UN ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE HEURÍSTICAS EN ESTUDIANTES DE UN CURSO DE MATEMÁTICA DE NIVEL PRE-UNIVERSITARIO

Tamara Marino
tmarino@ungs.edu.ar
Mabel Rodríguez
mrodri@ungs.edu.ar
Universidad Nacional de General Sarmiento. Argentina

Recibido: 02/03/2009. **Aceptado**: 28/10 /2009.

Resumen

Se presenta aquí un estudio exploratorio cuyo objetivo fue caracterizar las estrategias heurísticas puestas en juego, de manera espontánea al resolver problemas matemáticos, por los estudiantes de un curso de nivel pre-universitario (Curso de Aprestamiento Universitario, CAU) que se desarrolló en la Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina), y a lo largo del cual se trabajó con problemas aunque no se planteó la enseñanza de heurísticas. La investigación se enmarca en la Resolución de Problemas como línea teórica de la Didáctica de la Matemática, cuyos referentes principales son Polya y Schoenfeld, entre otros. En el marco de una metodología cualitativa se aplicó un test y se realizaron entrevistas. Se analizaron los resultados utilizando categorías referidas a heurísticas previamente establecidas en el marco teórico. Entre los resultados principales se encontró que los sujetos del estudio utilizaron algunas heurísticas que, aunque no fueron enseñadas explícitamente por el docente, son promovidas por las tareas mismas; entre ellas se encontraron heurísticas vinculadas con la ejemplificación, el uso de diversidad de registros de representación semiótica y la analogía; sin embargo, las heurísticas más pertinentes al momento de planificar la tarea no han sido recabadas; por ello se propone realizar, en una investigación posterior, un estudio donde se promueva la enseñanza de estas últimas, y que abarque a una mayor cantidad de sujetos.
Palabras clave: Estrategias heurísticas, resolución de problemas, matemática preuniversitaria.

AN EXPLORATORY STUDY ABOUT HEURISTICS IN STUDENTS OF A PRE-UNIVERSITY MATHEMATICS COURSE

Abstract

It is presented an exploratory study that aimed at characterizing the heuristic strategies, spontaneously used to solve mathematical problems, present in students of a pre-university course (Curso de Aprestamiento Universitario, CAU) which took place at Nacional University of General Sarmiento (Argentina). Along this course students worked with problems, but the teacher did not teach heuristics intentionally. The theoretical framework of this research is Problem Solving, as a theorical line in Mathematical Education whose principal researchers are Polya and Schoenfeld, among several others. With a qualitative metodology a test was applied and interviews were held. The results were analysed using cathegories referred to heuristics that were previously stated in the theoretical framework. Some of the main results show that the subjects used some heuristics that, although were not taught, are promoted by the tasks, like heuristics related with exemplification, use of different semiotic representation registres and analogy. Although heuristics useful to plan tasks were not found. It is proposed

here a future study to promote the teaching of these last ones in a new research that involve a greater quantity of students.
Keywords: Heuristic Strategies, Problem Solving, Pre-University Mathematics.

Introducción

El trabajo reportado aquí se inserta en la transición entre el nivel educativo medio y el superior; en particular, estuvo focalizado en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS, Argentina), Institución ésta que, desde sus inicios, ha puesto especial interés en ofrecer una propuesta didáctica apropiada para los estudiantes que aspiran a ingresar a ella. Tanto es así que se han realizado investigaciones (por ejemplo Alterman, 1995) que fundamentaron el diseño del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) a nivel de pregrado, el cual fue concebido como un dispositivo didáctico que, atendiendo a las particularidades de los estudiantes, ofreciera una opción que se ajustara a sus necesidades favoreciendo su inserción en la UNGS y un desempeño acorde con las exigencias del nivel educativo superior. Una de las asignaturas del CAU que deben cursar todos los estudiantes, independientemente de la carrera elegida, es Matemática; así que, por las razones institucionales antes mencionadas y por las dificultades propias del aprendizaje de esta disciplina, este curso ha sido y es objeto de variadas investigaciones didácticas.

En particular el estudio que aquí se presenta tiene como contexto de investigación a la Matemática del CAU, la cual tiene como eje transversal la resolución de problemas planteada como una metodología de enseñanza y no como un contenido a enseñar (Charnay, 1988). Por ello, se considera que las heurísticas que utilizan los estudiantes de este curso surgen de manera espontánea y no como producto de una enseñanza intencionada.

Algunas preguntas que orientaron el trabajo fueron: ¿A cuáles heurísticas recurren los estudiantes para resolver problemas? ¿Hay alguna predominancia de heurísticas en distintos contenidos matemáticos? ¿Reconoce que una misma estrategia la utiliza en diversos problemas, incluso con contenidos diferentes?

En este trabajo, de corte cualitativo, se presentan los resultados de un estudio exploratorio cuyo objetivo es caracterizar las estrategias heurísticas que ponen en juego, de manera espontánea, estudiantes de un curso de Matemática del CAU al resolver problemas matemáticos.

Para recaudar información, se aplicó, a todos los participantes del curso, un test con problemas matemáticos para resolver por escrito y se realizaron entrevistas a algunos de ellos.

Referentes Teóricos y Conceptuales

Hoy en día, tanto matemáticos como docentes de Matemática coinciden en la importancia de que los estudiantes sean capaces de *resolver problemas*. Algunos matemáticos identifican a su disciplina con la resolución de problemas.

> "El matemático profesional de tiempo-completo y usuario ocasional de matemáticas, y todo el espectro de la comunidad científica en medio- todos necesitan resolver problemas, problemas matemáticos, y nuestro trabajo es enseñarles cómo hacerlo, o bien, enseñar a sus futuros maestros cómo enseñarles a hacerlo" (Halmos, 1975).

Desde la Educación Matemática, diversos autores sostienen la importancia de enseñar a resolver problemas. En particular, De Guzmán sostiene:

> Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más bien que en la mera transferencia de contenidos. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas (De Guzmán, s/f).

En general hay acuerdo en considerar que la formación del sujeto debería ser flexible como para que éste sea capaz de enfrentarse a tareas nuevas, que sean desafiantes y más cercanas al tipo de actividad profesional que eventualmente tendrá que desarrollar. En este contexto, la enseñanza de la Matemática juega un rol central y en particular en la transición entre el nivel educativo medio y el universitario, siendo este último el responsable de la formación profesional del sujeto.

Este trabajo se enmarca, dentro de la Didáctica de la Matemática, en la línea de Resolución de Problemas. El principal referente de esta corriente didáctica ha sido George Polya. Su libro "How to solve it" (1945), en el que propone un modelo del proceso de resolución de problemas y una sistematización de las fases y las heurísticas útiles en dicho proceso; constituyó el primer trabajo en la dirección de establecer una relación entre la resolución de problemas y la heurística con la enseñanza de la Matemática. Posteriormente, muchos investigadores tales como Schoenfeld, Kilpatrick, Lester, Guzmán, Fridman, Jungk y otros, retomaron las ideas de Polya y siguieron trabajando en esta línea, proponiendo modelos alternativos de resolución de problemas. El *modelo planteado por Polya* (1945) establece que las fases en el proceso de resolución de problemas son: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la respuesta obtenida.

En esta corriente didáctica la noción de *problema* es de central importancia. Por ello la mayoría de los investigadores que trabajan en esta línea han dedicado esfuerzo a precisar cómo la conciben. Entre las diversas definiciones algunas tienden a caracterizar a los problemas por oposición a los ejercicios rutinarios. Entendiendo que la resolución de un ejercicio rutinario demanda la aplicación directa de algún método o procedimiento algorítmico, conocido previamente, que permite arribar a la solución de manera inmediata, se comparte la postura que coloca a la resolución de problemas y la resolución de ejercicios rutinarios en polos opuestos. La resolución de un problema implica un proceso creativo y de una complejidad cognitiva mayor, en tanto que el alumno debe elaborar su propio método de resolución, apelando a sus conocimientos previos, estableciendo nuevas relaciones entre ellos y, además, empleando diversos procedimientos, tanto algorítmicos como heurísticos. De esta manera, se coincide con González (1998) en que la resolución de un problema matemático constituye una *tarea intelectualmente exigente*, pues no se realiza con la simple activación de la memoria, ni con la aplicación mecánica de esquemas algorítmicos o recetas preconcebidas. Por el contrario, requiere de un cierto esfuerzo intelectual.

Se considera que para que una situación represente un problema para un sujeto, éste debe disponer de las herramientas necesarias para entender y abordar la situación planteada, y poder esbozar una resolución, aunque no arribe necesariamente a la solución correcta. Por otro lado, la situación no debe ser ni tan cercana ni tan familiar que permita una resolución inmediata por parte del sujeto, puesto que entonces no representaría un problema para él. Como sostiene Parra (1990) *"…un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata"*. A partir de lo dicho anteriormente, y como sostiene Charnay (1988), se entiende que la noción de problema es relativa al sujeto, en tanto que una situación que puede representar un problema para un determinado sujeto puede no serlo para otro.

Para este trabajo se toma la definición de *situación problemática* propuesta por González (1998) y se la adapta para elaborar la definición de *problema para un sujeto*, que se usa de aquí en adelante: *"Una situación es un **problema para un sujeto** cuando éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) para alcanzar un determinado objetivo, se encuentra impedido o frustrado, de modo temporal, para lograrlo"*.

Cuando un sujeto está intentando resolver un problema recurre a una diversidad de estrategias que le ayudan a entender el problema y abordar su resolución. A estas reglas, sugerencias y modos de proceder, que resultan sumamente útiles al momento de resolver un problema, se las llama estrategias heurísticas. Se definen las *heurísticas* como "estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis, la representación y la transformación del problema que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a hacer progreso hacia su solución" (Verschaffel, 1999 citado por Koichu, Berman y Moore, 2003). Se considera importante el aporte que realiza Monereo (1998) al destacar que, si bien las heurísticas ofrecen una guía y ayudan a establecer un camino de resolución, su uso no asegura la resolución exitosa del problema.

La Tabla 1 es una adaptación de la propuesta por Koichu et al. (2003). En la primera columna se indican los descriptores generales bajo los cuales se agrupan las heurísticas por características comunes. En la segunda columna se disponen algunas estrategias que se encuentran usualmente en la bibliografía y en la última se ofrece una breve descripción de cada una de ellas.

Tabla 1. Organización de heurísticas

Descriptores generales	Heurísticas	Descripción
Planificar	Trabajar hacia adelante	Abordar el problema partiendo de las condiciones y los datos dados.
	Trabajar empezando por el final	Suponer que se tiene una solución y analizar sus características.
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución.
	Razonar por analogía	Recordar problemas resueltos anteriormente, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema.
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo	Realizar una descripción gráfica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico.
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje: del simbólico al coloquial o al numérico, etc.
Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos	Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido.
	Reducir a un problema más sencillo	Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original.
	Dividir el problema en subproblemas	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general.
	Introducir un elemento auxiliar	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.)
Examinar casos particulares	Análisis sistemático de casos (Inducción)	Asignarle valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución.
	Analizar casos límites o especiales	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades.
	Analizar ejemplos	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema.
Examinar la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación (ver: Nota 1)	Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta.
	Verificar usando casos particulares.	Verificar la respuesta en casos particulares.

Entre de los descriptores generales, se ha considerado *"Examinar la solución obtenida"*, puesto que en el nivel de formación en el que se trabajó, el hecho de verificar puede representar un problema en sí mismo para el estudiante. Por ello podrían ponerse en juego algunas heurísticas en esta etapa de la resolución de un problema.

Es importante destacar que la estrategia "Verificar utilizando distintos registros de representación", ubicada en la segunda columna de la tabla, no se encuentra en los listados que figuran comúnmente en la bibliografía, sino que constituye una formulación propia que surge a partir del análisis realizado en el estudio. Queda pendiente corroborar la pertinencia de incluirla en la lista disponible de heurísticas. En estudios posteriores se revelará si otros resolutores también hacen uso de ella.

Método

Escenario del estudio

Para el estudio se seleccionó un curso de la asignatura *Matemática* del CAU de la UNGS, ésta es una universidad pública ubicada en el conurbano bonaerense, a 35 km de la Capital Federal. Se inserta en un ámbito de nivel socio-económico medio o medio-bajo del cual procede la mayoría de los estudiantes. La UNGS se interesa por ofrecer una propuesta pedagógica apropiada a los sujetos que recibe atendiendo a las dificultades que presenten.

El CAU es un curso pre-universitario de carácter masivo pues constituye la primera instancia curricular para la formación universitaria de todos los aspirantes a ingresar a la UNGS, cualquiera sea la carrera elegida. Su propósito principal es preparar al estudiante para su vida universitaria (ver más detalles en el Reglamento del CAU).

En el CAU se dictan tres asignaturas: Matemática, Lecto-Escritura y Taller de Ciencia. Matemática está diseñada según una concepción constructiva y social del aprendizaje (más detalles en el programa de Matemática), en la que se considera que el estudiante, para aprender Matemática, debe tener un rol activo y ser capaz de realizar “actividad matemática” interactuando con otros, ya sea con pares o con el docente. En esta lógica se espera que el docente promueva un trabajo en el aula en el que el estudiante deba resolver diversas situaciones matemáticas, a partir de las cuales surjan distintos tipos de actividad matemática. Se busca que las tareas propuestas den lugar a que el estudiante se formule cuestionamientos y posibles respuestas antes de la explicación del profesor.

Los <u>propósitos</u> generales del curso de Matemática fueron:

Favorecer la actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje de la Matemática

Facilitar la apropiación de herramientas de trabajo matemático y adquisición de recursos de aprendizaje.

Los <u>contenidos</u> están organizados en dos módulos. El módulo I tiene contenidos propios del nivel medio: números reales, álgebra y geometría. El módulo II inicia el estudio de funciones numéricas alrededor de un trabajo sobre modelización matemática mediante el cual se plantean modelos simples que describen alguna situación simplificada de la realidad. Los contenidos que se abordan son los de funciones polinómicas, funciones racionales, funciones exponenciales y logarítmicas. El tratamiento de los contenidos se realiza, en una primera instancia, a partir de problemas y, luego, se plantea su estudio descontextualizado.

La modelización matemática y la resolución de problemas son aspectos centrales de la propuesta pedagógica, como se indica en el programa de la asignatura, dado que brindan un contexto propicio para que el alumno desarrolle una variada actividad matemática y cambie su actitud hacia esta ciencia. En cuanto a la resolución de problemas, interesa que el alumno comprenda que la Matemática es una disciplina que ofrece herramientas para resolver ciertos problemas de la realidad. Se fomenta que el alumno piense, encare y resuelva problemas aunque no haya una enseñanza explícita de técnicas o métodos para resolverlos. Es decir, la resolución de problemas está considerada como una metodología y no como un contenido a enseñar.

Otro de los aspectos centrales del curso de Matemática es la argumentación y la validación. Interesa introducir a los alumnos en la producción de argumentos para validar enunciados matemáticos. La intención es proponer situaciones en las que los alumnos se encuentren comprometidos a defender su propio punto de vista frente a otras propuestas, justificando y argumentando su postura. Esto obliga al alumno a explicitar el conocimiento, lo que provoca un necesario avance en su comprensión de los conceptos involucrados. Por otro lado, la actividad de validar, argumentar y justificar, practicada sistemáticamente, favorece en el alumno la adquisición de una creciente autonomía en su aprendizaje.

Enfoque del estudio

La etapa de la investigación llevada a cabo tuvo una finalidad exploratoria pues no se contaba con información previa sobre la temática, de modo que por ello se consideró apropiado el enfoque cualitativo.

Sujetos del estudio

Se trabajó en un curso de Matemática que fue seleccionado por la posibilidad de realizar un seguimiento, durante toda su extensión, del desempeño de sus estudiantes. Aunque no hubo enseñanza intencional sobre el uso de estrategias heurísticas, como ya se mencionó, los estudiantes resolvieron diversos problemas. Esta tarea se llevó a cabo tanto en el salón de clases como en tareas domiciliarias individuales de entrega periódica. Se pueden identificar distintos tipos de estudiantes: aquellos que se encontraron cómodos con las tareas, pudiendo en buena medida resolverlas fluidamente; quienes no se comprometieron con las actividades planteadas y aquellos que aún con dificultades, mostraron responsabilidad y esfuerzo.

Se seleccionaron tres informantes clave entre aquellos que hubieran manifestado responsabilidad en las tareas referidas a la resolución de problemas. Se hace referencia a ellos como A1, A2 y A3. Las características más relevantes de cada uno de ellos son:

Estudiante A1: manifestó mucha dedicación y esfuerzo por aprender Matemática, área que le resultó muy difícil. En particular, puso mucho esmero ante la resolución de problemas. No disponía fluidamente de conocimientos básicos del nivel medio, en particular porque llevaba muchos años de terminado el nivel. Su desempeño en los exámenes fue regular.

Estudiante A2: manifestó buena actitud hacia la Matemática y en particular a la resolución de problemas, disponía de los conocimientos básicos del nivel medio, y su desempeño en los exámenes fue bueno.

Estudiante A3: manifestó buena actitud hacia la Matemática no así a la resolución de problemas, disponía de los conocimientos básicos del nivel medio y centralmente manejaba las cuestiones algebraicas algorítmicas. Su desempeño en los exámenes fue bueno.

Procedimiento para recabar la información

Se realizó un seguimiento de las resoluciones de distintos problemas. Durante las clases, mediante observación participativa, se revisaron resoluciones grupales, individuales y se analizaron las tareas domiciliarias. Este seguimiento de la actividad de los estudiantes permitió conocer la disponibilidad de conocimientos matemáticos, tanto procedimentales como conceptuales, así como la actitud frente al aprendizaje de la Matemática y a la tarea de resolver problemas. También se pudo conocer el tipo de actividades resueltas a lo largo del curso. Esto brindó información acerca de qué situaciones podrían representar problemas para este grupo.

Instrumentos y Técnicas

Como se ha mencionado en la introducción, el objetivo del estudio llevado a cabo fue caracterizar las estrategias heurísticas que ponen en juego, de manera espontánea, estudiantes de un CAU al resolver problemas matemáticos. Para ello se utilizaron un test y una entrevista, como se detalla a continuación.

Test (Ver anexo)

Se utilizó como instrumento un test con actividades para resolver individualmente, por escrito y para realizarse fuera de las clases. Con la intención de que las actividades seleccionadas resultaran problema para el grupo de estudiantes, fueron diseñadas con los siguientes criterios:

a) Que fuera factible que los estudiantes contaran con las herramientas cognitivas necesarias para abordar la resolución y que los enunciados no fueran familiares.

Se diseñaron las actividades considerando lo trabajado en el curso de modo que al encarar su resolución, los estudiantes contaran con conocimiento tanto en lo que refiere a contenidos como a habilidades, algoritmos, procedimientos, etc. También se contempló con mucho cuidado que los planteos de las actividades se diferenciaran de los presentados habitualmente en el texto del curso (ver Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez, 2007). De esta manera se intentó garantizar que las resoluciones no se pudieran obtener de manera inmediata sino que requirieran la elaboración de un método de resolución propio.

b) Que dichas actividades admitieran una variedad de heurísticas. Se tomó este criterio debido a la posibilidad de lograr mayor riqueza en las respuestas de los estudiantes.

El test fue aplicado a todos los estudiantes del curso.

Entrevista

Se aplicó a los tres estudiantes seleccionados con la intención de complementar la información acerca del uso de heurísticas puestas en juego al resolver (o intentar resolver) las situaciones propuestas en el test. La entrevista se diseñó en función de las respuestas escritas. Se diseñaron preguntas individualizadas que: a) intentaran poner de manifiesto las heurísticas utilizadas cuando no había registro escrito de ellas o b) aclararan el uso de estrategias cuando, habiendo rastros en el registro escrito, no era explícita la intención de su uso.

Técnicas aplicadas en el análisis de la información recabada

Con el fin de determinar las heurísticas utilizadas por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos se realizó un análisis de los procesos puestos en juego al resolver las situaciones planteadas en el test, considerando tanto las resoluciones escritas como las explicaciones que surgieron en las entrevistas. Para cada estudiante se consideraron como unidades de análisis las resoluciones de cada uno de los problemas junto con las explicaciones que ofrecieron respecto de ellas en la entrevista.

El método analítico se basó en interpretar información de las unidades de análisis utilizando categorías previamente establecidas. En particular, se interpretó información de las unidades mencionadas, en términos de las heurísticas y la organización de ellas propuesta en el marco teórico.

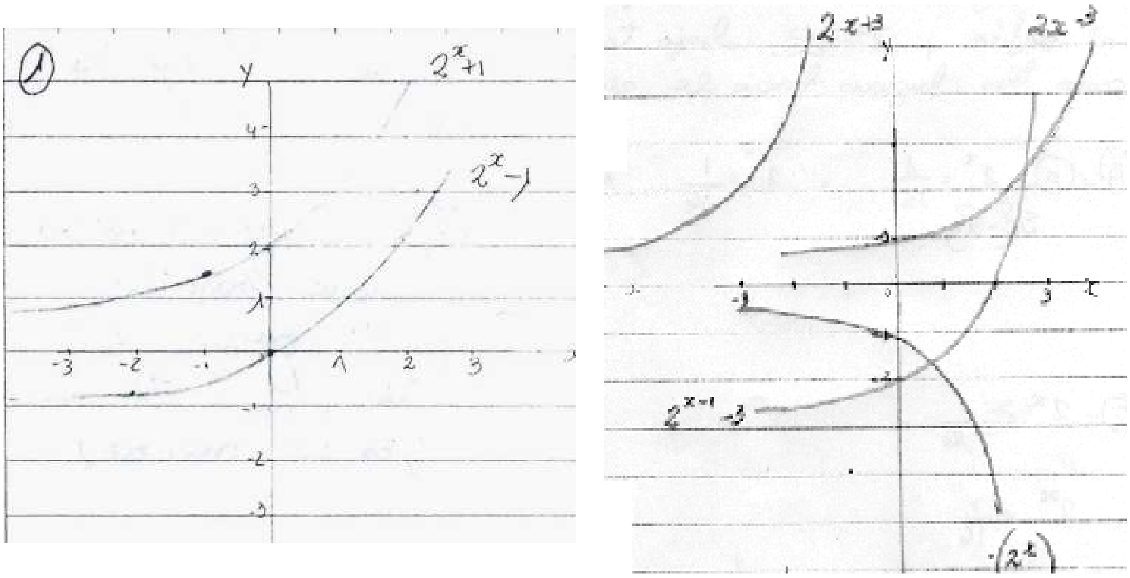
Análisis

Actividad Nº 1. Para esta actividad en la que se pide graficar, sin tabla de valores, funciones exponenciales y logarítmicas, se encontraron, en las resoluciones escritas presentadas por los estudiantes, "buenas aproximaciones" a los gráficos solicitados (Ver Nota 2).

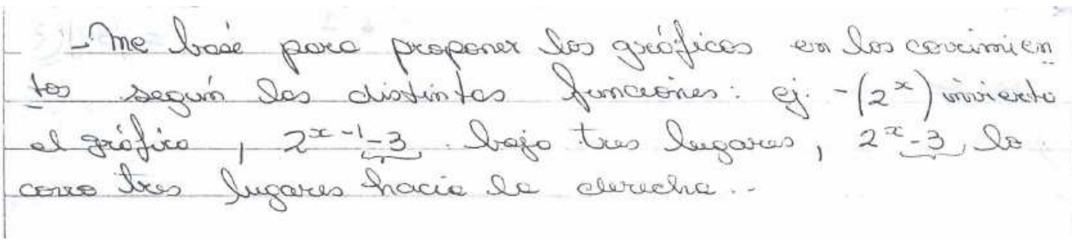
Como podrá observarse, los estudiantes A1 y A2 recurrieron a las heurísticas *"razonar por analogía"* y *"recurrir a teoría relacionada"*. Estos estudiantes pudieron realizar los gráficos estableciendo una analogía con lo estudiado en las funciones cuadráticas. En dicho curso, se trabajó la forma canónica de la función cuadrática $g\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $g(x) = a(x-h)^2 + k$ explicitando los desplazamientos que se producen en el gráfico de $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = x^2$ al cambiar los parámetros a, h y k.

A continuación se muestra parte de la resolución escrita de A1 junto con fragmentos de su entrevista que muestran las evidencias de lo que aquí se sostiene. Algunos de los gráficos que propuso A1 pueden verse en la Figura 1.

Figura 1. Fragmentos de la resolución escrita del estudiante A1.



En su explicación escrita, A1 dice

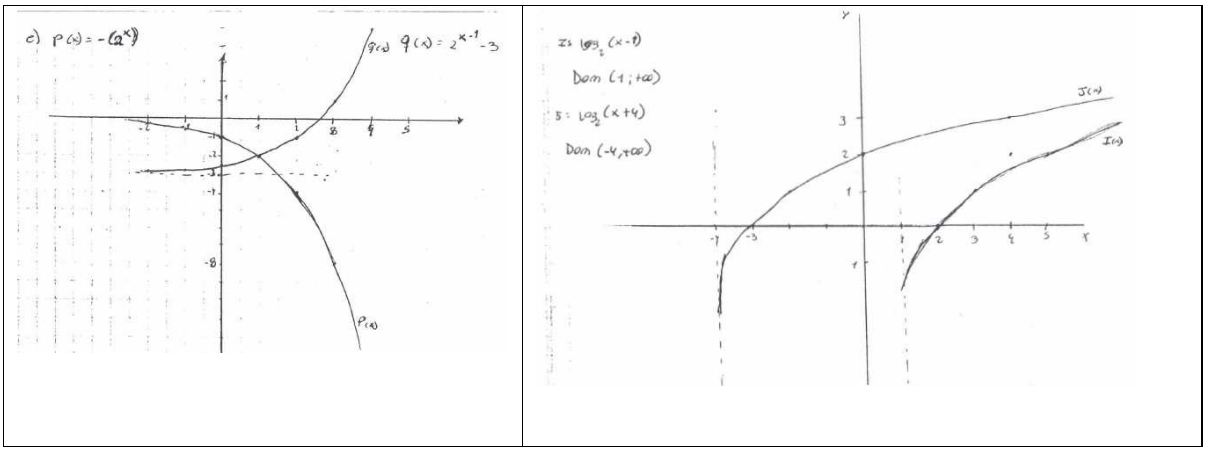

- Me basé para proponer los gráficos en los corrimientos según las distintas funciones: ej. $-(2^x)$ invierto el gráfico, $2^{x-1}-3$ bajo tres lugares, 2^x-3 lo corro tres lugares hacia la derecha..

Fragmento de la entrevista de A1

E: para el ejercicio en donde tenías que hacer gráficos de funciones exponenciales y logarítmicas, ¿cómo llegaste a hacer los gráficos? ¿A qué recurriste? ¿En qué te basaste?
A1: primero me fijé los corrimientos laterales y verticales, y el inverso del gráfico. Después me fijé, para poder graficar, los valores donde cortaba los ejes x e y. De 2^x ya tenía el gráfico. Mirando ese gráfico ya sabía cómo dibujarlo corriendo para arriba o para abajo.
E: ¿cómo supiste si tenías que correr para arriba o para abajo?
A1: por como está escrita la función, si es –1 es un lugar para abajo sobre el eje y, y si está al lado del x, digamos x + 3 por ejemplo, es para el lado izquierdo o derecho.
E: ¿de dónde sabés eso? Porque la profesora no explicó cómo hacer gráficos de estas funciones…
A1: con estas funciones no, pero ya lo había dado anteriormente con otras funciones, con la parábola…
E: es decir que te sirvió el ejemplo de la cuadrática para volcarlo en este nuevo caso…
A1: si.

Algunos de los gráficos que A2 presentó por escrito pueden ser vistos en la figura 2.

Figura 2. Fragmentos de la resolución escrita del estudiante A2.



La única explicación que dejó por escrito es la siguiente, que refiere al ejercicio 1.

Me base en los corrimiento. de la funcion del es 1

Un fragmento de la entrevista con A2 que refuerza la afirmación del uso de las heurísticas es:

> *E: ¿Podrías explicarme en qué pensaste o a qué recurriste para realizar los gráficos (sin tabla de valores) de las funciones exponenciales y logarítmicas?*
> *A2: me basé teniendo en cuenta la cuadrática, identifiqué qué valores hacía que se moviera para arriba o para abajo y para la izquierda o derecha. Comparé con la función cuadrática.*
> *E: ¿y para los gráficos de los logaritmos?*
> *A2: planteé lo mismo.*

Respecto de A3, su presentación escrita incluyó gráficos y explicaciones. Parte de ellos se ven en la Figura 3.

Figura 3. Fragmento de la resolución escrita del estudiante A3.

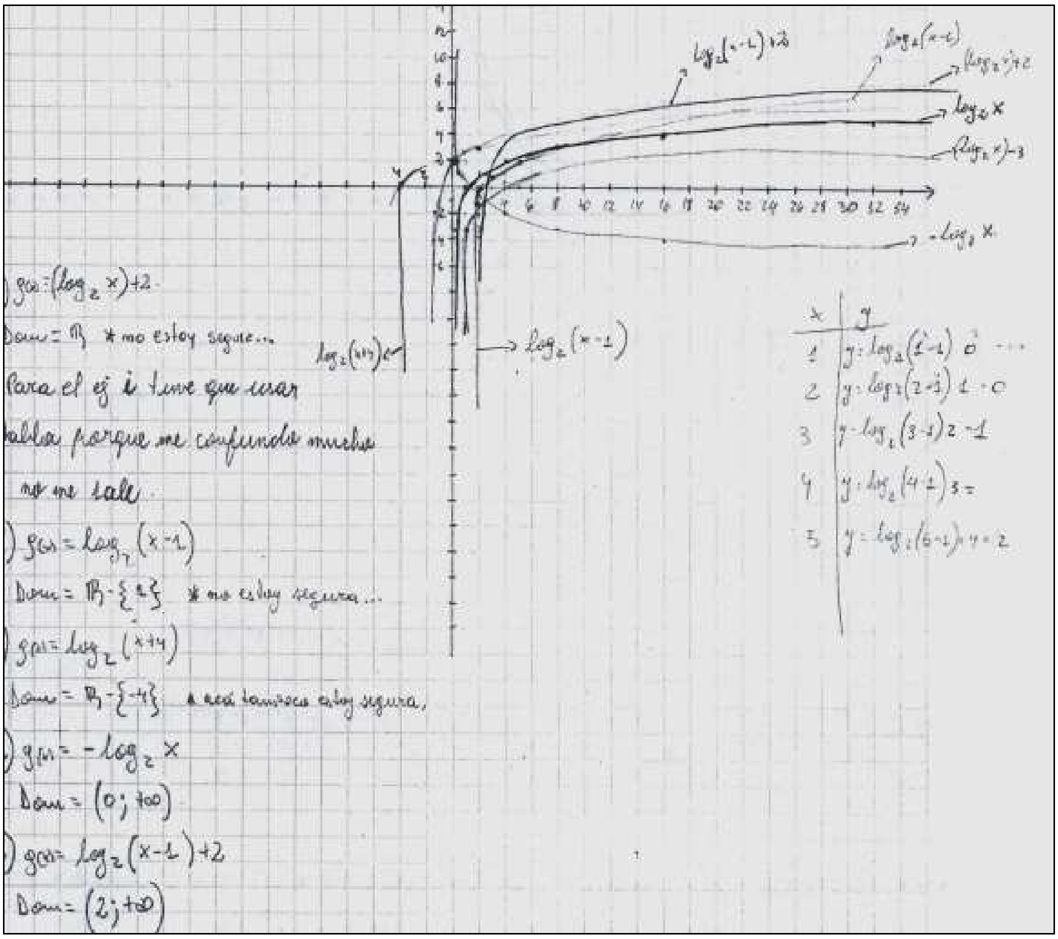
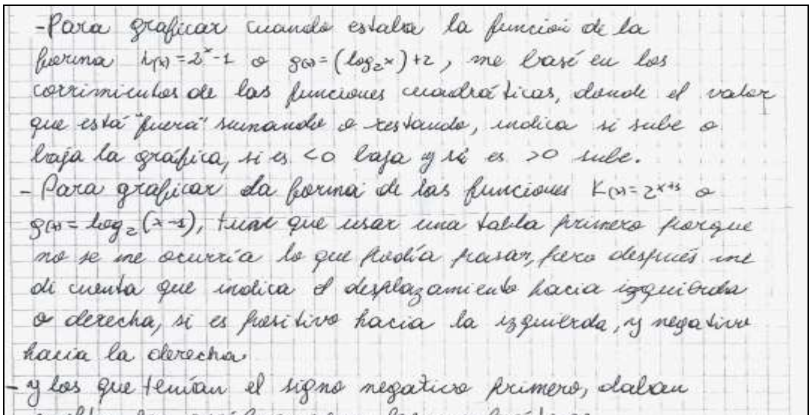


Figura 4. Explicación escrita del estudiante A3.



-Para graficar cuando estaba la función de la forma $h(x)=2^x-1$ o $g(x)=(\log_2 x)+2$, me basé en los conocimientos de las funciones cuadráticas, donde el valor que está "fuera" sumando o restando, indica si sube o baja la gráfica, si es <0 baja y si es >0 sube.
- Para graficar la forma de las funciones $K(x)=2^{x+3}$ o $g(x)=\log_2(x-1)$, tuve que usar una tabla primero porque no se me ocurría lo que podía pasar, pero después me di cuenta que indica el desplazamiento hacia izquierda o derecha, si es positivo hacia la izquierda, y negativo hacia la derecha.
- y los que tenían el signo negativo primero, daban vuelta la gráfica como las cuadráticas.

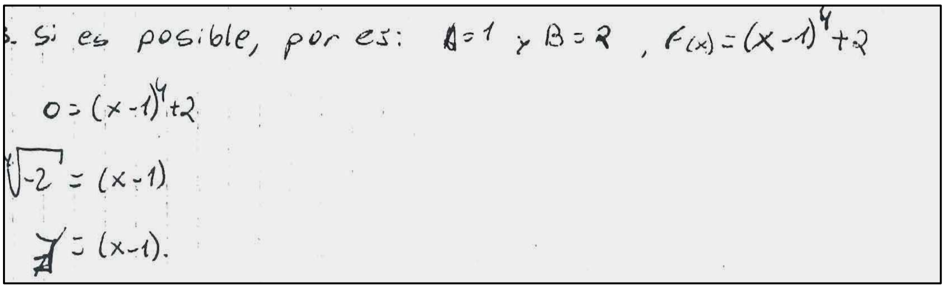
La explicación mostrada en la Figura 4 permite deducir que para realizar los gráficos pedidos estableció una analogía con lo estudiado en función cuadrática, al igual que A1 y A2. Además, muestra que necesitó recurrir a una pequeña tabla de valores para determinar qué corrimientos provoca al gráfico restar un número (positivo o negativo) en el exponente. Se interpreta que para resolver esta última dificultad utilizó la heurística *"analizar ejemplos"*.

Actividad Nº 2.

Para la actividad Nº 2, en la que se pide examinar si es posible determinar valores para los parámetros de la función polinómica de modo que ésta no tenga raíces (de grado 3 en el ítem a y de grado 4 en el ítem b), se encontró que los estudiantes pusieron en juego diversidad de procesos y estrategias para intentar resolverla. Se focaliza el análisis en el ítem b.

El estudiante A1 no resolvió esta actividad. El estudiante A2 sí pudo realizar una resolución escrita. En la Figura 5 se muestra su respuesta escrita y se presenta un análisis basado en dicha resolución y en las explicaciones brindadas por durante la entrevista.

Figura 5. Resolución escrita realizada por el estudiante A2



Como puede observarse en la Figura 5, el estudiante A2 organiza su respuesta exhibiendo un par de valores particulares para lo parámetros *a* y *b* con los que se verifica la condición pedida. También incluye el planteo y resolución del cálculo de las raíces de la función obtenida al reemplazar dichos valores. Se considera que este planteo constituye una traducción algebraica de la situación por lo que la heurística utilizada es "*reinterpretar el problema en un lenguaje diferente*". Además, puede interpretarse que fue realizada con la intención de verificar la respuesta dada desde lo numérico, por ello se puede concluir que recurrió a la estrategia *"verificar utilizando distintos registros de representación"*.

En la entrevista se solicitaron explicaciones acerca de los procesos de pensamiento que llevaron al estudiante a elegir el par de valores particulares que exhibe en su respuesta escrita. Las explicaciones fueron las siguientes:

A2: me basé en que elevar a la cuarta me da una función polinómica y sabía gráficamente que es una función que puede dar raíces reales o no. Después probé con valores reemplazando para ver si me daba raíces o no.

Va a ser (hace el gesto con la mano que describe el dibujo)

Lo asocié con el grupo de las polinómicas. Después dí valores.

A partir de la explicación anterior se puede deducir que el estudiante recurrió al registro gráfico, basándose principalmente en sus conocimientos sobre los gráficos de las funciones polinómicas, para entender el problema y llegar a la conclusión de que sería posible encontrar valores de *a* y *b* que hicieran que la función no tenga raíces. Se aprecia, a partir de sus explicaciones, que en ese razonamiento recurrió a las heurísticas "*realizar un dibujo*" y "*recurrir a teoría relacionada*", para concluir, imaginando gráficos de funciones polinómicas, que éstas funciones pueden no tener raíces.

E: ¿probaste con valores que no te sirvieron?
A2: tiré los primeros números que se me vinieron y me dio. Me basé en buscar valores que no me den raíz.
E: ¿propusiste los números que se te vinieron a la mente o lo asociaste con lo gráfico?
A2: lo asocié con lo gráfico.
E: ¿cómo usaste lo gráfico para determinar qué valor elegir?, ¿te acordabas exactamente el gráfico de x^4?
A2: Me acordaba que tiene la forma de función polinómica pero traté de buscar valores que no me dieran raíces.

A pesar de que A2 hace referencia al gráfico, para proponer los valores concretos no apeló a utilizar sus conocimientos sobre parámetros y corrimientos sino que, sabiendo que existen pares de valores que verifican lo pedido, los buscó probando. De esta manera llega a proponer el ejemplo que muestra en su escrito.

Del estudiante A3 se analiza solamente la entrevista puesto que no logró plasmar una resolución por escrito. Se transcribe el fragmento de la entrevista en el que explica sus intentos frente a este problema:

A3: El b) no me salió…puse números, una fracción, hice algunas pruebas y me daba como que podía llegar a una raíz, pero no sabía cómo explicarlo. No me salía una explicación general…me quedaba una explicación muy particular…

A partir de esta explicación se percibe que el estudiante realizó una exploración de la situación tomando ejemplos particulares. Es posible afirmar que recurrió a la heurística "*analizar ejemplos*", que le permitió intuir la respuesta aunque no logró concretar la resolución por escrito.

E: ¿llegaste a decir alguna condición para los números?
A3: puse mayor que cero, menor que cero. Raíces no puse.
E: lo encaraste con números, ¿y con gráficos? ¿Encaraste con la parte gráfica?
A3: la x^4 es como una parábola, ahora caigo que podría ser con corrimientos…

Se puede observar que durante el diálogo anterior se da cuenta de que una heurística útil para encarar la resolución podría haber sido *"razonar por analogía"*, apelando a sus conocimientos sobre la relación entre los parámetros de la forma canónica en la función cuadrática y los corrimientos de la parábola.

Actividad Nº 3.

La actividad Nº 3, en la que se pide realizar un análisis comparativo de tres empresas financieras y decidir en cuál conviene depositar dinero en función del tiempo de depósito, no fue resuelta de manera exitosa por ninguno de los tres estudiantes. Sin embargo, al analizar los intentos realizados para resolver, se encontró que utilizaron heurísticas. En sus resoluciones escritas, los tres estudiantes recurrieron a modelizar el problema con funciones, realizando un gráfico o diagrama de dichas funciones y planteando sus fórmulas. También recurrieron a evaluar las fórmulas obtenidas para calcular los valores pedidos.

En el caso de A1 y A3, se interpreta que elaboraron la respuesta al problema a partir de examinar los resultados que arrojaron las fórmulas y no a partir del análisis de los gráficos. Sólo A2 utilizó el gráfico para llegar a una conclusión, aunque no fue correcta dado que su gráfico no mostraba el comportamiento global de las tres compañías. Se percibe que recurrieron a la heurística *"reinterpretar el problema en un lenguaje diferente"*, al utilizar el lenguaje algebraico para describir, a través de fórmulas, las funciones con las que modelizaron el problema. En particular, A1 recurrió, además de la heurística ya mencionada, a *"razonar por analogía"*, "*verificar usando casos particulares*" y "*realizar un dibujo"*. Se incluye, a continuación, el fragmento de la entrevista en el que se evidencia la presencia de estas heurísticas:

> *E: en tu entrega hiciste gráficos y respondiste en función de lo que graficaste*
> *A1: sí, porque el enunciado pedía dar una explicación de la evolución*
> *E: sin embargo llegaste a las fórmulas… ¿cómo las construiste.   ?*
> *A1: y probando…porque me tenía que dar los datos que tenía sí o sí, probando. Porque viste que primero había copiado compañía 1 en un mes hacía tanto, y lo copiaba así: más, menos, sumando, restando y después para armarlo en la función me costo un poco más…lo hice así, como habíamos hecho una vez en un ejercicio, el del mago "trucho"* (ver Nota 3)*, primero lo armé así, como en ese ejemplo, y lo traté de pasar a la función.*
> *E: ¿y te acordabas el ejemplo del mago cuando hiciste esto?*
> *A1: claro, porque ahí decía multiplicado tantos meses, sumarle tanto y restarle tanto… entonces usé eso.*
> *E: que bien!! o sea que te sirvió un ejercicio viejo para encarar este*
> *A1: Claro. Usé eso más que nada, porque no sabía bien de qué otra forma encararlo. Me costó hacer las funciones y me quedé con dudas, no sabía si estaba bien o no, pero por lo menos los datos principales me daban…*
> *E: ¿verificaste?*
> *A1: claro con los primeros datos que tenía en el ejercicio.*

Actividad Nº 4.

La actividad Nº 4, en la que se pide resolver una inecuación exponencial, no ofreció resistencia a los estudiantes dado que pudieron resolverla inmediatamente. De esta manera, se concluye que dicha actividad no representó un problema para ellos. Es importante aclarar que, al momento de aplicar el test, los estudiantes no habían recibido una explicación sobre la resolución de inecuaciones que involucraran funciones exponenciales. Para resolver la situación propuesta contaban con lo trabajado sobre resolución de inecuaciones con funciones polinómicas. En las entrevistas se pudo constatar la conclusión de que no representó un problema para ellos:

Fragmento de entrevista de A1

> *E: sobre la resolución de la inecuación: queremos que nos expliques qué hiciste, cómo lo encaraste porque no hubo una explicación previa por parte de la profesora.*
> *A1: como en el ítem anterior ya teníamos hecha la ecuación exponencial, y me había dado -4 como solución, y entonces supusimos, porque la verdad no sabíamos como trabajar con este tipo de ejercicios…viste que en las inecuaciones primero teníamos que igualarlas, que es lo que hicimos en el ítem anterior, que nos dio -4. Entonces supuse que -4 sería la intersección entre ambos y de ahí saqué los valores ya…a partir de ese punto y hasta acá…en qué parte está más por encima una función que la otra…*
> *E: ¿te resulta idéntico a lo que hacíamos antes con las otras inecuaciones? ¿No le ves ninguna diferencia?*
> *A1: las inecuaciones me parecen todas iguales, no le encuentro ninguna diferencia: siempre lo tengo que igualar y sacar el resultado…*

Fragmento de entrevista de A3

> *E: ¿en qué te basaste para resolver la inecuación?, dado que al momento de plantearte el ejercicio, la profesora no había explicado resolución de inecuaciones con funciones exponenciales…*
> *A3: la verdad es que me basé en las otras, por ejemplo en las inecuaciones cuadráticas y lineales. En sí es lo mismo porque lo que cambia es el gráfico. No le ví dificultad porque como ya nos habían explicado inecuaciones como lo que está por encima o por debajo…*

Hallazgos

Analizando las heurísticas más usadas por este pequeño grupo de estudiantes en términos de las categorías introducidas en la Tabla 1, se encontró que aquellos descriptores que se corresponden con tareas más exigentes respecto de la resolución de problemas, no han aparecido. Los tres estudiantes en general han tenido buen desempeño; sin embargo, ninguno puso en juego heurísticas referidas a *planificar* o *modificar el problema*, probablemente porque se requeriría una comprensión más profunda de todo lo vinculado con la actividad.

Asimismo, el hecho de no haber recibido enseñanza que les facilitara esta toma de distancia respecto del problema, y la poca experiencia traída del nivel educativo anterior, probablemente sean parte de las causas por las cuales estas heurísticas más complejas estén ausentes.

Por otra parte, resulta razonable que los estudiantes dispongan fluidamente de heurísticas vinculadas con "la ejemplificación" (tanto al *examinar casos particulares* como al *examinar la solución*) pues es un recurso muy comúnmente usado por los estudiantes y por los mismos docentes quienes, muchas veces, basan sus explicaciones en mostrar ejemplos válidos. Los estudiantes recurren a la ejemplificación como un primer recurso así hayan comprendido el problema o no, y aunque esto les sea suficiente o no. Del mismo modo, han estado presentes las heurísticas relacionadas con *activar experiencia previa* y se considera razonable su presencia porque los estudiantes están finalizando el curso.

Las heurísticas relacionadas con *seleccionar una representación adecuada* han sido puestas en juego por los tres estudiantes. Consideramos que el curso de Matemática del CAU pone énfasis en favorecer los cambios entre registros, con lo que resulta esperable que recurran a esta heurística. Probablemente en otros cursos con un peso mayor colocado sobre cuestiones algebraicas, esta familia de heurísticas no esté disponible.

El hecho de que las heurísticas se pongan de manifiesto ante diversos contenidos matemáticos provoca en el docente una dificultad a la hora de considerarlas para su enseñanza, pues debería pensarlas de modo transversal a distintos contenidos matemáticos.

Conclusiones y Recomendaciones

El estudio que se inició, de carácter exploratorio, ha brindado conocimiento sobre la disponibilidad de heurísticas hacia finales del CAU y claramente los resultados aquí expuestos no pueden ser generalizados. Se ha previsto dar continuidad a este trabajo en dos direcciones. Por un lado, se planteó una investigación similar que afectará a más cantidad de cursos. Por otra parte, se prevé planificar la enseñanza de heurísticas en el CAU en años posteriores. Para ello, se decidió seleccionar heurísticas relacionadas con la organización del trabajo del estudiante. Como se ha visto, éstas no han sido incorporadas como estrategias de resolución de problemas de manera espontánea. Se considera entonces que deberían ser enseñadas. La importancia de que el estudiante disponga de ellas radica en que favorecería su desempeño y así su inserción en los estudios superiores al contar herramientas de regulación de su actividad matemática.

NOTAS

Nota 1: En el sentido de registros de representación semiótica (Duval, 1993).

Nota 2: En el curso, al momento de resolver el test, no se había explicado cómo realizar gráficos de funciones exponenciales o logarítmicas por corrimientos.

Nota 3: Un mago dice: "Pensá un número, sumale 5, al resultado multiplicalo por 3, restale el doble de tu número y volvé a restarle tu número. Encontraste 15".

Referencias

Alterman, S. (1995) *Análisis de las motivaciones y predisposiciones sociales hacia la UNGS.* Investigación y diagnóstico de situación psico-socio-antropológico. Documento de trabajo Nro. II, Universidad Nacional de General Sarmiento.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A. y Rodríguez, M. (2007). *Matemática para el Aprestamiento Universitario*. Impreso en la Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires.

Charnay, R. (1988). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidos.

De Guzmán, M. (s/f). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Disponible en http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Duval, R. (1993). *Registres de represéntation sémiotique et unctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké, 6* (9), 59 – 87.

Halmos, P. (1975). *El Problema de Aprender a Enseñar: La Enseñanza de la Solución de Problemas*. Recuperado el día 11 de noviembre de 2009 en http://cemati.com/math/category/deliberaciones-matematicas/

Koichu, B.; Berman, A. y Moore, M. (2003). *Very able students think aloud: An attempt at heuristic microanalysis*. Proceedings of the 3rd International Conference "Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students", University of Rousse, Rousse, 318-325.

Monereo, C. (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*. Barcelona: Graó.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas. *Revista Educación Matemática, 2* (3), 22-31.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Press en1945]. México: Trillas.

Programa de la asignatura Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario. Disponible en http://www.ungs.edu.ar/cm/uploaded_files/file/institutos/idh/ProgramaMate2009.pdf

Reglamento del Curso de Aprestamiento Universitario. Disponible en http://www.ungs.edu.ar/cm/uploaded_files/file/institutos/idh/ReglamentoCAU.pdf.

Anexo

1) a)Tenemos graficada en clase la función $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$, $f(x)=2^{x}$. Graficar, SIN TABLA DE VALORES, las funciones definidas de $\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ presentadas a través de sus expresiones:

a) $g(x)=2^{x}+1$	b) $h(x)=2^{x}-1$	c) $j(x)=2^{x-3}$
d) $k(x)=2^{x+3}$	e) $p(x)=-(2^{x})$	f) $q(x)=2^{x-1}-3$

b) Tenemos graficada en clase la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathrm{R}$, $f(x)=\log_2 x$. Graficar, SIN TABLA DE VALORES, las funciones presentadas a través de las siguientes expresiones. En este caso notarán que los dominios de ellas **no** serán todos $(0,+\infty)$. En cada caso, indicar cuál es su dominio.

g) $g(x)=(\log_2 x)+2$	h) $g(x)=(\log_2 x)-3$	i) $g(x)=\log_2(x-1)$
j) $g(x)=\log_2(x+4)$	k) $g(x)=-\log_2 x$	l) $g(x)=\log_2(x-1)+2$

Explicá en qué te basaste para poder proponer los gráficos anteriores sin usar la tabla de valores.

2) a) Dada la función $f:R\rightarrow R$, $f(x)=(x-a)^3+b$, ¿Es posible determinar valores para *a* y *b* de manera que f no tenga raíces reales?

b) Dada la función $f:R\rightarrow R$, $f(x)=(x-a)^4+b$, ¿es posible encontrar valores para *a* y *b* de manera que f no tenga raíces reales?

3) Supongamos que vivimos en una ciudad en la que existen tres compañías ahorristas distintas y que estamos interesados en incrementar nuestros ahorros. Las tres compañías generan intereses continuamente, tomando el mes como unidad, pero con modalidades distintas en cuanto al incremento del dinero depositado.

La Compañía 1 incrementa el capital de manera tal que todos los meses agrega al dinero depositado cinco veces el monto inicial.

La compañía 2 incrementa el capital de manera tal que para calcular el dinero acumulado hasta ese momento se agrega al monto inicial tres veces ese monto multiplicado por el cuadrado de la cantidad de meses transcurridos.

La compañía 3 incrementa el capital de manera tal que el dinero acumulado se duplica cada mes.

Supongamos que son agentes de inversiones y se los contrata para que informen y aconsejen acerca de las tres compañías.

Si tengo \$1.000 y los deposito durante un mes, ¿en cuál de las 3 compañías me conviene depositar? ¿Y si los deposito durante 4 meses? ¿Cómo calculo el dinero que obtengo en cada compañía según los meses de depósito?

Se les pide hacer un informe en el que se describa la situación y se comparen las 3 empresas.

Aclaración: se espera que el informe sirva para decidir qué conviene según los meses de depósito.

4) a) Resolver la siguiente inecuación exponencial: $2^{x}\geq\frac{1}{16}$. Explicá en qué te basaste para poder resolver la inecuación dada.

LAS AUTORAS

Tamara Marino. Profesora Universitaria de Matemática,
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
Investigadora Docente del Instituto del Desarrollo Humano.
Universidad Nacional de General Sarmiento
tmarino@ungs.edu.ar

Mabel Rodríguez. Doctora de la Universidad de Buenos Aires,
área Matemática, Universidad de Buenos Aires, Argentina
Investigadora Docente del Instituto del Desarrollo Humano
Universidad Nacional de General Sarmiento
mrodri@ungs.edu.ar