

CONCEPCIÓN INTEGRAL PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LOS DIFERENTES NIVELES DEL SISTEMA EDUCATIVO

Castor David Mora
Universidad Nacional Abierta

Resumen

El presente trabajo pretende continuar el desarrollo de un Esquema Conceptual para el Aprendizaje y la Enseñanza de la Matemática en la Escuela Básica y en la Escuela Secundaria. Para ello se reflexiona sobre dos grandes campos de aprendizaje: el cognitivo-motor y el psicosocial. Ellos a su vez están constituidos, en un segundo nivel, por el aprendizaje de contenidos especiales, el aprendizaje metódico y operativo y el aprendizaje afectivo y ético. Estos tres objetivos concatenados entre sí serán logrados, por una parte, mediante la implementación práctica de un aprendizaje orientado en el desarrollo de métodos y en la resolución de problemas fuera y dentro de la matemática; y por otra parte, mediante un aprendizaje basado en la interrelación social y comunicacional entre los participantes en el proceso de educación matemática. Esta concepción del proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática conlleva a la elaboración de un segundo esquema práctico, el cual ayuda a la materialización del proceso dentro de un contexto social específico, con la participación de un grupo determinado de individuos y en confrontación con el objeto y el sujeto de aprendizaje. Ese segundo esquema, cíclico, detalla seis estaciones no necesariamente únicas y fijas que permiten probablemente un adecuado tratamiento de la matemática escolar en nuestras instituciones educativas.

Palabras Clave: Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática, Esquema Conceptual, Esquema Cíclico.

Abstract

This research aims to follow the development of a conceptual diagram for learning and teaching of mathematics in the elementary and secondary school. For that, it is reflected on two big learning fields, the motor-cognitive and the psycho-social. At the same time they are constituted, in a second level by the learning of special contents, the methodical and operational learning, and emotional and ethical learning. These three objectives chained to each other will be achieved, in one way, by means of practical carrying out of learning in the development of methods and in solution of problems inside and out of mathematics; and in another by using a learning based on social and communicative relationship among participants, in the process of mathematic education. This understanding of the process in learning and teaching mathematics entails in making a second practical diagram, which it helps to materialize the process inside a specific social context, with participation of a certain group people and in confrontation with the object and subject of learning. This second diagram, cyclical, gives details of six stations, no uniques and permanents necessarily that probably allows a right treatment of school mathematics in our educative institutions.

Key Words: Learning and Teaching of Mathematics, Conceptual Diagram, Cyclical Diagram.

Introducción

Los alumnos que se inician en la escuela primaria vienen con diferentes expectativas y esperanzas, pero todos quieren aprender y además desean descubrir un mundo lleno de sorpresas, de conocimientos e inquietudes. Ellos saben que con el inicio escolar se abre en sus vidas una nueva etapa, la cual requiere cierta dedicación y seriedad. Esa entrada a un nuevo mundo y a una nueva realidad, más sistemática y

más comprometida, también está llena de miedo y de preocupaciones. Ellos, tanto niñas como niños, se tienen que encontrar con vicisitudes, incomprensiones y sobre todo con otros alumnos más grandes y experimentados, conocedores del medio y de sus contradicciones. Tienen miedo por lo nuevo y desconocido, pero seguramente más miedo por las exigencias y por la posibilidad siempre presente de no rendir lo suficiente tal como lo esperan sus maestros y sus padres. Miedo a defraudar a los suyos y al medio social donde frecuentemente se les recrimina y en muchos casos se les maltrata (Mora, 1998a).

Todos saben que la escuela es una institución importante y que a ella se le ha de prestar adecuada y considerable atención. Ellos saben que todos o por lo menos casi todos los seres humanos la deberían visitar, ya que muchos de sus conocidos, amigos y familiares han estado vinculados directa o indirectamente con ella. Gran parte de la sociedad se mueve de alguna manera alrededor de la escuela, puesto que los medios de comunicación reflejan, de manera negativa en la mayoría de los casos, el acontecer educativo nacional. La escuela se convierte entonces para los nuevos alumnos en un mundo donde se desarrolla el aprendizaje y donde tiene lugar un proceso de relación entre seres humanos con una multiplicidad de características e intereses que necesariamente los maestros y profesores deberían tratar y observar con mucho cuidado y detenimiento, ya que en los alumnos se manifiestan más las diferencias que las similitudes (Sylvester, 1998). A pesar de estos elementos existen algunos aspectos muy importantes que se deberían tomar en consideración para el reforzamiento del aprendizaje matemático de nuestros alumnos, fundamentalmente en las dos primeras etapas de la escuela básica o educación primaria. Hemos observado que muchos de los maestros inician sus actividades de enseñanza, acertadamente en la mayoría de los casos, relacionándolas con las experiencias y el mundo de los alumnos, como por ejemplo el tratamiento de contenidos matemáticos en relación con el número de alumnas y alumnos en la clase, cantidad de personas en su mundo familiar, distancia entre la escuela y sus hogares, precios de algunos artículos de consumo cotidiano, edad, tamaño, disposición de dinero, deportes, etc.

Estas observaciones que hacemos de manera asistemática, al igual que la variedad de opiniones generalizadas en nuestro medio educativo, no están alejadas de los resultados obtenidos en trabajos de campo por parte de muchos investigadores dedicados al estudio sistemático del proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática en los tres primeros años de la escuela primaria¹. En algunas de esas investigaciones se pone de manifiesto el hecho de que las alumnas y los alumnos principiantes disponen de competencias matemáticas significativas que necesariamente han de ser tomadas en consideración por los planes de estudio, los libros de texto y las actividades de aprendizaje y enseñanza planificadas por maestros y profesores en su trabajo cotidiano (Mora, 1998a). Por supuesto que no todos los niños viven las mismas experiencias y tampoco manejan los mismos conocimientos básicos previos. Aquí se debe prestar principal atención a las diferencias individuales, intereses y características de los alumnos en correspondencia con sus vivencias en su medio familiar y ambiental. Esta no ha de ser una tarea exclusiva de los maestros y profesores, sino también responsabilidad ineludible de los miembros de la familia en su conjunto y de otros sectores importantes de la sociedad como los medios de información, quienes también deben contribuir constructivamente al crecimiento educativo y matemático de la población.

¹Ver, por ejemplo los siguientes autores: Schmidt, 1982; Schmidt / Weiser, 1982; Grassmann y otros, 1995; Hengartner / Röthlisberger, 1995.

Las experiencias matemáticas de las niñas y de los niños están estrechamente vinculadas con sus contextos y acciones fuera y dentro del aula donde tiene lugar comúnmente el proceso de aprendizaje y enseñanza. De esta manera, no se puede hablar, en forma general, de competencias matemáticas previas, sin hacer referencia a las especificidades concretas en cada caso particular. Matematizar problemas de la vida cotidiana en la primaria requiere necesariamente de un proceso de aprendizaje previo o paralelo (Mora, 1998b), para el cual no están preparados los alumnos que se inician en la escuela. Esto lo han vivido y lo han experimentado la mayoría de los maestros y profesores que intentan relacionar la matemática con situaciones reales propias de sus alumnos. Una de las tareas de los maestros y profesores es tratar de suministrarle a los estudiantes de cualquier nivel las herramientas e indicaciones necesarias para que puedan vincular sus conocimientos matemáticos subjetivos con el conocimiento matemático generalmente válido y aceptado internacionalmente. Por supuesto que este objetivo representa para los maestros y profesores de cualquier nivel educativo una exigencia compleja, debido a la multiplicidad de elementos contrarios al quehacer de la enseñanza, especialmente en los países con posibilidades y potencialidades socioeconómicas desfavorables (Mora, 1998a).

Pedagogos y didactas, especialmente en educación matemática, han tratado de experimentar diferentes caminos que tomen en consideración la variedad de conocimientos matemáticos que los alumnos vienen sumando fuera del aula de clases y aquellos acumulados a partir de su socialización antes de iniciar su escolaridad de manera formal. Desde hace algún tiempo se viene proclamando otra forma de concebir la enseñanza y en particular la enseñanza de la matemática escolar. Esta concepción está basada en los diferentes adelantos aportados por la didáctica de la matemática en cooperación con otras ciencias que investigan los procesos de aprendizaje que desarrollan los seres humanos como la Psicología, la Sociología, la Antropología, entre otras (Witmann, 1992). A continuación se exponen, mediante la representación de un modelo estructural, algunos puntos de vista didácticos y sus consecuencias para el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática.

En primer lugar, se tiene el concepto de **aprendizaje y enseñanza integral** en la educación matemática. Él tiene como sustento psicológico y sociológico la activación de todos los sentidos y potencialidades de los individuos en confrontación con situaciones que le puedan afectar directa o indirectamente tanto positiva como negativamente. El aprendizaje y la enseñanza integral se caracteriza fundamentalmente por los siguientes campos (Gráfico 1):

- El sector cognitivo motórico enfatiza en los contenidos y procedimientos de situaciones activas trascendentales o relevantes para el futuro de quienes participan en el aprendizaje. Los factores constitutivos del aprendizaje en cuanto al contenido y especialidades representan por consiguiente un adecuado entendimiento del objeto de aprendizaje como factor motivador y como elemento de transformación, así como el desarrollo de una apropiada independencia y autonomía al actuar y pensar frente a la materia propiamente dicha y frente a sus consecuencias céntricas y periféricas. La meta esencial es el desarrollo de competencias sobre los hechos objetivos y subjetivos, sobre la materia concreta, unido a la formación y preparación para el trabajo metadirigido, efectivo e independiente. Este objetivo es propio de la ley actual de educación venezolana, la cual pretende, entre otras exigencias, el logro de una formación de conceptos básicos amplios y la adquisición de una instrucción profesional beneficiosa y permanente (Prieto Figueroa, 1985). Esta meta comprende además el logro de destrezas y conocimientos especializados necesarios para ejercer posteriormente de manera calificada una actividad profesional digna y productiva (Freire, 1994).

- El campo psicosocial comprende el lado afectivo y ético. Aquí se trata de la segunda componente del aprendizaje y la enseñanza integral, la cual se refiere al sujeto concretamente. El objetivo fundamental está dirigido al desarrollo de la personalidad de manera extensa y compleja, entendida como el conjunto de competencias individuales tales como el discernimiento propio, incluida la autocrítica. Se incorpora además el desarrollo de una adecuada formación para el ejercicio y actuación de un comportamiento social crítico y político (Skovsmose, 1994). Actuar de forma social y política significa actuar de forma reflexiva y autorreflexiva con la finalidad de lograr una sociedad más humana y eficiente como lo predicaba constantemente Simón Rodríguez (1975). La formación crítica y reflexiva a través de la educación matemática es entendida aquí como la capacidad humana de comprender y modificar las condiciones y factores que determinan el pensamiento y la actuación de los individuos de manera aislada o colectiva, como elementos corresponsables del desarrollo social en todas sus manifestaciones.

Dentro del aprendizaje y la enseñanza integral los campos cognitivo - motórico y psicosocial no se contraponen entre sí, por el contrario ambos se complementan y se compenetran mutuamente. El aprendizaje metódico y operativo tiene como trayectoria y meta fundamental, por una parte, el "aprender a aprender" y, por la otra, el desarrollo continuado y permanente de competencias críticas y reflexivas para el logro de una sociedad más justa y humana.

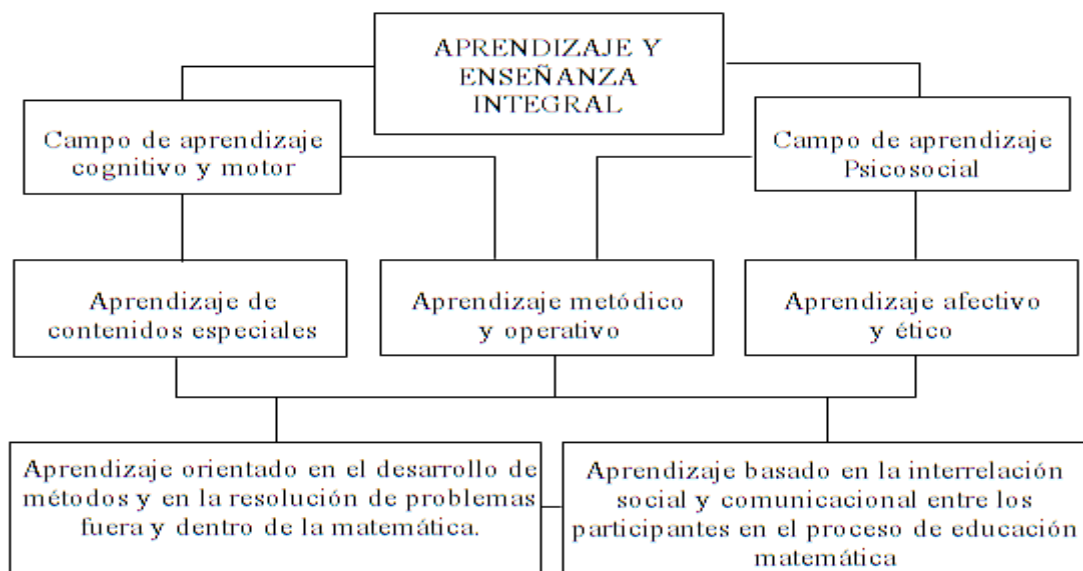


Gráfico 1. Campos que Caracterizan el Aprendizaje y la Enseñanza Integral

La componente cognitiva - motórica, la cual está estrechamente vinculada con el aprendizaje metódico y para el cual es apropiada la resolución de problemas (Mora 1998b) como estrategia didáctica y pedagógica, está compuesta por técnicas de aprendizaje y trabajo. La componente psicosocial o aprendizaje social - comunicativo según Freire (1973) está referida sobre todo a técnicas de cooperación y comunicación.

El aprendizaje y la enseñanza integral está constituida por consiguiente por cuatro componentes de aprendizaje (Gráfico 1), detalladas con mayor exactitud por Ott (1995) y que se sintetizan a continuación:

1. Competencia en cuanto a la especialidad, la cual está referida fundamentalmente a los contenidos especiales propios de las asignaturas que conforman el curriculum. Aquí se desarrolla un conjunto de capacidades cognitivas y destrezas motóricas.
2. Competencia metódica, trata del aprendizaje metódico y sistemático, propio de la resolución de problemas, mediante la cual las alumnas y los alumnos adquieren un conjunto de técnicas básicas para aprender y trabajar independiente y colectivamente.
3. Competencia social, se caracteriza por el desarrollo de un aprendizaje social y comunicativo que conlleve a la adquisición de técnicas básicas de cooperación y comunicación no solamente entre quienes participan en el proceso de aprendizaje y enseñanza sino con el mundo social y cultural en el cual conviven las alumnas y los alumnos.
4. Competencia individual, está centrada en el aprendizaje afectivo y ético que conlleva al desarrollo de un conjunto de objetivos psicosociales que refuerzan la independencia, la autoestima individual, la crítica y la autocrítica, el autoaprendizaje y demás facultades indispensables para el desarrollo personal, siempre en consonancia con los demás individuos.

Del anterior modelo estructural se deriva conceptualmente una segunda esquematización, la cual podrá contribuir a la elaboración de una idea más completa para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática fundamentalmente en las tres etapas de la escuela básica. Esta estructuración conceptual para la educación matemática está compuesta por los tres momentos (Mora 1998a, Freire 1973), conectados entre sí, que se especifican a continuación: entrada al conocimiento matemático, tratamiento didáctico del conocimiento matemático y proceso cíclico del aprendizaje y la enseñanza de la matemática (Gráfico 2).

Primer momento: entrada al conocimiento matemático

En cuanto a la entrada al nuevo conocimiento matemático existe cierto consenso en el sentido de que se ha de iniciar la educación matemática a partir del contexto interno de la matemática misma y en segundo lugar a partir de la contextualización externa a la matemática, denominada comúnmente como el mundo en cual transcurre la vida de los seres humanos con todas sus manifestaciones (Mora, 1998a). A continuación se especifica ambos aspectos con la ayuda del esquema conceptual presentado en el Gráfico 1.

Primera opción: contexto interno a la matemática

La educación matemática dentro del contexto interno a la misma matemática ha sido la más trabajada en los últimos años, inclusive antes del advenimiento de la denominada matemática moderna (Zumpe, 1984). Los planes de enseñanza y la mayoría de los libros de texto están concebidos y orientados dentro de esta visión de la educación matemática y parece ser que en la actualidad existe cierta tendencia hacia la elaboración de ideas teóricas y materiales de enseñanza con énfasis en el tratamiento y desarrollo de contenidos y conceptos puramente matemáticos con una multiplicidad de estrategias de aprendizaje acordes con el desarrollo de la didáctica de la matemática y de otras disciplinas científicas (Mülle, Wittmann, y otros, 1995).

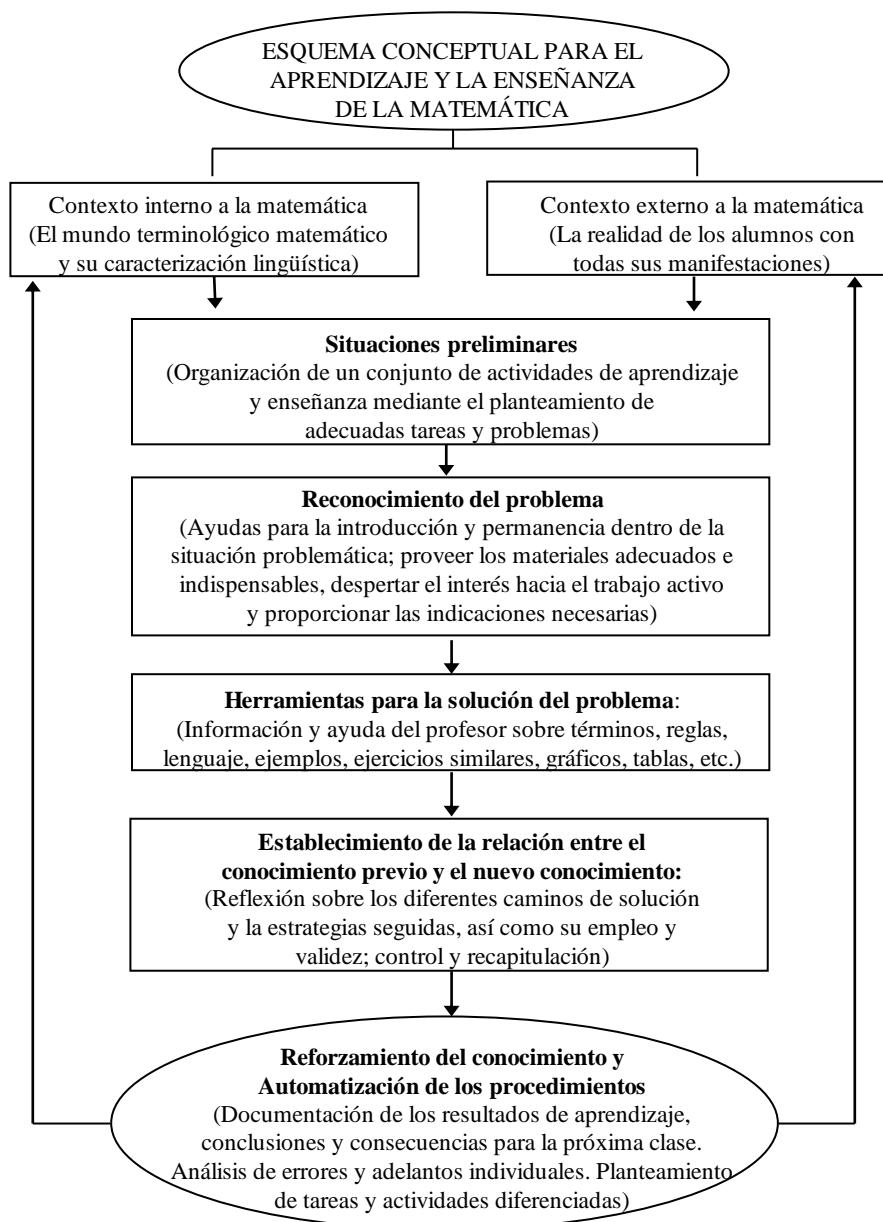


Gráfico 2. Esquema conceptual para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

Hay quienes consideran que la matemática es única en cualquier cultura y en cualquier circunstancia. Esta opinión ha predominado durante muchos años, pero también ha sido discutida y en muchos casos combatida por el reciente auge que ha experimentado la etnomatemática a partir de mediados de los años ochenta (D'Ambrosio 1985, Gerdes 1990, Mora 1998a, entre otros). La discusión es similar a la vieja y superada controversia entre la matemática pura y la matemática aplicada, solamente que aquí se está en presencia de una discusión didáctica y pedagógica, la cual tiene como objetivos básicos, lograr un mayor y mejor entendimiento de los conceptos matemáticos escolares y, hacer uso de esos conocimientos matemáticos en situaciones problemáticas cotidianas.

Los didactas que defienden esta opción consideran que lo básico y fundamental es la comprensión de los conceptos matemáticos a través del tratamiento de un conjunto de contenidos puramente matemáticos sin relación alguna con otras asignaturas o temas no matemáticos. El interés está centrado exclusivamente en la terminología, el lenguaje propiamente matemático y la relación entre los conceptos matemáticos, lo cual conlleva irremediablemente a la elaboración de nuevas ideas matemáticas. Esta visión de la educación matemática se presenta casi siempre de manera creciente y sumativa, para la cual el desarrollo del proceso de aprendizaje es sistemático, formal y lógico - estructurado. Lo importante es la adquisición y el dominio de conceptos matemáticos independientes, en la mayoría de los casos, de su relevancia dentro de la contextualidad social y cultural. No se profundiza en cuanto a los niveles de aplicación y reflexión del conocimiento matemático, pues esa no es la meta de la educación matemática y además se considera que de esta manera se estaría en presencia de otra asignatura no matemática.

Segunda opción: contexto externo a la matemática

Como contrapartida a la opción anterior han existido, históricamente hablando, en el transcurso del presente siglo movimientos que se oponen a la siempre denominada matemática tradicional, la cual se ha de interpretar como la educación matemática dentro del contexto puramente matemático sin relación con otras asignaturas o sencillamente con el mundo complejo de los ciudadanos de cualquier edad (Bishop, 1988). Afortunadamente existe, de manera implícita, un acuerdo tácito en el sentido de que la matemática trasciende los muros de la impermeabilidad del número y de la letra. Ya no es aceptada la idea de que el tratamiento de temas no necesariamente matemáticos en la escuela sea una labor no matemática. Algunas investigaciones han demostrado en los últimos años tres aspectos básicos; por un lado, los conocimientos matemáticos no puede ser transferidos adecuadamente a situaciones externas de la matemática, sin antes haber estado familiarizado con problemas y actividades similares; en segundo lugar, la concepción epistemológica actual de la educación matemática comprende un espectro amplio y complejo que incluye aspectos diferentes del mundo y de la realidad social, económica, política y ecológica; es decir, la complejidad cultural que impregna al individuo durante su existencia en un determinado conglomerado social (Mora, 1998a y Valero, 1998). En tercer lugar, la motivación por la matemática aumenta en la medida en que los individuos viven y trabajan directamente con hechos de su interés e importancia personal o social.

Otro argumento que está a favor de la instrucción matemática dentro de la contextualización externa a la matemática se refiere a los adelantos en el campo de las aplicaciones y su teoría de modelización en correspondencia con los estudios sobre resolución de problemas (Schoenfeld, 1992; Mora, 1998b; Kaiser-Messmer, 1986, 1989 y 1992; Beyer, 1998 y González, 1995). Ya se ha señalado en otras oportunidades la importancia que ha adquirido actualmente la educación matemática orientada en las aplicaciones. Queda por supuesto un gran trayecto por recorrer en cuanto a la implementación práctica de esta corriente didáctica. Hay además un considerable conocimiento teórico acumulado con algunas realizaciones prácticas, el cual podría servir como punto de partida para posteriores experiencias en los diferentes niveles del sistema educativo, inclusive a nivel universitario².

² Se recomienda consultar los siguientes dos trabajos, los cuales reúnen una buena parte de la literatura disponible sobre la educación matemática basada en las aplicaciones: 1) Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Parte 2, (Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik). Karlsruhe 1992 por Kaiser-Messmer, Gabriele / Blum, Werner und Schober, Michael; 2) Mathematik und Umwelt. Eine Bibliographie. Karlsruhe 1997 por König, Gerhard / Marmé, Marianne.

La implementación de la enseñanza de la matemática podría ser llevada a cabo en cualquier nivel de la enseñanza y mediante el tratamiento de un tema no matemático pero de interés y significación social para los participantes durante un lapso aproximado de dos a tres semanas. Esa fase centrada en un tema específico abarca la complejidad del mundo natural de los participantes e intenta hacer uso de conocimientos específicos de las respectivas asignaturas, de procedimientos propios de dichas asignaturas y sus respectivas legitimidades dentro del estado del desarrollo y uso del conocimiento con la finalidad de llegar a resolver problemas de tal modo de poderle dar a los niños y a los jóvenes una apropiada ayuda para el dominio de su propio mundo. Con frecuencia, los temas tratados durante ese tiempo determinado son tomados del espectro de temas contenidos en los planes de enseñanza, en los libros de texto y en muchos casos propuestos por los mismos alumnos o profesores.

Al elegir un tema particular de formación general como por ejemplo la *visita a un lugar de diversión* con amigos, familiares o conjuntamente con sus compañeros de clase, se puede hacer una enumeración del conjunto de contenidos matemáticos ligados a él. En este ejemplo concreto se podrían señalar los siguientes temas matemáticos conexos: ejercitación de la orientación mediante la descripción del camino hacia el lugar de diversión, leer correctamente el tiempo de inicio y finalización de la diversión, calcular el tiempo de duración, determinar el costo de un determinado grupo según sus miembros, estimar la cantidad de personas que visitaron el lugar, determinar el orden de ubicación según las edades, los visitantes y los asientos, presentar gráficamente elementos relacionados con el lugar y las funciones presentadas, etc. Un segundo tema tomado de la formación general podría ser el *transporte público y privado*. La variedad de contenidos matemáticos relacionados con él también son múltiples y ricos. Se podría mencionar, por ejemplo, la estimación, medida y comparación de distancias, lectura e interpretación de diagramas, dibujos e informaciones numéricas, uso y ventaja de los medios de transporte público, seguridad vial, consecuencias para el medio ambiente y para el ser humano, influencia negativa del aumento del transporte automotor para la permanencia de la vida en el planeta, etc.

Como se puede observar al trabajar la matemática dentro del contexto de cosas concretas a partir del mundo de los niños y de los jóvenes se puede, mediante ideas matemáticas, medios y procedimientos, aclarar el problema y acercarse a él con mayor conciencia, que su estudio puramente abstracto. Se podría, por ejemplo, medir los diferentes caminos que van de la casa a la escuela y comparar sus longitudes entre sí, así como la elaboración de dibujos con los instrumentos geométricos adecuados, trazando las diagonales y construyendo las escalas correspondientes. De esta manera, los niños pueden conocer activamente cuáles caminos son más adecuados y menos peligrosos, cuáles inconvenientes se les presentarían cuando se dirigen por algún camino menos largo, pero con mayores riesgos. Ese cambio simultáneo o trabajo paralelo entre el objeto no matemático y la terminología matemática propiamente dicha posibilita que el alumno identifique su realidad y su experiencia con el conocimiento matemático necesario para la comprensión, explicación y solución del problema planteado por él, por algún miembro de la familia o por los maestros y profesores. Mediante el trabajo con la medida de distancias reales conocidas por ellos, su identificación mediante fotos o dibujos y su representación a escala, los alumnos podrían poner en duda o reforzar sus imaginaciones sobre el tamaño de lados, distancias paralelas, perpendiculares y diagonales.

Son muchos los temas referidos al mundo individual y familiar de los alumnos y de los maestros que se deberían tratar en la escuela vinculándolos directamente con la matemática. Se podría discutir, por ejemplo, el tema sobre la *relación de cada miembro de la clase con el número*. Aquí elaboran los alumnos una lista de los aspectos personales que se pueden medir, contar o simplemente identificar

mediante el número o mediante algún otro elemento matemático. La dirección de su casa, el número de miembros en la familia, el tamaño de su vivienda, su edad, su estatura, número de amigos, juegos favoritos, etc. Esto está a su vez conectado con otros temas como la situación socioeconómica de la familia, algún deporte en particular que tenga mayor atracción o sea practicado por la mayoría de las alumnas y de los alumnos. La matemática se pone de manifiesto en la misma medida en que se aritmetizan y geometrizan las cosas concretas e imaginarias de los seres humanos. También el mundo animal y ambiental, así como sus relaciones con las personas pueden ser matematizados con mucha frecuencia y con mucho éxito matemático. Sobre este último tema existen muchas experiencias particulares en cada país y gran cantidad de actividades desarrolladas por los mismos maestros y profesores que sería difícil cuantificar y seleccionar. Se recomienda a los maestros y profesores la elaboración de su propio banco de problemas, situaciones y fenómenos que están o podrían ser matematizados desde el primer grado hasta niveles universitarios. Algunos de los autores que han trabajado consecuentemente en esta dirección son los siguientes: D'Ambrosio (1994), Andelfinger (1996), Böer (1996), Fusaro (1995), Hudson (1995), Köhler (1995), Schwartz (1992), Volk (1996).

Segundo momento: tratamiento didáctico del conocimiento matemático

Según los conceptos didácticos tradicionales se le muestra a los niños primeramente mediante la instrucción directa, la imitación o el trabajo propio individual los procedimientos, métodos, algoritmos y demás nociones matemáticas, sin que ellos puedan tener el suficiente tiempo para el desarrollo de actividades que conlleven al entendimiento, a la comprensión, consolidación, aplicación y reflexión. En la mayoría de los casos estos niveles taxonómicos ni siquiera son posibles de lograrse mediante la concepción didáctica de la transferencia de conocimientos trabajados previamente dentro de un contexto puramente matemático a otros contextos no matemáticos (Mora, 1998a). Por el contrario, sí se desarrolla una didáctica centrada en el trabajo cooperativo, centrada en los alumnos y basada en procesos más activos y dinámicos, entonces se le podría estar dando la oportunidad a los niños para que ellos por sus propios medios, en grupos pequeños, con la ayuda de los maestros y profesores y mediante el método didáctico acción-reflexión-acción, contribuyan a la elaboración del conocimiento y, además, desarrollen capacidades más amplias para su desenvolvimiento con el nuevo conocimiento matemático y sus consecuencias explícitas e implícitas dentro de su personalidad así como en relación con el mundo y con su mundo.

Las alumnas y los alumnos van desarrollando, mediante ese método didáctico y desde edades muy tempranas, facultades de aprendizaje y enseñanza que a lo largo de la experiencia formativa les permitirán enfrentarse a problemas matemáticos y no matemáticos, los cuales serán resueltos por los propios alumnos mediante el trabajo cooperativo (Röhr, 1997). Una ayuda didáctica apropiada podría ser el suministro a los alumnos de una variedad de materiales y medios didácticos expuestos en los libros de texto o elaborados por los mismos maestros y profesores. Existe por supuesto una gran cantidad de ideas y materiales que pueden ser adquiridos por las escuelas o por los propios alumnos siempre y cuando tengan las posibilidades económicas para tal fin. Otros pueden ser construidos por los mismos alumnos junto con sus profesores en el taller del colegio o en el salón de clases. En este último caso la participación de los familiares juega un papel muy importante ya que ellos pueden aportar ideas y objetos sencillos de bajo costo y hacer materiales propuestos por los propios alumnos o por los profesores. Por supuesto que existen materiales que son muy buenos, otros buenos y algunos regulares. Para la utilización de algún material elaborado por los alumnos junto con sus padres, por los profesores, comprado, suministrado por las editoriales o por el Ministerio de Educación, etc. se han de tomar en cuenta los siguientes principios:

- Limitarse a una cantidad mínima de materiales didácticos porque los niños y los jóvenes necesitan suficiente tiempo y concentración para familiarizarse con ellos. Tienen que aprender correctamente cómo han de trabajar con los materiales y los profesores necesitan tiempo para la extracción de los conceptos matemáticos que desean ilustrar o desarrollar con su ayuda.
- Es recomendable utilizar el material durante un tiempo largo, en diferentes situaciones y con diferentes alumnos con la finalidad de mejorar o rechazar aquellos materiales que aporten poca ayuda para la motivación y desarrollo de los conceptos matemáticos deseados.
- No necesariamente cada material tiene que tener una alta relevancia matemática y conceptual. Pueden ser importantes y productivos juegos ya conocidos por los alumnos o inventados por ellos mismos. También es útil y muy importante para la enseñanza de la matemática activa y procesal cualquier tipo de maqueta, fotos, material natural como piedras, hojas, conchas, cartones, etc. Lo importante es familiarizarse matemáticamente con el material y extraer de él la mayor información matemática posible.
- Es muy importante tomar en consideración los costos de los materiales, normalmente los mas caros son los menos productivos y fructíferos. Su transporte y manipulación juegan un papel relevante, así como su limpieza y no contaminación. No se debería desear materiales que no se pueden comprar por sus elevados costos o por su inexistencia en el mercado o por su dificultad para su elaboración. La imaginación de los alumnos puede contribuir enormemente para la búsqueda y alcance de un excelente material que ayude al aprendizaje y enseñanza de la matemática de manera divertida, utilitaria y eficiente.

Hay que tener en cuenta que las alumnas y los alumnos no descubren por sus propios medios y procedimientos los conocimientos matemáticos que están implícitos en la solución de un determinado problema o en el trabajo con algún material didáctico. Muchas veces se hace imprescindible la ayuda del maestro o del profesor. Ellos tienen que suministrar informaciones, ideas e instrucciones cortas y productivas. En la mayoría de los casos los inconvenientes se presentan con el uso de la terminología adecuada, el lenguaje matemático usado, las reglas comunes manejadas dentro de la convención matemática y la elaboración lógica y coherente de los algoritmos matemáticos que puedan surgir eventualmente de la matematización de una determinada situación problemática. La fase del autodescubrimiento concluirá cuando cada uno de los participantes de manera individual o grupal exponga los respectivos caminos para obtener la solución o posible solución al problema o fenómeno planteado originalmente. Aquí pueden los alumnos suministrar las argumentaciones que respaldan sus soluciones. Con esto se pretende suministrar confianza a los alumnos para que ellos muestren sus facultades argumentativas y sus métodos o procedimientos matemáticos, los cuales son muy propios y particulares en cada alumno o grupo. Es importante que la discusión tenga lugar en el salón de clases y que exista la deseada atención por parte de los demás alumnos y especialmente del profesor, quien no dejará pasar inadvertido ningún aspecto matemático o idea didáctica creada por los alumnos en la solución del problema o tratamiento de la actividad planteada. También es posible que estas discusiones se desarrollen en grupos pequeños de alumnos y que finalmente un representante del grupo exponga los resultados a sus compañeros. Esto permite ahorrar tiempo y aumentar la participación y concentración de los alumnos. Es imprescindible que los alumnos sean dueños de su enseñanza de tal forma que puedan desarrollar y poner en funcionamiento sus propias capacidades de comprensión, atención y

tolerancia en relación con sus compañeros, lo cual no siempre ocurre cuando el maestro o el profesor se convierte en el centro de la atención y dominio del proceso de aprendizaje y enseñanza.

Tercer momento: proceso cíclico del aprendizaje y la enseñanza de la matemática

La idea didáctica expuesta anteriormente no significa que cada alumno de un determinado nivel educativo, trabaje el contenido que él encuentre interesante o que simplemente desea trabajar. Ya se ha resaltado en varias oportunidades que los alumnos tienen que trabajar en lo posible en grupos pequeños formados de acuerdo a sus intereses, edades u otros criterios creados por todos los alumnos conjuntamente con sus maestros. Una enseñanza totalmente abierta no es posible desde el punto de vista técnico y organizacional.

En general los alumnos trabajan en grupos diferenciados con cierta homogeneidad entre sus miembros en la solución de un determinado problema o en el tratamiento de un fenómeno previamente seleccionado por los alumnos con la colaboración del maestro o profesor. El conjunto de actividades está por supuesto enmarcado en una temática más general, la cual se corresponde con un determinado tema o concepto matemático siguiendo un plan específico como por ejemplo los libros de texto, los planes de enseñanza o un plan curricular propio del centro educativo, departamento de matemática o en el mejor de los casos elaborado por el profesor juntamente con sus alumnos antes del inicio del año escolar, trimestre o semestre. Esto significa que el punto de partida y el tema general es similar para todos los alumnos de la clase, pero el planteamiento de las actividades y las posibles soluciones son completamente diferenciadas de acuerdo a cada problema y/o a cada actividad en particular. Cada alumno o subgrupo empieza de acuerdo con su nivel y experiencia. Algunos pueden por ejemplo trabajar con números hasta 20, otros hasta 50 y algunos hasta 100 ó 200. Cada alumno o grupo se concentrará en la elaboración de su propia estrategia de aprendizaje. Algunos alumnos elaboran estrategias complicadas mientras que otros encuentran caminos más sencillos y rápidos. Ambos casos son válidos y merecen similar atención por parte de los maestros y profesores.

El esquema presentado en el Gráfico 2 está compuesto por seis pasos fundamentales. Algunos de ellos ya se han mencionado y explicado con mayor detalle. Aquí se desea recalcar que ese esquema conceptual forma parte de un proceso cíclico inacabado dentro del aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Por una parte, siempre existirá un nivel instruccional para el cual es posible desarrollar la educación matemática siguiendo ese esquema conceptual; en segundo lugar, las situaciones de partida son múltiples según el nivel educativo, el grupo de alumnos, los recursos disponibles, la temática tratada y las situaciones de entrada elegidas para ser trabajadas por los alumnos. Después de haber seguido el esquema de manera vertical hacia abajo se vuelve al punto de partida con nuevos conocimientos matemáticos y nuevas informaciones sobre el problema o fenómeno original. Estos resultados pasan a formar un nuevo contexto interno o externo a la matemática a partir del cual se generarán nuevos problemas y situaciones dentro del mismo nivel instruccional o en grados o años superiores (Mora 1998a).

Referencias

Andelfinger, B. (1996). *Allgemeine Mathematik - Sanfter Mathematikunterricht - Allgemeine Mathematikdidaktik. Trends und Perspektiven in einem Wechselwirkungsfeld*. Ulm.

- Beyer, W. (1998). Algunas precisiones acerca de la resolución de problemas y de su implementación en el aula. *Paradigma*, XIX(1), 39-55.
- Bishop, A. (1988). (Hrsg.): *Mathematics Education and Culture*. Dordrecht.
- Böer, H. (1996). Das Risiko von Atomkraftwerken. *Mathematikleheren*, 76, 61-63
- D'Ambrosio, U. (1994). On environmental mathematics education. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik)*, 26(6), 171-174.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- Freire, P. (1973). *Pädagogik der Unterdrückten. Bildung als Praxis der Freiheit*. Reinbek bei Hamburg.
- Freire, P. (1994). *Pedagogía da Esperança. Un reencontro con a Pedagogia do oprimido*. São Paulo.
- Fusaro, B. (1995). Environmental mathematics. *ZDM* 27(1). 9-12.
- Gerdes, P. (1990). *Ethnogeometrie. Kulturanthropologische Beiträge zur Genese und Didaktik der Geometrie*. Bad Salzdetfurth.
- Grassmann, M., Klunter, M., Mirwald, E. y Veith, U. (1995). Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern-Schulßfolgerung für die Gestaltungs des Anfangsunterrichts. *SMP* 23(7), 302-321.
- González, F. (1995). *El corazón de la Matemática*. Maracay.
- Hengartner, E. y Röthlisberger, H. (1995). Rechenfähigkeit von Schulanfänger. *Brügelmann, H. / Balhorn, H. / Füssenich, I.: (Hrsg.): Am Rande der Schrift. Libelle*. Lengwil.
- Hudson, B. (1995). Environmental issues in the secondary mathematics classroom. *ZDM* 27(1), 13-18.
- Kaiser-Messmer, G., Blum, W. y Schober, M. (1992). *Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Parte 2, (Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik)*. Karlsruhe.
- Kaiser-Messmer, G. (1989). Aktuelle Richtungen innerhalb der Diskussion um Anwendungen im Mathematikunterricht. *JDM*, 10(4), 309-347.
- Kaiser-Messmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht, 1, Theoretische Konzeption*. Bad Salzdetfurth.
- Köhler, H. (1995). Sofern aber die Mathematisierung selbst die Umweltprobleme schafft? "Umwelterziehung": die Therapie wächst mit der Krankheit. *ZDM* 27(1), 19-23.
- Mora, C. (1998a). *Probleme des Mathematikunterrichts in lateinamerikanischen Ländern - explorative empirische Studie zur Entwicklung didaktischer und curricularer Innovationsansätze*

im Kontext der Educación Popular am Beispiel Nicaragua und Venezuela. Universidad de Hamburg. (online). Disponible: <http://www.sub.uni-hamburg.de/disse/05>.

Mora, C. (1998b). *Proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática enfocado en las aplicaciones. Manuscrito.* Caracas.

Ott, B. (1995). *Ganzheitliche Berufsbildung. Theorie und Praxis handlungsorientierter Techniklehre in Schule und Betrieb.* Stuttgart.

Prieto Figueroa, L. (1985). *Principios generales de la educación.* Caracas.

Universidad Simón Rodríguez. (1975). *Simón Rodríguez: Obras Completas.* Tomos I y II. Caracas: Autor.

Röhr, M. (1997). Kooperatives Lernen im mathematischen Anfangsunterricht. *Grundschule*, 29(3), 32-34.

Schmidt, R. (1982). Die Zählfähigkeit von Schulanfänger. Ergebnisse einer Untersuchung. *SMP*, S. 371-376.

Schmidt, S., Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. *JMD* 2/3, 227-263.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *D. A. Grows (Ed.), Handbook of research on mathematics, teaching and learning (NCTM).* 334-370.

Schwartz, R. (1992). *Revitalizing liberal arts mathematics.* In: *Mathematics and Computer Education* 26(3),272-277.

Skovsmose, O. (1994). Towards a Critical Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 27. 35-57.

Sylvester, T. (1998). Vorschläge und Modelle zur inneren Differenzierung. *Mathematiklehren*, 89, 4-9.

Valero, P. (1998). *Deliberative Mathematics Teachers. A Latin American Alternative to Democratic Mathematics Education. Manuscrito.* Dinamarca.

Volk, D. (1996). Zu ökologischem Sehen und Handeln anregen. *Mathematiklehren* 76, 4-9.

Wittmann, E., Müller, G. y otros (1995). *Das Zahlenbuch. Lehrerband 1, 2 y 3.* Düsseldorf.

Wittmann, E. (1992). Mathematikdidaktik als "design science". *JMD*, 13(1), 55-70.

Zumpe, S. (1984). *Der neue Mathematikunterricht in der Grundschule. Eine kritische Analyse auf dem Hintergrund bildungspolitischer Zielvorstellungen Anfang der 70er Jahre.* TU, Berlin.

El Autor
Castor David Mora
Universidad Nacional Abierta
E-mail: mora_david@magicvillage.de

Datos de la Edición Original Impresa

Mora, C. (1999, Junio). Concepción integral para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles del sistema educativo. *Paradigma*, Vol. XX, N° 1, Junio de 1999. / 55-80.