CÓMO EXPLICAR LA RELACIÓN DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO CON EL CÁLCULO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Prof. Miguel Castillo
Universidad de Carabobo

Resumen

El autor formula una serie de consideraciones epistomo-filosóficas que están implicadas en la realización de un Diseño Instruccional (D.I.) que atienda los vínculos establecidos entre el pensamiento lógico matemático (tal como lo conceptualiza Piaget) y la oportunidad calculistica en la resolución de problemas.

Palabras claves: Ingeniería Didáctica, Diseño Instruccional, Educación Matemática, Epistemología Genética, Psicología del Aprendizaje Matemático, Piaget.

Introducción

La intención dirigida a la elaboración de un Diseño Instruccional (DI) que mejore las condiciones del aprendizaje de las matemáticas requiere de un estudio minucioso, profundo y detallado del desarrollo del pensamiento. Al respecto, la psicología cognoscitiva sostiene que lo que se aprende debe ser racional y estructurado: el problema principal al cual se enfrenta el estudiante consiste en relacionar un orden exterior con un orden interior; a ello la epistemología-psicología lo denomina "cultivo de la racionalidad". El alumno y el profesor saben que el contenido conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo; pero también deben saber que hay una lógica interna del problema planteado y que el alumno puede construir ese conocimiento sin apelar a una razón didáctica impertinente; de tal manera que el docente efectúa no sólo la comunicación de un conocimiento, sino también la transmisión de "un buen problema" (Brosseau, 1981). Por ello conviene tomar una posición teórica previa antes de planificar un DI; por cuanto en la medida en la cual se logra profundizar en un hecho, en esa medida el dominio sobre el conocimiento es mayor y mejor.

Por lo tanto una didáctica que pretenda fundamentarse en la experiencia (no en el empirismo) debería destacar cuáles son las experiencias necesarias para desencadenar la actividad lógico-matemática; la empiria no proviene de los objetos, sino de la actividad sobre los objetos (Piaget, 1982). Sin embargo, también hay que tomar en consideración que si bien la afirmación anterior puede ser cierta, el conocimiento proviene de las propiedades reales de la realidad y éstas son tan importantes como las operaciones sobre el objeto de conocimiento. La planificación de un DI que permita el acceso al aprendizaje lógico-matemático es "un deseo social" e implica la "modernización" de la acción educativa. Sin embargo, los contenidos que intentan la modernización son solamente "contenidos en la preparación académica de maestros y pedagogos" y creemos que debe integrarse en la formación del docente un componente ideológico-crítico sobre el quehacer cotidiano (Colom y Mélich, 1994).

Al respecto, muchas expresiones usadas en los salones de clase son insatisfactorias. Tomemos el siguiente ejemplo:

"Si se agregan dos segmentos de rectas a y b, la longitud del nuevo segmento se obtiene agregando la longitud de b a la longitud de a". De acuerdo con Carnap (1985), en la primera parte de la expresión la recta parece ser un objeto físico y en la segunda incita a la realización de una operación aritmética. Probablemente esto se debe a que se interpreta la teoría matemática como un producto de los datos de la experiencia y, a su vez, porque consideramos la teoría como una copia de la realidad. Así mismo, una "ingeniería didáctica" inadecuada origina incomprensión en los conceptos de fracción, que se confunda el área con el perímetro, no se desarrollen conceptos como los de volumen, peso, magnitud, entre otros y así oímos expresiones como: "no sabe como lo hizo, pero el resultado es correcto". Una "ingeniería didáctica inadecuada" es simplificada por Avila (1991), de la manera siguiente (en un salón de clases):

Maestra: Esta figura es un ...	Alumnos: ¡Triángulo!
(Muestra una figura triangular)	
Maestra: Vamos a calcular su ...	Alumnos: ¡Área!
Maestra: La fórmula para calcular su área es	
su base por ...	Alumnos: ¡Altura!
Maestra: Sobre ...	Alumnos: ¡Dos!

Al respecto, Balbuena (1991), afirma que en muchos casos al enseñar la suma (o la resta) el maestro expresa que se "requiere sumar las decenas y escribir las decenas". El autor sostiene que esta lógica es desconocida por el alumno, incomprensible; no sabe el por qué, para qué y que tales acciones implican un algoritmo para la operación, pero no para la abstracción.

Un DI (ingeniería didáctica) adecuado planifica situaciones problemáticas que representan un reto para los alumnos. Al respecto, Fuchs (1969) sostiene que las expresiones lógico-matemáticas no poseen una condición espacial o sensorial, como muchos docentes suponen; afirma, además, que puede ayudarse con imágenes (que constituye una nueva manera de expresarse), y que ella misma no tiene que ser, necesariamente, abstracta; sino que probablemente posee un sustrato manifiestamente representable. Por lo tanto, la "ingeniería didáctica" debe ir más hacia lo conceptual, que el signo. Al respecto, Frege (citado por Wittgenstein, 1993) sostiene que "los formalistas confunden el signo con el significado; que las expresiones lógico-matemáticas no son solamente rayas, sino que por el contrario, poseen vida".

Retomando lo expresado por Carnap, anteriormente citado, la adición de las dos rectas es posible si se expresa en un lenguaje deductivo que implique la suma de los valores cualitativos y no las longitudes de las rectas. Las líneas son configuraciones producto de la experiencia física, y así podemos llegar a pensar que se puede realizar: $L(a + b) = L(a) + L(b)$, y por el contrario, las líneas son configuraciones producto de la expresión sensorial. Un diseño instruccional productivo en el aprendizaje lógico matemático debería considerar como importante la construcción, en el estudiante, de una epistemología previa que permita distinguir la relación que hay entre un hecho como realidad física y el aspecto normativo del pensar y así mismo, la axiomática que conduce a la solución del problema a lo que nos referimos y por lo tanto, destacamos como importante la construcción de un marco de referencia lógico-matemático previo, es decir, que el estudiante aprenda a seriar, ordenar, clasificar, establecer relaciones, identidades, etc.

Un tema de investigación importante (a mi modesto entender) en esta área del conocimiento consistente en la proposición de DI (ingenierías didácticas) dirigido a evitar los fracasos. Tal como sostiene Brosseau (1991) observamos en los docentes dos conductas características: por una parte, si los alumnos fracasan el docente tiende a proveer una "nueva oportunidad" (plantea un problema "igual al viejo") y en consecuencia, la solución se obtiene por la repetición y no por la comprensión. Por otra parte, el docente debe estar consciente que el proceso didáctico sufre también de "envejecimiento" que se observa en la repetición de los mismos procedimientos didácticos y que éstos no tienen el mismo efecto. El mismo autor observa que en aquellos procesos donde el docente interviene menos hay menor fracaso y "menos envejecimiento" (y preguntamos ¿qué se repite?: igual historia, análoga secuencia de estrategias, el mismo discurso, etc.)

La construcción de un marco de referencia lógico matemático requiere de una integración de las estructuras cognoscitivas previas a las posteriores que se adquieren a partir de las acciones del sujeto sobre el objeto y de la capacidad para discriminar las propiedades del objeto de conocimiento.

Aspectos Epistemológicos de la Resolución de Problemas

En todo problema hay un cognoscente y un objeto por conocer, un contexto y las relaciones entre estos aspectos. Un problema donde aparezcan dos, tres cantidades que hay que restar, sumar, dividir o multiplicar no es un hecho, sino que el estudiante debe hacer una demostración lógica y matemática. De acuerdo con G. Vernaud (citado por Brosseau, 1991) no hay que confundir el cálculo algebraico que permita la solución de un problema con la lógica natural en la cual se apoya esa solución. Una característica (buena o mala) es la forma común de presentar los problemas: planteamiento y pregunta y las docentes deberían pensar si esta forma tiene virtudes y/o inconveniencias. En estos problemas aparecen expresiones como: "son", "igual a", "más", "mayor que", "menor que", "entre", etc. y que el alumno debe aprender a decodificar su significado (y más aún, que el estudiante debe someterse a una normatividad).

En el caso de la sustracción no es solamente una operación aritmética donde se "restan dos cantidades"; es un proceso consistente en una serie de sub-operaciones jerarquizadas, consecutivas. Si el estudiante no desarrolla una visión globalizadora de la acción (cosmovisión), se pierde en el laberinto de las operaciones particulares y deviene el fracaso. Por lo tanto, hay que construir un DI que desarrolle la capacidad para tener presente, estar atento a la particularidad y la totalidad.

Un trabajo docente fundamentado en la realidad toma en consideración los objetos (entes matemáticos) que inventa (¿descubre?) el matemático y que éstos no se refieren a la experiencia, sino que su evidencia es puramente racional. Por ejemplo, el número es un ente abstracto. Y además, la realidad de ese "ente abstracto" requiere de algunos criterios de aceptación: no contradicción, pertenencia a una clase, intuición del objeto y, además, que la abstracción matemática es una experiencia psicológica y motivacional (afectiva). Algo que se ha observado en los docentes al planificar un DI es que su deseo de enseñar a través de las actividades familiares lo puede conducir a la sustitución de la verdadera problemática por una artificial y peor aún "presentan las dos problemáticas yuxtapuestas" y así llegan al "mejor compromiso" (Brosseau, 1991).

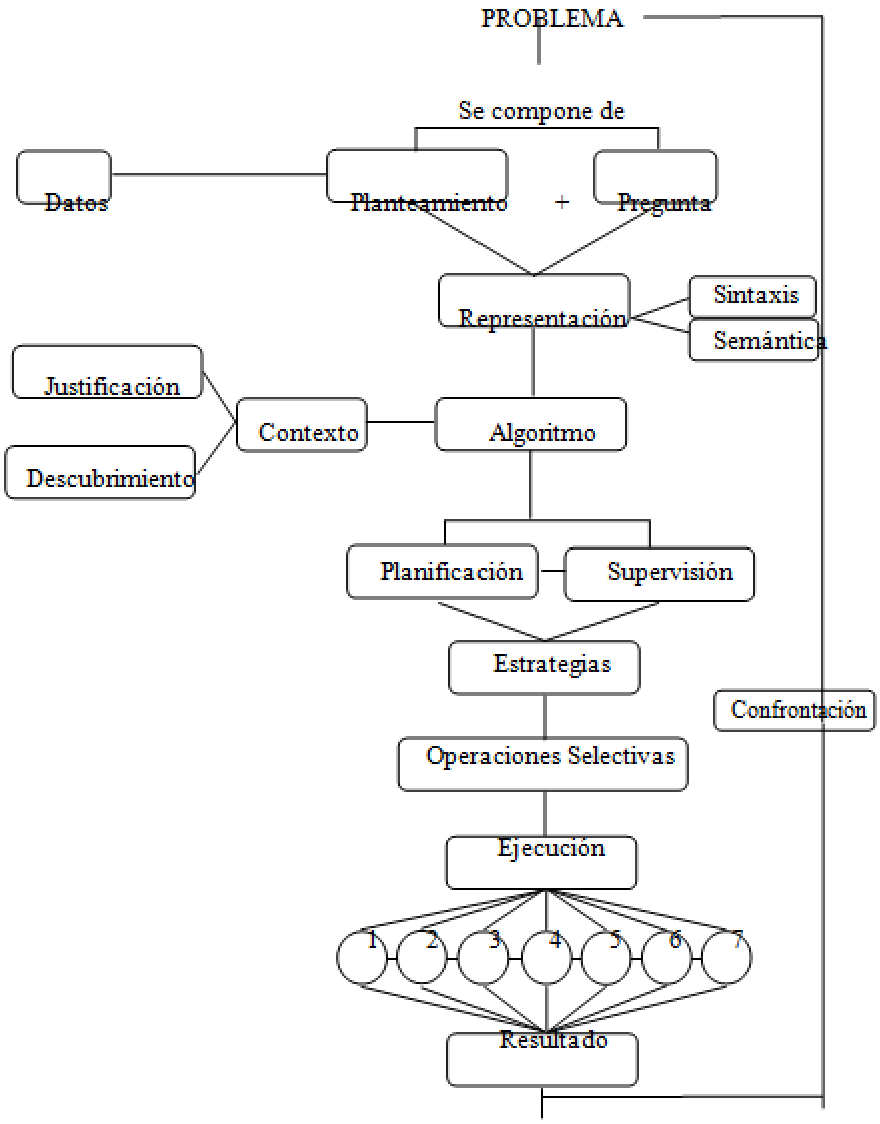
El aprendizaje debe tender al desarrollo de estructuras cognoscitivas que permitan acceder al conocimiento con el “menor trauma posible”. Sabemos que las personas están en capacidad para realizar inferencias ya que la vida mental comienza con la percepción del objeto de conocimiento (noción de número, clase, espacio, tiempo, etc.). Sin embargo, hay ciertas partes del objeto de conocimiento que los alumnos no perciben (pero puede haber una ligera sospecha de que están ahí) y si no sabe es porque no ha desarrollado la capacidad para “estar consciente” que esas partes están ahí. por otra parte esa vida mental posee la particularidad de ser solidarias con las operaciones interiorizadas (Piaget, 1974).

Por otra parte, esa vida mental de las personas es un producto de las experiencias obtenidas en unas relaciones sociales, que su conocimiento es producto de un desarrollo en el tiempo y que en el caso de las ciencias (lógico-matemática) su origen epistemológico se remonta, probablemente, hasta los griegos o antes. Es este conocimiento producido por el esfuerzo del hombre a través del tiempo el que debe ser asimilado por el alumno.

Así mismo, es importante determinar la influencia de las estructuras aprendidas mediante el lenguaje, que preparan al sujeto para resolver un problema. Conviene pensar en la influencia que pueda ejercer el desarrollo de la capacidad para ordenar, seriar, clasificar y hasta qué punto estas estructuras están relacionadas con el lenguaje. Un ejemplo de ello lo constituye la siguiente expresión, muy común en los textos: “Sea ABC un triángulo cualquiera” esta expresión no menciona un triángulo particular (isóceles, escaleno, rectángular); el estudiante debería saber que la expresión se refiere a una figura geométrica que tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y que puede ser “cualquiera”. Por lo tanto, un estudiante para poder (tener capacidad para) resolver un problema tiene que “saber escaparse de los lazos tendidos” (harpedopnates).

Al respecto, Hamwkins (1974) sostiene la imposibilidad de “enseñar” los conceptos significativos (que reducen las redundancias y ordenan la percepción del mundo). El autor afirma que el alumno puede pensar en la palabra, en el sustentivo que designa el concepto, pero que los conceptos se aprenden cuando el significado del mismo “está incluido en la economía de la experiencia personal” y por lo tanto pueden ser codificados y decodificados.

De acuerdo con lo que sabemos hasta ahora todo “lazo tendido” (problema) tiene un planteamiento y una pregunta que conforman los datos que deben, a su vez, ser confrontados. El “deshacedor de lazos” necesita “inventar y/o descubrir” una(s) estrategia(s) (algoritmo) que le permita(n) solucionar el problema. El algoritmo es un esquema general compuesto por una serie de operaciones intelectuales seleccionadas previamente. Al finalizar la solución, el estudiante necesita confrontar los resultados con los datos expresados en el planteamiento. El siguiente esquema puede que proporcione una idea más acertada de lo expresado.



Hipótesis Psicológicas para el abordaje de Problemas Tipo

A continuación describo algunos problemas-tipos y propongo algunas hipótesis psicológicas que considero probablemente pertinentes:

1. Problemas tal como: "Miguel tiene 5 lápices y José 4; ¿Cuántos lápices tienen los dos, en total; cuánto más tiene Miguel, cuántos menos tiene José?. Otro ejemplo es el siguiente: "En la cantina hay 125 refrescos, de los cuales 70 son de cola; ¿Cuántos hay de otro sabor?

El algoritmo lógico-matemático es del siguiente tipo:

$a + b = x; \qquad a - b = x$

Como se hizo énfasis anteriormente no es una "simple suma o resta", sino que en su solución están implicadas la seriación, clasificación, etc. Problemas con estas características (y más complejos) son estudiados en el Proyecto Madison bajo el algoritmo lógico-matemático: 3x - 2 = y (Davis, 1974). El autor sostiene que se les puede presentar a los alumnos problemas más complejos para que descubran parejas de números enteros mediante ecuaciones lineales, tal como:

$(0.3) + 2 = \forall$

Así mismo, los niños mediante un DI bien planificado adquieren la capacidad para resolver problemas "con variables y mediante la aritmética de los números con signos" en un contexto significativo y así llegar a resolver ecuaciones cuadráticas, tales como:

$(0.0) \ \ (5.0) + 6 = \forall$

Y progresivamente hacer más complejas las ecuaciones, tal como:

$(0.0) - (20.0) + 96 = \forall$

Para que el alumno descubra las reglas de los "coeficientes en las ecuaciones cuadráticas".

Problemas de este tipo exigen establecer la relación numérica entre dos variables: "Miguel tiene más o menos lápices que...". Los alumnos comúnmente no comprenden la relación entre los componentes del problema. Mayer (1992) cita a Hudson y destaca un experimento en el cual el segundo autor exigió a un grupo de niños resolver problemas como el siguiente:

"Hay cinco pájaros y 3 gusanos. ¿En cuánto superan los pájaros a los gusanos?"

Solamente el 64% de los niños de Primer Grado dio la respuesta correcta. pero al cambiarle la redacción por:

"Hay 5 pájaros y 3 gusanos. ¿Cuántos pájaros comerán gusanos? el 100% de los niños resolvieron el problema; es decir comprendieron el problema.

De acuerdo con Mayer (1992) los resultados nos inducen a pensar que la incomprensión de las palabras trae como consecuencia la incapacidad para resolver el problema y que si las palabras no están en el "mapa cognoscitivo" del niño se producen errores...Mayer se pregunta por qué las personas tienen dificultades para expresar la relación entre dos o más variables numéricas y responde que la causa es la inexistencia de estructuras cognoscitivas básicas (unas más que otras) y por otro lado que es más fácil establecer relaciones entre valores numéricos cuando éstos están "señalados en el problema" y que cuando el niño tiene que imaginar la relación tiende a cometer más errores.

La psicología cognoscitiva supone que muchos niños no han desarrollado las estructuras lingüísticas apropiadas para representar el problema en la memoria. Por ejemplo, Mayer (1992) cita a More, Lewis y Mayer quienes sostienen que en algunos problemas "la palabra clave" induce a realizar una operación distinta y origina un conflicto. En los problemas propuestos en el apartado 7. (Ver más adelante), la palabra "más" predispone para resolver el problema mediante una adición:

“Un obrero gana Bs. 12.400 semanalmente. Gasta Bs. 8470 en víveres. Luego gasta Bs. 450 más; cuánto le queda?

Si nos atenemos al diagrama presentado en los siguientes problemas se requiere de los pasos:

A. “Un comerciante vende un terreno de 300 m^2 a Bs. 5.300 el m^2, y recibe dos pagos adelantados: uno por Bs. 984.000,oo y otro por Bs. 563.000,oo; ¿Cuánto le adeudan?

Sintaxis — vende un terreno de 300 m^2 a Bs. 5.300 el m^2

Recibe Bs. 984.000 y Bs. 563.000

Semántica — a Bs... el m^2

Y recibe como pago adelantado...

¿Cuánto le adeudan?

Algoritmo — Es un problema donde hay que multiplicar 300 m^2

por Bs. 5.300 para encontrar el valor total del

terreno.

Supervisión Estrategias — Sumar los dos pagos adelantados y restar el valor total del terreno

Operaciones Selectivas — 300 m^2 x Bs. 5.300 = 1.590.000 (Precio total del terreno)

984.000 + 563.000 = 1.547.000 (total de pagos adelantados)

1.590.000 - 1.547.000 = 43.000 (Restar el precio total del terreno menos los pagos adelantados)

Un aspecto importante, que debe ser tomado en cuenta en el aprendizaje de estrategias para la resolución de problemas, es la representación (Bruner, 1966). Las personas, de acuerdo con Bruner, pueden representarse el mundo en términos de: una acción (Enactiva), de una imagen perceptiva estática (Icónica) o a partir del lenguaje y de los símbolos (Simbólica). La representación que exigen el problema anterior y el que sigue es del tercer tipo: la solución requiere que haya una representación sintáctica y semántica.

"Un alumno gastó Bs. 4.536 comprando dos cuadernos, un bolígrafo y dos libros. Los libros cuestan 6 veces más el valor de los cuadernos y el bolígrafo dos veces más el valor de los cuadernos; cuánto cuesta cada objeto?

Representación	Sintaxis	Un alumno gastó Bs. 4536. Compró dos cuadernos, un bolígrafo y dos libros. ¿Cuánto cuesta cada objeto?
	Semántica	...6 veces más...; 2 veces más...
Algoritmo		Problema donde hay que establecer una incógnita
Planificación		x valor de los cuadernos.
Supervisión		Hay que establecer los productos: 6 veces más, 2 veces más. Se suman las incógnitas y resulta 9x. Se divide Bs. 4536 entre 9 para encontrar el valor de los 2 cuadernos = Bs. 504. El valor de los libros es 6(504), es decir 6 veces más el valor de los cuadernos. El valor del bolígrafo es 2(504), es decir 2 veces más el valor de los cuadernos.

2. En problemas tal como el que sigue: "Miguel tiene Bs. 243 gasta cierta cantidad y le quedan Bs. 120; ¿cuánto gastó (le queda)?. Un problema de este tipo representa un algoritmo lógico-matemático como el que sigue.

$a - x = b; x - a = b$

La solución de un problema de este tipo requiere el desarrollo de estrategias cognoscitivas como la clasificación y reconocer que la resta es una operación inversa de la suma (reversibilidad).

3. Problemas representados en el algoritmo lógico-matemático, tal como:

$a + (a + b) = x$; $a + (a - b) = x$; $a + ab = x$

Ejemplos de estos problemas son: “Carmen necesita 10 cuadernos y Luisana 2 más (o 2 menos); ¿Cuántos cuadernos necesitan en total”?.

“Dayana tiene una caja con 6 colores y Julia una caja con 2 veces más colores (2 veces menos); ¿Cuántos tienen en total?

Un problema con estas características no puede ser resuelto en una sola operación. Para solucionarlo es necesario hallar el segundo término. El estudiante debe desarrollar la capacidad para reconocer que los datos por sí solos no determinan la solución. Así mismo, desarrollar la capacidad para discriminar una redacción simplificada de los datos y sustituir el valor relativo de los mismos por su valor absoluto (“2 veces más”), lo que, en muchos casos, confunde y lo induce a aplicar un algoritmo deformado:

En lugar de $a + (a.2) = x$; lo soluciona mediante un $a + b = x$.

4. Problemas cuyo algoritmo lógico-matemático representativo es del tipo:

$a + n = x$; $x + m = Z$; $a + (a + b) + (a + b) - c = x$

El siguiente ejemplo (aproximado) aparece comúnmente en pruebas para evaluar a quienes desean ingresar en alguna institución y así medir su inteligencia numérica abstracta: “Esther tiene 15 años, su mamá 25 años más que ella, su papá 5 años menos que la mamá; ¿Cuántos años tienen los tres?. Otro ejemplo: “Un constructor está fabricando 3 casas. Cada uno de los dueños le pagan Bs. 150.000,oo. Le paga a los obreros un 25%; ¿Cuánto le queda?

En este caso, el alumno necesita desarrollar un algoritmo compuesto por una serie de operaciones (estrategias) que siguen una secuencia (orden) determinado y cada una de las operaciones depende de la que le precede. El alumno necesita tener almacenado en la MLP (Memoria a Largo Plazo) la operación precedende y llevarlo a la MCP (Memoria a Corto Plazo), por cuanto es el punto de partida de la subsiguiente. Exige la conservación de las estructuras cognoscitivas (equilibrio) y un encadenamiento (seriación, orden). Sin embargo, el almacenamiento del contenido no es suficiente para obtener el logro en la solución de un problema. La psicología cognoscitiva supone la existencia de un mecanismo que guía la búsqueda de los contenidos y que permite, a su vez, relacionar las estructuras cognoscitivas cuando no se almacena de la manera prevista.

El primer problema mencionado en supra 4 exige una serie de operaciones homogéneas de adición o sustracción (si tal es el caso) y el segundo de diversas estrategias (división, sustracción, multiplicación).

5. Problemas tales como: “Un niño tiene 5 años. Dentro de 15 años su padre será 5 veces mayor que él; ¿Cuál es la edad actual del padre?” En problemas de este tipo (que también se observa en pruebas de selección e ingreso) quien resuelve necesita aplicar algoritmos lógico-matemáticos como el siguiente:

$a + b = x$; $x.m = y$; $y - n = z$ (inversión)

El alumno necesita combinar los elementos desconocidos y relacionarlos con operaciones auxiliares. La respuesta no se deduce inmediatamente. Lograr la edad del padre es posible si previamente se calcula la edad del hijo al término de un tiempo determinado (5+15) y realizar (5+15)3 = x. El resultado es producto de una serie de operaciones (estrategias cognoscitivas) auxiliares y abstractas. En el caso de x.m = y un ejemplo sería el siguiente: “En una caja hay 24 lápices; ¿Cuántos hay en 89 cajas?

6. Existe un grupo de problemas que requieren la confrontación de dos ecuaciones y el uso de una estrategia auxiliar. Los dos ejemplos siguientes son representativos de lo que estamos exponiendo: “Un bolígrafo y un cuaderno cuestan Bs. 780; dos bolígrafos y un cuaderno cuestan Bs. 1170; ¿Cuánto cuesta un bolígrafo y un cuaderno?. Otro ejemplo: “Tres pescadores han recogido 410 kilos de pescado, el primero y el segundo han pescado 280 kilos; el segundo y el tercero 240 kilos; ¿Cuánto ha pescado cada uno?

En estos ejemplos todas las magnitudes son incógnitas. El “deshacedor de nudos” necesita pensar que la solución es por la vía de las ecuaciones. La solución a una incógnita se obtiene mediante estrategias cognoscitivas auxiliares (sustracción del total, adición de los resultados, cálculo del total y sustracción del resultado último). El algoritmo necesita la conservación del conjunto y luego plantear una serie de operaciones auxiliares.

Los algoritmos son de los tipos:

$x + y = a$; $n . x + y = b$; $x + y + z = a$; $x + y = b$; $y + z = c$

7. Muchos problemas se redactan de tal manera que el algoritmo aprendido entra en conflicto (contradicción) con un problema tipo (estereotipo) previamente aprendido. La solución requiere que el estudiante triunfe sobre el estereotipo. Los siguientes ejemplos son característicos: “Un padre tiene 49 años; tiene 32 años más que su hijo; ¿Cuántos años tienen entre los dos (cada uno)? Otro ejemplo es el siguiente: “Un obrero gana Bs. 12.400 semanalmente. gasta Bs. 9740 en víveres. Luego gasta Bs. 450 más; ¿Cuánto le queda? La palabra “más” predispone para realizar una adición; pero la disposición de los datos converge para una operación inversa. Otro ejemplo es el siguiente:

"Un pedazo de madera mide 2,5 mts. y produce una sombra de 7,5 mts.; ¿Cuántas veces es más larga la sombra que el trozo de madera?". La redacción del problema y el aprendizaje mecánico conducen al alumno para que realice una división (7,5 mts. : 2,5, mts); sin embargo, un detallado análisis del planteamiento del problema necesita de la interpretación del "valor relativo" de lo más largo" (7,5); separarse de los objetos concretos (abstraer los objetos madera y sombra) y representarse la longitud como una magnitud. El alumno debería adicionar a la longitud de la madera el "más largo". La dificultad fundamental consiste en liberarse del estereotipo ("problema tipo"); la decodificación de los datos y luego plantear una estrategia de solución (algoritmo).

8. Una "ingeniería didáctica" adecuada diferencia el lenguaje cotidiano del lenguaje lógico-matemático (formal). Citemos el siguiente ejemplo; "cuando tengo hambre, busco comida" Si requerimos la transformación de esta expresión lo hacemos de la siguiente manera:

"cuando tengo hambre" lo sustituimos por y construimos
(X) → "X, entonces, Y"

"busco comida" lo
sustituimos por (Y)

Es decir, convertimos las expresiones en "variables" (símbolos cuya significación no está definida). Al respecto, H. Poincaré afirma que la ciencia matemática no tiene por objeto explicar la naturaleza de las cosas. Su objetivo consiste en enlazar las leyes que nos permiten estar conscientes de la experiencia y que no podríamos expresar sin la ayuda de las matemáticas (citado por Fuchs, 1969). Una característica fundamental del lenguaje matemático es que debe carecer de ambigüedad, hay una cierta ordenación, una axiomática (Ej: "latice" significa para todos los matemáticos "unión" y así queda entendido). Por otro lado un concepto matemático es una herramienta que debe efectuar un trabajo muy bien definido, eficiente y eficaz. Al respecto, Wittgenstein afirma que "la profundidad de la razón del significado corresponde a la profunda necesidad de un convenio construido" (que podría constituir un "lenguaje sociológico").

9. Algunos problemas requieren, para su solución, el planteamiento de un algoritmo lógico-matemático como los siguientes:

$X + Y = A$; $X = XY$; $X - Y = A$; $X = Y - Z$

Ejemplo de algunos problemas: "En 2 cajas hay 184 lápices. Una de las cajas contiene 2 veces más que la otra; ¿cuántos lápices hay en cada caja?" Otro ejemplo: "En 2 recipientes hay 24 litros de agua. Uno de los recipientes contiene 3 litros más que en el otro; ¿cuántos litros hay en cada uno?"

El primero de los problemas se resuelve calculando el número de lápices y luego se consiguen las tres supuestas partes; para ello se requiere que el "deshacedor de nudos" elabore una estrategia cognoscitiva auxiliar, arbitraria y abstracta y así superar la tendencia a resolver el problema por operaciones directas y sin aplicar la abstracción.

En ambos problemas el alumno necesita encontrar las diferencias entre un algoritmo previamente aprendido y otro que tiene que ser creado. Así mismo, descubrir una estrategia cognoscitiva que conduzca a la solución del problema. El requiere de un análisis detallado de las operaciones que involucran la totalidad del proceso.

Deficiencias Cognitivas en la Resolución de Problemas y como superarlos

Previo a los próximos planteamientos conviene hacer la siguiente observación: La psico-neurología sostenida por A.R. Luria (1980) intenta explicar que ciertas lesiones físicas ocasionan un déficit intelectual. La psicología cognoscitiva sostiene que si no se han desarrollado las estrategias pertinentes se producen los "fracasos escolares". Ambas teorías postulan que mediante una "ingeniería didáctica" pertinente se pueden superar esos déficits.

Todo proceso para "deshacer un lazo tendido" y llegar al éxito requiere que el actor real describa cómo se representa los datos del problema y la pregunta del mismo: necesita conservar los elementos esenciales que incluye la percepción y representación de las correspondencias (uno a uno, uno a varios), si ordena las partes en una totalidad (síntesis de los elementos); por otra parte, si conserva la pregunta principal, si reproduce los datos perfectamente. Si existen estas deficiencias se observa que el alumno repite oralmente o en su mente (ecolalia) los datos y no resuelve el problema. Por lo tanto, conviene a los intereses del aprendizaje la conservación de los datos, la pregunta, la orientación del acto y no menos importante es la actitud para proceder a la solución del problema. Todo quien pretenda "deshace lazos tendidos" necesita inventar, crear o descubrir un proyecto de solución del problema. Comúnmente un proyecto de esta naturaleza presenta tres tipos de fallas que deben ser descubiertas por el docente y el alumno para que sean subsanadas. Nos referimos a deficiencias en el intelecto tales como: en la ejecución de la operación, en la conservación de la totalidad de los elementos y la formulación, en el plano del lenguaje, de los datos del problema.

Una deficiencia común en los alumnos es la incapacidad para formular un plan e intentar resolver el problema directamente. Por otra parte, puede pretender realizar la solución reemplazando las operaciones pertinentes por un estereotipo, el docente y el alumno deben estar atentos ante la aparición de "ruidos" que desvían la atención y conducen al "enrarecimiento del contexto". Por todo ello se recomienda que se "tome conciencia" del algoritmo que soluciona el problema y de los errores cometidos.

En conclusión, un DI es una guía para que los alumnos tomen conciencia de: la solución pertinente, para que realicen un análisis detallado, sistemático, de las estrategias cognoscitivas viables y de los errores cometidos. Así mismo, este DI debe estar en capacidad para detectar la incapacidad para responder a la pregunta, para no dar razones pertinentes de las estrategias lógico-matemáticas y cognoscitivas, para descubrir las repeticiones redundantes (ecolalia) y mecánicas, incapacidad para confrontar los datos y los resultados (Ej: "Edad del capitán") y aquellos alumnos que muestran que no son conscientes de los errores.

Ahora bien, el DI debe estar en capacidad para proponer las estrategias de Enseñanza y Aprendizaje que le permitan al alumno tomar conciencia, analizar al algoritmo y representarse el contexto del problema. Esto es posible si el docente desarrolla la suficiente capacidad para constatar las deficiencias e investigar las estrategias cognoscitivas y lógico-matemáticas que conducen a los logros prometidos. Un docente-investigador indaga sobre la evolución de esas deficiencias y también el desarrollo de las estructuras antes mencionadas; y si existe una deficiencia, propone, entonces, una alternativa que le permita a los alumnos la "compensación de los errores". Todo ello es posible si el DI asegura la "correspondencia entre las estrategias de enseñanza-aprendizaje compensatorias y las estructuras que no han sido desarrolladas" (Luria, 1991).

En cuanto al hecho lógico-matemático, el docente-investigador debe realizar un análisis detallado del desarrollo de estas estructuras para "superar el hueco" dejado por un DI que ha sido realizado sin pertinencia. De tal manera, que el DI puede constituirse en una herramienta de investigación del pensamiento en la actividad lógico-matemática. El docente-investigador estudia las transformaciones sufridas por las estructuras lógico-matemáticas y no solamente las deficiencias. Supongo que podría elaborarse, así mismo, un DI como "método para la compensación de las deficiencias y los errores". Un programa definido así postula las intenciones de la institución y de las personas involucradas en el proceso compensatorio, realiza un análisis de las tareas y contenidos y propone, rigurosamente, las operaciones que implican la solución del problema como una totalidad.

Una investigación planteada así puede muy bien mostrar las causas de la incapacidad, donde están (en el docente, en la docencia, en el alumno), permite establecer las relaciones pertinentes entre los elementos del pensamiento en un sólo hecho". Esta capacidad es primordial para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Así mismo, para que los alumnos logren la ordenación, seriación y clasificación es necesario "tomar conciencia" de esas estructuras, es decir, realizar una seriación, ordenación y clasificación al interior (Luria, 1981 y Piaget, 1987). Por ejemplo, en el caso de la adición y sustracción para "llevar" y "pedir prestado" es necesario que el alumno "tome conciencia" de "el número que viene del lado derecho" y que se le asigna a la cantidad del lado izquierdo (Luria, 1981).

El lenguaje constituye una vía universal para la transmisión del conocimiento lógico-matemático y una herramienta auxiliar en el desarrollo de las estructuras cognoscitivas pertinentes. Por ello es necesario encontrar una estructura lingüística ajustada a la experiencia y que le permita al alumno explorar el contexto del problema. Por ello, enseñar-aprender implicaría la elaboración de un DI que trae como consecuencia la comprensión e interrelación de los conceptos lógico-matemáticos.

Una línea de investigación importante, para el docente, lo constituye la indagación de la importancia del lenguaje en la adquisición de los conceptos lógico-matemáticos. La percepción y la representación del lenguaje podría indicar el éxito o el fracaso en la solución de un problema; de tal manera que la eficacia y la eficiencia en la solución del problema tan aparentemente sencillos como los de adición y sustracción depende de la capacidad para comprender los conceptos lógico-matemático fundamentales (Resnick y Ford, 1990).

Tal es la importancia adquirida por el lenguaje que la psicología cognoscitiva ha volcado gran parte de su investigación sobre la "memoria semántica" y postula la "teoría de redes" que intenta explicar el almacenamiento y la organización del conocimiento. La "teoría de redes" sostiene que el conocimiento se organiza en estructuras jerárquicas (de lo particular a lo general y viceversa) y relacionadas.

El hecho más importante que tiene relación con lo que se está exponiendo es la relación pertinente entre las estructuras cognoscitivas más generales y las estructuras de cálculo. Por lo tanto, Resnick y Ford, (1990) afirman que parece probable "que las matemáticas, dado su contenido relativamente más estructurado y transparente, es un pertinente campo para que la psicología establezca un contacto fructífero con la instrucción". Los estudios sobre la representación y las estructuras lógico-gramaticales trae a colación que los alumnos pueden resolver un problema aplicando el cálculo respectivo, pero si comprenden esos contenidos las dificultades y fracasos son menores.

De acuerdo con Luria (1991) la comprensión de las estructuras lógico-matemáticas mejora si se comprenden las relaciones entre las palabras. Las palabras son "síntesis simultáneas de los significados" y Piaget (1992) está de acuerdo en que las estructuras cognoscitivas se expresan en un código lingüístico, lógico y matemático. Un planteamiento como este no debe soslayar la importancia de la especialización hemisférica y metáfora en el aprendizaje lógico-matemático. Al respecto, Williams (1996) escribe que el pensamiento metafórico "Es la capacidad para establecer conexiones entre dos cosas diferentes reconociendo que en cierto modo comparten un rasgo común..." Así mismo, que los buenos maestros ayudan a sus alumnos a través de la metáfora. Por lo tanto, los docentes deberían desarrollar una capacidad para producir eficaces y eficientes metáforas.

En cuanto a la especialización hemisférica o especialización de ciertas "zonas" del cerebro, el docente debería explorar el conocimiento que sobre este aspecto ha investigado la psicología, psiquiatría y neurología.

En cuanto a las deficiencias muchos alumnos muestran incapacidad para:

1) Retener los datos del problema.

2) Confrontar continuamente (seriación) las operaciones que realiza (lo primero con lo segundo, éste con el tercero, etc.)

3) Percibir y representarse el elemento alterado.

4) Captar el sentido del problema (no establecen el orden entre la lógica gramatical y los elementos lógico-matemáticos).

5) Comprender la construcción de los problemas (si hay una comparación, una atribución o una proposición). Por ejemplo: "x es más grande que..."

El contexto de los problemas se expresan y se han expresado comúnmente de una manera muy particular, una manera lógico-gramatical muy especifica. En los mismos se puede apreciar que existen ciertas relaciones entre el lenguaje y las estructuras lógico-matemáticas. Como ejemplo: más, menos, mayor que, menor que, cuantas veces, etc. que expresan adición, sustracción, multiplicación o división. Los alumnos deben aprender a interpretar el contexto de la expresión para saber qué hacer.

Los elementos del problema (planteamiento + pregunta) constituye el entorno: los alumnos necesitan percibir, representarse y poner a su disposición el entorno y si éste está bien estructurado debería sugerir las estrategias (algoritmo) cognoscitivos y lógico-matemáticos que se requieren. Hay diferencias sustanciales entre las dos siguientes expresiones: "Resolver $2x + x - 5 = 0$, que descubrir los números naturales que satisfacen la siguiente ecuación: $2x + x - 5 = 0$".

Si el entorno sugiere lo que el alumno debe hacer, él debe poseer la capacidad para discriminar entre lo que se sugiere y lo que realmente debe hacer. Resnick y Ford, (1990) sostienen que el alumno "tiende a pensar en los objetos en función de los usos establecidos" y ello restringe la aplicación de los objetos lógico-matemáticos a situaciones nuevas.

El entorno social (sociológico) incluye la acción del docente, del alumno y la representación de la situación puede inducir a confusiones terribles en la enseñanza y el aprendizaje. Al respecto, Brosseau (1986) estudia dos clases de efectos: "Topaze" y "Jourdain". Los docentes intentan obtener la máxima significación para el mayor número de alumnos y en consecuencia el conocimiento tiende a desaparecer y; por otra parte, algunos docentes tienden a evitar la confrontación de los conocimientos e intentan "reconocer en cualquier respuesta banal", simple la existencia de un conocimiento Abstracto-formal y el alumno se asombra: ¿Lo hice?, ¿Lo dije?. El ejemplo presentado por el autor es el siguiente: Un alumno manipula unos objetos y el docente le dice: "Acabas de descubrir un Grupo de Klein". En estas situaciones en la mente de los alumnos debe existir el siguiente pensamiento: "Lo resolví, pero no sé como lo hice". Probablemente es porque no hay conservación, ni atención, la actividad no está dirigida a un fin, no hay una actividad selectiva; no hay, en definitiva, un plan de resolución del problema.

Así mismo, no se puede descuidar, en relación con el entorno, las soluciones "descabelladas", incongruentes, insólitas. El Grupo de Brousseau tiene una investigación muy particular sobre "los problemas y soluciones absurdas". Tal es "La edad del capitán". Se plantea a los alumnos el siguiente problema: "En un barco hay 26 ovejas y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?". Muchos alumnos respondieron sumando 26+10 y muy pocos respondieron que el problema no se puede resolver porque es "absurdo": la pregunta no tiene relación con el planteamiento.

Muchos problemas redactados según el estereotipo que siempre aparece en los textos requieren la decodificación de la estructura lógico-gramatical; lo cual exige la elaboración del significado, de la relación entre las palabras. De acuerdo a la hipótesis aquí planteada es lógico suponer que si no se han desarrollado las estructuras cognoscitivas previas pertinentes el proceso de solución del problema queda seriamente perturbado.

Si existe una deficiencia un DI debe prever el desarrollo de la capacidad para decodificar el significado, la semántica del problema; por un lado y por otro, la confrontación de las operaciones de cálculo y corregir los errores. Tener presente cada una de las operaciones que el estudiante debe realizar conduce al diagnóstico de las deficiencias.

Para finalizar muchas veces hemos escuchado que los alumnos con deficiencias lingüísticas expresan "que les faltan palabras" para explicar las estrategias utilizadas y por ello puede utilizar como 'escape" la mecanización de los hábitos del cálculo, sin tomar consciencia de los mismos. Tomemos como ejemplo los siguientes problemas:

"Una compañía envía 5 cargas de frutas al mercado, cada vehículo transporta 2500 kgs; ¿Cuántos Kgs. de frutas se han enviado?"

"Una compañía envía 5 cargas de frutas al mercado, cada vehículo transporta 1700 Kgs.; ¿Cuántos Kgs. ha transportado cada vehículo?

"Mi mamá compró 3 Kgs. de harina, vuelve y compra 2 veces más que la primera vez y también compra 24 Kgs. de tomate; ¿Cuántas veces más tomate que harina ha comprado?

En el primer problema la solución consiste en realizar una adición, en el segundo una división, sin embargo, la similitud en la redacción puede conducir a realizar una adición. En el tercero la redacción (no es como los problemas "tipo") puede inducir a realizar una operación contraria a una combinación de operaciones.

Bibliografía

Avila, A. (1991) Reforma a las matemáticas en Primaria. Lo Posible y lo Necesario. **Educación Matemática. 3**(3).

Balbuena, H. y Otros. (1991) Reflexiones en torno a la modernización educativa. El caso de las matemáticas en los primeros grados de primaria. **Educación Matemática.**

Brosseau, G. (1991) Fondements et Methodes le Didactique de Mathematiques. **Rechercher en Didactique de Mathematiques**. Grenoble. La Pensée Savage. Vol 7. N° 2. (Mimeografiado).

Carnap, (1985) **Fundamentación lógica de la física**. Orbis.

Colom, A.J. y J-V. Mélich (1994). **Después de la modernidad**. Paidós.

Davis, R. (1974) El descubrimiento en la enseñanza de la matemática. **Aprendizaje por descubrimiento. Evaluación Crítica**. Trillas.

Fuchs, W. (1969). **El libro de la matemática moderna**. Omega.

Hamwkins, D. (1974) Cómo aprender lo que no se puede enseñar. **Aprendizaje por descubrimiento.** Trillas.

Luría, A.R. y L.S. Tsvetkova. (1981). **La Resolución de problemas y sus transtornos.** Fontanela.

Mayer, R. (1992) **Problem Solving, Cognition.** W.H. Freeman and Co. NY.

Piaget, J. (1974). **Estructuralismo**. Orbis.

Piaget, J. (1982) El punto de vista de Piaget. **Lecturas de Psicología del Niño**. Comp. Juan DelVal. Tomo 1. Alianza-Universidad.

Resnick, L.B. y W.W. Ford. (1990). **La Enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.** Paidós. MEC.

Vernaud, G. (1979) Validez de la obra de Juan Piaget. **Dossier Wallon-Piaget.** Gedisa.

Williams, L.V. **Aprender con todo el cerebro. Estrategias y modos del pensamiento: Visual, metafórico y multisensorial.** Martínez-Roca (1996).

Wittgenstein. L. (1993). **Cuaderno Azul**. Tecnos.

EL AUTOR
Miguel A. Castillo
M.S. en Educación de Adultos
Especialista en Docencia en Educación Superior
Docente Jubilado, Universidad de Carabobo

Datos de la Edición Impresa Original

Castillo, Miguel (1997, Junio). *¿Cómo explicar la relación del pensamiento lógico matemático con el cálculo en la resolución de problemas?*. Paradigma, Vol. XVIII, Nº 1, Junio de 1997; 109 - 136