LOS ELEMENTOS DE ANÁLISIS TRASCENDENTE DE FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS

Debate en México (1870) sobre los fundamentos del Cálculo Infinitesimal. Entre la sencillez y el rigor

Alberto Camacho
Instituto Tecnológico de Chihuahua II
México

RESUMEN

A pesar de su atemporalidad, los *Elementos de Análisis Trascendente* del ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias (1833-1889) han sido leídos y usados por generaciones de estudiantes e ingenieros a lo largo de 130 años lo cual ha conformado una tradición. Ello ha sido posible gracias al modelo pragmático con que fue construido el texto. Fincado en un estilo algebraico a partir de evitar *toda consideración de límites y cantidades infinitesimales o evanescentes* en tanto reducir el estudio de los fenómenos físicos *a otro u otros que le sean en menor grado*, usando para ello *medios auxiliares e indirectos* que evitarían los pasos al límite y consecuentemente al infinito. Presentamos aquí un análisis del Cálculo de Díaz Covarrubias desde dos perspectivas: Primero, aquella de la Elementarización; es decir, el modelo cultural para la escritura de textos de matemáticas que llevó al autor a la modificación de los conceptos del Cálculo, con argumentos sencillos y precisos, estandarizándoles para su aprendizaje en los estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria y, segundo, a partir del debate entre positivistas que se dio durante el último tercio del siglo XIX por la definición de los fundamentos del Cálculo entre el propio Díaz Covarrubias y el filósofo mexicano, contemporáneo a éste, Gabino Barreda. Con el análisis intentamos mirar hacia el pensamiento que el autor refleja en su obra

Descriptores: Historia de la Matemática, Enseñanza del Cálculo, Matemática Educativa.

ABSTRACT

In spite of its anachronism, the Elementos de Analisis Trascendente of the Mexican engineer Francisco Diaz Covarrubias (1833-1889) they have been read and used by students and engineer generations throughout 130 something which years to certify a tradition. This has been possible thanks to the pragmatic model with which was built the text. This was built in an algebraic style as of avoid all limits consideration and infinitesimal quantities or evanesces in so much to reduce the study of the physical phenomena to other or other that to him will be in smaller degree. Using for this means auxiliary and indirect that would avoid the steps to the limit and consequently to the infinite. We present here an analysis of the calculation of Diaz Covarrubias from two perspectives: First, that of the elementarization; that is to say, the cultural model for the writing of mathematics texts that I carry to the author to the modification of the concepts of the calculation, whit simple and accurate arguments, standardizing for their learning in the students of the Preparatory National School and, second, starting from discussion between positivists that was given during the last third of the century XIX by the definition of the bases of the calculation between the own Diaz

Covarrubias and a Mexican philosopher, contemporary to this, Gabino Barreda, whit analysis we attempt to watch toward the thought of the author that appears in the work.

Key Words: Mathematics's history, Calculus's Teaching, Mathematics education.

INTRODUCCIÓN

Un curso de cálculo pragmático y sin límites

Con el triunfo juarista sobre la regencia de Maximiliano de Habsburgo en 1867 se crearon en México, a partir de los antiguos colegios, nuevos establecimientos educativos como fueron la Escuela Nacional Preparatoria y la Escuela Nacional de Ingenieros.

Alternativamente, la Ley de Instrucción Pública del 28 de marzo de 1868, abrevió para que la extensión hacia la enseñanza de los conceptos enciclopédicos traídos de Europa por los positivistas nacionales, sobre todo Gabino Barreda, desde 1847-51, pusiera en marcha la producción de libros de texto de diversas disciplinas para la enseñanza con lo que se intentaría dejar de lado la dependencia europea en este rubro:

"Dispuso la ley ,..., que los profesores formaran textos adecuados de todas las materias de enseñanza, los estudiantes podrán adquirirlos a poca costa, dejaremos de ser tributarios de Europa en este ramo, y tendremos textos más provechosos que los extranjeros, porque se habrán hecho con el conocimiento práctico de lo que necesitamos".[1]

Agregaremos que la práctica editorial iniciada con la mencionada ley de diciembre de 1868, fue continua, aunque con algunas limitaciones, hasta 1884, año en que se convocó el primer concurso formal para la aprobación y presentación de libros de texto.

Particularmente, los *Elementos de Análisis Trascendente o Cálculo Infinitesimal* de Francisco Díaz Covarrubias (1833-1889) es una de las grandes obras elementales para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral que forma parte del patrimonio nacional mexicano y que estuvo sujeta a esa disposición.

Escrita para ser utilizada por vez primera en la Escuela Nacional Preparatoria – en el *Segundo Curso de Matemáticas* -, con el acontecer del siglo XX fue obligatoria en diversas escuelas preparatorias y de ingeniería de México. Surgió inicialmente en 1873, (*Vid.* Díaz Covarrubias F, 1873) gracias a un acuerdo de Díaz Covarrubias con el presidente Juárez y bajo el auspicio del gobierno de Lerdo de Tejada. Una segunda edición – *cuidadosamente revisada* - irrumpió en 1890, a un año de fallecido el autor, reimpresa en la *Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento*. La tercera, y última edición, fue muy amplia y signada en 1901 por la Librería Francesa de la Viuda de Charles Bouret e impresa en México por Gallegos Hermanos.

El *artificio* de evitar el paso al límite fue cultivado ampliamente por Díaz Covarrubias en sus obras alternativas para la enseñanza de Topografía y Astronomía (*Vid.* Díaz Covarrubias F, 1867). Habilidad que le llevó a determinar sólidos argumentos y nuevos métodos para la solución de problemas inherentes a la ingeniería entre los que destacan: en 1855, el *método mexicano* para la determinación de la latitud de cualquier posición geográfica sobre la superficie de la Tierra a partir de observaciones astrales; el uso del *claroscuro* en el diseño de plantas topográficas utilizando el argumento de *línea de mayor pendiente*, gradiente actual, para proporcionar en la planta los colores blanco contra el negro. Iniciando con la hechura de la propia *Carta general de la República Mexicana*, modelo que fue premiado en París antes de su muerte en 1889 (*Vid.* Díaz Covarrubias F, 1896, 543 a 567, c VI); o bien los incuestionables resultados científicos de la paralaje solar que se obtuvieron a partir del *Viaje de la comisión astronómica mexicana al Japón para observar el tránsito del planeta Venus por el disco del Sol el 8 de diciembre de 1874* - de la que fue director - los cuales contribuyeron para que el *Institut* de París determinara, con suficiente aproximación, la distancia entre el planeta Tierra y el Sol, (*Vid.* Díaz Covarrubias F, 1876). El pragmatismo de evitar el paso al límite hizo a Díaz Covarrubias exponer en los *Elementos* un sinnúmero de problemas reales de su experiencia práctica que fueron resueltos a partir de sus concepciones hacia la parte variacional de los fenómenos físicos.

Díaz Covarrubias tenía 21 años cuando fue nombrado profesor de Geodesia, Topografía y Astronomía práctica en el Seminario de Minería, a los 23 fue el jefe de la comisión que se encargó de levantar la carta geográfica del Valle de México, los *Nuevos Métodos Astronómicos* y su *Topografía* fueron publicados cuando cumplió 34 años – al tiempo que fue nombrado oficial mayor del Ministerio de Fomento – y los *Elementos de Análisis Trascendente* se publicaron cuando contaba con 40 años [2].

Elementarización en un livre élémentaire

Los *Elementos de Análisis Trascendente* nacieron y se difundieron en México como una expresión social, como un impulso contra la tradicional divulgación de conocimientos extranjeros que sujetaron la enseñanza matemática por muchos años.

Díaz Covarrubias estaba convencido de que los textos franceses de Cálculo de que se disponía no cumplían cabalmente las necesidades de los estudiantes de la preparatoria. Por esta razón, dejó en 1871 *el segundo curso de matemáticas* que impartía e inició la tarea de escribir los *Elementos* y reflexionar con más profundidad sobre los fundamentos del Cálculo [3].

La parte del Cálculo diferencial, *rectificación y cuadratura de curvas, determinación de áreas y volúmenes de sólidos de revolución*, fue dedicado a la homóloga para la enseñanza en la preparatoria del *segundo curso de matemáticas: Geometría y Trigonometría, concluyendo con nociones rudimentales de Cálculo Infinitesimal* [4].

Las *nociones rudimentales* fueron el argumento principal que ató a Díaz Covarrubias para escribir el texto. Tales nociones debieran ser sólo elementos poco desarrollados de los conceptos que formarían el curso de Cálculo. En palabras del autor:

"Presentar el análisis fundado en concepciones, a mi juicio, más sencillas que las que hasta hoy le han servido de fundamento."

Este principio fue la columna vertebral de la didáctica con que fue construida la obra, la actitud con la que el autor efectivamente logró transformar las pocas definiciones más importantes que le estructuran. Fue al extremo de tratar de fundamentar los conocimientos del Cálculo de su época reduciéndoles a sólo proposiciones desprovistas de toda formalidad cuyas cualidades evidentes son la claridad, sencillez y precisión [5]. Similar a la metodología didáctica planteada por el filósofo francés Suzanne a principios del siglo XIX (Vid. Suzanne, 1810) y a los argumentos esbozados por Lacroix para el diseño de Obras Elementales en los Essais durante el intersticio de los siglos XVIII y XIX (Vid. Lacroix S. F, 1828, hacemos referencia a la 3ª edición).

Las cualidades prescritas a los *Elementos* muestran la génesis de una tradición oculta, poco investigada, en la que se plantean los resultados del Cálculo de una manera simple y en un orden por demás natural de cara a la enseñanza.

El texto de Díaz Covarrubias es un *Tratado Elemental* en el sentido con que aborda la compleja totalidad de los elementos de la asignatura del Cálculo. En su origen, los conocimientos colocados en los *livres élémentaires* se consideraban *trascendentes* o *transcendentales*.

En el *Covarrubias*, la mayoría de los conceptos están ordenados a partir de sus principales elementos y tienen en el texto el tratamiento de nociones. ¿Por qué? la respuesta es simple, se enseñarían en la preparatoria a jóvenes mexicanos cuya edad fluctuaba entre los 15 y 17 años y para los cuales iba dirigida la obra:

> Nuestros libros de texto - afirmaba Díaz Covarrubias -- deben ampliar suficientemente los fundamentos de cada parte de la ciencia, a la vez que presentar sus principales y más interesantes aplicaciones, prefiriendo aquellas que puedan ser más útiles a los jóvenes en su educación profesional (Díaz Covarrubias F, 1873, op, cit).

Los fundamentos del análisis deberían ser para los jóvenes *educandos más accesibles, más claros y más francamente derivados de consideraciones concretas* (*Ibid*, p. VI). Sensibles a su cognición y evitando consideraciones *demasiado elevadas,..., y demasiado extensas*, puesto que estas expresiones, afirmaba, no tienen cabida en las obras elementales (Cfr. Camacho, A, 2000, 97 a 103 y 127 a 129).

Las filiaciones

Sin duda, la riqueza epistemológica del *Análisis Trascendente* se reafirma solamente a partir de la posición del positivismo comteano de Díaz Covarrubias y de la influencia positivista de Gabino Barreda hacia este último [7]. Díaz Covarrubias tomó para sí el principio utilitarista de Comte: *Saber para prever a fin de proveer* [8], para fijar el pragmatismo de los conocimientos que se plantean en el texto. Puesto que *el objeto final de toda ciencia*, afirmaba Díaz Covarrubias:

> Es aplicar el conocimiento en las circunstancias que así lo ameriten lo cual conduce a la previsión: En el terreno geométrico - cual es su propuesta - este conocimiento ofrece un ejemplo de gran utilidad práctica del principio establecido por el eminente fundador de la Filosofía positiva (Díaz Covarrubias F, 1873, op, cit, 167)

Pero a Comte volveremos más tarde.

De Barreda, Díaz Covarrubias cita la frecuencia con que discutían respecto *de diversos puntos científicos y ,..., de los fundamentos filosóficos del análisis* (*Ibid*, p. VI, en el prólogo). Sobre todo, es recurrente el respeto que siente por el *espíritu analítico* de éste y por la defensa del Cálculo

Infinitesimal que en la misma época realizó Barreda (Barreda G, 1908). Análisis contrario al suyo por las magnitudes infinitesimales y el método positivo que asiduamente usó el autor. Ambas propuestas, la de Barreda y la de Díaz Covarrubias, forman parte de un debate crítico que rendiría fruto en la incorporación a la enseñanza matemática de la preparatoria del concepto de límite en la forma en que le concebimos actualmente (*Cfr*. Camacho A, 2000, *op, cit*, c. IV y conclusiones). La propuesta de Barreda será expuesta al final de este documento.

Al igual que Comte y Barreda en sus respectivas obras, Díaz Covarrubias hizo un análisis de las diversas propuestas del Cálculo aún vigentes en su época: los infinitamente pequeños de Leibniz, los límites o últimas razones y las cantidades evanescentes de Newton, el cálculo algebraico de Lagrange del que cita la Théorie des fonctions analytiques y la propia propuesta de Barreda. Apeló a ese estudio para justificar la fundamentación de su trabajo, deslindarse de las dificultades que los métodos de estos últimos crean al entendimiento y mostrar que los resultados de cada uno, independientemente de su ortodoxia, incluyendo al suyo, son similares o idénticos (Díaz Covarrubias F, 1873, op, cit, 56 a 73, c. V).

Otros nexos son comentados a lo largo del libro: El método de las derivadas que adopta el francés Francoeur [9] en su *Traité de Mathématiques* (*Ibid*, p. 64), las *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal* de Carnot, el método de Philippe Koralek para el uso de los logaritmos *Méthode nouvelle pour calculer rapidement les logarithmes des nombres*, el *método de combinación* del alemán Tobías Mayer para la determinación de los *pequeños errores* que surgen en las mediciones prácticas, preludio del método de los mínimos cuadrados, algunos ejercicios interesantes que tienen que ver con el método de máximos y mínimos del texto *Calculs Pratiques* de Babinet que Díaz Covarrubias incorpora al suyo, aun cuando esto explícitamente no se menciona (*Vid*. Babinet M, 1857) y, de Descartes, se sumó a la abstracción filosófica del concepto de *extensión* en las concepciones de volumen, superficie, línea y punto, que le servirían de inicio sustentable a la obra. Otros testimonios y nexos se comentarán más adelante.

La elementarización en la estructura de la obra

El Covarrubias - como también se le conoce - está repartido en veinticuatro capítulos, dividido en dos partes, de los cuales doce competen al Cálculo Diferencial y los otros doce al Cálculo Integral. De las 297 páginas en octavo menor español que integran la edición de 1873, 181 son para la primera parte y el resto para la segunda. Contiene un prólogo y una introducción dividida en dos partes. En la primera de éstas se plantea la importancia de las *magnitudes auxiliares*, en tanto que en la segunda se reafirma su utilidad al definir el *Análisis trascendente* a partir de ellas. Se apuntala una definición para el concepto de función y se sugiere la noción de *variabilidad* como un cambio de estado o posición. Al final del libro se presenta el índice correspondiente.

El texto esta dividido en 230 artículos numerados ordinalmente que van siendo hilvanados a través de los argumentos y nociones que plantea el autor. De éstos, 134 son para el Cálculo diferencial y 96 para el Cálculo integral. La organización de cada capítulo en artículos es muy similar a la estructura de los *livres élémentaires* dedicados al Cálculo para las primeras escuelas francesas posrevolucionarias como en el *Traité* de Lacroix (Lacroix S. F, 1797) y los *Éléments* de Boucharlat (Boucharlat J. L, 1810).

A diferencia de los libros de Cálculo actuales, no se da importancia a los números reales como estructura, éstos se conciben como *valores* o símbolos del álgebra que pueden representar cualquier valor imaginable, prescindiendo de su naturaleza concreta. Las conclusiones, resultado por lo general de un proceso de demostración analítica, se expresan como proposiciones o *reglas* en cursivas a la vez que la expresión o fórmula a que subyace va seguida de un orden enumerativo. El lenguaje es tejido para dar sentido a las frases que resumen los resultados. La palabra *conclusión* delimita en algunos casos estos juicios, en otros, la implicación *entonces* les sustituye o bien el uso de un lenguaje llano y compacto cuya construcción tiende a lo formal. De esta manera no sorprende que en ninguna parte del escrito aparezcan términos como *teorema o axioma*. Por ejemplo, después de determinar el *coeficiente diferencial* del logaritmo vulgar $dy = d.\log x = \frac{1}{A}\cdot\frac{dx}{x}$, la proposición resultante es:

"Este resultado manifiesta que la diferencial del logaritmo de una cantidad es igual una constante multiplicada por la diferencial de la cantidad, y dividida por la cantidad misma".

Las demostraciones son todas completadas por desarrollos en serie e invitan a la prolijidad del álgebra. La notación y simbología es limitada y concisa lo cual da más valor e importancia a los pocos términos técnicos involucrados: y denota las funciones o ecuaciones, el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$ es adoptado solamente por respeto a los cánones infinitesimalistas de la época, así como el uso de $y = f(x)$, y' representa el desarrollo en serie de las funciones.

En el capítulo I se hace una clasificación de funciones, en el 2º se definen los *coeficientes diferenciales* como la parte independiente del incremento de la variable, el 3º y 4º se dedican para la diferenciación de funciones y en el 5º el autor hace un análisis de las diversas concepciones del Cálculo que en esa época todavía se usaban, incluso en la enseñanza: aquellos de Leibniz, Newton, Lagrange, incorporando un estudio a la propuesta de Barreda [10]; del 6º al 12º se caracterizan las aplicaciones del Cálculo diferencial y se muestran las series de MacLaurin y Taylor, máximos y mínimos – en el 8º - formas de las curvas – en el 9º - asíntotas, radio de curvatura, evolutas, curvas osculatrices, etc. – en el 10º - *errores* – en el 11º - y el método de *mínimos cuadrados*, muy útil en el quehacer de la ingeniería en esta época, abreviándole con el concepto de *ecuaciones de condición* - aparece en el 12º - .

Las figuras correspondientes se insertan numeradas en hojas aparte al final del texto. Ello es común solamente en las dos primeras ediciones puesto que en la tercera, de 1901, se van intercalando entre los argumentos.

En la segunda parte, del Cálculo Integral, los capítulos 1º al 4º destacan los principios fundamentales de la integración. Viendo ésta al estilo de los primeros autores europeos de obras para la enseñanza como Reynaud y Bails (Reynaud, 1708, 245-246; Bails B, 1790, 373; Cfr. Camacho A, Aguirre M, 2001, 242 a 247); es decir, como el proceso inverso de la derivación –en el 1º – las reglas generales - en el 2º – la integración de funciones binomiales y el método de integración por partes – en el 3º – aproximación por series – en el 4º –. En los capítulos 5º al 8º se aprecian las aplicaciones del Cálculo integral: rectificación de curvas – en el 5º – cuadratura de curvas – en el 6º – superficie y volúmenes de sólidos de revolución – en el 7º y 8º respectivamente –

integración de funciones racionales e irracionales – en el 9º y 10º respectivamente – integrales dobles para superficies en el 11º - e integrales dobles o múltiples para volúmenes – en el 12º -.

Si el lector sólo se limita a hojear el libro, sin recurrir al índice o a la introducción, tres fórmulas aparecen eventualmente para los desarrollos en serie de las funciones que se analizan. Se trata de la fórmula de Lagrange en la forma:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + etc.;$$

correlativamente la fórmula del teorema del binomio de Newton, por ejemplo en el desarrollo de la función: $y = c + ax^n$:

$$y' = c + ax^n + nax^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}ax^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}ax^{n-3}h^3 + \ldots$$

La última, la cual sirve de frontera a las dos primeras, es la serie de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3x}{dx^3}\frac{h^3}{2\cdot 3} + etc.$$

Estas tres series son las herramientas que llevan a la obtención de las diversas reglas de derivación e integración. Díaz Covarrubias las relaciona mutuamente en la obra. Particularmente, la primera es más frecuente que las otras y deviene a partir de su amplio uso por los geómetras e ingenieros de la época. Con ésta se desarrollan en serie todas las funciones trigonométricas y trascendentes en el texto. Es el caso de la función coseno: $cosh = 1 - ph^2 - qh^4 - \ldots$ donde p, q, etc, son los coeficientes diferenciales de la expresión (Díaz Covarrubias,1873, op, cit, 39). O bien el desarrollo de la fórmula: $Q^2 = CID^5$ para calcular la influencia de los errores causados en la medición del diámetro D e inclinación I para determinar el gasto Q que fluye por una cañería - donde C es una constante -: $\Delta Q = \frac{5}{2}\frac{Q}{D}\Delta D + \frac{1}{2}\frac{Q}{I}\Delta I + \ldots$ (Ibid, p. 164).

La noción de cantidad

Enunció las funciones al estilo de Euler como: “Toda expresión analítica en que el valor de una cantidad dependa del que se asigne a otra u otras de las que forman la expresión, puede ser, en general, representada geométricamente por una curva” (Ibid, p. 16, art. 7).

Este concepto debe verse como el único que en el texto adquiere un carácter técnico y, por qué no decirlo, formal. Su estudio debe apreciarse a partir de las diversas reformulaciones que el autor hace de ella, desde la óptica de los autores de obras elementales y desde la perspectiva de aquellos libros de Cálculo que no se dedicaban a la enseñanza, como los de Cauchy.

Lacroix es de los primeros autores serios que sugiere una expresión para el concepto de función con fines educativos y en términos de dependencia entre cantidades: "Para decir que una cantidad depende de una o muchas otras, por cualquier tipo de operaciones o por relaciones difíciles de asignar algebraicamente,..., decimos que la primera es función de las otras" (Lacroix S. F, 1797, op, cit, en: Notions préliminaires)

En esta definición no aparece la frase *expresión analítica*. Creemos que la definición de Díaz Covarrubias es más cercana a la expuesta por Boucharlat, cuyo libro era oficial para la enseñanza del Cálculo en la etapa de colegial de Díaz Covarrubias en el Seminario de Minería: "Decimos que una variable es función de otra variable, luego que la primera es igual a una cierta expresión analítica compuesta de la segunda" (Boucharlat J.L, 1858, op, cit, 1).

Aun cuando éste usa el término *variable* en lugar de *cantidad* y consideraba las funciones en la misma categoría de las variables, como en el caso de Lacroix., Díaz Covarrubias no dudó al expresar el término *cantidad* por el de *variable*. Todavía en su época, las cantidades denotaban variables, en tanto eran vistas como *aquello que aumenta o disminuye* (Cfr. Camacho A, 2000, *op, cit*, 54). Para Cauchy, el concepto de función tiene una definición más compacta y con poca trascendencia hacia la enseñanza de la matemática de su época: "Las diversas expresiones que proveen el álgebra y la trigonometría cuando ellas encierran a las variables consideradas como independientes, son así funciones de esas mismas variables" *(Cauchy A. L, 1994, 78, c. I).*

En la práctica, Díaz Covarrubias hizo uso de un elemento próximo del concepto de función de Euler como fue la *noción de cantidad*, puesto que ésta llevaba a matematizar los elementos de los problemas de ingeniería que enfrentó como fueron volumen, superficie, línea, etc., y con la cual le era posible establecer la ecuación o función correspondiente (Cfr. Camacho A, 1994, v. 6). Para la enseñanza del Cálculo en la preparatoria, haría una reformulación de carácter geométrico más accesible para los alumnos.

La naturaleza geométrica de la función. Constancia y variabilidad

En el texto, el punto importante del carácter elementarizador de Díaz Covarrubias se coloca en la facilidad con que transita, para un mismo concepto, entre lo concreto y continuo sin que por ello se pierda generalidad en las proposiciones. Aprovechando la coyuntura de la representación gráfica de las funciones, dada en la definición de función, estableció un argumento geométrico y mecánico, perceptible fácilmente para el lector debido al movimiento que se impone a un *punto generador* de la propia trayectoria que dibuja la curva:

> Toda línea curva puede suponerse originada por el movimiento de un punto que varía continuamente de dirección según cierta ley, que dependerá de la naturaleza de la curva. El punto que la describe se llama generador de la curva. De este modo de concebir la generación de estas líneas se infiere que si bien el cambio de dirección del punto generador es necesariamente diverso de una curva a otra, todas ellas tienen por propiedad común la variabilidad de esa dirección. (Díaz Covarrubias F, 1873, op, cit, 17, art. 10)

Los *cambios de dirección* por los que pasa el *punto generador* sobre la curva, tienen sentido en lo discreto y sobre una sucesión poligonal de líneas rectas, de lados muy pequeños, no infinitesimales que le configuran y que tiene por propiedad la *variabilidad* de sus diversas direcciones. Empero, la concepción elemental de la variabilidad del generador sobre las líneas rectas puede llevarse todavía más allá. En forma discreta, dice Díaz Covarrubias:

> Admitamos,..., que al llegar el generador a determinado punto de su curso, cese la causa que hace variar su dirección de acuerdo con la ley propia de la curva,..., sin que a pesar de esto se paralice su movimiento. El generador seguirá moviéndose en la dirección que tenía en ese punto de su trayecto, y describirá por tanto, la recta tangente a la curva en ese mismo punto.

Pasar de ese estado concreto de las líneas rectas en la construcción gráfica de la curva a su estado continuo, es como pasar del estado constante al estado variable. Realizar esa transición lleva a introducir en los cálculos ciertas *cantidades auxiliares, con el fin de facilitar el establecimiento de las ecuaciones entre los diversos elementos de una cuestión*, con lo cual se matematiza la concepción geométrica. ¿Más qué significa esto último? [11].

Esta idea concibe la curvatura de la curva como la representación de la variabilidad de las direcciones, y la recta tangente como la dirección del generador en el punto de contacto; generaliza la sustitución de líneas rectas por líneas curvas; es sencilla, afirma el autor: *por introducir la noción de constancia en lugar de otra más compleja, cual es la variabilidad*, empero, con ello es posible deducir esta última y pasar al estado continuo.

La justificación hacia la enseñanza es que la noción de constancia es fácilmente adoptada por los jóvenes a diferencia de la complejidad de la *variabilidad*, puesto que:

> No hacemos más que obedecer a una necesidad imperiosa del espíritu humano, nacida de la estrechez natural de nuestra inteligencia. Este gran artificio,..., nos induce espontáneamente a estudiar las direcciones curvilíneas, representantes de la idea de variabilidad, por medio de su comparación con las rectilíneas, imágenes geométricas las más naturales de las noción de constancia (Díaz Covarrubias F, 1873, *op, cit*, 72, c V)

De aquí surgen otras preguntas ¿cómo se transita del estado constante al continuo? y ¿cómo se incorporan estas ideas en el ambiente algebraico y algorítmico?

En un primer momento, el de las *consideraciones puramente geométricas*, Díaz Covarrubias pretendía que los estudiantes de preparatoria se apropiaran del conocimiento a partir de solamente nociones concretas, como la de *constancia*, de suerte que, en lo abstracto, ello les dé ideas generales para entender la variabilidad de los fenómenos, y en consecuencia el estado continuo de éstos. Empero, la clave de los argumentos se centran en el entendimiento algebraico de la noción de variabilidad.

La *continuidad* a partir de la *variabilidad* de las funciones

En lo concreto la curvatura es definida a través de la representación rectilínea de los cambios de dirección del generador. En lo continuo, las variables son *cantidades susceptibles de adquirir ciertos valores* (*Ibid*, p. 16). Una variación determinada de una cierta cantidad en posición geométrica – a través de sus coordenadas – es definida como *una diferencia entre dos estados de magnitud de la misma cantidad* (*Ibid*, nota al pie de la p. 59). La sucesión de tales posiciones o cambios de estado, suministran la forma de la curva al presuponerle continua. Pero tal *continuidad*, afirma Díaz Covarrubias:

> No puede admitirse más que como una verdad subjetiva, e imposible de realizarse objetivamente; pues por muy próximos entre sí que se supongan los valores asignados a las variables x e y, nunca producirán más que una serie de puntos, tan inmediatos unos a otros como se quiera, pero que jamás determinarán rigurosamente una curva continua (*Ibid*, p. 72).

Además, la continuidad debe potenciarse a partir de la variabilidad de las funciones:

> (No) enlazadas por valores proporcionalmente variables en lo abstracto, o por rectas en lo concreto; (sino), las posiciones que estas determinan, se las debe suponer unidas por valores o por líneas sujetos unos a otras a la ley de variabilidad de la función misma (*Ibidem*).

Lo curvilíneo, en este sentido, se asume a la variabilidad, así como ésta última a la continuidad. La continuidad de las curvas se establece a partir de la contigüidad o vecindad de dos estados geométricamente separados sin importar tanto la magnitud de la separación, y sí la variación que ocurre en dicha separación a la cantidad.

Pasar al estudio de la variabilidad de su entendimiento geométrico a su concepción algebraica o analítica, sólo es posible a partir de involucrar en ese estado *magnitudes auxiliares* que lleven a su definición analítica.

Díaz Covarrubias, Comte y las *magnitudes auxiliares*

Comte hizo una amplia exposición de la matemática de su tiempo en el opúsculo llamado *Philosophia Mathématique* (Comte A, 1830, t II), contemplado en el *Cours de Philosophie Positive*. La tesis filosófica general que emerge de los tres modelos del cálculo que se sujetaban para la enseñanza en las *écoles* francesas, dados por Leibniz, Newton y Lagrange, dice Comte:

> ,..., Consisten todos en un mismo artificio lógico general. Es decir: Viendo la imposibilidad de encontrar directamente las ecuaciones entre las cantidades,..., se buscan las correspondientes entre otras cantidades auxiliares, relacionadas con las primeras siguiendo una cierta ley determinada, y de la relación con estas iremos enseguida a las magnitudes primitivas (Comte A, 1830, 157-158, t II).

En esta proposición son análogas las *cantidades auxiliares* y los términos empleados en los tres modelos por sus respectivos autores, como son *fluxión*, *coeficiente diferencial*, *infinitamente pequeño* y *cantidades evanescentes* (*Ibid*).

Incluso, Comte se afilió al Cálculo de Lagrange en los siguientes términos:

> Considero esta concepción, por su admirable simplicidad y por representar el análisis trascendente como un gran artificio algebraico con el cual, para facilitar el establecimiento de las ecuaciones, introducimos, en lugar de funciones primitivas,

> o con ellas, sus funciones derivadas, es decir, siguiendo la definición de Lagrange, el coeficiente del primer término de la variación de cada función, ordenada según las potencias de la variación de la variable (*Ibid*, p. 209).

El argumento de *cantidades auxiliares,* planteado inicialmente como una necesidad por Díaz Covarrubias, deviene lineal al establecido por Comte en la *Philosophia Mathématique.* Incorporó a los *Elementos* la proposición comtiana percibiéndole así:

El análisis llamado trascendente o infinitesimal tiene por objeto introducir en los cálculos ciertas cantidades auxiliares, con el fin de facilitar el establecimiento de las ecuaciones entre los diversos elementos de una cuestión, dando enseguida métodos para eliminar las auxiliares, a fin de obtener las relaciones que se buscan entre las cantidades principales del problema (Díaz Covarrubias (1873), *op, cit*, p. 19).

La introducción de *cantidades auxiliares* en los cálculos algebraicos, como *h* en el caso de Comte en las ecuaciones de la forma $y = f(x)$, hacen que surjan las propias *funciones derivadas* propuestas por Lagrange en la serie:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + etc.$$

Por *ofrecer grandes dificultades en su aplicación,..., y presentar el análisis como una simple extensión del álgebra,* Díaz Covarrubias no recurrió - como Comte - a la utilidad o aplicación de la notación de las *derivadas,* como $f'(x)$, del cálculo de Lagrange. Asumió la serie y el modelo lagrangiano vía el razonamiento geométrico de Fermat donde la recta secante tiende a la tangente al hacer variar el punto donde la secante corta a la curva hasta la coincidencia o punto común de ambas. Llegó a esta serie determinando la cotangente del ángulo en dirección de la secante respecto del eje de las ordenadas y del triángulo rectángulo, no infinitesimal, formado geométricamente por los cambios de estado y la secante:

$$cot.\ T \quad \frac{y' - y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Despejando y' y haciendo expansión en serie de $f(x+h)$, obtuvo:

$$y' = f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$ (*Ibid*, pp. 33 y 34.)

O bien, haciendo $y = f(x)$ y volviendo al esquema original se tiene la diferencia entre los estados de magnitud:

$$\frac{y' - y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots$$

De esta última *A, B, C, etc.*, fueron denominados al estilo de Leibniz - como ya mencionamos -

coeficientes diferenciales.

Los coeficientes diferenciales de la serie forman parte en lo analítico de la variabilidad del punto generador esquematizado en lo geométrico. Son nuevas funciones de la variable *x* y adquieren diversos valores de un punto a otro de la curva: "Representan la ley según la cual varían las cotangentes trigonométricas de las direcciones en que se va colocando el punto generador al describir el lugar geométrico primitivo" (*Ibid*, 28, c. II).

A pesar de que los resultados variacionales en la serie son los mismos que en Lagrange, la naturaleza del incremento *h* difiere en ambos. Para Lagrange y Comte, ésta es una cantidad cuya naturaleza destacaba por el carácter geométrico dado a la recta tangente: *Es una recta tal que entre ella y la curva no puede pasar otra en su punto común de contacto.* Para Díaz Covarrubias la declaración de *h* como magnitud auxiliar, constante, era indistinta de la determinación de la variabilidad de la funció $f(x)$; genéricamente *h* podía tomar cualquier acepción numérica y de todas formas pasar al estado continuo.

Por conveniencia, y sujetándose a la tendencia de la época, Díaz Covarrubias asumió la notación leibniziana al despejar el valor de *A* en la serie, es decir:

$$A = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathrm{P}(h)$$

En la que $P(h) = Bh + Ch^2 + Dh^3 + etc.$, lo cual no reviste importancia.

Haciendo $h=0$ y definiendo *A* como $\frac{dy}{dx}$, estableció: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

En este contexto el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$, no envolvía en su modelo de cálculo idea alguna de determinada magnitud, puesto que *dy y dx, pueden ser tan grandes o tan pequeñas como se quiera, con tal que guarden entre sí la relación:* $\frac{dy}{dx} = cot\,.T$ (Díaz Covarrubias F, 1873, *op, cit.*, nota al pie de la p. 25).

De esta forma, la auxiliar *A* asume el valor del cociente de diferenciales para pasar al estado continuo. Es decir, $A = \frac{dy}{dx}$.

Si ello es cierto, entonces la función $y = c + ax^n$, tendrá por cociente de diferenciales a nax^{n-1}. Lo cual es patente en su desarrollo algebraico:

$$y' = c + ax^n + nax^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}ax^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}ax^{n-3}h^3 + ...,$$

En general, la regla para encontrar la diferencial de cualquier tipo de funciones es la siguiente: "La diferencial de una función es igual a su coeficiente diferencial, multiplicado por la diferencial de la variable" (*Ibid*, p. 26).

Para deslindarse de Lagrange, analizó los coeficientes diferenciales - en el mejor de los casos el primero de ellos – en lugar de las *derivadas* e incrementos de las funciones. En la parte analítica del modelo de Díaz Covarrubias, la variabilidad de la función incrementada surge independientemente de la *constancia* de la magnitud *h*. Para el autor es indistinto utilizar la función tangente como análoga al coeficiente diferencial, en su lugar utilizó la cotangente. La cuestión importante de su modelo se centra en la naturaleza de la auxiliar *h*, puesto que como constante se contrapone a los modelos infinitesimalistas contemporáneos con el suyo.

El punto de vista lógico de Barreda.

Las críticas a las *magnitudes auxiliares.*

Barreda, en su *Examen del Cálculo Infinitesimal* (Barreda G, 1908, *op, cit.*), criticó profusamente las posturas filosóficas tomadas hacia el modelo de cálculo lagrangiano por Comte y Díaz Covarrubias. Su punto de vista era que: "El carácter excepcional dado por estos últimos al artificio lógico en la introducción de las cantidades auxiliares, es hacer creer que es exclusivo del cálculo diferencial" (Barreda G, 1908, *op, cit,* 7).

Lo cual resulta *un grave inconveniente* para toda pretendida fundamentación filosófica de esta disciplina.

Desde su punto de vista las magnitudes auxiliares sólo desempeñan un papel transitorio. Su esencia consiste en sustituir estos elementos *en lugar del todo*, con el objeto de inferir sus propiedades: "Sólo sirven para encontrar la ecuación que se busca, pero no deben formar parte de ella" (*Ibid*, p. 20).

A partir de estas reflexiones asumió una posición positivista hacia el sistema leibniziano del que hizo una defensa a través de las ideas conceptuales imbuidas en las *verdades necesarias* de la *Logique* de Stuart Mill (Mill, J. S, 1866).

En el centro de estas ideas se coloca el siguiente párrafo al que Barreda se plegó para discernir y reflexionar sobre los fundamentos del Cálculo Infinitesimal: "El carácter asignado a las verdades matemáticas, y particularmente la certeza que les atribuimos, se conserva solamente suponiendo que esas verdades se relacionan con los objetos y sus propiedades, aunque objetos puramente imaginarios" (*Ibid*, p. 255).

A partir de ello, Barreda apuntaría:

> Si se quita a los teoremas ese carácter hipotético, si se supone que ellos representan

> verdades absolutas y aplicables exactamente y sin restricción a la práctica, entonces dichos teoremas, lejos de deber presentarse como el tipo de la verdad y de la exactitud, no serían sino una colección de errores y de delirios (Barreda G, 1908, *op. cit.*, 31).

Para Barreda y Mill la precisión exacta entre los fenómenos físicos y su idealización no existe, de aquí que sólo sea posible inferir hacia ellos a partir de las hipótesis de las que se parte. Hipótesis - como es de suponer - alejadas de la certeza matemática, pero cercanas a la realidad física:

> "La geometría infinitesimal; no aspira a otra certeza más que a la inferencia; ella no pretende que sus resultados hayan de tenerse como verdades absolutas, ni mucho menos como la expresión fiel y exacta de los hechos reales; lo único que exige, es que esos resultados a los que llega, sean tenidos como consecuencias legítimas de las premisas hipotéticas de que parte" (*Ibid*, p. 31).

El reducir la geometría trascendente a sólo operaciones algebraicas – como en Díaz Covarrubias y Lagrange – *resulta completamente falso*. La inducción no puede ser evadida por un sucedáneo de naturaleza absoluta; puesto que esta metodología juega aquí un papel determinante y es que *la inteligencia no tiene otro procedimiento para pasar* de un medio parcial a otro global.

¿De dónde?, se pregunta Barreda, ¿las cantidades de radicales imaginarios?. O ¿por qué inferimos expresiones no conocidas como $a = 0\text{X}\infty$, o $1 = 0\text{X}\infty$, etc.?

Expresiones absurdas como éstas son el resultado de una generalización hecha a través de operaciones conocidas de los números reales. Leibniz, como Barreda, hacía ver que la matemática se encontraba *llena de tales enigmas* [12], que surgen a través del *análisis* e impactan en la *síntesis*. Es decir son el resultado de despreciar las cantidades infinitesimales en las series y analizar el conjunto de lo que ello deja.

La metodología empleada para esta generalización tiene que ver con una ley de causación general planteada por Stuart Mill y pragmatizada por Barreda. La ley, llamada por Mill de las *variaciones concomitantes* (Mill, J. S, 1866, *op, cit,* 442), se refiere a la relación de dependencia entre la variación de dos fenómenos; de suerte que a una variación, causa en el primero, ocurre un efecto o *causación* en el segundo. Si se tiene un fenómeno *A*, el cual produce un evento *a*; se sigue que para cada variación en las diferentes relaciones de *A*, siempre ocurre una variación en la cantidad *a*.

Barreda hace distinción de esta ley para determinar el valor al que tiende - disminuyendo incesantemente - la función $\frac{a}{x}$; a medida que *x* se va acercando a cero*:*

> Si suponemos: $\frac{a}{x}$, de manera que x vaya disminuyendo incesantemente $\frac{a}{x}$ irá creciendo en proporción a medida que x se vaya acercando a 0. De esta constante relación entre la disminución de x y el aumento de $\frac{a}{x}$, inferimos por inducción de variaciones concomitantes, que si x llegara a igualarse con 0, o si tocase su límite, como se dice, $\frac{a}{x}$

sería = ∞. (Barreda G, 1908, *op, cit,* 54)

Tal es la demostración, expuesta en forma de teorema, que Barreda propuso para justificar el cálculo de Leibniz a partir de la ley de las variaciones concomitantes. Su argumento final tiene que ver con aquellas proporciones que al diferir en una cantidad infinitesimal entre ellas, se aproximan simultáneamente a sus límites (*Ibid*, p. 55): *dos magnitudes, cuya diferencia puede disminuirse hasta ser menor que cualquier cantidad dada, son rigurosamente iguales* [13].

Esta concepción - congénita con la definición newtoniana del método llamado de las *primeras y últimas razones* - es un modelo en el que la aproximación, en tanto la ley de *variaciones concomitantes,* vía la inducción, persuade al calculista para llegar al límite.

El convencimiento inmediato en el investigador depende de sus concepciones hacia el fenómeno, y a la certeza de las verdades matemáticas involucradas inicialmente al *análisis*. De aquí la inferencia hacia el límite.

En resumen, Barreda toma para sí una postura en extremo empirista y encuadrada en la citada obra de Mill. Sus resultados, y propuesta de fundamentación del cálculo infinitesimal leibniziano, cobran sentido por el método de la inducción y deducción a través del germen variacional contenido en la naturaleza de los fenómenos físicos que con el modelo de las variaciones concomitantes de Mill pueden ser analizados; en la extrema importancia dada a la inducción, en tanto método científico – o positivo - que parte de la observación y experimentación y que permite racionalmente al espíritu llegar al conocimiento de la verdad; en el abandono oportuno del *análisis* para pasar a la inferencia y a la consideración, tanto en lo concreto y abstracto, de que *dos magnitudes cuya diferencia puede disminuirse hasta ser cualquier cantidad dada, son rigurosamente iguales*.

Pero el modelo de Cálculo de Barreda es riguroso por los argumentos que incorpora y no es fácilmente asequible a la enseñanza preparatoria de su época.

La respuesta de Díaz Covarrubias

Semejante a la concepción actual, la propuesta infinitesimalista de Barreda sólo se acepta en la práctica al entenderse como un modelo de aproximación hacia la cantidad que la función tiene por límite: “Las justificaciones de este género, asegura Díaz Covarrubias, tienden a dar al análisis el carácter de un método de pura aproximación, y las que están fundadas en la noción de infinito lo cubren casi con un manto sobrenatural,...” [14].

Para reafirmar la fortaleza del carácter de las magnitudes auxiliares en su modelo, y respondiendo a Barreda, Díaz Covarrubias planteó un par de ejemplos sencillos que involucran cantidades físicas y en los que el objetivo es precisar en la *auxiliar*, pues tiene que ver con las magnitudes involucradas cuando se viaja en ferrocarril, en tanto que el segundo carece de esquema geométrico alguno: es el caso de los réditos que produce un capital a un interés *r* por ciento en un tiempo dado [15].

En el primer problema dice:

> "Supongamos que su velocidad - del ferrocarril - es de 50 Km. - por hora -, nadie entiende qué se quiso afirmar que después de transcurrida la hora la locomotiva habrá conducido a los viajeros precisamente esa distancia,..., lo que todos comprenden es que si las condiciones de la máquina, las de la vía y cuando se tienda a modificar la velocidad, se hicieran constantes, desde el momento de su apreciación, se recorrería aquella distancia al cabo de una hora".

Las diversas posiciones que asume la velocidad del ferrocarril dependen, desde luego, de los tiempos respectivos en que la locomotora acelera, se hace constante y desacelera.

De esta manera, la ubicación total de la velocidad no puede representarse a partir de una sola posición de la curva:

> La forma de esta curva, cuya ecuación es $e = f(t)$, será próximamente la que indica la figura,..., pequeña aunque creciente en las inmediaciones del origen del tiempo, y decreciente en su fin B, cuando se haya recorrido el espacio BC comprendido entre las dos estaciones.

Desde el momento en que el tren adquiere su velocidad habitual, hasta el (momento) en que comienza a disminuirla para detenerse en la segunda estación, la curva ofrecerá a una parte FG casi rectilínea. (Díaz Covarrubias, 1873, *op, cit*, 79)

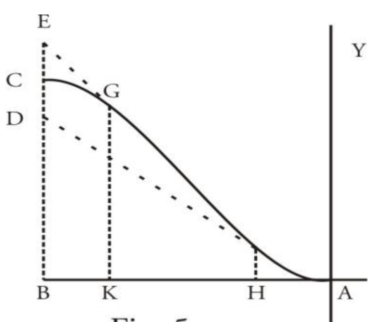

Fig. 5

El intento de Díaz Covarrubias es hacer patente el artificio espontáneo con que nuestra cognición recurre a la noción de constancia para apreciar en un punto dado la variación de un fenómeno.

Este recurso lo supone innato en el ser humano a partir de considerarnos capaces de reducir los fenómenos a eventos más sencillos o discretos para su estudio. En el caso del ejemplo, a pesar de que se supone la velocidad del ferrocarril como una constante, las singularidades que le llevan a tal estado dejan ver que su variabiliadad sólo puede ser concebida a partir de ellas. Estos detalles finos de los fenómenos físicos no pueden ser apreciados por una formulación general de los mismos.

En el segundo ejemplo, considera que el rédito producido en *n* unidades de tiempo está dado por la expresión: $R = C(cn + an^2)$ cuya variabilidad es supuestamente continua a partir de los atributos del fenómeno. En este caso, la noción de constancia está presente para cualquier valor determinado en *n*. Para obtener la variación de la razón del rédito con respecto al tiempo bastará, con su método: sustituir en *R*, *n*+*h* unidades en lugar de *n*, determinar la ecuación que contiene las variaciones, hacer la diferencia de estados de ambos réditos para las *h* unidades de tiempo y elegir la primera auxiliar. Es decir, considerando que la ecuación de variaciones es: $R(n+h)=C(cn+an^2+(2an+c)h+ah^2)$

Y la diferencia de estados de los réditos:

$$\frac{R'-R}{h}=C(2an+c+ah)$$

Elegimos de esta última la auxiliar o primer coeficiente diferencial que es el que nos interesa. Luego:

$$\frac{R'-R}{h}=C(2an+c)$$

Relación que indica el aumento del capital y por consiguiente el del rédito durante un determinado número de unidades.

Esta nueva función es en realidad un producto, en el sentido del aumento de capital que se genera, de modo que le podemos denotar como: $p=C(c+2an)$:

> Vemos que por este razonamiento, independiente de toda consideración geométrica, hemos llegado al mismo resultado que si hubiéramos diferenciado a *R* con relación a *n* en la ecuación primitiva; pero la supresión del término *ah* no se ha hecho porque se considere *h* infinitamente pequeño, ni tampoco porque el valor restante $C(c+2an)$ se suponga el límite de la razón entre el producto y el tiempo, o porque sea la derivada de la función primitiva; sino simplemente porque su conservación en el resultado desnaturalizaría el objeto de la cuestión, que es el de calcular el producto del capital con respecto del tiempo en un momento dado, o de manera más general, el de medir en determinado instante la variabilidad de un fenómeno. (*Ibid*, p. 71)

Al definir la función producto como: $p=C(c+2an)$ se hace innecesario el cociente de diferenciales $\frac{dR}{dn}$. La forma o propiedades que este producto hereda de la función primitiva no varían porque la magnitud *h* le quede asociada - nos referimos a la *desnaturalización* que menciona Díaz Covarrubias -. En la práctica, ello es posible si se consideran para su análisis separadamente cada uno de los sumandos o coeficientes que integran la serie: $\frac{R'-R}{h}=C(2an+c+ah)$ Viéndose la auxiliar *C(2an+c)* como una clara proporción entre los elementos del problema y prescindiendo, en caso necesario, de aquellos de cualquier grado en *h*, no para desvanecerles o aplicarles un límite, sino por su inutilidad práctica dentro del problema real o físico.

Tomar del esquema variacional de la serie el o los coeficientes diferenciales cuyo análisis nos lleve a la solución del problema real sin considerar *h*.

CONCLUSIONES

Con su curso de Cálculo para la preparatoria, Díaz Covarrubias fundó claramente una tradición que señala la existencia de métodos y estilos para la matematización de los fenómenos físicos y de la elementarización de conocimientos que repercutiría en los diseños de otras obras que alternativamente se escribirían para la enseñanza de este nivel. Este modelo adquiere importancia por su incorporación como parte de la enseñanza de la ingeniería y toma un sentido diferente respecto de los modelos infinitesimalistas contemporáneos que se dedicaron a la enseñanza de la matemática.

El entendimiento del concepto de variación está fundado sobre consideraciones geométricas elementales. La geometría es la parte de la matemática que en principio matematiza la extensión de los fenómenos físicos en movimiento a partir de nociones generales constantes como son volúmenes, áreas, ángulos, distancias y puntos.

> Mi manera de concebir y plantear los principios del análisis trascendente,..., no es más que la expresión de un artificio racional y espontáneo a que recurre nuestra inteligencia siempre que intentamos valorizar, en determinado punto de su producción, un fenómeno variable. (Díaz Covarrubias F, 1873, *op, cit,* 73)

Su filiación a Lagrange, hizo que se deslindase del método de los límites de Newton y aquel de los infinitamente pequeños de Leibniz. Así, el autor contesta a todos aquellos que sugieran que el germen de las magnitudes evanescentes está presente en su definición de las magnitudes auxiliares:

> Todos los escritores de cálculo infinitesimal,..., les han añadido otras ideas de difícil concepción, como la de los límites y los infinitamente pequeños, creadas exprofesamente para establecer los principios del cálculo; y las cuales, aunque en el fondo sean acaso las mismas que precedieron a la creación de la geometría general o analítica, no por eso es menos cierto que comunican nuevas dificultades al estudio del cálculo trascendente por la forma diversa y especial con que están revestidas. Estas últimas son las que yo he evitado. (*Ibid,* p. 71).

Por otra parte, la crítica de Barreda hacia la propuesta de Díaz Covarrubias, fue la de mostrar con el método positivo la falta de precisión matemática en la definición de las reglas del Cálculo establecidas por el segundo. El intento de Barreda es un síntoma con el que se buscó una posición de rigor matemático, dispuesta para defender y reconstruir el cálculo leibniziano, para así garantizar su fundamentación.

El modelo de Barreda fue expuesto por él mismo en la Escuela Nacional Preparatoria al final del bachillerato. Sirviendo el curso de Lógica de vehículo para su enseñanza y el Cálculo de Díaz Covarrubias como prerrequisito inicial. Ello causó graves dificultades de comprensión en los alumnos que hicieron que Barreda y los sucesivos directores de la preparatoria replantearan los planes de estudio y los textos correspondientes continuamente– sucedió con la Lógica de Stuart Mill, más se respetaron siempre los *Elementos* de Díaz Covarrubias -.

Al menos para la enseñanza del Cálculo actual, el recurso para matematizar los fenómenos en movimiento se sigue dando a partir de analizar una situación estacionaria, fija, o constante de ellos. El artificio de tomar pequeños elementos geométricos: trozos de curva, porciones de área, rebanadas o secciones de sólidos de revolución, se puede juzgar solamente a través de un principio como el de las magnitudes constantes. Estado donde el alumno puede establecer aquellas cantidades que se sugieren variables para, independientemente del modelo, pasar al estado continuo del fenómeno.

Juicios opuestos, el de Díaz Covarrubias y Barreda, entre la sencillez del primero y el rigor impuesto por el segundo, tenían como finalidad común no sólo la preocupación de la fundamentación de sus respectivos discursos sino, también, la previsión del aprendizaje de los conceptos del Cálculo por parte de sus alumnos. Empero, la distancia conceptual que separa ambos acercamientos deja ver el inicio de los problemas epistemológicos que hoy nos preocupan en la enseñanza de esta disciplina.

Notas

[1] Ley del 28 de marzo de 1868. Rubro: Instrucción Pública, informe del ministro Antonio Martínez de Castro, documento del fondo de la Escuela Nacional Preparatoria CESU-UNAM (Centro de Estudios Sobre la Universidad-Universidad Autónoma de México). México.

[2] Una biografía analítica de Francisco Díaz Covarrubias se encuentra en: H. Mendoza: *Francisco Díaz Covarrubias (1833-1889).* Geographer Biobibliographical Studies. Edited by Geoffrey J. Martín. Working Group on the History of Geographical Thougth of the International Geographical Union/Mansell. London, Vol. 18.

[3] Paralelamente dirigió la Academia Superior de Matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria, estilo de talleres de matemáticas donde se cultivaban los conocimientos más proclives que de esta disciplina se enseñaban.

[4] Tomada del texto publicado en la *Revista de la Instrucción Pública Mexicana*, México 1896, tomo I, p. 58.

[5] *Elemental*, se define en el Larousse como: *Fundamental, que encierra los elementos de una ciencia: claro, obvio, evidente,..., muy sencillo o reducido a lo esencial*.

[6] Zea también les denomina, en cursivas o entrecomillado, *Científicos.*

[7] Para conocer con más detalle las coyunturas de la influencia positivista hacia la Escuela Nacional Preparatoria, véase la tesis ya citada de Camacho, (2000).

[8] *Savoir pour prévoir à fin de pourvoir*. La traducción y uso que dieron los positivistas mexicanos a la frase de Comte fue: *saber para prever a fin de obrar.*

[9] El libro de Francoeur que refiere Díaz Covarrubias es el *Cours Complet de Mathématiques Pures*. Meline, Cans et Compagnie. Bruxelles 1838, - consignamos la quinta edición - .

[10] En la segunda edición del *Covarrubias* este capítulo se dejaría al final del Cálculo Diferencial, como capítulo XII. Único cambio significativo entre una edición y otra.

[11] Algunos *sistemas auxiliares* en la matemática son los logaritmos, afirma Díaz Covarrubias, *cuyo uso en las operaciones comunes no deja vestigio de su presencia luego que se obtienen los resultados.*

[12] Respuesta a D´Alembert, epístola citada en: L. Carnot: *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, Gauthier Villars et C^{ie} Paris 1797, p. 30.

[13] El argumento de Leibniz a este respecto consistía de considerar nula la diferencia entre las cantidades iniciales y las variaciones de primer orden, es decir cuando la diferencia es nula, *para llegar a la definición de derivada.* Véase: G. G. Leibniz: Ouvre concernant le Calcul Infinitésimal. *Recueil de diverses piéces sur la dispute* entre Leibniz et Newton d´après desmaiseaux, 1768. Traduit par Jean Peyroux. Diffusé par la libraire A. Blanchard. Paris 1983, p. 74.

[14] Este apartado se justifica por el análisis que hace Díaz Covarrubias a la propuesta de Barreda a la que dedica los artículos 58 y 59, páginas 64 a 60, concluye así: *Tal es el resumen que da el Sr. Barreda de los fundamentos del método leibnitciano.* Su respuesta se coloca en los artículos 60 y 61 páginas 68 a 73 capítulo V llamado *Breve exposición comparativa de las diversas concepciones fundamentales que han servido de base al Análisis Trascendente* en Díaz Covarrubias (1873).

[15] La representación geométrica se refiere, no al dibujo de la dependencia funcional entre variables sino a la interpretación geométrica de la variación del fenómeno.

REFERENCIAS

Babinet, M. (1857). *Calculs Pratiques appliqués aux sciences d´observation*. Paris: Mallet-Bachelier.

Bails, B (1790). *Principios de Matemáticas* de la Real Academia de San Fernando, segunda edición. Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra.

Barreda, G. (1908). *Examen del Cálculo Infinitesimal bajo el punto de vista lógico.* 3ª edición de la Revista Positiva. México: Tipografía Económica.

Belhoste, B., Dalmedico A. *et al.* (1994): *La formation polytechnicienne* 1794-1994. Dunod Paris: En Jean D´hombres: "L´image scientiste de l´École Polytechnique."

Boucharlat, J. L. (1810). *Élements de calcul différentiel et de calcul integral*. Paris: Mallet-Bachelier, referimos la edición de 1858.

Brosseau, G. (2000): *Educación y Didáctica de las matemáticas*. Revista de Educación Matemática, vol. 12, No 1. México: Grupo Editorial Iberoamérica, abril.

Camacho, A. (1994). f(x)»fenómeno físico. *Revista de Educación Matemática, 6*(1) Abril. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite*. Tesis Doctoral en proceso de impresión. México: Cinvestav. IPN. Departamento de Matemática Educativa.

Camacho. A, Aguirre, M. (2001). Situación Didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 4*(3), noviembre. México.

Cauchy, A. L. (1994). Curso de Análisis. México: Mathema-UNAM.

Comte, A. (1830). *Cours de Philosophie Positive*, 6 tomos. Au Siège de la Société Positiviste. Paris.

Chevallard, Y et Johsua, M. A. (1982). *Un exemple d´analyse de la transposition didactique: la notion de distance.* "Recherches en didactique des mathématiques", vol 3.2. Grenoble France: La Pensée Sauvage.

De Rémusat, Ch. (1842). *Essais de Philosophie*. Paris: Librairie Philosophique de Ladrange.

Díaz Covarrubias, F. (1867). *Nuevos Métodos Astronómicos para determinar la Hora, el Azimut, la Latitud y la Longitud Geográficas.* México: Imprenta del Gobierno en Palacio.

Díaz Covarrubias, F. (1873). *Elementos de Análisis Trascendente o Cálculo Infinitesimal*. 1ª edición. México: F. R Castañeda y L. G Rodríguez, Impresores.

Díaz Covarrubias, F. (1876). *Viaje de la comisión astronómica mexicana al Japón para observar el tránsito del planeta Venus por el disco del Sol el 8 de diciembre de 1874*. México: Imprenta Políglota de C. Ramiro y Ponce de León.

Díaz Covarrubias, F. (1896). *Tratado Elemental de Topografía Geodesia y Astronomía Práctica*. 3ª edición, tomo I. México: Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento.

Francoeur, S. F. (1838). *Cours Complet de Mathématiques Pures*. Bruxelles: Meline, Cans et Compagnie.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité du calcul diférentiel et integral,* Paris: Courcier 1797.

Lacroix, S. F. (1828). *Essais sur l´enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*. *Bachelier, Succeseur de Mme V Courcier. Paris. Hacemos referencia a la tercera edición.*

Leibniz, G. G. (1768). *Ouvre concernant le Calcul Infinitésimal.* Recueil de diverses piéces sur la dispute entre Leibniz et Newton d´après desmaiseaux, 1768. Traduit par Jean Peyroux. Diffusé par la libraire A. Blanchard. Paris 1983.

L´Hospital. (1696). *Analyse des infinitement Petits pour la intelligence des lignes courbes*. Imprimerie Royal. Paris, p. 11, sección II. De la edición de Blanchard en 1988.

Mill, J. S. (1866). *Systeme de Logique déductive et inductive, exposé des principes de la preuve et* *des méthodes de recherche scientifique*. Traduit sur la sixiéme édition anglaise, deux tomes. Libraire Philosophique de Ladrange. Paris.

Newton, I. (1723). *Analysis per quantitatum. Series, Fluxiones ac Diffrentias: cum enumeratione linearum*. Tertii Ordinis. Amstælodami, Sumptibus Societatis.

Revista de la Instrucción Pública Mexicana. (1896). México, tomo I, p. 58.

Reynaud (1708). *Analyse Demontrée*. Paris, de la edición de Albert Blanchard.

Suzanne, M. (1810). *De la manier d´etudier las mathemetiques*. Paris.

Zea, L. (1985). *El positivismo y la circunstancia mexicana*. Tesis de maestría y doctorado publicada en Lecturas Mexicanas. Fondo de Cultura Económica.

EL AUTOR
Alberto Camacho
Instituto Tecnológico de Chihuahua II
México
camachoalberto@hotmail.com

Datos de la Edición Original Impresa

Camacho, Alberto. (2002, diciembre). *Los elementos de análisis trascendente de Francisco Díaz Covarrubias. Debate en México (1870) sobre los fundamentos del Cálculo Infinitesimal. Entre la sencillez y el rigor.* Paradigma, Vol. XXIII, N° 2, Diciembre de 2002 / 123 - 157