VERDAD MATEMÁTICA Y RAZÓN CIENTÍFICA EN PASCAL

Francisco Ramón Zambrano Cano
UPEL-Instituto Pedagógico de Barquisimeto

Resumen

Blaise Pascal (1623-1662) fue, entre los filósofos y científicos modernos, uno de los primeros en plantearse abiertamente la posibilidad de establecer niveles de reflexión filosófica acerca de la ciencia matemática. Al respecto, elige como temática central el tradicional problema de la verdad, cuestión fundamental desde los mismos inicios de la filosofía, además de reconocida relevancia en toda investigación sobre el conocimiento humano, de sus alcances y límites. Así, en su corta producción escrita no sólo están presentes importantes desarrollos filosóficos, teológicos y apologéticos sobre la verdad, sino también de orden matemático. En el presente artículo se pretende dilucidar lo siguiente: ¿Cómo concibe Pascal la relación esencial entre la razón y la verdad, a partir de sus primigenios encuentros con la axiomática y la geometría euclideanas, y en dos de sus principales opúsculos matemáticos, el *Tratado sobre las cónicas* (*TraitédesConiques* ed.1640) y la *Generatio Conisectionum* (ed. 1648)? En suma, la propuesta pascaliana provee de criterios racionales relevantes para abordar, desde la filosofía, los problemas teóricos y prácticos asociados a la producción matemática. Todo ello, en un contexto como el de inicios de la Época Moderna, cargado de racionalidad, demostración científica y claridad metódica.

Palabras clave: Razón, filosofía, verdad, matemática, axioma y geometría.

Abstract

Blaise Pascal (1623–1662) was, among the philosophers and modern scientists, one of the first to consider as a real possibility the philosophical reflexion about mathematics. In relation to this, he chooses as the main theme the traditional problem of the truth which has been a fundamental question from the very beginning of the philosophy, besides the recognized relevance that his scopes and limits have in any human knowledge research. That's the reason why in his short written production not only important philosophical, theological, and apologetical developments about the truth but also the mathematical order will be found. This article tries to elucidate the following: how is the essential relationship between reason and truth is conceived by Pascal since his first approaches with the axiomatic and the Euclidean geometry and two of this main mathematics opuscules: The *Conics treatise* (ed. 1640) and the *GeneratioConisectiorum* (ed. 1648). In brief, the pascalean proposal provides the relevant rational criteria to approach through the philosophy, the theoretical and practical associated to the mathematical production. All this in a context like the one in the beginning of the modern age, it's full of rationality scientific demonstration and methodological clarity.

Keywords: Reason, philosophy, truth, mathematics, axiom, and geometry

Verdad matemática y razón científica en Pascal

"Sed sola matemática manet nobis certa et verificata in fine certitudinis et veritatis"
(Roger Bacon, "Opus Majus")

En la evolución del pensamiento pascaliano, desde sus obras matemáticas y físicas, hasta su apología de la religión cristiana, está presente la diferencia entre verdad, conocimiento de la verdad y asunción existencial de la verdad. Este distingo se establece justo cuando la razón y el método científico eclosionan con la fuerza y el alcance necesarios como para revolucionar la manera como se venía pensando la realidad. El desarrollo de la geometría y del análisis matemático durante los siglos XVI y XVII, jugó un papel central en la conformación de esta nueva concepción del mundo. Biunívocamente entendida, a toda figura corresponde determinada fórmula, y viceversa, a toda fórmula su figura específica. Como consecuencia de ello, la verdad podrá ser aprehendida cognoscitivamente a partir de la figuración geométrica. Así como cualquier verdad algebraica es geometrizable, así mismo todas las verdades geométricas estarán sujetas a un proceso de algebrización. En adelante, es claramente factible demostrar teoremas según la conexión implícita en los dos órdenes de verdad, gracias -sobre todo- al descubrimiento de las llamadas coordenadas (rectangulares, oblicuas, polares...).

En Pascal (1623-1662) esta orientación marca su producción científica. Examinar las investigaciones matemáticas llevadas a término por Pascal entre 1640 y 1659, permite dar cuenta del rostro científico y mundano de dicho pensador, al mismo tiempo conduce a situar la búsqueda de la verdad matemática en los niveles más altos del razonamiento científico de inicios de la modernidad.

En su opúsculo De L’Esprit Géométrique (Del Espíritu de Geometría. ed. 1776-1779) sostendrá que no se conoce la verdad de manera directa, pero sí se deben considerar verdaderas las cosas cuyo contrario nos parece falso (Pascal, 1963, p. 352). Para establecer de forma clara y precisa esta contrariedad la demostración rigurosa es el mejor medio; se dispone de construcciones cuya formulación y comprobación son rigurosas de acuerdo con los criterios que la racionalidad científica disponga y que, por ende, corresponden a la realidad y, por ello mismo, son verdaderas.

Ahora bien, no se trata de una réplica exacta de la naturaleza, sino de construcciones que sólo tienen sentido en el contexto teórico y experimental que Pascal define y supone según sus puntos de vista particulares. Por tanto, el Pascal geómetra está consciente de que se trata de una verdad parcial, limitada, que no agota lo que puede pensarse y decirse acerca de la realidad.

Sin embargo, sí la adopta como una verdad auténtica, tanto que ofrece la posibilidad cierta de conocer aspectos reales de la naturaleza de una manera rigurosa y simétrica. No en balde -acota este pensador- es una enfermedad natural en el hombre creer que posee la verdad directamente... (Ibíd.).

Además, al aceptar el distingo entre la verdad y el conocimiento de ella, Pascal está suponiendo el carácter inmutable de la verdad. Desde los griegos hasta inicios de la época moderna el desarrollo de las matemáticas ha sido vertiginoso, evolucionando hasta procesos de abstracción cada vez más complejos, pero la verdad es la misma. Ni siquiera frente a la evolución natural, la verdad cambia. Por mucho respeto que se tenga de los antiguos la verdad debe siempre llevar ventaja, aunque se vuelva a descubrir, porque siempre es más antigua que todas las opiniones que se han tenido, y sería ignorar su naturaleza el pensar que comenzó a ser en el momento en que comenzó a ser conocida (Pascal, 1963, p. 232).

En el presente artículo, se consideran dos de esos momentos que signan los primigenios encuentros pascalianos con la matemática y su verdad: Euclídes y Apolonio.

A. La impronta de la tradición euclidiana.

Se trata, para comenzar, de dar cuenta del encuentro de Pascal con los procesos de racionalización euclidianos y su influencia tanto en la configuración de su propia concepción matemática de la verdad, como en la búsqueda metódica de la misma, ambas instancias con presencia evidente en sus obras científicas.

De entrada se dará crédito a lo reseñado por su hermana Gilberte Périer, en su Vida de M. Pascal. Más allá del simple nivel anecdótico del suceso allí señalado acerca de la manera sorprendente como Pascal, con apenas doce años, llegó a demostrar hasta la proposición treinta y dos del primer libro de los Elementos de Euclídes, aquella que establece que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual a dos rectos, es posible entresacar ciertas reflexiones y conclusiones sobre los primeros pasos dados por este pensador en su búsqueda de la verdad matemáticamente entendida.

En tal sentido, independientemente de la opinión, de por sí prejuiciada de su hermana, debido a su desmedida admiración por la brillantez y precocidad del joven Pascal, y muy por encima del mero dato acerca de su ingente personalidad, se tiene a la mano una fuente lo suficientemente cercana como para entrever los rasgos característicos del pensar y del obrar científico pascaliano.

Su hermana dirá de él:

> ... ha tenido siempre (una) admirable claridad de espíritu como para discernir el error y se puede decir que siempre y en todas las cosas laverdad ha sido el único objeto de su espíritu, puesto que nada ha podido saber y nada ha podido satisfacerle, más que su (propio) conocimiento. Así, desde su infancia, él no podía resolver más que lo que le parecía evidentemente verdadero, de suerte que, cuando se le daban buenas razones, las buscaba por sí mismo, y cuando se interesaba en alguna cosa, no la dejaba hasta que no hubiese encontrado alguna otra que pudiera satisfacerle. (Pascal, 1963, p. 18).

Se situará este encuentro inicial de nuestro joven científico con la matemática y la geometría antiguas, en el contexto de la evolución de su pensamiento, tomando en cuenta tal descripción.

El antecedente teórico de la geometría moderna se encuentra en los *Elementos* de Euclídes. La manera como están presentes los desarrollos matemáticos en el alejandrino, caracterizados según Russell (1988) *como un sistema de deducciones queavancen de un sólo punto de partida, o al menos de tan pocos como sean posibles* (Ibíd., p. 54), se asume y practica como un modelo a seguir.

Orientada a la compresión y representación de las figuras geométricas y tomando en cuenta el sentido de realidad que las mismas van adquiriendo, la geometría euclidiana presupone que todo razonamiento dirigido a determinar matemáticamente la verdad y lo verdadero, debe considerar no solo aquellas premisas de definición explícita, como los axiomas, los postulados, las definiciones, etc., sino también el significado preciso de los conceptos usados en dicho razonamiento. Tal presunción tendrá decidida injerencia en la estructuración de las teorías pascalianas de la demostración y del significado, piezas centrales en su visión de la verdad matemática y de su búsqueda metódica.

En tal sentido, la atracción que la obra de Euclídes ejerció sobre el pensar matemático europeo representativo de finales del siglo XVI y comienzos del XVII, se explica por dos razones principales. En primer lugar, por el sentido lógico-deductivo de lo allí expuesto y lo que ello implica: la existencia de orden y validez en los axiomas. En segundo lugar -y en atención al rigor exigido- por la imposición de conceptos geométricos definidos según reglas estrictas. En otras palabras: las diversas figuras geométricas se generan únicamente a partir de intersecciones de circunferencias y rectos, es decir, de la resolución de los problemas sobre figuras, mediante el uso exclusivo del compás y de la regla.

La idea de "orden" geométrico se expresa en Pascal en su sentido matemático natural y claramente epocal, pero también denotando implicaciones de tipo metodológico y expositivo. Así, esta noción tendrá una presencia constante a lo largo de la obra escrita pascaliana: un pensamiento, una idea, una hipótesis planteada, una demostración matemática, no puede expresarse fielmente y alcanzar su objetivo más que si ha recibido un cierto orden. En tal sentido, y muy por encima del estilo riguroso de los textos escolásticos, generalmente orientados hacia el mero encadenamiento de las ideas fundamentales según una estricta ordenación lógica, para nuestro pensador el orden no se manifiesta con independencia de la verdad buscada. Por consiguiente, un desarrollo matemático (geometría de las cónicas, por ejemplo) ha de establecer suficientes niveles de deducción atendiendo a un orden determinado, en perfecta congruencia con la hipótesis planteada o, si se prefiere, con la verdad matemática que se precisa poner de relieve.

Inspirado por el modélico rigor euclidiano se tiene aquí, por ende, el gran principio metodológico y expositivo que servirá de guía a la posterior producción científica, filosófica, apologética y teológica de Pascal: encontrar el orden verdadero, traduce alcanzar la verdad con el grado de precisión y simetría necesario y suficiente como para que sea aceptada por todos. Además, con ello, Pascal no hace más que seguir la tendencia general del pensamiento matemático que desde el siglo XVI considera un sistema geométrico como axiomático y riguroso en su tratamiento, siempre y cuando cumpla con las condiciones de suficiencia y elementalidad.

Tales exigencias se revelan, aún en germen, en los juveniles intentos pascalianos por encontrar medios seguros de construir un triángulo donde los lados y los ángulos fuesen iguales.

La primera condición señala que todo axioma o teorema ya demostrado debe dar cuenta de nuevos teoremas además de los anteriores (de hecho, el Teorema de Pascal fue demostrado aplicando los axiomas euclidianos). La segunda exige simplificaciones lo suficientemente útiles como para establecer demostraciones. De hecho, tanto Pascal como Fermat (1601-1665) tratarán de encontrar vías demostrativas lo suficientemente directas como para obviar axiomas o teoremas insuficientes.

Este empeño pascaliano por el orden preciso en la presentación y desarrollo de los razonamientos matemáticos, así como en el de las experimentaciones físicas, se deja entrever, por ejemplo, cuando señala la estricta afinidad existente entre las diversas consecuencias extraídas de cadenas de proposiciones que enuncian verdades matemáticas a demostrar. Así, en su pequeño tratado intitulado: *Los productos de losnúmeros consecutivos o de los números obtenidos formando el producto de variostérminos consecutivos de la serie natural*, un estudio que -según él- no ha sido llevado a cabo con anterioridad, se señalan siete proposiciones de las cuales la última reza así:

> El más corto (débil) de los números consecutivos de una especie cualquiera es el producto en el cual los factores comienzan por la unidad (Pascal, 1963, p. 71).
>
> A ello agrega:
>
> Ésta es una consecuencia, por lo demás evidente por sí misma, de las proposiciones anteriores (*Ibíd*., p. 72).

Volviendo a las dos características expositivas que reglan lo tratado por Euclídes en sus *Elementos*, a saber, sentido lógico–deductivo y claridad en la definición conceptual, puede decirse que bajo sus respectivas sombras encontrará seguro cobijo el lenguaje y el discurso científico que identificará al *GrandSiécle*; una orientación que Pascal, en su autodidactismo, recogerá y plasmará en sus ensayos matemáticos y físicos demostrando teoremas y formalizando conceptos. En el discurso matemático encontrará -por razones de lógica y de estética, evidentes en la brevedad de sus textos- simplicidad, claridad y rigor. Se verá como esta inspiración y este estilo, se mantendrá hasta las *Provinciales*, cuyos razonamientos están construidos como un teorema, en búsqueda metódica de la verdad, muy diferente de la búsqueda *gemissante* característica de los *Pensées*.

En consecuencia, es importante retener a efectos de esta temática, que desde las matemáticas no sólo parte el pensamiento de Pascal en sus investigaciones acerca de la verdad, sino que –además- a partir de allí, su lenguaje y su discurso filosófico será paulatinamente forjado, algo supinamente ignorado por la mayoría de los intérpretes del pensamiento pascaliano, centrados en demasía en un acercamiento exclusivamente literario, histórico, o teológico de sus ideas.

En la práctica, el descubrimiento de la matemática por parte de Pascal, intentando demostrar que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a la de un ángulo plano, revela su imberbe disposición por acceder a niveles de verdad matemática más elevados, tanto que le faculten para intentar demostrar otras proposiciones fundamentales de la geometría euclidiana.

Así, mediante la citada reseña biográfica de su hermana, se sabe que Pascal establece sus demostraciones a partir de lo que él llama *axiomas* y *definiciones*. Para ello acude al texto de Euclídes existente en la biblioteca paterna [1], una traducción en la cual, si se atiene a la hipótesis planteada por Attali (2000) el matemático francés *hapodido al menos descifrar sobre la página del título, el subtítulo (Definiciones y Axiomática), empleando esas dos palabras para designar ciertas proposiciones que ha percibido, aunque no en el orden como los ha anunciado Euclídes* (Ibíd., p. 52).

Situadas en su contexto general estas primigenias inquietudes por el razonamiento matemático (geométrico) y por establecer demostraciones del mismo tenor, la cuestión a dilucidar es: ¿cómo concebir un desarrollo matemático de la verdad cuyas bases fundamentales sean la axiomática y el rigor euclideano?

B. El principio de la razón compuesta por razones y la propiedad maravillosa de las cónicas.

En el campo de la geometría renacentista y de comienzos de la modernidad las investigaciones acerca de las curvas llamadas *cónicas* jugaron un papel preponderante. El atractivo por dichos estudios corre paralelo a la aparición de la "teoría de las proyecciones" o "geometría proyectiva" a partir del siglo XVII. Pascal no escapa a tal influjo. Al respecto, escribe dos opúsculos: los ya citados *Tratado sobre l*as *cónicas* y la *GeneratioConisectionum*.

Resalta sobremanera el hecho de que en la génesis y evolución del pensamiento pascaliano, un avance signado por la noción de *verdad* y -además- en plena concordancia con la tendencia moderna de asignar un uso cognoscente a la razón, con la fuerza y el alcance que la Revolución científica y técnica impuso, se encuentre una cuestión que tradicionalmente -desde Apolonio (260?-200? D.C.)- sintetiza la imagen de una realidad natural conocida a través de la representación figurativa del trazo geométrico preciso.

> En tal sentido, el Pascal geómetra sigue la tendencia general del siglo XVII a considerar que las cónicas se pueden obtener por medios proyectivos. Para la geometría griega las circunferencias y las líneas rectas eran concebidas como lugares geométricos planos, mientras que las cónicas eran vistas como lugares geométricos espaciales debido a su origen como secciones de cono (de segundo orden o cuadráticas).

Partiendo de esa tradición matemática, tanto Desargues (1593-1662), en su obra *Bosquejo del camino hacia los fenómenos que ocurren durante el encuentro de u*n *cono con un plano*, de 1639, como Pascal en el ya citado *Ensayo sobre las seccionescónicas*, de 1640, emprenden desarrollos relativos a la fundamentación de la geometría proyectiva sintética, revitalizando la geometría métrica prevista en la tradición del método sintético de Apolonio mediante el cual se acometieron las investigaciones de las sombras correspondientes a las secciones cónicas. Tomando este estudio como un principio de clasificación, el geómetra griego, ordena y sistematiza el caos de todas las curvas planas imaginables, es decir, clasifica los lugares geométricos en planos (espaciales y lineales). Así, uno de sus aportes principales consistió en reemplazar las tres clases de curvas usados por sus predecesores (la concoide, la cisoide y la cuadratriz), para obtener las diferencias cónicas, por el cono circular recto del que todas son secciones. Con Desargues y Pascal, las propiedades proyectivas de tales secciones, son puestas sobre el tapete de los estudios geométricos modernos.

La tendencia a considerar la matemática como la ciencia de la representación abstracta de lo real, y a la geometría como estudio sistemático (ordenado) de los puntos y de las figuras que tal representación forma (recta, plano, curva, etc.) desemboca a comienzos del siglo XVII en la fundamentación de la geometría en métodos proyectivos, esto es, referida a los problemas de la perspectiva en el dibujo y a las formas a que darían lugar diversas figuras geométricas.

Como tal, la investigación geométrica llevada a cabo durante la modernidad incipiente, funge como sostén visual de inapreciable valor para el posterior progreso tanto del razonamiento científico, como de la intuición creadora.

En el caso de las curvas cónicas, los desarrollos aportados por Desargues y Pascal, conducen al desciframiento de las complejas relaciones implícitas en la sencillez de dichas figuras, lo cual supone una exposición cada vez más clara y precisa del espíritu deductivo – demostrativo de la matemática.

Esas características de sencillez, completitud y deducción están presentes en el opúsculo sobre las cónicas, donde Pascal manifiesta un gran poder de intuición y de síntesis. En general, tiene que ver con la necesidad matemática (de por sí cuantitativa y sujeta a cambio) por ordenar los puntos y sus correspondientes figuras, buscando la unidad y la complementación tanto en la diversidad de los entes matemáticos, como en el método a seguir.

Si se observa la manera como Pascal presenta su estudio de las cónicas en este opúsculo inicial, tres *definiciones* (donde conceptúa las nociones de las que se servirá: línea, sección del cono y recta) y dos *lemas*, no lo son por mera cuestión de estilo, un legado de Euclides y su tiempo, sino que responde al sentido de unidad y universalidad tanto de la ciencia geométrica como del método propuesto.

No otra es la razón por la que insistirá con obstinación en la noción de *orden* u *ordenación*.

En estas primeras obras de su producción intelectual hará uso de la misma tratando de determinar la manera como piensa disponer los distintos desarrollos matemáticos que va construyendo. Indudablemente, ello significa que aspira a presentar un escrito claro y sólidamente compuesto. Sólo así el pensamiento podrá alcanzar el objetivo propuesto (al contrario de los *Pensées* donde más bien se trata de un orden paralelo a la idea inicialmente expuesta). En consecuencia, la finalidad de toda reflexión es la búsqueda del orden; mediante el mismo se determina la originalidad de todo tipo de desarrollo (matemático, filosófico, teológico, apologético), además de permitir el abordaje del tema tratado con la precisión y claridad requeridas.

Así, en su *Definición* I, se lee:

> Cuando muchas líneas rectas concurren en un mismo punto, o son todas paralelas entre ellas, todas esas líneas se llaman de igual orden o de igual ordenación, y la multitud de esas líneas se llaman orden de líneas, u ordenación de líneas (Pascal, 1963, p. 35).

En geometría elemental las nociones de *punto* y *línea* tienen que ver con el estudio de *lugares geométricos* simples. Se trata de curvas o superficies algebraicas de grado bajo, frecuentemente relativas a planos, circunferencias, esferas, conos, etc., y sus combinaciones. El caso es que en dichos puntos y líneas localiza Pascal una *propiedad maravillosa* de las cónicas. Y, para encontrarla, declara *imitar* el método seguido por Desargues y Lyonnais, a saber, *tratar de servirse del triángulo poreleje*.

Con esta advertencia, pasa a sintetizar su estudio sobre las cónicas con base en el principio de *laraisoncomposéedesraisons.* Por medio de él, demostrará que así como los lados de un triángulo de una sección cónica poseen propiedades características, las mismas no se contradicen con los de las demás secciones, sea en el plano del rectángulo, de la elipse, de la hipérbola o de la parábola.

Con los avances presentados por Desargues y Fermat -sobre todo- los métodos de búsqueda de "lugares geométricos" no difieren de la resolución de una ecuación. No se conocen en Pascal dichas posibilidades, al menos en el opúsculo aquí estudiado, pero no puede desconocerse su interés por limitar el *lugar*, algo que en la tradición geométrica ostenta un papel central.

De hecho, es posible definir una cónica como el lugar geométrico de un punto M. A lo cual agrega Pascal: siempre y cuando sus propiedades cumplan con los requisitos que la *razón compuesta de razones* exija. Se trata de extraer de los lemas propuestos las propiedades de los elementos cónicos completos, entre las cuales nuestro geómetra cita las siguientes: las de los diámetros y lados rectos, de las tangentes, de las secciones del cono descritas por sus diversos puntos, etc. Así, por intermedio del principio de *razón compuesta de r*azones, aspira enunciar dichas propiedades cónicas de la manera más general posible.

De cara a tal objetivo de universalidad, debe afirmarse la centralidad de tal noción en cualquier procedimiento geométrico. No es una simple definición. Se trata de un principio demostrativo y de una exigencia metodológica de primer orden: para establecer demostrativamente la verdad geométrica de cada una de las propiedades de las curvas cónicas (que puede trazarse desde un punto dado, una línea que corte una sección del cono dado; que pueden encontrarse dos diámetros conjugados en un ángulo dado; que pueden encontrarse dos diámetros en un ángulo dado y en razón dada) es suficiente para Pascal demostrar - por ejemplo- *que una transversal trazadahallará una cónica, y los pares de lados opuestos de un rectángulo, encontrarán paresde puntos con una evolución determinada;* oque *un par de lados opuestos deun rectángulo y la línea recta que conecta las intersecciones de otros dos pares del lado opuesto,* son iguales o *del mismo orden* [2] (Ibíd. p.35). En ambos casos, se dice que son correspondientes, en tanto sigan los dictados del principio de la *razón compuesta derazones.* En otras palabras, se verifican o confirman en un número determinado de casos. Así pues, en Pascal, la verdad geométrica de las propiedades fundamentales de las secciones cónicas, que dependen -por lo demás- del respectivo conocimiento del centro y de los diámetros, se demuestra sólo si puede mostrarse que son consecuencia lógica necesaria de ciertas suposiciones acerca de las proporciones de las rectas trazadas en la sección cónica y que son aceptadas como válidas.

Vale acotar que Pascal introduce el principio en mientes en los dos *lemas* que conforman se *Tratado*..., lo cual le brinda un cariz más esencialmente metodológico que metafísico, que anuncia desarrollos posteriores de la teoría pascaliana del conocimiento científico (en especial en *Del Espíritu Geométrico).*

Se trata, pues, de una proposición preliminar donde la demostración previa es necesaria para deducir las principales propiedades que Pascal atribuye a las curvas cónicas.

> En la tradición matemática, un principio como el señalado se establece a continuación de la serie de demostraciones. El problema radica en que las demostraciones de Pascal no han sobrevivido hasta la época actual. Es por ello que Coolidge (1963) reconoce el grado de dificultad a la hora de exponer la manera como Pascal prueba su hipótesis acerca del carácter unívoco (o *delmismoorden*) existente entre los lados divergentes de un rectángulo y la respectiva línea recta que permite la conexión de los otros dos pares del lado opuesto.

La demostración se llevará a cabo en el otro de los opúsculos señalados, el de la *GeneratioConisectionum*, donde Pascal acude a la proyección de un círculo. El mismo Coolidge (1963) informa que, con anterioridad, tanto Brianchon como Desargues habían dado pruebas de las bondades de tal proyección, tanto como para afirmar una propiedad geométrica del círculo como la siguiente: *la igualdad de todoslos ángulos circunscritos en el mismo arco circular* (p. 89). Sin embargo, no hay seguridad de que Pascal se haya auxiliado de dicha propiedad para demostrar sus hipótesis.

En todo caso, lo importante a retener aquí es que la noción de la *razóncompuesta de razones* supone un tipo de operación llevada a cabo de una manera indubitable y universalmente convincente, aquella mediante el cual se reconoce la verdad de una proposición inicialmente planteada a manera de hipótesis a ser demostrada.

Huelga decir que, gracias a ella, Pascal se pliega al cartesianismo dominante y en contra de la tradición escolástica: dado su carácter de verdad, una demostración -vía la *razón compuesta de razones*- se distingue de las formas aristotélicas de razonamiento hipotético-deductivo, limitadas a una estructura tal que únicamente muestra la necesaria correlación entre ciertas premisas y determinadas consecuencias, más allá de las contradicciones presentes o no, entre las mismas. En tal sentido, si Pascal llega a proponer el uso metodológico de una noción como la señalada, es porque le asigna el sentido de *principio* de la geometría, esto es, una proposición directriz puesta al comienzo de la deducción misma, al margen de ésta y – sobre todo – facultada para exigir pleno cumplimiento de los niveles de verdad necesarios.

Al final, el razonamiento desemboca en la organización y unificación de las consecuencias extraídas de la demostración: todos los lados de un rectángulo, por cuyo centro se corta una línea recta, son del *mismoorden* o iguales. Se comprueba -de paso- que se trata de una verdadera figura geométrica, puesto que existe una simetría evidente entre sus dos mitades[3].

Al final del período aquí estudiado, Pascal profundiza los estudios sobre las cónicas iniciados en su primer opúsculo, transcribiéndolos y ordenándolos, llegando hasta nosotros únicamente la *GeneratioConisectionum*, según copia de Leibniz, y que constituye el fundamento de toda su geometría.

Dicho escrito juega un papel fundamental para posteriores desarrollos en el ámbito de la matemática y la geometría, en especial con la introducción del concepto de infinito matemático. Al definir al cono como *el espacio infinito contenido alinterior de la superficie cónica*, Pascal describe y posibilita el infinito desde el punto de vista geométrico. Por tal razón, Leibniz mismo, reconoce la impronta de la geometría pascaliana para explicar como la razón científica moderna introduce lo infinito en la estructura de lo finito.

Así como es concebible el círculo como la base del cono, y su vértice como el *punto inmóvil* resultante del trazo de un punto fuera del plano del círculo, dirigido hacia un punto tomado sobre la circunferencia y que le hace recorrer esta misma circunferencia (por lo que, en consecuencia, el vértice sería aquél primer punto que *permanece inmóvil*), así mismo, es posible para Pascal (1963) considerar media superficie cónica como *la parte de la superficie que va del vértice al infinito, hacialas otras partes del lado de la base* (p.38).

Con ello, Pascal presupone la noción de recta infinita, pasando a describir (Definiciones IV y V) a las rectas monosecante y asíntota. La primera, es aquella recta infinita que trazada en el plano de una sección cónica ocupa dicha sección en un solo punto. Mientras que la segunda, es aquella recta infinita trazada en el plano de una sección cónica sin alcanzarla, dado que se presenta a distancia infinita y paralela a ciertas monosecantes.

Al afirmar el dominio de lo infinitesimal en la estructura y comprensión de la intuición del espacio Pascal deriva ingentes resultados. Tomando como base el modelo de la lógica deductiva intenta llevar a cabo la titánica tarea de dar una definición exacta de cada término y demostrar todas las proposiciones. Este afán pascaliano por lo infinito, predispuesto en su concepción de la verdad matemática, refleja su alto nivel de interés por los procesos deductivos, incluso como para ir más allá de los límites que la misma razón científica le impone.

Al respecto, uno de los más renombrados exegetas de Pascal, Brunschvicg (1951), recuerda que, tanto Pascal, como el mismo Descartes, y aún más Leibniz, niegan al pensamiento la característica de constreñirse en sus alcances *bajo elpretexto de que su objeto es más lejano o más elevado, de las exigencias del trabajocientífico* (p. 562).

La matemática y la filosofía de la naturaleza del siglo XVII conceden primacía a la relación entre la noción abstracta de *paso al límite* y al tema del espacio y el tiempo, heredado del medioevo y del renacimiento occidental. Son los resultados de las investigaciones basadas en dicha relación los que se adoptan para poder comprender los problemas planteados por el estudio de las secciones cónicas, cuestiones estas que muy bien pueden ser consideradas como transitorias hacia el desarrollo con variables y límites, es decir, la concepción de *pasos al límite* establecida de manera rigurosa y con expresión geométrica natural. En tal sentido, el opúsculo sobre la *Generación de las secciones cónicas* que venimos estudiando representa un antecedente necesario para la evolución de la geometría proyectiva [4].

Lo que caracteriza a esta concepción matemática de la verdad, es que en ella no hay diferencia alguna entre los objetos propios de la matemática (números, magnitudes, figuras) y aquellos propios a las ciencias naturales (cosas, fenómenos). Ambos se consideran objetos cognoscibles mediante el razonamiento deductivo-demostrativo y la intuición.

Desde tal punto de vista, toda verdad matemáticamente entendida, se construye desde el principio epistemológico que presupone la unidad del pensamiento consigo mismo, en tanto se le exige plena complementariedad con sus respectivos objetos de estudios. De hecho, ambas posibilidades cognoscentes se toman como infalibles al momento de proyectar geométricamente una sombra, tanto que de hacerlo erróneamente se atribuirá al mal uso de las mismas. Asimismo, conceptos como los de *infinitamente grande*, *infinitamente pequeño* e *indivisible*, tomados en relación directa con las ideas de espacio y tiempo, son sometidos a constantes controversias matemáticas-filosóficas a lo largo del siglo XVII. Se busca, en general, relacionar dichas nociones con las usuales de número, figura, etc. acudiendo a ecuaciones algebraicas precisas aunque de variopinta extensión. De más está decir que esta tendencia conduce a la proclamación y afianzamiento del sentido abstracto, pero también intuitivo, de la verdad matemática.

Para el grupo Bourbaki (1972), en esta búsqueda de la verdad -en lo tocante a su asunción matemática- el rasgo fundamental se encuentra en el hecho de que Pascal define los conceptos geométricos y demuestra propiedades sin escribir una sola fórmula. Al igual que Wallis en 1655, este joven matemático francés concibe un lenguaje algebraico en el que sin necesidad de formulación alguna, propone *enunciados que bien podrían transcribirse inmediatamente en fórmulas de cálculointegral, una vez que se ha comprendido el mecanismo* (p .263). Así, a pesar de no acudir al uso de notaciones algebraicas, ni las de Descartes, ni las de Vieta, que le hubiesen podido llevar -como desarrollos posteriores lo indican- a reemplazar todas las operaciones geométricas por una única operación analítica (con base en las nociones de *diferenciación* e *integración*), ello no representa óbice alguno para que Pascal exponga razonamientos acerca de las curvas cónicas en un lenguaje matemático claro y preciso, en gran parte debido a su excelso dominio de la lengua francesa.

Se trata, pues, de señalar verdades geométricas fundamentales, manifestación obvia del conocimiento pascaliano sobre la necesidad por argumentar, vía principios racionalmente determinados (como el de la *razón compuesta por razones*), formas geométricas cuyas ecuaciones son difíciles de visualizar geométricamente y que -además- sus respectivas formulaciones se hacen infinitamente largas. Nuestro Pascal actúa, por tanto, más como un geómetra proyectivo puro que como un geómetra analítico a la manera de *La Geometría* de Descartes.

La verdad geométrica de una sección del cono (de por sí infinita en su espacialidad) no ha de ser aprehendida únicamente de la forma engorrosa y estrecha que el mero formalismo abstracto supone, sino también en el sentido abierto y comprensivo que la construcción proyectante lleva implícita. Se encontrará, en fin, con una fuente de verdad, con una idea de la razón y del razonamiento científico, que exige al geómetra tanto un necesario espíritu de rigor, como una mayor *fineza* en su proceder.

Notas

1. Probablemente una versión en latín llevada a cabo por Petrus Ramus (Pierre de la Rameé, 1515/1572) en 1545. En su obra "*Scholae mathematicae*" (1559, Frankfurt; 1569, Basilea), Ramus desarrolla una serie de lecturas de los "Elementos" analizando sus definiciones, postulados y axiomas, desde el punto de vista de la lógica (Heath, T. 1956). Un pupilo de Ramus, Pierre Forcadel, traduce y edita en francés entre 1564 y 1566, nueve libros de los "Elementos".

2. En la teoría de los números se sabe que toda relación numérica es una relación de orden parcial ($\leq$). Hoy en día se acepta que la relación de orden más notable es la relación de desigualdad. En el caso de los estudios pascalianos sobre las cónicas, se acude a una relación de igualdad que si bien es naturalmente una relación de orden parcial, no posee en la actualidad la misma relevancia que sí tenía para la matemática del siglo XVII. Por definición $a=b$ siempre y cuando toda propiedad verificada por el elemento a es verificada por el elemento b, y viceversa. En este sentido, Pascal no hace más que seguir la tradición al comprender una equivalencia entre dos rectas trazadas sobre un rectángulo como una igualdad. En descargo de él, la historia de las matemáticas informa que la noción de equivalencia se separó muy tarde de la noción de igualdad (y de invariancia). Por tal razón, durante mucho tiempo se sostuvieron triángulos iguales cuando en realidad (en rigor) se trata de triángulos cuyos elementos no coincidían, pero que tenían los ángulos y los lados (así el área, el perímetro, las tangentes, etc. señalados por Pascal en su opúsculo) iguales entre sí. En consecuencia, una equivalencia puede obtenerse si se comprueba únicamente la identidad de unas cuantas propiedades, y no de todas como pretende Pascal.

3. En su madurez Pascal propugna una definición de *simetría* bastante controversial*: Simetría es loque se ve de una vista; fundada en lo que no tiene otra razón de ser; y fundada también sobre la figura del hombre, de donde ocurre que no se ve la simetría más que en anchura, pero no en altura, ni en profundidad* (*Pensées*. Fragmento. 28)

4. Sin embargo, el aporte principal se encuentra en su *Tratado de los senos de los cuartos de círculo*, publicado por Pascal en 1659, donde expone: resultados precisos acerca del problema de la tangente, punto de partida para el desarrollo posterior del cálculo diferencial e integral por parte de Leibniz. Al intentar calcular el momento estático de un cuarto de un arco de círculo, Pascal llega a la

siguiente observación: *para los triángulos pequeños el arco de la curva puede sustituirse por la tangente*, Leibniz profundizará en ello considerando que las proporciones y las igualdades correspondientes pueden ampliarse hasta toda la curva más allá del arco de la circunferencia. (Cfr. Wussing, 1989, p. 137)

Referencias

Attali, J. (2000). *Blaise Pascal ou le génie francais*.París: Fayard.

Bourbaki. N. (1972). *Elementos de Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Brunsvicg, L. (1951). *Les Etapes de la philosophie mathématique*. París: Vrin.

Brunsvicg, L. (1944). *Pascal*. París: Vrin.

Coolidge, J. L. (1963). *The mathematics of great amateurs*.New York: Dover Publications.

Courant, R. y Robbins, H. (2002) ¿*Qué son las matemáticas*? México: F.C.E.

Euclídes. (1956). *Elementos de Geometría*. En: Heath, Thomas. L *Eucliden.The thirteen Books*. Londres: The University Press.

Russell, B. (1988). *Introducción a la Filosofía Matemática*.Barcelona: Paidós. .

Pascal, B. (1963). *Oeuvres Complétés*. París: L'Integrale/Seuil.

Warusfel, A (1966). *Diccionario razonado de Matemáticas*. Madrid: Tecnos.

Wussing, H. (1989). *Conferencias sobre Historia de las Matemáticas.* La Habana. Pueblo y Educación.

EL AUTOR

Francisco Ramón Zambrano

UPEL-Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Departamento de Formación Docente, Línea de Investigación: Epistemología de la Educación, Candidato a Doctor en Filosofía (Universidad Central de Venezuela), franciscozambrano4@hotmail.com

Datos de la Edición Original Impresa

Zambrano Cano, F (2006, Junio) Verdad matemática y razón científica en pascal *Paradigma*, Vol. XXVII, Nº 1, Junio de 2006. /163-179