursiva; entretanto, são relativamente poucas as regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo.

A conversão, por sua vez, refere-se à transformação entre registros de representações diferentes de um mesmo objeto. Duval (2009, p. 59) a define como “uma transformação externa ao registro de representação de partida”. Essa operação ocorre de maneira autônoma e distinta do tratamento, sendo essencial observar essa diferença nos processos de ensino e de aprendizagem de diversos conceitos matemáticos.

Na Figura 4, apresenta-se um exemplo da atividade cognitiva de conversão.

Figura 4 - Exemplo de conversão



Fonte: Elaboração própria

Na Figura 4, percebe-se a transição da expressão algébrica que representa o cone para a sua correspondência gráfica ou figural, e vice-versa. Em outras palavras, há uma alternância de dois tipos de representação, caracterizando a atividade cognitiva de conversão. Contudo, a conversão não é uma habilidade automática para os estudantes, exigindo práticas didáticas intencionais que promovam esse tipo de transição. Muitos apresentam dificuldades em perceber as conexões entre os registros, o que limita sua capacidade de resolver problemas e interpretar conceitos.

Na Mudança de Coordenadas — polares, cilíndricas e esféricas — no Cálculo Integral, a necessidade de múltiplos registros de representação se torna ainda mais evidente. Os estudantes não apenas precisam entender as representações simbólicas dos elementos envolvidos — funções e limites de integração —, mas também visualizar e manipular geometricamente as regiões no plano ou no espaço tridimensional.

O uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra, pode potencializar esse processo visto que permite que os estudantes manipulem visualmente objetos matemáticos, facilitando a conversão entre diferentes registros. Para Duval (2009), a interação com representa-

ções visuais pode acelerar a compreensão de conceitos, desde que seja devidamente orientada e estruturada.

Na seção seguinte, é apresentada uma estrutura metodológica do estudo que incorpora elementos da Engenharia Didática.

METODOLOGIA

O estudo é de natureza qualitativa, com abordagem descritiva e exploratória, cujo objetivo central foi analisar os conhecimentos mobilizados por licenciandos ao resolver uma sequência de tarefas que utilizam diferentes registros de representação sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. As tarefas são resolvidas com o apoio do GeoGebra, que potencializa a visualização e a compreensão geométrica. O estudo discute como os licenciandos em Matemática alternam os registros de representação, evidenciando as estratégias e dificuldades enfrentadas nesse processo.

A metodologia utilizada se ampara nos pressupostos da Engenharia Didática, conforme Artigue (1996), idealizada para promover uma abordagem particular ao ensino e à pesquisa em Educação Matemática. Essa metodologia se caracteriza pela estruturação dos procedimentos investigativos, envolvendo etapas que vão desde a fundamentação teórica até a experimentação, de modo a articular o componente teórico da pesquisa com a aplicação prática na Educação.

A Engenharia Didática é estruturada em quatro fases que, embora apresentadas de forma linear, podem ocorrer de maneira integrada ou sobreposta para otimizar o processo investigativo. Na fase de análises prévias, procura-se compreender o contexto educacional, identificando barreiras que dificultam a aprendizagem. Na fase de concepção e análise a priori, são planejadas as tarefas que levam em conta possíveis dificuldades dos estudantes. A fase de experimentação consiste na implementação dessas tarefas, com ajustes realizados com base nas interações observadas. Por fim, a fase da análise a posteriori compara os resultados obtidos com a visão inicial, possibilitando reflexões sobre o processo (Artigue, 1996).

Em Silva (2025) é detalhado o desenvolvimento das duas primeiras fases da Engenharia Didática. Sobre a fase de análises prévias, em Mota e Silva (2024) e em Silva (2025) é apresentada uma revisão sistemática da literatura, cujo objetivo foi identificar e compreender as principais dificuldades enfrentadas por professores e licenciandos no ensino e na aprendizagem de conceitos relacionados à Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.

Já na fase de concepção e análise a priori, em Silva (2025) são apresentadas a elaboração e a implementação de uma atividade diagnóstica fundamentada nessa revisão. Essa

atividade buscou identificar, em contexto prático, as dificuldades manifestadas pelos licenciandos e, ao mesmo tempo, validar as hipóteses levantadas, subsidiando a elaboração de estratégias pedagógicas ancoradas na TRRS para enfrentar esses desafios.

O estudo apresentado neste artigo abrange as últimas duas fases da Engenharia Didática — experimentação e análise a posteriori. De acordo com Artigue (1996), a etapa de experimentação se destaca pela importância de acompanhar e documentar a forma como os estudantes lidam com as tarefas propostas, ajustando o dispositivo didático sempre que necessário. Nessa fase, os estudantes resolvem situações-problema que exigem a utilização de conceitos matemáticos, enquanto o pesquisador produz dados por meio de observações, registros escritos e outras técnicas.

Pais (2001) enfatiza a importância de registrar o máximo de informações relevantes capazes de contribuir para a compreensão das competências investigadas. Além disso, destaca-se a necessidade de garantir que as situações reais observadas durante a experiência sejam descritas com clareza no relatório final da pesquisa, respeitando o princípio de precisão e fidelidade ao contexto.

Após a etapa de experimentação, procede-se à análise a posteriori e validação, na qual os dados obtidos são meticulosamente avaliados e confrontados com as hipóteses formuladas durante uma análise a priori. Segundo Artigue (1996), essa fase é crucial para confirmar ou questionar as hipóteses iniciais, além de identificar aspectos bem-sucedidos e pontos que necessitam de ajustes. A realização de uma análise a posteriori permite compreender como as tarefas propostas impactaram o aprendizado dos estudantes, oferecendo subsídios valiosos para o planejamento de aulas futuras. Esse processo de validação é fundamental para garantir que as instruções e recomendações estejam ancoradas em evidências concretas e representem fielmente as observações feitas na experimentação.

Consoante Pais (2001), a fase de validação exige atenção metodológica redobrada, pois é nessa etapa que se verifica a consistência científica do trabalho. Nessa perspectiva, a Engenharia Didática, como abordagem metodológica, apoia-se em registros de estudos de caso, cuja validade é restrita ao contexto específico da pesquisa, garantindo a coerência interna dos resultados obtidos.

Com base nesses pressupostos e com o objetivo de atender as necessidades específicas desse contexto, foram adaptadas as fases de implementação e avaliação.

- Implementação: realização da sequência de tarefas, observações das interações entre os licenciandos, entre o professor e os licenciandos, e entre os licenciandos e os recursos didáticos, além da implementação de um teste final.

- Avaliação: realizada por meio da comparação entre o teste diagnóstico e o teste final, da análise das respostas à sequência de tarefas e da observação dos comportamentos dos licenciandos durante a fase de implementação.

Neste artigo são discutidos os resultados obtidos com a implementação da sequência de tarefas a partir da análise dos dados produzidos no teste diagnóstico desenvolvido nas etapas anteriores e das respostas coletadas no Questionário Final aplicado após sua realização.

Os participantes do estudo são estudantes do 5º ao 8º período da Licenciatura em Matemática da Unimontes, envolvidos em atividades do projeto de ensino do Laboratório de Educação Matemática (Labemat). Essa escolha ocorreu pelo fato de esses licenciandos já terem cursado, no 4º período, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, na qual são abordados, conforme a sua ementa⁵, os tópicos de Integração Dupla, Integração Tripla e Mudança de Coordenadas.

As tarefas foram propostas no laboratório de informática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Unimontes, em que os licenciandos trabalharam individualmente com o auxílio do GeoGebra. A implementação ocorreu durante cinco dias, com encontros de duas horas diárias. Cada participante (licenciando) compareceu a três encontros, totalizando seis horas de atividades.

O GeoGebra foi empregado com o recurso de gravação, capturando as interações dos licenciandos com o *software*. Paralelamente, as falas deles foram registradas por meio de gravações de áudio, complementadas por anotações no diário de campo, que mostram observações relevantes sobre o comportamento e as dificuldades enfrentadas durante a resolução das tarefas. Cada arquivo produzido no GeoGebra foi armazenado para análise posterior. Os licenciandos também registraram suas respostas e observações em um editor de texto, ampliando o conjunto de dados disponíveis para a fase de análise.

Participaram desta etapa da pesquisa oito licenciandos. Inicialmente eram doze, mas quatro haviam concluído o curso antes desta fase. Assim, o estudo prosseguiu com os oito licenciandos ainda matriculados. Todos foram previamente informados sobre os objetivos do estudo e tiveram preservadas suas identidades, em conformidade com os princípios éticos de pesquisas com seres humanos.

A proposta didática implementada na etapa de experimentação do estudo é composta por uma sequência de tarefas organizadas em três unidades temáticas: coordenadas polares, coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas. No Quadro 2, detalham-se as ta-

⁵ Ementa: Integração dupla. Integração tripla. Mudança de coordenadas. Integrais de linha. Diferenciais exatas e independência de caminhos. **Análise vetorial:** teoremas de Green, Gauss e Stokes. Disponível em https://unimontes.br/wp-content/uploads/2019/11/resolucao_cepex150.pdf. Acesso em: 12 mar. 2024.

refas propostas, com seus objetivos e justificativas didáticas, fundamentadas nas respostas e dificuldades observadas pelos licenciandos nas etapas anteriores.

Quadro 2 - Proposta Didática

Unidade	Tarefa	Objetivo	Justificativa (síntese)
1. Mudança de Coordenadas Polares	1.1 Construindo Integrais Duplas em Coordenadas Polares	Traduzir regiões cartesianas para polares.	Dificuldades em converter limites; suporte visual via GeoGebra
	1.2 Construindo Regiões de Integração a partir de Integrais Duplas	Construir regiões a partir de integrais duplas.	Problemas na determinação de limites de integração; uso de visualização interativa
2. Mudança de Coordenadas Cilíndricas	2.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas	Representar volumes em coordenadas cilíndricas.	Dificuldade em visualizar sólidos; apoio em visualização 3D
	2.2 Construindo Regiões de Integração com Coordenadas Cilíndricas	Construir regiões de integração usando integrais triplas em coordenadas cilíndricas.	Erros recorrentes na construção de limites; prática com GeoGebra
3. Mudança de Coordenadas Esféricas	3.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas	Representar volumes em coordenadas esféricas.	Grandes dificuldades em problemas com esferas e cones; visualização de superfícies
	3.2 Construindo Regiões de Integração com Coordenadas Esféricas	Construir regiões de integração usando integrais triplas em coordenadas esféricas.	Problemas na determinação de limites; reforço da conversão entre registros

Fonte: Elaboração própria

Na seção seguinte, discutem-se as respostas da sequência de tarefas e do questionário final.

ANÁLISE

A Tarefa 1.1 propunha que os licenciandos explorassem uma região R em coordenadas cartesianas, representando-a no GeoGebra e convertendo-a em coordenadas polares. Nessa tarefa, deveriam identificar os limites e formular a integral dupla correspondente.

Seis dos oito participantes realizaram corretamente o tratamento algébrico inicial, etapa essencial para compreender a geometria da região R . Dois, porém, apresentaram interpretações equivocadas, como considerar intervalos incorretos de ângulos, revelando limitações na leitura geométrica da equação.

Na conversão para o registro gráfico, seis participantes representaram a região de modo adequado, evidenciando habilidade na passagem entre registros algébrico e geométrico. Os dois restantes limitaram-se ao contorno do círculo ou omitiram parte da área, o que indica dificuldade em articular a equação com sua representação visual.

A etapa seguinte, referente ao tratamento no registro gráfico, envolvia a determinação dos limites de integração. Quatro licenciandos identificaram corretamente esses limites, evidenciando competência para analisar a região em coordenadas polares e reconhecer a

variação apropriada dos parâmetros. Entre esses, evidenciam-se os registros do licenciando A1 (Figura 5).

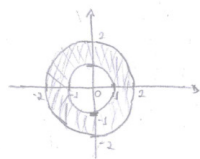
Figura 5 - Registro do estudante A1

1.1 Construindo Integrais Duplas em Coordenadas Polares a partir de regiões do $\mathbb{R}^2$.

Objetivo: Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral dupla que representa a medida da área desta região usando coordenadas polares.

Abra o GeoGebra.

a) No GeoGebra plote a região R definida por $R = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 ➤ Digite na linha de entrada $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
 b) Agora, faça um esboço dessa região no espaço abaixo.



c) Reescreva a equação que define a região R utilizando coordenadas polares.

Para tanto, inicialmente vamos explorar o applet disponível no link <https://www.geogebra.org/m/nwha-375>.
 Fazendo a variação, através dos controles deslizantes, do raio r e do ângulo θ da superfície representada, reflita sobre os limites inferiores e superiores desses parâmetros. Anote suas impressões.

$$R = \{(r, \theta); r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

c.1 Em relação a região R , determine os limites inferiores e superiores de r e θ .

$$1 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

c.2 Escreva a integral dupla que calcule a área da região R .

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 r \, dr \, d\theta$$

Fonte: Dados do estudo (2024)

A conversão do registro gráfico para o algébrico, etapa em que os licenciandos deveriam expressar a integral dupla em coordenadas polares, mostrou-se a mais desafiadora. Quatro participantes formularam corretamente a solução, evidenciando coordenação entre os diferentes registros de representação. Os demais apresentaram erros recorrentes, como a omissão do fator (jacobiano), a definição incorreta dos limites ou a elaboração de integrais incompletas. Essas dificuldades evidenciam fragilidades na articulação entre registros e na compreensão do jacobiano, o que confirma a complexidade envolvida nessa conversão (Duval, 2009).

A Tarefa 1.2 solicitou que os licenciandos interpretassem uma integral dupla em coordenadas polares e identificassem a respectiva região de integração. Em seguida, deveriam representá-la no GeoGebra, estabelecendo relações entre as expressões algébricas e geométricas. Segundo Duval (2009), essa conversão entre registros é cognitivamente complexa, pois exige a articulação de diferentes representações. Entre os oito participantes, um interpretou corretamente os limites da integral e identificou a região no plano polar, evidenciando domínio do registro algébrico (Figura 6).

Figura 6 - Registro do estudante A4

1.2 Construindo regiões de integração a partir de Integrais Duplas em Coordenadas Polares.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração através de integrais duplas em coordenadas polares.

Dada a integral dupla abaixo:

$$\int_0^{2\pi} \int_4^9 r \, dr \, d\theta$$

Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S , com o auxílio do GeoGebra.

a) Quais os limites inferiores e superiores de r e θ ?

$$4 \leq r \leq 9$$

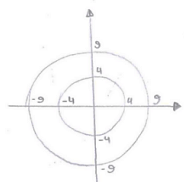
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

b) Determine a(s) expressão(ões) que define(m) a região S .

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

$$16 \leq x^2 + y^2 \leq 81$$

c) Com o auxílio do GeoGebra faça o esboço do sólido S .



Fonte: Dados do estudo (2024)

Sete licenciandos apresentaram dificuldades no tratamento e na conversão entre registros. Três interpretaram incorretamente os limites de representando um círculo comple-

to, enquanto dois não conseguiram correlacionar limites e geometria, resultando em registros incompletos. Essas dificuldades confirmam o que Cometti (2018) observou ao destacar os desafios em compreender relações geométricas nas Integrais Múltiplas, sobretudo quando envolvem mudanças de coordenadas. A conversão do registro algébrico para o gráfico se mostrou desafiadora, pois, como afirma Duval (2009), exige a articulação entre os limites de integração e a geometria para gerar representações visuais precisas. Por outro lado, a solução correta evidenciou o uso eficaz do GeoGebra, confirmando que recursos tecnológicos, quando aliados a práticas estruturadas, favorecem a coordenação entre registros (Almeida, 2021; Thieghi, 2021).

Os erros apresentados pelos demais licenciandos evidenciam a necessidade de práticas pedagógicas que reforcem o tratamento e a conversão entre registros de representação. Conforme destacam Silva (2019) e Rocha (2019), a ausência de coordenação entre registros constitui um dos principais obstáculos à aprendizagem das Integrais Múltiplas, o que reforça a importância de propor tarefas que articulem os aspectos geométricos e algébricos.

A Tarefa 2.1 consistiu em analisar uma região tridimensional definida por superfícies no espaço cartesiano e formular a integral tripla correspondente em coordenadas cilíndricas. Os licenciandos deveriam identificar as superfícies que delimitavam o sólido e construir a integral no registro algébrico, mobilizando tanto operações de tratamento quanto conversão entre registros. Dos oito participantes, três formularam corretamente a integral completa, evidenciando domínio do uso do GeoGebra e fluência na conversão algébrica (Figura 7).

Figura 7 - Registro do estudante A8

2.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas a partir de regiões do $\mathbb{R}^3$.

Objetivo: Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas cilíndricas.

Abra o GeoGebra.

a) Plote a região S definida por $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0\}$.

- Na guia exibir habilitar a Janela de Visualização 3D e clique sobre ela.
- Digite na linha de entrada $x^2 + y^2 = 4$.
- Em seguida, digite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Em seguida, digite $z = 0$.

b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?

$z = 0$

d) Utilize a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies** para encontrar a região R entre o plano xy e o cilindro.

- Clique sobre a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies**, em seguida, clique sobre o cilindro e sobre o plano xy .

e) Qual a representação geométrica da região R ?

Uma circunferência

f) Qual equação representa a região R ?

$0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

g) Identifique os limites inferiores e superiores de r e θ .

em r limite inferior $= 0$ limite superior $= 2$
em θ limite inferior $= 0$ limite superior $= 2\pi$

h) Agora, observando a Janela de Visualização 3D, identifique os limites inferiores e superiores de z .

em z limite inferior $= 0$ limite superior $= \sqrt{x^2 + y^2}$

i) Com base nas respostas anteriores, escreva a integral tripla em coordenadas cilíndricas que representa o cálculo da medida do volume do sólido S .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

Fonte: Dados do estudo (2024)

A maioria dos licenciandos apresentou dificuldades em alguma etapa da tarefa. Dois cometeram erros no registro gráfico, representando as superfícies de forma imprecisa no GeoGebra; um deles, inclusive, deixou de identificar a interseção entre o cilindro e o plano, o que comprometeu a solução final. Esses erros sugerem limitações na análise tridimensional, aspecto que, segundo Cometti (2018), constitui um ponto crítico no aprendizado de Inte-

grais Múltiplas. Mesmo entre aqueles que representaram corretamente a região no registro gráfico, observou-se dificuldade na conversão para o registro algébrico. Três licenciandos definiram limites inconsistentes para , usando valores fixos em vez de expressões em , o que evidencia a dificuldade em articular aspectos geométricos e algébricos, conforme afirma Duval (2009).

A análise das resoluções também revela que o uso do GeoGebra, embora eficaz para a visualização inicial, nem sempre foi suficiente para superar as barreiras na conversão. O *software* pode favorecer o tratamento dentro do registro gráfico, ao possibilitar manipulações dinâmicas, mas sua efetividade depende de práticas de ensino que orientem os estudantes a integrar tais representações às formulações algébricas (Almeida, 2021).

Entre os três licenciandos que concluíram a tarefa com êxito, destacou-se a habilidade de coordenar registros, utilizando o GeoGebra como mediador entre as análises visual e algébrica. Esses participantes mostraram domínio no tratamento gráfico e algébrico e fluência na conversão entre registros, revelando compreensão conceitual das integrais triplas em coordenadas cilíndricas. Por outro lado, os equívocos recorrentes entre os demais reforçam a necessidade de práticas de ensino que enfatizem a articulação entre registros de representação. Como aponta Rocha (2019), a dificuldade em conectar representações geométricas e algébricas decorre, em parte, da ausência de tarefas que explorem explicitamente essas relações. Essa dificuldade se confirma nos erros observados na definição dos limites de .

A Tarefa 2.2, que envolvia atividades de tratamento e conversões, desafiava os licenciandos a interpretar uma integral tripla em coordenadas cilíndricas, identificar a região tridimensional e representá-la no GeoGebra. A resolução exigia compreender a relação entre os limites de integração e a geometria do sólido, além de habilidades para transitar entre os registros algébricos e gráficos, conforme discute Duval (2009). Os resultados evidenciam que, entre os oito licenciandos, dois conseguiram completar a tarefa com precisão, identificando corretamente as regiões que limitam o sólido e representando a região tridimensional no GeoGebra. Esses estudantes mostraram domínio do registro algébrico e realizaram com sucesso a conversão para o gráfico, visualizando o sólido formado por cilindro, plano e parabolóide, com destaque especial para o registro do licenciando A4 (Figura 8).

Figura 8 - Registro do estudante A4

2.2 Construa o região de integração através de Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração através de integrais triplas em coordenadas cilíndricas.

Dado a integral tripla abaixo.

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-x^2-y^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

a) Quais os limites de r , θ e z ?

b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?

d) Utilize a ferramenta Interseção de Duas Superfícies para encontrar a região R entre o plano xy e o cilindro. O que essa região representa?

e) Represente algebricamente essa região, usando coordenadas cartesianas. Faça um esboço dessa região.

f) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

Respostas:

a) $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$

b) $z = 2 - x^2 - y^2$

c) $z = 0$

d) $x^2 + y^2 = 4$

e) $x^2 + y^2 = 4$

f) [Esboço do sólido S no GeoGebra]

Fonte: Dados do estudo (2024)

Entretanto, os licenciandos apresentaram dificuldades em diferentes etapas da tarefa. Esse erro reflete uma dificuldade no tratamento do registro algébrico, especificamente na interpretação das relações condicionais expressas nos limites de integração. Conforme Duval (2009), o tratamento inadequado das informações algébricas compromete toda a conversão subsequente para o registro gráfico, como foi observado nas resoluções desses estudantes.

Os demais licenciandos conseguiram identificar os limites de integração, mas apresentaram dificuldades no tratamento dos limites de , de modo que não conseguiram perceber que um parabolóide limita inferiormente essa região, além de ficarem confusos quanto à intersecção dos sólidos. Para Duval (2009), o tratamento inadequado das informações algébricas compromete toda a conversão subsequente para o registro gráfico, como foi observado nas resoluções desses estudantes.

Por outro lado, os dois licenciandos que tiveram sucesso na tarefa mostraram fluência no tratamento e na conversão. Eles utilizaram o GeoGebra para construir uma representação clara do sólido e verificaram visualmente a consistência entre os limites fornecidos e a geometria da região. Essa habilidade é descrita por Duval (2009) como um indicador de coordenação eficiente entre registros, essencial para a compreensão matemática.

Nesse viés, Rocha (2019) e Silva (2019) afirmam que a coordenação entre registros depende de práticas que articulem representações geométricas e algébricas. Os erros recorrentes na definição de limites e na interpretação das intersecções evidenciam lacunas nas estratégias de ensino que integrem essas representações de forma estruturada.

A Tarefa 3.1 propunha que os licenciandos formulassem uma integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume de um sólido delimitado por uma esfera e um cone. A resolução exigia análise da interação entre as superfícies, identificação dos limites e expressão algébrica da integral, envolvendo tratamento e conversão entre registros (Duval, 2009). Entre os oito licenciandos, três completaram corretamente a integral, destacando-se o licenciando A6, que utilizou o GeoGebra para representar o sólido e realizou a conversão para o registro algébrico. Esse participante evidenciou coordenação bem-sucedida entre registros e compreensão dos conceitos avançados, conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9 - Registro do estudante A6

3.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas a partir de regiões do $\mathbb{R}^3$.

Objetivo: Explorar uma região S descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas esféricas.

Abra o GeoGebra.

a) Plote a região S definida por $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

- > Na guia exibir habilite a Janela de Visualização 3D e clique sobre ela.
- > Digite na linha de entrada $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- > Em seguida, digite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

Uma esfera, ou parte dela.

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?

Um cone.

d) Para fazer uma análise dessa superfície em coordenadas esféricas vamos observar a variação dos limites superiores e inferiores dos parâmetros θ, ϕ e ρ . Para tanto acesse o link <https://www.geogebra.org/m/jfjgkxz7>. Fazendo a variação, através dos controles deslizantes, dos parâmetros θ, ϕ e ρ , reflita sobre os limites inferiores e superiores desses parâmetros. Anote suas impressões.

Os limites de $\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$, em torno do eixo z .

" " $\phi \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \pi$, sobre o eixo z .

" " $\rho \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2$.

e) Com base nessas informações, construa a integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido S (Dica: ajuste os parâmetros do *applet*, de acordo a região S).

$$\iiint_S (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Fonte: Dados do estudo (2024)

Cinco licenciandos manifestaram dificuldades nessa tarefa. Três apresentaram problemas nas representações gráficas no GeoGebra, como a omissão do volume de interseção ou a separação inadequada das superfícies, o que evidencia limitações no tratamento do registro gráfico, conforme também observado por Cometti (2018).

Outros dois licenciandos erraram na conversão do registro gráfico para o algébrico: definiram incorretamente os limites de integração ao desconsiderar a inclinação do cone ou omitiram o fator jacobiano, revelando fragilidades na compreensão da relação entre a geometria das superfícies e a formalização algébrica. Segundo Duval (2009), esse tipo de dificuldade está diretamente relacionado à complexidade da conversão entre registros.

Por fim, os erros recorrentes, como a definição inadequada de e e a omissão do jacobiano, reforçam a necessidade de práticas de ensino que enfatizem a coordenação entre os registros gráfico e algébrico. Conforme Duval (2009), a conversão entre registros é a atividade cognitiva mais desafiadora no aprendizado matemático. Estratégias que combinem visualizações dinâmicas, como as proporcionadas pelo GeoGebra, e as instruções detalhadas sobre a tradução das informações geométricas para o registro algébrico podem favorecer a fluência entre registros e, consequentemente, uma compreensão mais profunda dos conceitos relacionados às Integrais Múltiplas em coordenadas esféricas.

A Tarefa 3.2 desafiava os licenciandos a interpretar uma integral tripla em coordenadas esféricas, identificar a região tridimensional correspondente e representá-la graficamente utilizando o GeoGebra. O objetivo principal era avaliar a capacidade de converter informações do registro algébrico para o gráfico. Entre os oito licenciandos, seis conseguiram concluir a tarefa de forma satisfatória, representando corretamente a região tridimensional correspondente à integral no GeoGebra, como ilustrado nos registros do estudante A7 (Figura 10).

Figura 10 - Registro do estudante A7

3.2 Construindo regiões de integração através de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração através de integrais triplas em coordenadas esféricas.

Dada a integral tripla abaixo.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

a) Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/jf6pkmz7>, ajuste os parâmetros de acordo a região S da integral dada.

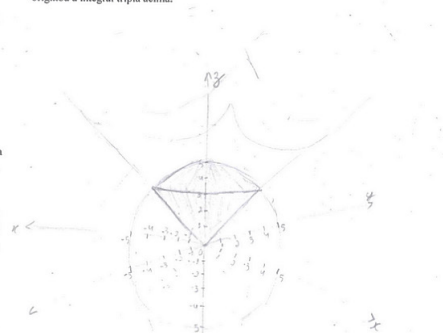
b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S?

Uma esfera

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S?

Um cone

d) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

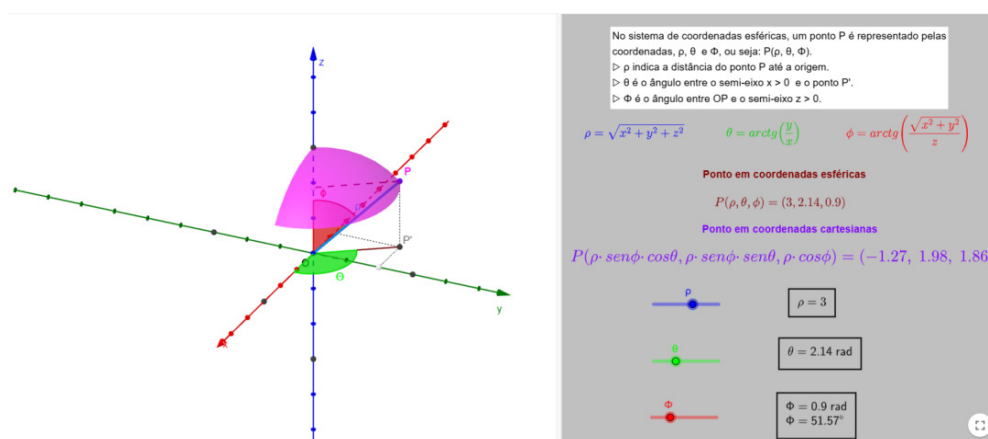


Fonte: Dados do estudo (2024)

O licenciando A7 mostrou domínio na interpretação dos limites de integração que definiam a região delimitada por uma esfera e um cone. Ele traduziu essas informações para o registro gráfico ao construir o sólido no GeoGebra. Esse processo reflete uma habilidade eficaz em realizar a conversão entre registros, característica fundamental para o aprendizado matemático avançado, segundo Duval (2009).

De modo geral, seis licenciandos concluíram essa tarefa. Um dos fatores que pode ter contribuído para esse resultado foi o uso do Applet⁶ do GeoGebra (Figura 9), que, por meio dos controles deslizantes, permitiu definir no registro gráfico os limites de integração identificados na integral proposta. Os outros dois estudantes não fizeram nenhum tipo de registro nessa atividade, conforme explicitado na Figura 11.

Figura 11 - Applet



Fonte: Dados do estudo (2024)

Os dados produzidos pelo questionário aplicado aos licenciandos após a resolução da sequência de tarefas forneceram informações que complementaram a análise das atividades desenvolvidas. De modo geral, os participantes destacaram que o uso do GeoGebra foi essencial para ampliar a visualização das regiões de integração e favorecer a compreensão das relações entre as representações algébricas e gráficas.

Um dos licenciandos ressaltou:

⁶ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vwyu8m9u>

A experiência de interpretação gráfica de regiões de integração com o auxílio do GeoGebra foi muito interessante, pois visualizar geometricamente o que está acontecendo facilita bastante a compreensão (A1, Questionário, 2024).

Outro licenciando destacou:

[...] utilizei o GeoGebra durante praticamente toda minha graduação, principalmente nas disciplinas de Cálculo, entretanto, admito que ajudou muito na maneira como visualizo as regiões de integração, pois havia meses que não fazia atividades sobre integrais e apenas com as questões propostas e fazendo as construções no GeoGebra pude resgatar os conceitos de integral dupla e tripla (A8, Questionário, 2024).

Apesar de a maioria dos participantes relatar alguma familiaridade com o aplicativo, foi mencionada a necessidade de uma introdução mais específica às funcionalidades peculiares do GeoGebra para evitar dificuldades iniciais. Além disso, como apontado por um licenciando, seria útil incluir explicações mais detalhadas sobre o papel do jacobiano.

Se possível, trazer questionamentos que ficam na teoria, como por exemplo o “jacobiano”, apesar de já ter feito a disciplina Cálculo 3 e ter um certo domínio com o GeoGebra nunca procurei uma interpretação para o “jacobiano” e nem faço ideia “de onde ele se encaixaria” (A4, Questionário, 2024).

Quanto aos avanços, os participantes relataram melhorias na interpretação e formulação de Integrais Múltiplas, especialmente ao transitar entre os registros gráficos e algébricos.

Com o auxílio do GeoGebra, a compreensão melhorou bastante, pois é possível ver graficamente o que está acontecendo. Isso ajuda a entender não apenas as regiões de integração, mas também as mudanças de integração específicas dessas regiões e os limites das integrais. Essa visualização dinâmica tornou o conceito mais intuitivo e acessível (A4, Questionário, 2024).

Comparando com os dados do teste diagnóstico, observou-se que as dificuldades relacionadas à visualização tridimensional e à definição de limites de integração foram parcialmente superadas, sobretudo quando o GeoGebra foi utilizado para explorar interativamente as relações entre as variáveis envolvidas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo teve como objetivo analisar conhecimentos mobilizados por licenciandos ao resolver uma sequência de tarefas que utiliza diferentes registros de representação sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. Nesse contexto, buscou-se compreender como eles alternam os registros algébricos e gráficos e como essa articulação contribui para a compreensão de conceitos matemáticos. O aplicativo GeoGebra foi utilizado como ferramenta pedagógica de forma a potencializar o processo de aprendizagem, promovendo visualizações dinâmicas e interativas.

As contribuições do estudo evidenciam como os pressupostos da Engenharia Didática influenciaram o planejamento e a implementação da sequência de tarefas. Desde o início da pesquisa da qual o estudo é integrante, explicitada em publicações anteriores, a análise prévia possibilitou identificar as principais dificuldades manifestadas pelos licenciandos, como a visualização de regiões tridimensionais e a conversão entre registros de representação semiótica. Essas informações orientaram a elaboração das tarefas na fase de análise a priori, garantindo que as tarefas fossem planejadas com base em evidências coletadas no teste diagnóstico e na revisão de literatura. Na análise a posteriori, os dados obtidos permitiram avaliar as estratégias utilizadas pelos licenciandos, validando as hipóteses formuladas e apontando aspectos passíveis de aprimoramento.

A integração entre a TRRS e ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, destacou-se como um recurso eficiente para abordar barreiras cognitivas relacionadas à transição entre diferentes registros de representação. A TRRS trouxe o suporte teórico necessário para entender como os licenciandos manipulam e convertem representações algébricas, gráficas e geométricas, enquanto o GeoGebra proporcionou uma plataforma interativa para a visualização dinâmica e exploração de conceitos complexos. Durante a implementação da sequência de tarefas, foi possível observar que a utilização do GeoGebra auxiliou na construção de representações gráficas e na interpretação de limites de integração, contribuindo para que os licenciandos superassem parte das dificuldades apontadas nas fases anteriores da pesquisa.

Foram identificados desafios persistentes, como a dificuldade de alguns licenciandos na transição do registro gráfico para o algébrico. Esses resultados ressaltam a importância de uma mediação pedagógica efetiva, em que o professor atue como facilitador na construção de conexões entre os diferentes registros e na superação de dificuldades conceituais.

Com base nos resultados, algumas recomendações didáticas podem ser propostas para professores que atuam no ensino de Cálculo Integral e áreas afins. Primeiramente, os professores podem incorporar recursos tecnológicos, como o GeoGebra, de forma planejada, utilizando essas ferramentas para promover a articulação entre registros de representação semiótica. A realização de tarefas que envolvem tanto a visualização quanto a formulação algébrica pode ser uma boa estratégia para fortalecer a compreensão dos conceitos matemáticos. Recomenda-se também que os professores dediquem momentos específicos para discutir o significado geométrico de elementos como o jacobiano, esclarecendo seu papel nas mudanças de variáveis. Além disso, estratégias que estimulam a participação ativa dos estudantes, como trabalhos em grupo, podem favorecer a troca de ideias e a construção colaborativa do conhecimento.

Para pesquisas futuras, sugere-se uma exploração de outras ferramentas digitais que possam complementar ou expandir as possibilidades oferecidas pelo GeoGebra no ensino

de Integrais Múltiplas e Mudanças de Coordenadas. Pesquisas que analisam o impacto do tempo de exposição às tarefas propostas no desenvolvimento da habilidade de transitar entre registros de representação também podem ser relevantes. Outra linha de estudo seria a análise de práticas pedagógicas colaborativas, avaliando como o trabalho em grupo pode contribuir para a superação de dificuldades relacionadas à conversão entre registros de representação. Além disso, seria interessante investigar o uso de metodologias que integrem aspectos teóricos e práticos de forma contínua, promovendo ciclos iterativos de avaliação e aprimoramento.

Evidencia-se a importância de se considerarem os fatores afetivos e motivacionais no planejamento das práticas pedagógicas. Foi perceptível, na implementação da proposta, o envolvimento dos estudantes ao interagir com o GeoGebra, quando perceberam avanços na compreensão dos conceitos. Esses aspectos indicam que o uso de tecnologias, aliado a abordagens que valorizam a autonomia e a interação entre os participantes, pode favorecer o aprendizado de conteúdos matemáticos. Incorporar momentos de reflexão sobre os avanços obtidos e criar um ambiente acolhedor e motivador pode contribuir para o envolvimento dos estudantes e para o sucesso das estratégias propostas.

O estudo reafirma a relevância da Engenharia Didática como metodologia para estruturar o ensino de conteúdos matemáticos, como as Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas. Reafirma, ainda, a combinação de recursos tecnológicos com fundamentos teóricos, como o TRRS que se apresenta como uma abordagem que transforma o ensino de Matemática, em particular do Cálculo Integral, em uma experiência que integra teoria, prática e tecnologia de maneira acessível.

Por fim, o estudo contribui para o campo da Educação Matemática ao oferecer subsídios teóricos e práticos para o ensino de Integrais Múltiplas, reforçando o papel das tecnologias digitais como aliadas na construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Carolina Ribeiro. **Gestão de tarefas e desenvolvimento de crivos de superfícies utilizando o software Maple**: uma proposta para o estudo de Cálculo de Integrais Múltiplas no Ensino Superior. 2021 206f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus.
- ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean. **Didactiques des Mathématiques**, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-364.
- BARBOSA, Cirléia Pereira; LOPES, Celi Espasandin. Um estudo sobre a identidade profissional de futuros professores de Matemática no Estágio Curricular Supervisionado. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1-25, 2020. <https://doi.org/10.46551/emd.e202035>

BUENO, Simone; ALENCAR, Edvonete Souza; OVIEDO, Teresa Sofia. Reflexões e desafios da resolução de problemas nas aulas de Matemática: um ensaio teórico. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 1, p. 9-27, jan./abr. 2017. <https://orcid.org/0000-0003-4749-4055>

COMETTI, Antônio Márcio. **Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no cálculo de várias variáveis**: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem. 2018. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Mércles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MOTA, Janine Freitas. **Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática**. 2021. 291f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

OLIVEIRA, Saulo Macedo; LOPES, Rieuse. O Júri Simulado como metodologia ativa no curso de Licenciatura em Matemática. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 7, n. 13, p. 1-17, 2023. <https://doi.org/10.46551/emd.v7n13a13>

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PAVANELO, Elisangela.; LIMA, Renan. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739-759, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a11>

RAGONI, Vitor Ferreira. **Expandindo telas e contando experiências em Educação Matemática com o GeoGebra**: da sensibilidade do toque à produção de conceitos de integrais duplas com o smartphone. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

ROCHA, Fredson Valois Coutinho. **A utilização do GeoGebra no estudo dos conceitos de limite, derivada e integral definida**. 2019 96f. Dissertação (Mestrado em Matemática).

Universidade Federal do Vale do São Francisco. Juazeiro.

SILVA, Pedro Aurélio Cardoso; MOTA, Janine Freitas. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas: uma análise no contexto do Cálculo Integral. **Ripem**, Brasília, v. 14, n. 4, p. 1-16, set./dez. 2025. <https://doi.org/10.37001/riperm.v14i4.4367>

SILVA, Pedro Aurélio Cardoso. **Uma abordagem didática interativa e visual no ensino de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas**. 2025. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Montes Claros. Montes Claros.

SILVA, Rodrigo Tavares. **Atividades para o estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido**. 2019. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

STEWART, James. **Cálculo: volume 2**. Tradução de EZ2 Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THIEGHI, Leila Thomazelli. Utilização do aplicativo “Waze” no cálculo de distância através da integral definida. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, p. 1-9, 2021. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2021-0020>

Apêndice—Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 05 de Junio de 2025.

Aprobado: 08 de Diciembre de 2025.

Publicado: 05 de Enero de 2026.

Como Citar — APA

Silva, P. A. C. da., & Mota, J. F. (2026). O papel dos registros de representação semiótica na Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. *PARADIGMA*, XLVIII(1), e2026002. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2026002.id1768>.

Como Citar — ABNT

SILVA, Pedro Aurélio Cardoso da; MOTA, Janine Freitas. O papel dos registros de representação semiótica na Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVII, n. 1, e2026002, Ene./Jun., 2026. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2026.e2026002.id1768>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a la revista *Paradigma* los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista *Paradigma* tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativa en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (*Open Access*) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (*Article Processing Charges - APCs*). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.



Licencia de uso

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.



Comprobación de similitud

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto *iThenticate* de Turnitin, a través del servicio de *Similarity Check* de la Crossref.



Proceso de evaluación

Revisión por pares a doble ciego (*Double blind peer review*).

Editor en Jefe

Fredy E. González 

Editores Asociados

Luis Andrés Castillo 

Ivonne C. Sánchez S. 

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista Paradigma obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

