

Explorando Números Figurados: possibilidades em Cenários do Ensino Superior

Adriana de Bortoli¹ Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva²
Edwin Jun Iassanori Yassunaga³

Resumo

Neste artigo investigamos a exploração dos números figurados no ensino da matemática, considerando abordagens históricas, tecnológicas e algébricas com a finalidade de responder: como estudantes do ensino superior exploram tarefas matemáticas sobre números figurados? Com base em uma pesquisa qualitativa, analisamos dois cenários distintos de ensino e aprendizagem: um envolvendo estudantes de um curso de Análise e Desenvolvimento de Sistemas, utilizando o software GeoGebra, e outro com licenciandos em Matemática, que empregaram materiais manipulativos e representações visuais. Os resultados indicam que a interação com recursos tecnológicos favoreceu a identificação de padrões e a formulação de conjecturas, enquanto a manipulação concreta incentivou a generalização algébrica e o aprofundamento conceitual. A comparação entre os dois cenários revela como diferentes metodologias podem contribuir para a construção do pensamento algébrico e o desenvolvimento de estratégias matemáticas no ensino superior. Concluímos que a articulação entre História da Matemática, Tecnologias Digitais e exploração algébrica dos números figurados potencializa o aprendizado, proporcionando aos estudantes um olhar investigativo sobre padrões e regularidades matemáticas.

Palavras-chave: Números Figurados, História da Matemática, Tecnologias Digitais, GeoGebra, Educação Matemática.

Exploring Figurate Numbers: Possibilities in Scenarios of Higher Education

Abstract

In this article, we investigate the exploration of figurate numbers in mathematics education, considering historical, technological, and algebraic approaches, with the aim of answering: how do higher education students explore mathematical tasks involving figurate numbers? Based on qualitative research, we analyze two distinct teaching and learning scenarios: one involving students from an Analysis and Systems Development course using GeoGebra software, and another with pre-service Mathematics teachers employing manipulative materials and visual representations. The results indicate that interaction with technological resources facilitated the identification of patterns and the formulation of conjectures, while concrete manipulation encouraged algebraic generalization and conceptual development. The comparison between the two scenarios reveals how different methodologies can contribute to the development of algebraic thinking and mathematical strategies in higher education. We conclude that the integration between the history of mathematics, digital technologies, and the algebraic exploration of figurate numbers enhances learning, providing students with an investigative view on mathematical patterns and regularities.

Keywords: Figurate Numbers, History of Mathematics, Digital Technologies, GeoGebra, Mathematics Education.

¹ Doutora em Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro. Docente de Ensino Superior da Faculdade de Tecnologia Professor Antonio Seabra (Docente em Regime de Jornada Integral de Trabalho-RJI)- FATEC de Lins. Endereço para correspondência: Estrada Mário Covas Júnior (Lins-Guaimbê) Km 1, cep 16403-025 Lins (SP). E-mail: adriana.bortoli@fatec.sp.gov.br

² Doutor em Education Studies pela The University of Western Ontario (UWO), Canadá. Docente do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto, SP, Brasil. E-mail: ricardo.scucuglia@unesp.br

³ Graduando em Análise e Desenvolvimento de Sistemas pela da Faculdade de Tecnologia Professor Antonio Seabra- FATEC de Lins. Endereço para correspondência: Estrada Mário Covas Júnior (Lins-Guaimbê) Km 1, cep 16403-025 Lins (SP). E-mail: edwinjunyassunaga@gmail.com

Explorando Números Figurados: Posibilidades en Escenarios de Educación Superior

Resumen

En este artículo investigamos la exploración de los números figurados en la enseñanza de las matemáticas, considerando enfoques históricos, tecnológicos y algebraicos, con el objetivo de responder: ¿cómo exploran los estudiantes de educación superior tareas matemáticas sobre números figurados? Con base en una investigación cualitativa, analizamos dos escenarios distintos de enseñanza y aprendizaje: uno con estudiantes de un curso de Análisis y Desarrollo de Sistemas, utilizando el software GeoGebra, y otro con licenciandos en matemáticas, quienes emplearon materiales manipulativos y representaciones visuales. Los resultados indican que la interacción con recursos tecnológicos favoreció la identificación de patrones y la formulación de conjeturas, mientras que la manipulación concreta incentivó la generalización algebraica y la profundización conceptual. La comparación entre ambos escenarios revela cómo diferentes metodologías pueden contribuir a la construcción del pensamiento algebraico y al desarrollo de estrategias matemáticas en la educación superior. Concluimos que la articulación entre la historia de las matemáticas, las tecnologías digitales y la exploración algebraica de los números figurados potencia el aprendizaje, proporcionando a los estudiantes una mirada investigativa sobre patrones y regularidades matemáticas.

Palabras clave: Números Figurados, Historia de las Matemáticas, Tecnologías Digitales, GeoGebra, Educación Matemática.

INTRODUÇÃO

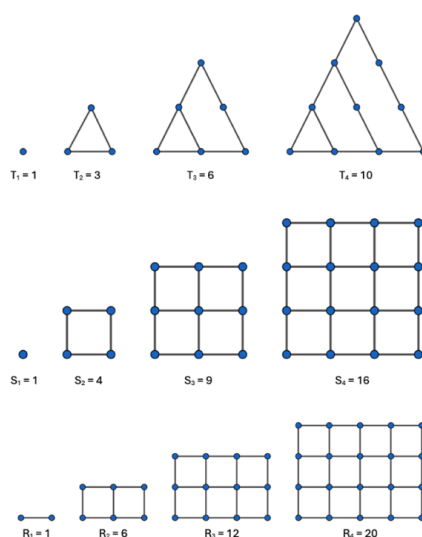
O estudo dos números figurados oferece meios para a exploração de conceitos matemáticos, pois “constituem uma ferramenta útil para o estabelecimento de propriedades fundamentais dos números naturais” (Baron, 1985, p.19). Os números figurados dizem respeito a representações de quantidades numéricas organizadas de maneira geométrica, como triângulos, quadrados e retângulos, as quais se referem a uma abordagem visual e estrutural do crescimento de sequências e séries numéricas (Baron, 1985). Além disso, os números figurados possuem tradição na História da Matemática (Roque, 2012). Os pitagóricos, por exemplo, exploravam sequências numéricas por meio de representações geométricas. Além dos pitagóricos, Fermat, Pascal e Euler contribuíram para o aprofundamento desse conceito, explicitando que o trabalho envolvendo padrões e generalizações é um processo relevante no fazer matemático (Baron, 1985).

Nesse sentido, compreender os números figurados não é apenas uma questão de explorar formas geométricas, mas de conectar diferentes áreas da matemática. Também, a integração entre abordagens visuais, digitais e concretas oferece meios para que estudantes desenvolvam um olhar investigativo sobre padrões, incentivando a formulação de conjecturas e a construção do pensamento algébrico (Jesus, 2013). Assim, as tecnologias digitais abrem possibilidades para investigar propriedades dos números figurados, permitindo combinar abordagens visuais e algébricas (Bortoli *et al.*, 2023). Tecnologias digitais e materiais manipulativos podem desempenhar um papel significativo nesse processo, pois possibilitam uma experimentação interativa, na qual os estudantes podem visualizar relações, modificar parâmetros e construir modelos que fomentem a produção de sentidos (Martínez; Hidalgo, 2018).

Grande parte da inspiração para o desenvolvimento da presente pesquisa emergiu com a exploração de atividades propostas no livro de Baron (1985). Investigamos, inicialmente, números quadrados e retangulares, os quais envolvem representações de sequências numéricas no “formato de Ls”, com o objetivo de elucidar propriedades dos números pares e ímpares. A conexão ou encaixe entre os Ls, que representam os termos das sequências, geram representações de quadros e retângulos que dizem respeito à soma dos termos de cada sequência. Uma característica central dos números figurados, portanto, é seu potencial matemático-pedagógico de representar somas de sequências aritméticas de forma estruturada, permitindo a identificação de padrões e termos gerais (Baron, 1985).

Por exemplo, os números triangulares surgem da soma dos números naturais: $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ (Figura1). Os números quadrados emergem da soma de números ímpares consecutivos: $s_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Destarte, os números retangulares emergem da soma de números pares consecutivos: $R_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$. Na realidade, Baron (1985) explora não apenas os números figurados clássicos, como os triangulares, quadrados e retangulares, mas também amplia essa abordagem para números poligonais e sólidos, incluindo pirâmides triangulares, pirâmides quadradas e cubos. Essa extensão natural para representações tridimensionais permite compreender padrões geométricos mais complexos, revelando conexões entre diferentes classes de números figurados. As relações entre esses números levam à formulação de séries fundamentais⁴ para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que fornecem expressões para somas de potências de inteiros, conceitos essenciais no desenvolvimento dos métodos de integração e no estudo dos indivisíveis, explorados posteriormente por Cavalieri no século XVII.

Figura 1 - Números Figurados



Fonte: Elaborado pelos autores.

⁴ A saber: $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$ e $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right]^2$

Diante da seguinte questão de pesquisa: “Como estudantes do ensino superior exploram tarefas matemáticas sobre números figurados?”, buscamos possíveis respostas produzindo dados em dois cenários a partir da realização de sessões de ensino, os quais detalharemos na seção sobre procedimentos metodológicos. É relevante antecipar que, para explorar propriedades dos números figurados, em um dos cenários foi utilizado o *software* GeoGebra e, em outro, materiais manipulativos ou manipuláveis (blocos). No primeiro cenário, participaram estudantes de graduação em Análise e Desenvolvimento de Sistemas e, no segundo, licenciandos em Matemática.

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Nesta seção, abordamos alguns trabalhos que falam sobre História da Matemática no ensino de matemática, sobre relações entre História da Matemática e uso de Tecnologias Digitais e sobre números figurados.

Diversos trabalhos possuem como temática central de investigação o papel e a utilização da História da Matemática no ensino e na aprendizagem de matemática. Miguel (1993), por exemplo, apresenta oito perspectivas para a integração da História da Matemática no ensino dessa disciplina: história como guia metodológico; história como instrumento de conscientização epistemológica; história como papel unificador e ético-axiológico; história como fonte de motivação; história como guia para a discussão filosófica sobre o conhecimento matemático; história como instrumento de explicação dos porquês e como fonte de objetivos para o ensino; história como instrumento na formalização de conceitos; e história como instrumento de resgate cultural (Miguel, 1993).

Com relação à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, Vianna (1995), por sua vez, defende que a História pode colaborar para uma melhor compreensão destes. O autor afirma que “[...] o estudo da História e dos problemas teóricos e metodológicos a ela associados pode lançar alguma luz sobre o conhecimento deste conteúdo matemático” (p. 4). Em contraste, Vianna (1995) alerta que histórias fantasiosas que apresentam objetos matemáticos como criação de um único indivíduo contribuem para que a matemática seja discriminadora, como um conhecimento destinado a poucos escolhidos. Além disso, há estudos que mostram que o uso da História da Matemática por meio de um diálogo sobre os tipos de vínculos que se intenta promover entre a produção sócio-histórica do conhecimento matemático no passado e a produção pessoal desse conhecimento no presente tornam-se didática e pedagogicamente potentes no processo de ensino e aprendizagem de matemática (Miguel; Miorim, 2019).

Fossa (2020) argumenta que a História da Matemática tem se destacado como uma tendência relevante na Educação Matemática, assumindo diferentes funções pedagógicas na sala de aula. Seu uso para estimular a motivação dos estudantes já ocorre há bastante

tempo, embora tenha ganhado maior ênfase nos últimos anos. Além disso, abordagens mais recentes têm explorado a História da Matemática como um recurso para aprimorar a leitura e a escrita dos estudantes. No entanto, assim como qualquer estratégia didática, essa abordagem não soluciona todas as dificuldades do ensino de matemática, nem tampouco apresenta os mesmos resultados para todos os estudantes. Ainda assim, sua eficácia tem sido evidenciada, tornando-se um recurso valioso para a melhoria da aprendizagem e devendo, portanto, integrar o repertório pedagógico dos professores da área (Fossa, 2020).

Entendemos que apenas alguns estudos articulam a História da Matemática com Tecnologias Digitais. Sousa (2020, 2021) utilizou o termo “aliança” para se referir à possibilidade de trabalhar História da Matemática em conjunto com as Tecnologias Digitais, construindo tarefas com encaminhamentos feitos por meio da investigação matemática. Já Bortoli (2020) apropriou-se da expressão “articulação” entre História da Matemática e Tecnologias Digitais e considerou tarefas modeladas tanto para o ensino como também para a aprendizagem de matemática. Yassunaga e Bortoli (2024) discutiram cenários de pesquisas desenvolvidas na Educação Matemática sobre articulações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais a partir da descrição de tarefas viabilizadas pelo *software* GeoGebra e relacionadas aos números figurados. Assim, a interface História da Matemática/uso de tecnologias digitais tem sido discutida de maneira exploratória na Educação Matemática.

Relacionado à temática números figurados, Barros (2021) realizou uma investigação acerca das sequências desse tipo de números com objetivo de organizar situações didáticas para que suas propriedades fossem organizadas e discutidas, abordando-se tanto o contexto histórico quanto o matemático que se refere às fórmulas de termo geral, à recorrência e à função geradora. O autor também discutiu propriedades por meio da visualização utilizando-se o GeoGebra como recurso didático. Estas situações foram criadas a partir de uma metodologia intitulada Teoria das Situações Didáticas, que visa dividir um dado conteúdo em situações bem definidas que permitam uma análise do desenvolvimento do estudante. Barros (2021) sugeriu que os estudantes desenvolvessem elementos necessários para descrever as relações referentes aos números figurados em suas configurações planas, espaciais e k -dimensionais, bem como suas relações de recorrência, fórmula para o termo geral, função geradora e descrição de propriedades por meio da visualização.

Chaves *et al.* (2024) investigam a produção de significados na formação de professores de matemática, fundamentando-se no Modelo dos Campos Semânticos (MCS). A pesquisa qualitativa analisou processos de nucleação e tematização da lógica das operações a partir da construção dos números figurados bidimensionais, explorando a perspectiva histórica da escola pitagórica. A abordagem metodológica incluiu a utilização de materiais didático-pedagógicos manipulativos e a análise das ações enunciativas dos participantes. Os resultados indicaram que a proposta promoveu um ambiente dialógico, permitindo que os licenciandos desenvolvessem formas de operar matemáticas diversas, indo além das abor-

dagens convencionais legitimadas por livros didáticos e professores. Dessa forma, a pesquisa reforça a relevância do MCS na compreensão das práticas matemáticas e na formação docente (Chaves *et al.*, 2024).

Chiconello (2013) se debruçou sobre a utilização de números figurados, especificamente triangulares e quadrados, como recurso didático para desenvolver o conceito de recursividade no ensino médio. A pesquisa, baseada na metodologia da Engenharia Didática, envolveu a aplicação de folhas de atividades em salas de aula para introduzir progressivamente a ideia de sequências recursivas. Os estudantes trabalharam em grupos, explorando padrões, testando conjecturas e desenvolvendo fórmulas a partir das atividades propostas. Com efeito, os resultados indicaram que a abordagem favoreceu a participação ativa dos estudantes, promovendo uma compreensão mais aprofundada das propriedades das sequências numéricas e fortalecendo sua capacidade de generalização matemática (Chiconello, 2013).

Martínez e Hidalgo (2018), por sua vez, exploraram os padrões presentes nos números figurados, enfatizando os números triangulares como base para a compreensão dos números poligonais. Os autores destacam a importância dos padrões matemáticos na resolução de problemas e na introdução do pensamento algébrico no ensino fundamental. Além de seu valor didático, os padrões nos números figurados são apresentados como um elemento essencial da Matemática Discreta, evidenciando sua conexão com outras disciplinas, como a arte. A pesquisa sugere que o reconhecimento de padrões numéricos e geométricos facilita a generalização e a abstração matemática, promovendo uma aprendizagem significativa e interdisciplinar (Martínez; Hidalgo, 2018).

Aprofundando a discussão, Beery (2009) traça a história do desenvolvimento das fórmulas para números figurados, com foco na evolução dos métodos de cálculo desde a Grécia Antiga até a Idade Moderna. O artigo examina contribuições de matemáticos como Cardano, Faulhaber, Briggs e Harriot no século XVI, que estabeleceram regras multiplicativas para calcular números figurados e binomiais. A autora discute, adicionalmente, a transição do uso de representações verbais para notações simbólicas, ressaltando a importância desse avanço na sistematização do conhecimento matemático. O estudo sugere, por fim, que a formulação das regras para números figurados não apenas influenciou o desenvolvimento da teoria dos números, mas também abriu caminho para a compreensão moderna das combinações e coeficientes binomiais (Beery, 2009).

Nesta pesquisa, inspiramo-nos em uma perspectiva interpretativa, ancorada na ideia de que o conhecimento matemático é produzido em interações sociais mediados por artefatos culturais, como softwares e materiais manipulativos. Tal perspectiva fundamenta a análise das estratégias e modos de raciocínio mobilizados pelos estudantes ao explorarem tarefas sobre números figurados. Investigar como os alunos resolvem problemas de manei-

ras distintas é relevante porque revela a diversidade de caminhos possíveis para a construção de significados matemáticos, destacando a importância do pensamento flexível e da criatividade no processo de aprendizagem (Silver, 1997). Problemas envolvendo números figurados, por sua natureza visual, histórica e estrutural, oferecem oportunidades para que os estudantes articulem diferentes registros de representação e mobilizem raciocínios tanto algébricos quanto geométricos. Compreender essas variações nas estratégias dos alunos permite aos pesquisadores e professores valorizar formas plurais de pensar (Lithner, 2008).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa, de natureza qualitativa (Bicudo, 1993), possui dois cenários de produção de dados nos quais foram realizadas sessões de ensino voltadas à investigação de números figurados. Tais cenários foram escolhidos por serem os ambientes de atuação profissional dos pesquisadores enquanto docentes. Os números figurados, por sua vez, configuram-se como uma temática particularmente relevante, pois dizem respeito à uma grande ideia matemática que estabelece conexões significativas entre diferentes áreas da matemática, como a aritmética, a álgebra e a geometria, com potencial estético e investigativo (Gadanidis; Hughes; Borba; 2008).

No primeiro cenário, as sessões de ensino ocorreram em uma unidade da Faculdade de Tecnologia (FATEC), em um município do interior do Estado de São Paulo. As atividades ocorreram no horário regular de aulas com alunos matriculados na disciplina Matemática Discreta do primeiro ano do Curso de Análise e Desenvolvimento de Sistemas. Durante o desenvolvimento deste estudo, 27 estudantes estiveram presentes nas sessões. Os estudantes foram organizados em 6 grupos formados por 4 ou 5 integrantes cada.

A tarefa proposta aos estudantes no Cenário 1^o foi elaborada com base em Baron (1985) e atividade criada por Yassunaga e Bortoli (2024), nas quais destaca-se o uso do *software* GeoGebra. Em particular, foram criadas aplicações com o GeoGebra na qual usuários podem experimentar situações diversas sobre números figurados que oferecem meios para o levantamento de hipóteses, simulações, estabelecimento de relações entre representações diversas, conjecturas, etc. Trata-se, nesse sentido, de uma tarefa matemática potencialmente de caráter experimental-com-tecnologias, no sentido proposto por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014). No entanto, como veremos, esse caráter dependerá da maneira como os estudantes utilizam o GeoGebra.

As atividades foram conduzidas em dois encontros, com três horas de duração cada, e ocorreram com um intervalo de uma semana entre eles. Algumas observações feitas nos encontros foram registradas por meio de filmagens do ambiente. As sequências de atividades empregadas neste estudo foram compreendidas a partir de instrumentos que solicita-

⁵ Disponível em link: https://drive.google.com/file/d/1tj5GZVmN_mjgdhLBT7YQ76Mz5nfvyxP/view?usp=drive_link

vam respostas individuais por escrito dos estudantes, as quais serviram como principal registro na produção de dados. Em cada encontro, apresentamos as construções elaboradas no GeoGebra, a fim de determinar a interface da geometria com a aritmética, semelhante ao processo historicamente produzido pelos pitagóricos (Eves, 2004).

No segundo cenário, conduzimos 18 horas de sessões de ensino com duas duplas de licenciandos em Matemática de uma universidade estadual pública de outra cidade do interior do Estado de São Paulo (discentes do terceiro ano e do quarto ano do curso). Especificamente, realizamos três sessões de três horas cada com cada par de participantes. Na primeira sessão, eles investigaram números figurados com base no material de Baron (1985) sobre a história do Cálculo⁶. Na segunda sessão, criaram poemas e letras de músicas sobre números figurados usando o ChatGPT. Na terceira sessão, eles produziram suas músicas usando Inteligência Artificial, explorando a questão das mensagens subliminares. Todas as sessões foram filmadas, as interações com os computadores foram registradas e notas de campo foram tomadas pelos pesquisadores.

Para este artigo, considerando a noção de amostragem por julgamento (Marshall, 1996), discutimos apenas questões relativas à primeira sessão do Cenário 2. Na amostragem por julgamento “o pesquisador seleciona ativamente a amostra mais produtiva para responder à pergunta de pesquisa” (Marshall, 1996, p. 523). Isso pode incluir a elaboração de um esquema com as variáveis que potencialmente afetam a contribuição de cada indivíduo, fundamentando-se no saber prático do pesquisador sobre o tema, nas referências teóricas existentes e nas evidências obtidas ao longo da investigação (Marshall, 1996).

Em ambos cenários foram, portanto, elaborados dados por meio de registros em vídeo (filmagens), notas escritas/respostas dos participantes em fichas de tarefa e diário de campo dos pesquisadores. Além da noção de triangulação de dados (Guba, 1981), a análise de dados desta pesquisa foi desenvolvida com base no modelo de análise de vídeos proposto por Powell, Francisco e Maher (2004). Esse modelo é composto pelos seguintes procedimentos não lineares: (a) familiarização com os dados: assistir aos registros de vídeos várias vezes; (b) descrição: elaboração de registros escritos que descrevam os eventos registrados; (c) transcrição: elaboração de registros que representem rigorosamente a fala e os gestos dos estudantes e dos participantes das sessões; (d) identificação de eventos críticos: um evento é crítico quando representa uma evidência para as perguntas diretrizes propostas; (e) codificação: criação de códigos para a diversidade de momentos críticos que auxiliam na identificação de padrões e unidades de significados no processo analítico; (f) criação de episódios e do enredo: refere-se ao texto que compila os vários momentos críticos e ao processo de contraste com outras fontes de dados como notas de campo; (g) composição da

⁶ Disponível em link: https://drive.google.com/file/d/1YQzkkDU5VINKYRLJB3GUZ1XYLHfFXoV3/view?usp=drive_link

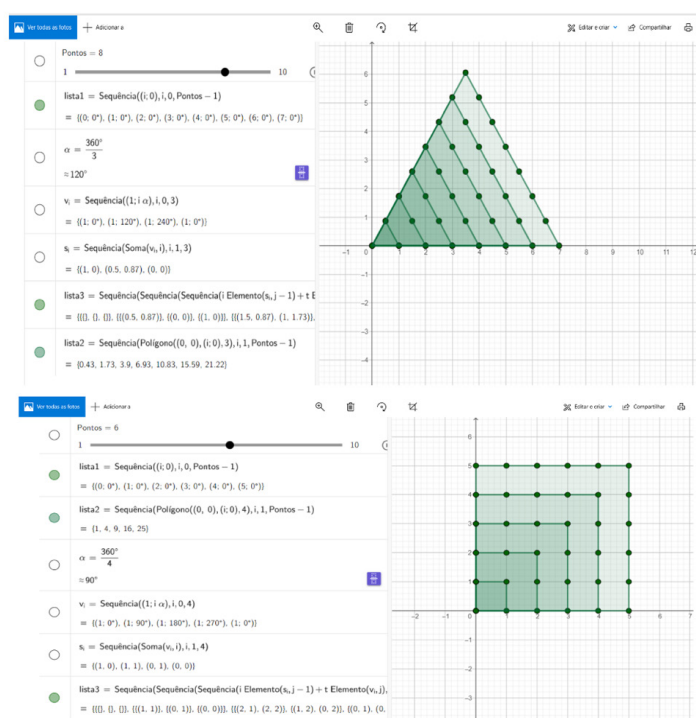
narrativa: interpretação particular do todo usando os dados como evidência, produzindo, dessa forma, uma narrativa escrita.

Por fim, destacamos que, nesta pesquisa, foram obtidas as devidas autorizações dos estudantes para a utilização de imagens e transcrições de fala por meio do preenchimento de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE). A pesquisa foi submetida a um comitê de ética em pesquisa com seres humanos e devidamente aprovada pelo parecer de número 7.208.685. Ressaltamos ainda que todas as etapas da investigação seguiram os princípios éticos estabelecidos pelas diretrizes da Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde, assegurando o respeito à dignidade, privacidade e autonomia dos participantes.

RESULTADOS – CENÁRIO 1

Iniciamos as atividades com perguntas sobre a série conhecida como “Soma de Gauss”, questionando-os sobre como somar os números naturais de 1 a 100. Utilizando nossas construções com o GeoGebra (Figura 2), projetamos para a turma representações dos números triangulares e solicitamos que verificassem como ocorria cada iteração na figura, se havia relações entre esses termos ou uma “regra” pela qual fosse possível identificar um determinado termo. Questionamos como poderiam obter um número triangular a partir do seu antecessor e se era possível conjecturar uma expressão para termo geral. Com essas problematizações buscávamos fomentar o raciocínio indutivo (Pimentel; Vale, 2012).

Figura 2 - Print de tela do GeoGebra da construção dos números triangulares e quadrados.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Igualmente, exibimos representações referentes aos números quadrados e fizemos questionamentos da mesma natureza, buscando oferecer meios para que os estudantes pudessem identificar recorrências ou padrões que poderiam levar ao levantamento de hipóteses sobre o termo geral da sequência. Os estudantes foram engajados a pensar a partir de figuras exibidas em *slides*. Consideramos que esses *slides* foram produzidos com *prints* das figuras (triangulares, quadrados e relações entre triangulares com quadrados) já com o intuito de proporcionar a mobilização de significados matemáticos pelos estudantes. Cabe explicitar a ressalva de que, devido ao tempo destinado à realização da sessão, optamos pela não manipulação direta do GeoGebra por parte dos estudantes. Nesse sentido, a exploração da tarefa pelos estudantes tarefa não assumiu genuinamente um caráter experimental-com-tecnologias. Contudo, pudemos engajar os estudantes em processos de pensamento matemático baseado na visualização das simulações com o GeoGebra projetadas em slides e no desenvolvimento escrito da tarefa.

Após esse momento introdutório, que teve como principal objetivo a familiarização dos estudantes com o conceito de “números figurados”, voltamos nosso foco para a exploração dos números quadrados, especificamente, os números ímpares, com o escopo de aprofundar o entendimento deles sobre essa relação. A partir desse ponto, procuramos estimular uma investigação mais cuidadosa, incentivando-os a refletirem sobre os padrões subjacentes às representações visuais de tais sequências numéricas. Para isso, fomentamos explorações a partir de questionamentos do tipo: “Você identifica algum padrão nessa construção?” e “Caso tenha identificado ‘Ls’ nessa imagem, como você decomporia essa representação?”. Essas perguntas tratavam de uma maneira de promover um pensamento mais responsivo sobre as estruturas numéricas envolvidas, incentivando-os a expressarem suas observações por meio de diferentes registros — verbais, algébricos e gráficos —, e ajudando-os a promover discussões sobre a relação entre os números ímpares e a formação dos quadrados perfeitos.

Nas ações do Grupo 1, os estudantes entenderam que os números obtidos a partir das separações visualizadas pelas fronteiras dos “Ls” seriam os números ímpares. Tal entendimento inicial foi um passo importante para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes, uma vez que permitiu que comesçassem a conectar representações visuais com conceitos matemáticos mais abstratos. Aliás, conforme outras anotações na folha de tarefa (Figura 3), indicaram a seguinte expressão: $Q = N + (N - 1)$, que se referia à quantidade de pontos obtidos pela separação em cada estágio, a partir do observado na construção com o GeoGebra. A expressão apresentada, no entanto, é apenas uma aproximação inicial, já que o termo geral da sequência dos números ímpares é $2n - 1$. Essa diferenciação verificada entre a expressão observada e a forma correta revelou uma etapa relevante no processo de aprendizagem, que exigiu uma reflexão mais aprofundada sobre as representações algébricas e numéricas. Os estudantes utilizaram várias maneiras de representações para indicar o raciocínio de ob-

servação, revelando um empenho para se expressarem de modo mais claro e compreensível. No lado esquerdo da folha, os estudantes desenvolveram uma soma da quantidade de pontos em cada estágio, ainda que com um pequeno equívoco que pode ser observado na terceira linha. Vale ressaltar que utilizaram as expressões $N+(N-1)$ e $N^2-(N-1)^2$. Essa segunda expressão, a propósito, desempenha um papel fundamental ao permitir a identificação do termo da sequência, a partir de termos consecutivos da série, oportunizando uma maneira eficaz de conectar diferentes elementos da sequência e da série em questão. Por exemplo, consideremos os quatro primeiros termos tanto para sequência quanto para série, ou seja, (1, 3, 5, 7) e (1, 4, 9, 16). Nesse caso, $16 - 9 = 7$.

Figura 3 - Resolução da atividade pelo Estudante 1.

The image shows two pages of handwritten mathematical work by Student 1. The top page contains several sequences and series, along with algebraic expressions. A red box highlights the sequence 1, 3, 5, 7 and the sum $1+3+5+7=16$. Another red box highlights the expression $Q = 4^2 - 3^2$. The bottom page continues the work, showing more sequences and series. A red box highlights the expression $Q = 4^2 - 3^2$ and the sum $1+3+5+7=16$.

Top page:

Sequence: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
 Series: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Expressions:

- $Q = 10 + (10-1)$
- $Q = 10 + 9$
- $10^2 - 9^2$
- $100 - 81 = 19$
- $49 - 36 = 13$
- $Q = N + (N-1)$
- $Q = 2N - 1$
- $Q = 4^2 - 3^2$
- $Q = N^2 - (N-1)^2$
- $Q = 9^2 - (9-1)^2$
- $Q = 81 - 64$
- $Q = 17$

Bottom page:

Sequence: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
 Series: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Expressions:

- $Q = 4^2 - 3^2$
- $Q = 16 - 9 = 7$
- $Q = N^2 - (N-1)^2$
- $Q - 1 = 6^2 - (6-1)^2$
- $Q - 1 = 36 - 25$
- $Q - 1 = 11$
- $Q = 4^2 - 3^2$
- $Q = 16 - 9 = 7$
- $(2N-1) = N^2$
- $10 - 1 = N^2$
- $9 = N^2$
- $N = \sqrt{9}$
- $N = 3$

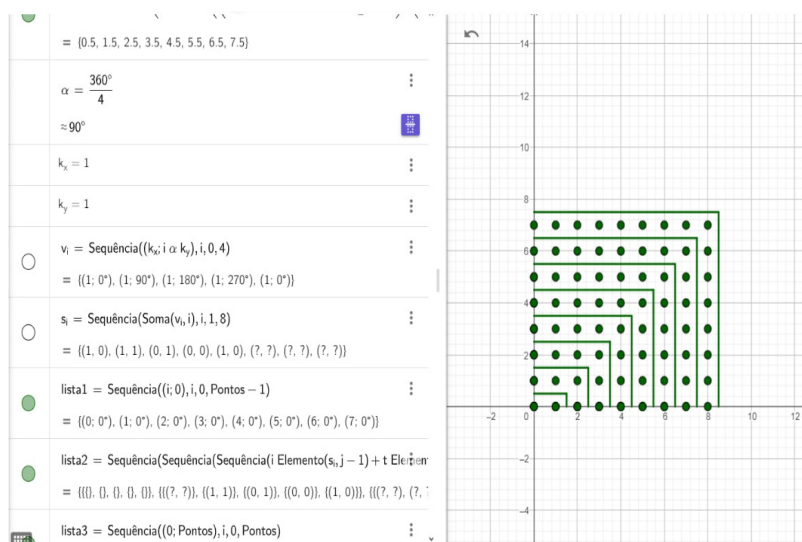
Fonte: Dados da pesquisa.

A formulação das expressões e sugere um movimento de generalização no qual os estudantes passam de observações empíricas para um modelo matemático formalizado. Esse movimento de generalização é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois exige que os estudantes transcendam casos particulares e construam um padrão simbólico aplicável a qualquer valor de .

Barros (2021) destaca que, em contextos de exploração matemática mediada por tecnologias digitais, como o GeoGebra, estudantes tendem a conjecturar generalizações de sequências, ao identificarem regularidades estruturais e testarem hipóteses para o termo geral. Esse comportamento emergente reforça a importância do ambiente dinâmico e visual na formação de conceitos matemáticos abstratos, possibilitando que os aprendizes desenvolvam um olhar crítico sobre os padrões observados e os validem por meio de diferentes formas de representação (Barros, 2021).

Ao explorarem os números quadrados separados em forma de “L”, ou seja, a sequência e a série dos números ímpares, alguns estudantes passaram a investigar, por iniciativa própria, a sequência e a série dos números pares de forma algébrica, formulando expressões e buscando padrões numéricos. Tal enfoque ampliou o escopo da atividade e nos permitiu, adicionalmente, identificar uma oportunidade para fomentar a exploração dos números retangulares, estabelecendo conexões entre essas diferentes sequências. Como ponto de partida para essa nova investigação, utilizando nossa construção no GeoGebra de maneira projetada na sala de aula (Figura 4), incentivamos os estudantes a buscarem identificar relações entre os números e a desenvolver conjecturas que pudessem ser validadas tanto geometricamente quanto algebricamente. Nossos questionamentos nesse momento podem ser enunciados da seguinte maneira: além de quadrados, seria possível explorar retângulos? Que sequência numérica estaria relacionada a representação de retângulos?

Figura 4 - Captura de tela da construção dos números retangulares no GeoGebra.

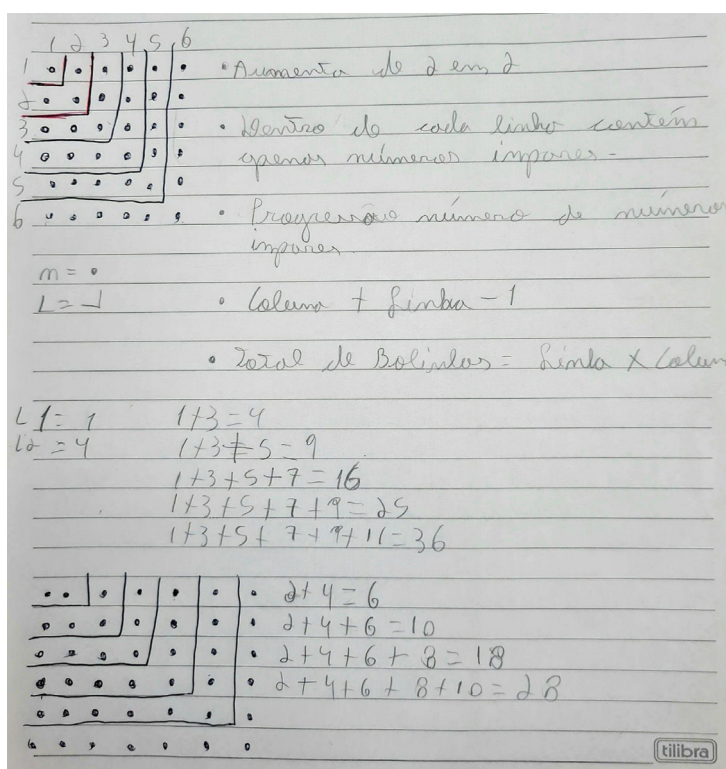


Fonte: Dados da pesquisa.

Uma situação recorrente no Cenário 1 pode ser apresentada pela abordagem realizada pelo Estudante 2 (Figura 5). Nela, o estudante reconhece que tanto a representação do quadrado quanto do retângulo é “composta por Ls”, e que o quadrado está relacionado aos números ímpares e o retângulo aos números pares. Além disso, o estudante desenvolve soma parcial dos termos em ambas situações, mas não registra qualquer tipo de generaliza-

ção, como, por exemplo, $(2n - 1)$ e $2n$ para os termos gerais das sequências, e n^2 e $n(n+1)$ para as séries. Esse padrão de exploração reflete as dificuldades encontradas por estudantes ao lidar com a generalização de sequências numéricas, conforme discutido por Theodorovski e Oliveira (2020). Os autores destacam que, muitas vezes, os estudantes reconhecem regularidades e realizam cálculos parciais, mas enfrentam desafios para formular expressões algébricas que representam essas regularidades de forma generalizada. Essa limitação pode estar relacionada à falta de experiências sistemáticas com padrões numéricos e sequências recursivas, as quais são ferramentas importantes no desenvolvimento do pensamento algébrico (Theodorovski; Oliveira, 2020).

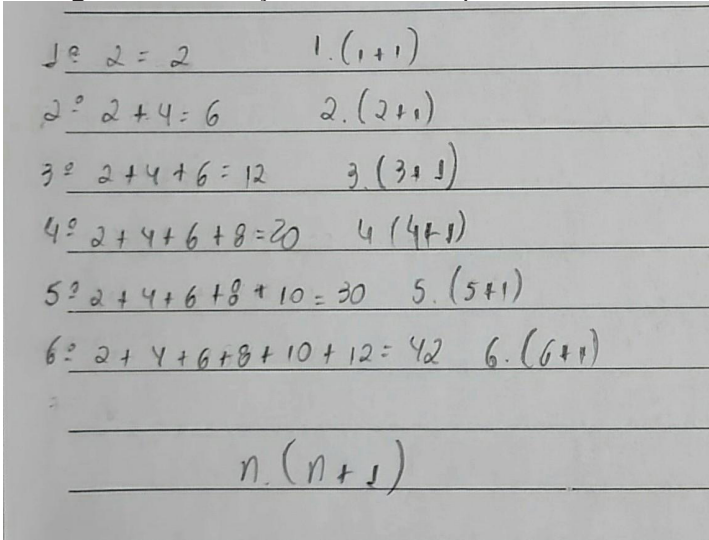
Figura 5 - Resolução da atividade pelo Estudante 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Outra situação (menos recorrente) de exploração dos números retangulares por parte dos estudantes no Cenário 1 pode ser representada pela abordagem desenvolvida pelo Estudante 3 (Figura 6). Nela, são realizadas as somas parciais dos termos da sequência dos números pares e o resultado é decomposto de forma a estabelecer relação direta com o termo em questão. Por exemplo, o Estudante 3 realizou as somas parciais até o sexto termo. No primeiro termo, buscou decompor o resultado em uma expressão que tivesse 1 como diretriz. No segundo termo, 2 como diretriz e assim por diante. Esse método oferece meios para identificar padrões e generalizar que termos consecutivos estavam sendo multiplicados, ou seja, que $2+4+6+8+\dots+2n=n.(n+1)$.

Figura 6 - Resolução da atividade pelo Estudante



Handwritten student work showing the derivation of the formula for triangular numbers. The work is organized into two columns. The left column lists the first six terms of the sequence of triangular numbers, each with its sum. The right column lists the corresponding formula for each term. The final line shows the general formula $n(n+1)$.

1º $2 = 2$	1. $(1+1)$
2º $2+4 = 6$	2. $(2+1)$
3º $2+4+6 = 12$	3. $(3+1)$
4º $2+4+6+8 = 20$	4. $(4+1)$
5º $2+4+6+8+10 = 30$	5. $(5+1)$
6º $2+4+6+8+10+12 = 42$	6. $(6+1)$
$n(n+1)$	

Fonte: Dados da pesquisa.

É nesse sentido que Proença (2019) enfatiza que a construção do pensamento algébrico pode ser potencializada por meio da resolução de problemas, permitindo que os estudantes desenvolvam suas próprias estratégias para identificar padrões. A escolha de problemas que incentivem a busca por regularidades e a formulação de expressões matemáticas favorece o desenvolvimento de uma abordagem investigativa e a autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem (Proença, 2019). Nessa contextura, a abordagem do Estudante 3 exemplifica como a exploração de padrões numéricos referentes aos números figurados pode contribuir para a formação de uma compreensão algébrica mais estruturada e significativa.

RESULTADOS – CENÁRIO 2

As atividades desenvolvidas no Cenário 2 envolveram duas duplas de estudantes de graduação (licenciandos em matemática) que, baseados “diretamente” no material de Barón (1985), exploraram propriedades dos números figurados por meio de representações visuais, manipulação de materiais concretos e formulação de padrões e generalizações algébricas. Esse processo permitiu a construção de significados matemáticos a partir da identificação de padrões e da validação de conjecturas, conforme sugerem estudos sobre ensino e aprendizagem de números figurados (Martínez; Hidalgo, 2018; Chiconello, 2013).

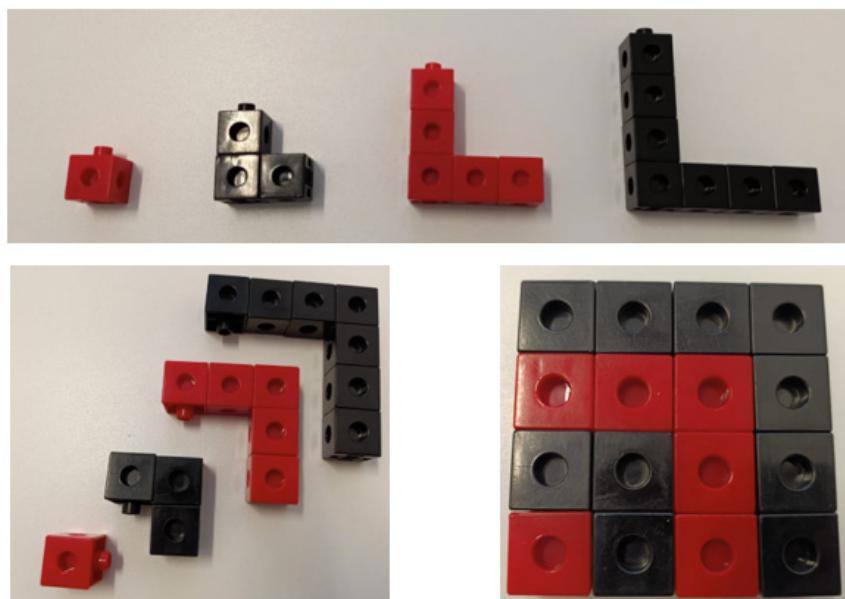
A seguir, apresentamos trechos selecionados das transcrições das interações dos estudantes, destacando momentos-chave do pensamento matemático emergente. A atividade inicial consistiu na construção de sequências de números figurados, com foco nos números triangulares e quadrados. A interação entre Licencianda 1 e Licencianda 2 ilustra como as participantes identificaram um padrão na adição de elementos sucessivos:

Pesquisador: Vamos observar a formação dos números triangulares. Vocês conseguem identificar algum padrão na adição de elementos entre um estágio e outro?

Licencianda 1: Cada vez que adicionamos um novo número, ele forma um triângulo maior.... Mas espera, se eu somar os números ímpares consecutivos, parece que dá um quadrado!

Licencianda 2: É verdade! Tipo, 1, depois 1+3, depois 1+3+5... Isso sempre forma um número quadrado! [Figura 7].

Figura 7 - Números quadrados representados com blocos (material manipulável).



Fonte: Dados da pesquisa.

Esse reconhecimento reforça o papel dos números figurados como recurso para introdução ao pensamento algébrico, uma vez que os padrões numéricos observados podem ser expressos formalmente como: $1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$. Tal *insight*, que relaciona números triangulares e quadrados, também aparece em estudos como os de Martínez e Hidalgo (2018), que destacam a importância dos padrões na introdução da álgebra escolar. A representação visual dos números figurados, conforme explorada por Beery (2009), condiciona a compreensão dessas relações. No presente estudo, o uso dos blocos (materiais manipuláveis) teve papel relevante para identificação de padrões e generalizações (Figura 7). A manipulação desses materiais possibilitou aos estudantes perceber regularidades na disposição dos elementos, estabelecer correspondências entre representações geométricas e expressões algébricas, e construir argumentos para justificar fórmulas gerais. Esse processo de visualização/manipulação ativa (*hands-on*) contribuiu para o desenvolvimento do pensamento relacional e para a compreensão mais profunda das estruturas subjacentes aos números figurados, neste caso, aos números quadrados.

Outro aspecto fundamental neste cenário foi a formulação de expressões algébricas gerais para os números figurados. A interação entre o Licenciando 3 e o Licenciando 4 (Dupla 2) exemplifica esse processo, ao investigarem os números retangulares:

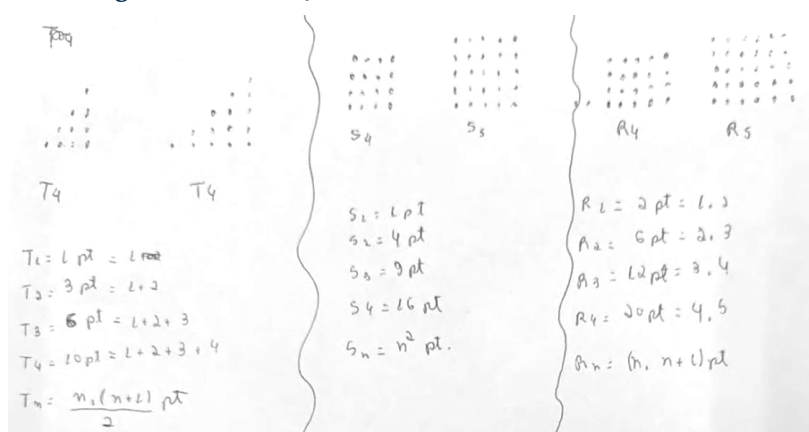
Licenciando 3: Olha, os números retangulares parecem ser o dobro dos triangulares. Tipo, o primeiro número triangular é 1, e o primeiro retangular é 2. Depois, o segundo triangular é 3 e o segundo retangular é 6...

Licenciando 4: Então, será que o número retangular R_n é sempre $2T_n$?

Pesquisador: Interessante, vocês podem tentar escrever isso como uma equação geral?

Licenciando 3: Opa, então seria algo tipo $R_n = n \cdot (n+1)$, porque os triangulares são $T_n = (n \cdot (n+1))/2$, e o retangular parece ser o dobro disso! [Figura 8].

Figura 8 - Resolução da atividade pelos licenciandos



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa generalização algébrica revela um processo interessante: a formulação de padrões a partir da observação empírica, visto que também manipulavam blocos nesse momento. A capacidade dos estudantes de expressarem essa relação em termos formais reforça a importância da abordagem investigativa, conforme discutido por Chiconello (2013) e Martínez e Hidalgo (2018). A relação entre os números triangulares e retangulares é bem documentada na literatura matemática e tem sido explorada como um recurso didático eficaz para o ensino de sequências e progressões numéricas. Segundo Beery (2009), a generalização desses números remonta à escola pitagórica e tem sido um dos principais focos na introdução ao pensamento algébrico.

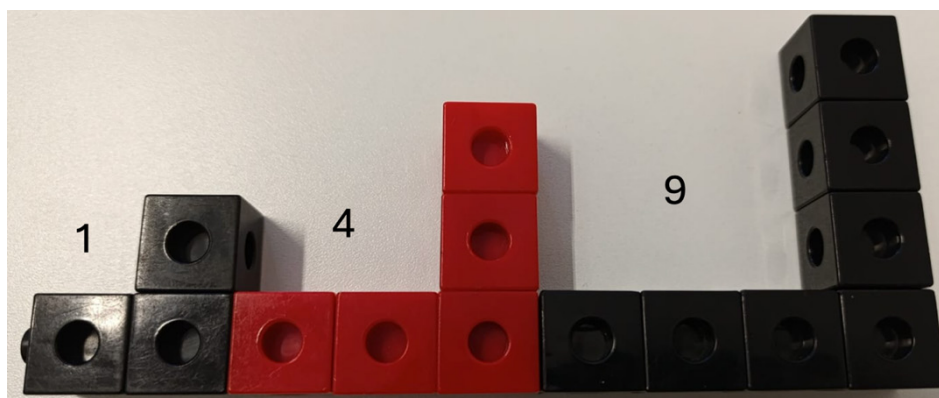
Durante as sessões, observou-se que os licenciandos, frequentemente, recorriam a representações visuais e manipulação de materiais para consolidar suas compreensões. Esse processo é descrito por Chaves *et al.* (2024) como uma forma de produção de significado. Um evento crítico desse tipo de raciocínio emergiu na interação da Dupla 1:

Licencianda 1: Se a gente empilhar os blocos em formato de L, dá para ver que sempre sobra um quadrado perfeito no meio [Figura 9].

Licencianda 2: Acho que isso tem a ver com a forma como os números são organizados. A gente pode dividir os quadrados em dois triangulares e sobra só

aquele bloquinho no meio.

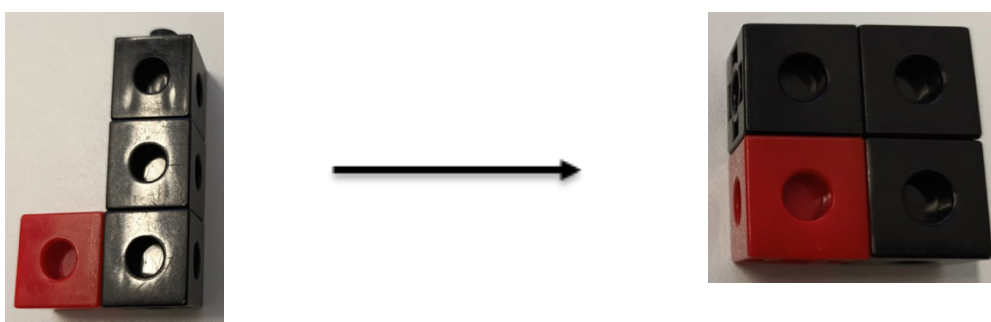
Figura 9 - Conjectura com blocos elaborada pelas licenciandas.

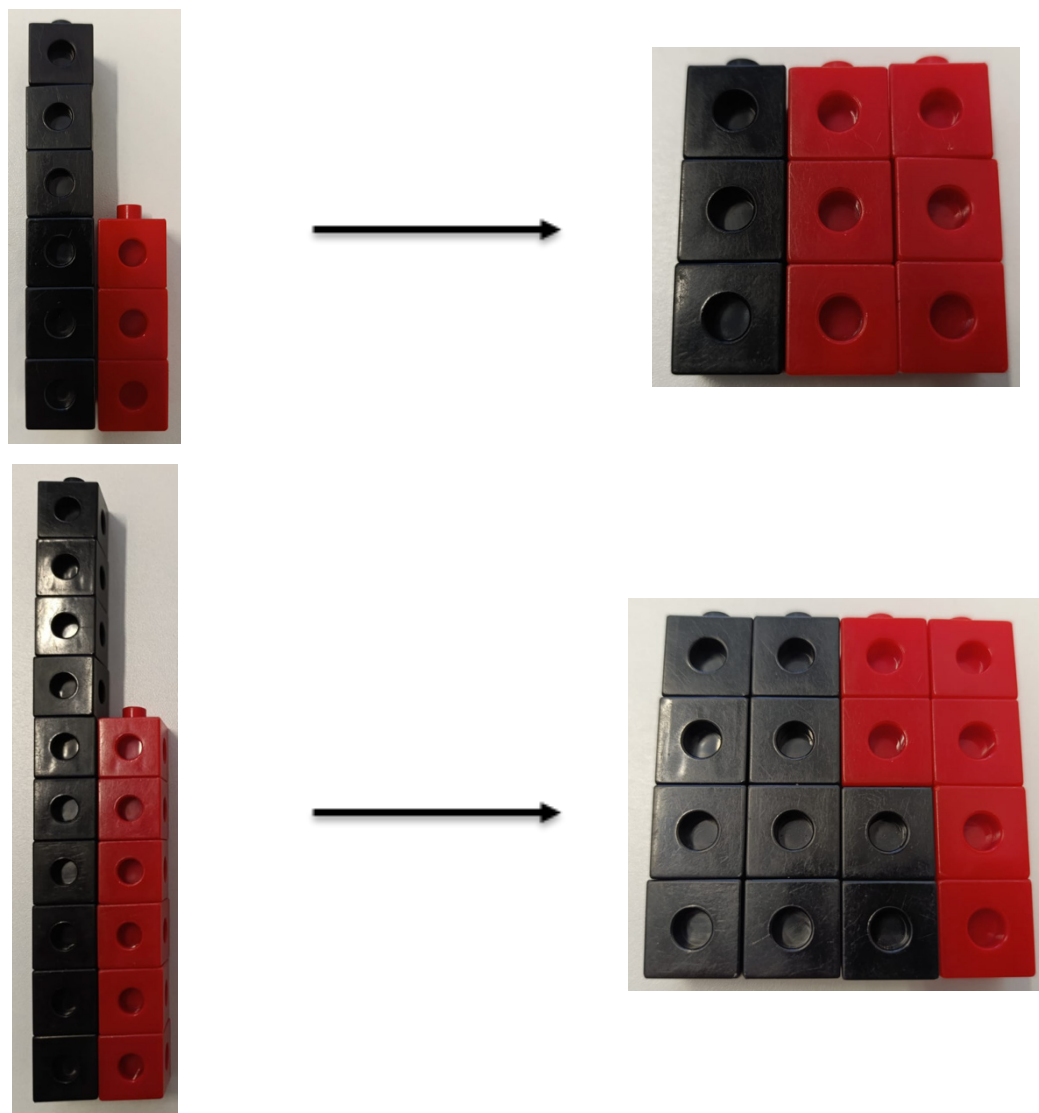


Fonte: Dados da pesquisa.

Essa conjectura emergente com o uso dos blocos levou à exploração da relação $T_n + T_{n-1} = n^2$, pois, também utilizando-se os blocos, as licenciandas verificaram que para $n = 2$, tem-se $3 + 1 = 4 = 2^2$; para $n = 3$, tem-se $6 + 3 = 9 = 3^2$; para $n = 4$, tem-se $10 + 6 = 16 = 4^2$ (ver Figura 10). Neste contexto, tendo conjecturado uma relação não prevista no material de Baron (1985), a transição entre representações visuais e simbólicas desempenhou, nesse contexto, um papel crucial na aprendizagem dos estudantes, reforçando a importância da utilização de materiais concretos e representações geométricas na introdução de conceitos abstratos (Chaves *et al.*, 2024; Martínez; Hidalgo, 2018). Os blocos funcionaram como recursos semi-óticos que condicionaram o pensamento das licenciandas, permitindo que articulassem regularidades visuais com estruturas algébricas. A manipulação dos blocos não apenas favoreceu a construção de significados, mas também possibilitou a formulação e a verificação de conjecturas.

Figura 10 - Manipulação de blocos pelas licenciandas (relação .





Fonte: Dados da pesquisa.

Outro evento crítico bastante interessante na interação da Dupla 1 neste Cenário 2 ocorreu quando começaram a explorar relações mais complexas entre os números figurados. Baron (1985) sugere trabalhar com números figurados de representação tridimensional: números cúbicos (); números figurados representados pela pirâmide de base triangular (e números figurados representados pela pirâmide de base quadrangular (). Na realidade, por meio de uma tabela, Baron (1985) propõe estabelecer várias relações entre números figurados diversos, conforme descrito na Figura 11.

Figura 11 - Resolução envolvendo representações tridimensionais de números figurados.


Escrevendo Δ (para pirâmide triangular), $\square$ (para pirâmide quadrangular), e C (para cubo), temos:

$\Delta_1 = 1$	$\Delta_2 = 1 + 3 = 4$
$\Delta_3 = 1 + 3 + 6 = 10$	$\Delta_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$
$\square_1 = 1$	$\square_2 = 1 + 4 = 5$
$\square_3 = 1 + 4 + 9 = 14$	$\square_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
$C_1 = 1$	$C_2 = 2^3 = 8$
$C_3 = 3^3 = 27$	$C_4 = 4^3 = 64$

n	T	S	R	Δ	$\square$	C	E
1	1	1	2	1	1	1	1
2	3	4	6	4	5	8	9
3	6	9	12	10	14	27	36
4	10	16	20	20	30	64	100
5	15	25	30	35	55	125	225

Fonte: Baron (1985, p. 17-18).

Tendo estabelecido essas relações entre números figurados, a questão proposta é: “(a) Expresse $S_n + C_n$ em termos de R_n ”; (b) Expresse $T_n + S_n + C_n$ em termos de $\square_n$ ” (Baron, 1985, p. 18). O diálogo a seguir e a resolução da Figura 12 contextualizam como a Dupla 1 explora essa questão envolvendo a dedução de $\square_n$ que, na realidade, diz respeito a

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Licencianda 2: A gente já sabe que $S_n = n^2$, $T_n = (n \cdot (n+1))/2$ e também que $R_n = n \cdot (n+1)$.

Mas e se somarmos o S_n e o C_n ?

Licencianda 1: Então fica $n^2 + n^3$... espera, dá para colocar n^2 em evidência, né?

Licencianda 2: Sim! Fica $n^2 \cdot (n+1)$. Olha, isso parece com R_n multiplicado por n !

Licencianda 1: Certo, então podemos dizer que $S_n + C_n = n R_n = n^2 \cdot (n+1)$. Isso faz sentido!

Licencianda 1: E se somarmos T_n , S_n e C_n ? Será que dá para simplificar também?

Licencianda 2: Vamos ver... temos $n \cdot (n+1)/2 + n^2 + n^3$. Se colocarmos tudo sobre o mesmo denominador...

Licencianda 1: Acho que dá para escrever assim: $\frac{n \cdot (n+1) + 2n^2 + 2n^3}{2}$.

Licencianda 2: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (1+2n)}{2}$. Olha, parece algo que podemos dividir por 3 para encontramos outra relação!

Figura 12 - Resolução envolvendo representações tridimensionais de números figurados.

Sabe-se por resultados anteriores que
 $S_n = n^2$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $R_n = n(n+1)$, $C_n = n^3$

a) Assim,
 $S_n + C_n = n^2 + n^3$, colocando n^2 em evidência, temos:
 $S_n + C_n = n^2(n+1)$
 Como $R_n = n(n+1)$, multiplicando por n , temos
 $n(n(n+1)) \Leftrightarrow n^2(n+1)$, assim, temos que
 $S_n + C_n = n R_n = n^2(n+1)$.

b) Do mesmo modo, tem-se que
 $T_n + S_n + C_n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 + n^3$, manipulando temos
 $\frac{n(n+1) + 2n^2 + 2n^3}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n+1) + 2n^2(1+n)}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)(1+2n)}{2}$
 $\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(1+2n)}{2}$
 Como (4) é igual a $3 \square_n$, temos que $\square_n$ é
 $\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse momento foi significativo para que, além de elaborar conjecturas com o material manipulativo, as licenciandas percebessem que os números figurados podem ser manipulados algebricamente de forma estruturada. Esse episódio mostra como a exploração de padrões numéricos pode levar à formulação de relações algébricas significativas, permitindo que os estudantes avancem na compreensão estrutural dos números figurados. A análise das interações no Cenário 2 evidencia como a exploração dos números figurados promoveu a construção de significados matemáticos por meio da identificação de padrões e da generalização algébrica. O uso de materiais concretos e representações visuais, como constatado, se mostrou essencial para o desenvolvimento da compreensão matemática dos estudantes, corroborando estudos anteriores sobre o tema (Beery, 2009; Chaves *et al.*, 2024).

| DISCUSSÃO SOBRE AMBOS CENÁRIOS

Os Cenários 1 e 2 apresentaram procedimentos distintos para a exploração dos números figurados, com diferenças significativas em termos de *design* da tarefa, perfil dos participantes e estratégias utilizadas para a construção de significados matemáticos. No Cenário 1, a investigação ocorreu com estudantes ingressantes no ensino superior Análise e Desenvolvimento de Sistemas, explorando padrões numéricos por meio da visualização com GeoGebra. Já no Cenário 2, a atividade envolveu licenciandos em matemática, que trabalharam diretamente com material teórico e manipularam representações visuais utilizando materiais concretos. Essas distinções influenciaram a maneira como os estudantes identificaram padrões e formularam generalizações (Chaves *et al.*, 2024).

No Cenário 1, a introdução aos números figurados se deu de maneira visual, com a projeção de construções geométricas feitas no GeoGebra. A abordagem adotada ofereceu meios para observação de padrões e a formulação de conjecturas a partir de sequências numéricas específicas. Além disso, a participação dos estudantes foi mediada por questionamentos direcionados pelos pesquisadores, incentivando o desenvolvimento do raciocínio indutivo. No Cenário 2, os licenciandos trabalharam de forma mais autônoma, desenvolvendo interações discursivas que os levam à descoberta de relações entre diferentes tipos de números figurados. A mediação do pesquisador aconteceu de maneira mais pontual, permitindo que os estudantes construíssem significados de forma mais independente (Chiconello, 2013).

Uma característica marcante do Cenário 1 foi o uso do GeoGebra como recurso para a visualização. Os estudantes utilizaram representações gráficas para identificar regularidades nos números triangulares e quadrados, além de elaborar hipóteses sobre os termos gerais das sequências valendo-se de desenvolvimentos utilizando lápis e papel (simbólico/escrito). Essa abordagem se mostrou eficiente para o reconhecimento de padrões, mas nem todos os estudantes conseguiram expressá-los algebricamente. No Cenário 2, por outro

lado, o foco na manipulação de materiais concretos e nas discussões entre os licenciandos possibilitou a formulação explícita de expressões algébricas. A combinação entre representações visuais e deduções algébricas fortaleceu a compreensão dos padrões numéricos e das generalizações matemáticas (Martínez; Hidalgo, 2018).

Outra diferença relevante entre os dois cenários diz respeito à complexidade das explorações realizadas. No Cenário 1, a ênfase recaiu sobre a descoberta de padrões em sequências específicas e na formulação inicial de expressões matemáticas a partir da visualização no GeoGebra. Muitos estudantes conseguiram identificar relações fundamentais, como a conexão entre os números ímpares e os quadrados perfeitos, mas enfrentaram dificuldades na transição para uma generalização mais abstrata. Já no Cenário 2, os licenciandos não apenas identificaram padrões, mas também exploraram relações entre diferentes classes de números figurados, como os números triangulares e retangulares. Essa abordagem resultou na dedução de expressões algébricas mais sofisticadas, mostrando um nível mais avançado de abstração matemática (Beery, 2009).

A dinâmica das interações entre os participantes variou entre os cenários. No Cenário 1, a interação ocorreu, principalmente, entre os estudantes e o pesquisador, que orientava as investigações por meio de questionamentos estruturados. No Cenário 2, as interações foram, predominantemente, entre os próprios licenciandos, que debatiam suas descobertas e construíam coletivamente significados matemáticos. Essa diferença sugere que o perfil dos participantes influencia a natureza das interações, sendo que estudantes mais experientes tendem a desenvolver explorações mais autônomas (Theodorovski; Oliveira, 2020).

Por fim, os resultados evidenciam que ambos os cenários proporcionaram avanços no entendimento dos números figurados, embora por caminhos distintos. O Cenário 1 demonstrou a eficácia de mídias digitais no engajamento dos estudantes de graduação em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, enquanto o Cenário 2 ressaltou a importância do discurso e da manipulação de materiais na formação matemática dos licenciandos em Matemática. Entendemos que parte significativa das diferenças nas explorações se deu pelo fato de os estudantes do Cenário 1 estarem no primeiro semestre de um curso de tecnologia e, os do Cenário 2, nos últimos anos do curso de licenciatura em Matemática. Contudo, tais diferenças refletem abordagens complementares para a construção de significados matemáticos, mostrando como diferentes metodologias podem ser utilizadas para fomentar o pensamento algébrico e a generalização de padrões numéricos (Proença, 2019).

| CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises conduzidas neste estudo nos permitem afirmar que a exploração dos números figurados por estudantes do Ensino Superior pode ser enriquecida por diferentes metodologias e recursos. Resguardadas as especificidades semióticas, tanto o uso do sof-

tware GeoGebra quanto a manipulação de materiais concretos mostraram-se eficazes para a identificação de padrões e a formulação de generalizações algébricas no estudo dos números figurados. Percebemos que o uso de tecnologias digitais favoreceu a exploração visual, enquanto a manipulação concreta permitiu um aprofundamento conceitual por meio da materialização das representações numéricas. Logo, a combinação dessas abordagens pode contribuir significativamente para a construção do pensamento algébrico e a compreensão das propriedades matemáticas inerentes aos números figurados.

Retomando nossa questão de pesquisa — como estudantes do Ensino Superior exploram tarefas matemáticas sobre números figurados? —, verificamos que os processos de investigação e descoberta desempenham um papel central na exploração dos conceitos. Os estudantes que visualizaram representações no GeoGebra apresentaram fluidez na identificação de padrões geométricos e suas conexões com sequências numéricas, enquanto os que trabalharam com materiais manipulativos demonstraram um envolvimento reflexivo na generalização dos padrões. Em ambos casos, observamos que a formulação de conjecturas foram elementos fundamentais para a apropriação do conceito de números figurados.

Apesar das contribuições do presente estudo, é importante reconhecer limitações. A primeira delas refere-se ao número de participantes e à diversidade dos contextos investigados. Como trabalhamos com um grupo específico de estudantes em dois cenários distintos, nossos achados não podem ser generalizados para toda a população de estudantes do ensino superior. Futuros estudos podem ampliar a amostra e incluir outros perfis de estudantes para obter uma visão mais abrangente das estratégias exploradas no estudo dos números figurados. Também, é necessário criar ambientes que ofereçam meios para que o caráter experimental com tecnologias potencialmente inerente à tarefa utilizada no Cenário 1 tome *corpus* para além da ênfase na visualização emergente com a projeção do GeoGebra.

Além disso, uma limitação metodológica relevante diz respeito ao tempo disponível para a realização das atividades. Embora tenhamos conseguido documentar interações ricas e significativas, um período maior de acompanhamento poderia permitir uma análise mais detalhada do desenvolvimento das habilidades algébricas dos estudantes ao longo do tempo. Pesquisas futuras podem se beneficiar de estudos longitudinais para observar como a exploração dos números figurados contribui para a consolidação do pensamento algébrico em diferentes etapas da formação acadêmica.

Por fim, destacamos que o estudo não investigou em profundidade as percepções dos estudantes sobre os desafios encontrados durante a investigação das tarefas. Embora tenhamos analisado as produções escritas e interações discursivas, entrevistas mais pormenorizadas poderiam oportunizar percepções adicionais sobre as dificuldades e estratégias cognitivas mobilizadas pelos participantes. Assim, recomendamos que futuras pesquisas considerem o uso de metodologias mistas, combinando análises qualitativas e quantita-

tivas, para aprofundar a compreensão sobre os processos de aprendizagem dos números figurados no Ensino Superior.

AGRADECIMENTOS

Ao Centro Paula Souza e a FATEC de Lins. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, processos: 307278/2022-0 e 403790/2023-9).

REFERÊNCIAS

Baron, M. E. (1985). *Curso de história da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo (A matemática grega)* (J. R. B. Coelho, R. Maier, & M. J. M. M. Mendes, Trans.). Universidade de Brasília.

Barros, F. E. (2021). *Engenharia didática sobre números figurados K-dimensionais: Relações recorrentes, termo geral, função geradora e representação por meio de recurso computacional* (Dissertação de Mestrado, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará). https://www.oasisbr.ibict.br/vufind/Record/BRCRIS_75c775656b51e65c6173673d7ca90126

Beery, J. L. (2009). Formulating figurate numbers. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 24(2), 78–91. <https://doi.org/10.1080/17498430902820879>

Bicudo, M. A. V. (1993). Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-Posições*, 4(1), 18–23.

Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: Internet e sala de aula em movimento*. Autêntica.

Bortoli, A. (2020). Saberes docentes para a conjunção entre história da matemática e tecnologias da informação e comunicação nas aulas de matemática: Análise do potencial de um curso de extensão. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 8(22), 19–33. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i22.4320>

Bortoli, A., Silva, R. S. R. da, Yassunaga, E. J. I., & Sato, N. S. K. (2023). Quadratura do círculo e cubatura da esfera com GeoGebra no ensino médio. *REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, 11(1), e23104. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16747>

Chaves, R., Neves de Andrade, F., Neto Bonfim, I., & de Souza Ellyan, J. V. (2024). Modelo dos campos semânticos e maneiras de operar: Números figurados em formação de professores. *Boletim GEPEM*, (85), 52–75. <https://doi.org/10.69906/GEPEM.2176-2988.2024.772>

Chiconello, L. A. (2013). *Números figurados e as sequências recursivas: Uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados* (Dissertação de Mestrado Profissional, Universidade Federal de São Carlos). <https://repositorio.ufscar.br/server/api/core/bitstreams/dd1370b5-59cb-45d4-8c02-7330ab3870d8/content>

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP.

- Fossa, J. A. (2020). Lectura de textos históricos en el aula. *Paradigma*, 116–132. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p116-132.id834>
- Gadanidis, G., Hughes, J., & Borba, M. C. (2008). Students as performance mathematicians. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(3), 168–175.
- Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *ECTJ*, 29(2), 75–91.
- Jesus, S. V. S. (2013). *Os números figurados e a sequência de Fibonacci no EB* (Relatório final de estágio, Universidade de Aveiro). <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/12970/1/N%c2%a6meros%20figurados%20e%20a%20sequ%c2%acncia%20de%20Fibonacci%20no%20EB.pdf>
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255–276.
- Marshall, M. N. (1996). Sampling for qualitative research. *Family Practice*, 13(6), 522–526.
- Martínez, E. C., & Hidalgo, J. F. R. (2018). Patrones en números figurados: Aplicación para la enseñanza. In *Enseñar matemáticas: Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 89–102). Editorial Atrio.
- Miguel, A. (1993). *Três estudos sobre história e educação matemática* (Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas). <https://www.repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/69654>
- Miguel, A., & Miorim, M. A. (2019). *História na educação matemática: Propostas e desafios* (3. ed.). Autêntica.
- Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, 21(2), 29–50.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, 17(21), 81–140.
- Proença, M. C. de. (2019). Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: Compreensão de licenciandos em matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(3). <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p419-437>
- Roque, T. (2012). *A história da matemática: Uma visão crítica. Desfazendo mitos e lendas*. Zahar.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 29(3), 75–80.
- Sousa, G. C. (2020). *Aliança entre história da matemática e tecnologias via investigação*

matemática. Livraria da Física.

Sousa, G. C. (2021). Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 16(37), 140–159. <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/58/57>

Theodorovski, R., & Oliveira, F. (2020). Padrões e o trabalho com sequências recursivas: Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 11(1), 219–236.

Viana, C. R. (1995). *Matemática e história: Algumas relações e implicações pedagógicas* (Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo).

Yassunaga, E. J. I., & Bortoli, A. (2024). GeoGebra: Ferramenta para explorar atividades históricas sobre números figurados desde sua representação geométrica. *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 7(4), 92–111. <https://doi.org/10.30612/tangram.v7i4.18280>

Apêndice – Información sobre el artículo

Historico editorial

Submetido: 19 de Junio de 2025.

Aprobado: 09 de Diciembre de 2025.

Publicado: 18 de Enero de 2026.

Como Citar — APA

Bortoli, A. de., Scucuglia, R. R. S., & Yassunaga, E. J. I. (2026). Explorando Números Figurados: possibilidades em Cenários do Ensino Superior. *PARADIGMA*, XLVIII(Edición Temática 1), e2026005. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2026005.id1776>.

Como Citar — ABNT

BORTOLI, Adriana de; Scucuglia, Ricardo Rodrigues; YASSUNAGA, Edwin Jun Iassanori. Explorando Números Figurados: possibilidades em Cenários do Ensino Superior. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLVII, Edição Temática 1, e2026005, Ene./Jun., 2026. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2026.e2026005.id1776>.

Conflicto de intereses

Nada que declarar.

Declaración de disponibilidad de datos

Todos los datos han sido presentados/generados en este artículo.

Derechos autorales

Los derechos de autor pertenecen a los autores, que conceden a revista **Paradigma** los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por la publicación de sus artículos en esta revista. Los autores están autorizados a celebrar contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del artículo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y primera publicación en esta revista. Los editores de la revista **Paradigma** tienen derecho a realizar ajustes textuales y adecuación normativas en este artículo.

Acceso libre

Este artículo es de acceso abierto (**Open Access**) y sin gastos de envío ni de procesamiento del artículo (**Article Processing Charges - APCs**). El acceso abierto es un amplio movimiento internacional que pretende proporcionar acceso en línea libre y gratuito a la información académica, como publicaciones y datos. Una publicación se define como de acceso abierto cuando no existen barreras financieras, legales o técnicas para acceder a ella; en otras palabras, cuando cualquiera puede leerla, descargarla, copiarla, distribuirla, imprimirla, investigarla o utilizarla en la educación o de cualquier otra forma dentro de los acuerdos legales.



Licencia de uso

Este artículo es licenciado con **Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**. Esta licencia le permite compartir, copiar y redistribuir el artículo en cualquier medio o formato. La licencia no permite utilizar el material con fines comerciales ni adaptarlo, remezclarlo o transformarlo.



Comprobación de similitud

Este artículo fue sometido a una comprobación de similitud utilizando el software de detección de texto **iThenticate** de Turnitin, a través del servicio de **Similarity Check** de la Crossref.



Proceso de evaluación

Revisión por pares a doble ciego (**Double blind peer review**).

Editor en Jefe

Fredy E. González

Editoras Convidadas

Liliane Gutierrez

Adriana de Bortoli

Publisher

Este artículo ha sido publicado en la revista **Paradigma** vinculada al Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP) del Departamento del Componente Docente de la **Universidad Pedagógica Experimental Libertador** (Núcleo Maracay). La revista **Paradigma** publica artículos de carácter técnico-científico, derivados de estudios e investigaciones que sirvan de apoyo al desarrollo del conocimiento educativo, propiciando el diálogo entre los diferentes campos de la educación. Las ideas expresadas en este artículo son de los autores y no representan necesariamente la opinión del consejo editorial o de la universidad. En Brasil, la revista Paradigma obtuvo la calificación **Qualis A1** en la **Evaluación CAPES (2017-2020)**.

