Resolución de problemas de Construcción Geométrica con Estudiantes de Pedagogía en Educación Básica.

Marco Antonio Rosales Riady
mrosales@ubiobio.cl
Universidad del Bío-Bío, Chile
Ismenia Guzmán Retamal
ismenia.guzman@ulagos.cl
Universidad de Los Lagos, Chile

Recibido: 1 de Febrero de 2016 **Aceptado:** 28 de abril de 2016

Resumen

Este artículo hace referencia a los conocimientos disciplinares que estudiantes de pedagogía básica necesitan movilizar para enfrentar problemas de construcción geométrica con utilización de instrumentos físicos, digitales e intelectuales. Además, identificar las operaciones cognitivas que ponen en juegos y los paradigmas geométricos en que se sitúan para validar sus producciones. El estudio se apoya en el marco teórico de Duval, y otros investigadores que trabajan en su línea y en los Paradigmas Geométricos de Gonseth-Houdement-Kuzniak. La metodología es cualitativa con estudio de casos. Se aplicaron dos situaciones de tres tareas cada una en dos sesiones trabajadas individualmente por cuatro estudiantes voluntarios elegidos al azar; dispusieron de ficha de trabajo, instrumentos para la construcción y un computador. Entre los resultados encontramos que no explicitan el procedimiento de construcción; cuando se ubican en la Geometría física, no se dan cuenta que midiendo es posible verificar, y en el caso de la Geometría plana, no ponen en juego las definiciones, propiedades y teoremas; no justifican sus afirmaciones ni procedimientos utilizados; no consideran el procesador geométrico. En cuanto a los procesos cognitivos, muestran diferentes niveles de razonamiento, privilegiando el discurso natural, aunque deficientemente.

Palabras clave: Formación docente, operaciones cognitivas, paradigma geométrico, construcción geométrica.

Solving problems in geometric construction with students of pedagogy in elementary education

Abstract

This article focus on discipline knowledge that that elementary pedagogy students need to activate to face problems of geometric construction by using physical, digital and intellectual instruments. In addition, to identify the cognitive operations that they put in games and the geometric paradigms in which they place to validate their productions. This study is based on Duval's theoretical frame, and other investigators who work in his line as well, and at Gonseth-Houdement-Kuzniak's Geometric Paradigms. The methodology is qualitative with this case study. There were applied two situations of three tasks, each one in two sessions which they were worked individually by four voluntary students chosen randomly; they had worksheets, tools for construction and a computer. Within the results, it was found no explanation in procedures of construction; when they are located in the physical Geometry, they do not realize that by measuring, it is possible to check, and in case of the flat Geometry,

they do not affect definitions, properties and theorems; they justify neither his affirmations nor used procedures; they do not consider the geometric processor. As for the cognitive processes, they show different levels of reasoning, favoring the natural speech, although it is deficient.
Key words: educational training, cognitive operations, geometric paradigm, geometric construction.

Introducción

Este artículo presenta una experiencia que forma parte de un trabajo de investigación mucho más amplio conducente a una tesis doctoral en Educación Matemática que se realiza en la Universidad de los Lagos de Osorno, Chile. Este trabajo se inscribe en la línea de la geometría y la formación de profesores.

Es conocida la debilidad en esta línea que presentan los futuros docentes en educación básica, y que se ha observado en distintos estudios nacionales (INICIA) e internacionales (TEDS-M) e incluso en diferentes cursos de perfeccionamiento que hemos realizado en la Universidad del Bío-Bío.

La temática que tratamos consiste en una reflexión sobre los contenidos fundamentales de geometría necesarios en la formación de los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío. Nos hemos centrado en el estudio de las percepciones y concepciones preconcebidas de estos estudiantes y de las dificultades que se les presentan al abordar problemas de construcción en geometría plana.

A partir de las producciones de los estudiantes respecto de los problemas propuestos hemos encontrado dificultades de orden matemático y cognitivo, debidos a la debilidad de sus aprendizajes geométricos y a las tareas de construcción propuestas donde las descripción de los pasos de construcción quedan tácitos, no respetando el orden de construcción, tampoco se justifican los procedimientos que realizan y no validan sus razonamientos matemáticamente.

Lo anterior plantea una interrogante en relación al problema de superación de esas dificultades, ¿con qué estrategias se podría ayudar a sobrepasarlas? Cuestión relacionada con procesos de formación, y desde nuestra óptica, a los tipos de problemas que se les propone, de modo que estos generen las condiciones para desarrollar las habilidades y conocimientos necesarios para abordar la tarea de profesor en esta área y en el nivel de desempeño. Hemos construido dos problemas con enunciados no rutinarios con apoyo de un procesador geométrico y puestos en práctica con algunas fases de la metodología de la ingeniería didáctica de investigación. Para el análisis nos apoyamos en el marco teórico de R. Duval, y otros investigadores (Barreto, 2012, Guzmán, 2009, Marmolejo, 2011) considerandos los aspectos cognitivos y los Paradigmas Geométricos de Gonseth-Houdement-Kuzniak. Los sujetos de estudio son cuatro estudiantes voluntarios elegidos al azar. La experiencia fue realizada en dos sesiones, en las cuales los estudiantes dispusieron de una guía de trabajo, instrumentos para la construcción y un computador; se les propuso trabajar individualmente.

Antecedentes

El currículo de matemáticas para la formación docente de profesores de enseñanza básica en Chile contempla cinco ejes disciplinarios, y uno de ellos es el Eje de Geometría, el cual consta de cinco estándares; dos de ellos refieren al uso de tecnología. En el 7, uno de los indicadores señala: "incorpora TICS como medio de apoyo para desarrollar en los estudiantes la capacidad de visualizar" (MINEDUC, 2011, p. 96), y en el estándar 10, se señala: "utiliza TICS para conducir actividades de indagación en el tema de áreas y perímetros" (MINEDUC, 2011, p. 102). En los estándares 8 y 11, entre sus indicadores se exige el uso de regla y compás (MINEDUC, 2011, p. 97, p. 103).

Problemática

Evaluaciones estandarizadas nacionales e internacionales realizadas a escolares y a estudiantes de pedagogía han revelado que en clases de geometría la mayoría presenta dificultades ante situaciones problemáticas simples (Ávalos, 2010). En la Universidad del Bío-Bío las actividades geométricas que se realizan habitualmente están directamente relacionadas con la visualización, la construcción y la demostración. Partiendo de la base que en segundo año de la carrera el estudiante debe conocer objetos geométricos fundamentales y sus propiedades, ponerlas en juego en la construcción de configuraciones a mano alzada o usando instrumentos, como la regla y el compás, o algún procesador geométrico.

Otras dificultades que se detectan están relacionadas con: a) Hallar condiciones para la existencia de un objeto, b) Deducción de propiedades a partir de una configuración geométrica simple, c) Verificación o demostración de una propiedad a partir de hipótesis. En este contexto consideramos esencial en la enseñanza de la geometría, la concepción de Guzmán (2009) que define como actividades geométricas, aquellas que ofrecen diferentes tipos de tareas tales como: visualización, construcción y demostración; además de las exigencias cognitivas que deben ponerse en juego y en consecuencia las habilidades que permiten desarrollar.

Para explicar lo anterior presentamos dos tareas planteadas en clases. Las que dejaron en evidencia las dificultades mencionadas antes:

1. ¿Es posible construir un triángulo ABC rectángulo cuyo ángulo ABC tenga una amplitud de 60°? Explique y justifique.

2. En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30 y 60 grados ¿Es posible relacionar un cateto con la hipotenusa? Si la respuesta es no, justifica, y si es afirmativa explica por escrito la o las propiedades que utilizas.

En la primera tarea, todos los estudiantes visualizaron que faltaba el tercer ángulo, y rápidamente determinaron la medida, apoyándose en el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo, o bien que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, para afirmar que sí es posible construir el triángulo.

La segunda tarea, la mayoría de los estudiantes no la respondió, al parecer no recordaron que el cateto menor mide la mitad de la hipotenusa. Con esta información y el Teorema de Pitágoras, hubieran podido responder con éxito. También esta tarea se hubiera podido responder sólo con compás, trazando arcos de circunferencia.

Este ejemplo deja en evidencia que los estudiantes de pedagogía básica no reconocieron propiedades elementales ante situaciones sencillas y claves. En otros ejemplos presentan dificultades en la asignación de rótulos, tanto para identificar lados, ángulos, segmentos notables del triángulo u otras figuras geométricas; no tienen disponibles los conocimientos previos que han estudiado los cuales deberían estar adquiridos, lo que les impide argumentar o fundamentar sus procedimientos y afirmaciones.

En el presente estudio abordaremos estas dificultades, considerando los currículos de la formación inicial y el currículo escolar, referido al eje de geometría del segundo ciclo básico.

Propósito del estudio

- Caracterizar los conocimientos disciplinares que los estudiantes necesitan movilizar en la resolución de problemas de construcción geométrica.

- Explorar las operaciones cognitivas (aprehensiones) que ponen en juego los estudiantes de pedagogía en educación básica en la resolución de problemas geométricos.
- Identificar qué instrumentos se privilegian en problemas de construcción geométrica.
- Pesquisar las formas de validación de propiedades que privilegian los estudiantes en la resolución de problemas de construcción (G1, G2).

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación está apoyado en los aprendizajes intelectuales de Raymond Duval, y complementado con los Paradigmas Geométricos trabajados en el Proyecto Ecos-Conicyt por Kuzniak, Guzmán et al. (2006).

El modelo teórico propuesto por Duval (1998, 2001, 2003a) ha sido trabajado además por investigadores como Torregrosa y Quesada (2007), Barreto (2012), Guzmán (2009), Marmolejo (2010) y también por Castiblanco, A. et al. (2004). Estos autores concuerdan con que el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo y directamente relacionado con el desarrollo cognitivo. Guzmán (2009) señala que la actividad de visualización es cognitiva y subyacente a la actividad matemática. En relación a la visualización, Duval (1998) establece que para esta operación cognitiva, existen tres tipos de aprehensiones:

- La **aprehensión perceptiva** que se refiere a la identificación simple de una configuración, es un proceso básicamente intuitivo. Son las formas que se imponen a primera vista, con frecuencia de manera aparentemente no modificable.
- La **aprehensión discursiva** es la actividad cognitiva que produce una asociación de la configuración (todo lo visual, imagen o dibujo) con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Las propiedades matemáticas son aquellas dadas en las hipótesis del enunciado (que la configuración visual representa). Esta asociación es bidireccional, va de lo visual a lo discursivo, y viceversa.
- La **aprehensión operativa** consiste en la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Ésta puede ser un cambio figural, donde se le añaden o quitan elementos a la configuración original, generándose nuevas configuraciones o subconfiguraciones. También, la aprehensión operativa puede ser de reconfiguración a través de manipulación, por ejemplo piezas de un puzle.

- La **aprehensión secuencial** Duval (1998) la establece en relación al proceso de construcción, es decir aquella en que las propiedades imponen un orden de construcción que depende del instrumento elegido (regla, compás, procesador) y un protocolo de construcción, en el que se establece un orden en el trazado según las propiedades formuladas y las características del instrumento, y simultáneamente la designación de las unidades figurales, formas D0 (puntos), D1 (segmentos y líneas abiertas o no, rectas), D2 (polígonos, circunferencias, ángulos,…) y D3 (poliedros, cuerpos redondos).

Respecto de los paradigmas geométricos los autores mencionados señalan:

- **Geometría Natural o Física, Geometría I (G1)**: Cuyos objetos son físicos, concretos existentes en la realidad. Se representan por dibujos o figuras concretas. Se opera con material concreto, plantillas, pliegues, reglas, etc. La validación se realiza por: a) verificación mediante acciones y manipulación de instrumentos, y b) por medición. El razonamiento es el pragmático.
- **Geometría Axiomática Natural o Geometría II (G2)**: (Geometría Euclidiana). Sus objetos son figuras ideales (no concretas). Son representaciones de objetos de la realidad. Por ejemplo una circunferencia es el modelo de una rueda de bicicleta. La validación de propiedades se realiza a través definiciones y teoremas (instrumentos teóricos).
- **Geometría Axiomática Formal o Geometría III (G3)**: Sus objetos son figuras ideales sin ninguna relación con el mundo real. La validación se realiza a través de definiciones y teoremas. El razonamiento es lógico-formal.

En esta investigación se consideran los paradigmas de la Geometría I y Geometría II, puesto que en la formación del estudiante de pedagogía en educación básica ellos son fundamentales, ya que los objetos geométricos involucrados hacen referencia a objetos de la realidad. En G1 son representaciones de objetos físicos y en G2 son las figuras de la geometría plana.

En relación al uso de tecnología, Castiblanco et al. (2004) sostienen que

- Los procesos de argumentación pueden influir sobre la percepción visual,
- La justificación o argumentación puede ser informal o formal, generalmente de carácter deductivo (pragmático),

- El trabajo complementario entre los procesos de visualización y los procesos de justificación (argumentación) puede favorecer una organización deductiva, y
- Al establecer conexiones entre los procesos de justificación y los procesos de visualización, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación.

Metodología de Investigación

La metodología de investigación utilizada en este trabajo es cualitativa, un estudio de casos, considerando cuatro estudiantes de pedagogía básica, trabajando individualmente en una ficha que está compuesta de dos situaciones con tres tareas cada una. Las tareas consisten en: a) construir la configuración asociada al enunciado propuesto, b) establecer el protocolo de construcción dejando de manifiesto el orden de construcción, y c) probar los resultados obtenidos ya sea en el paradigma G1 o G2. Las situaciones son las siguientes:

Situación 1: *Se traza una recta tangente m por un punto T a una circunferencia de diámetro AB con centro en C. Sobre la recta m ubicar los puntos D y P de modo que los segmentos AD y BP sean respectivamente perpendiculares a la recta m.*

a) Construir la configuración resultante

b) Establecer el protocolo de construcción

c) *Probar que CD = CP*

Situación 2: *En un triángulo ABC se traza la altura interior BD, AN es la perpendicular a AB y CM la perpendicular a BC; además* $|AN|=|DC|$, $|CM| = |AD|$.

a) Construir la configuración resultante

b) Establecer el protocolo de construcción

c) Mostrar que M y N son equidistantes del vértice B.

Los sujetos participantes en el estudio

Los participantes en esta actividad son estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío. Se seleccionaron cuatro estudiantes al azar de una cohorte de treinta estudiantes que cursan la asignatura "Geometría Proporcional", tercera asignatura del eje de geometría de la carrera En la Primera "Geometría, Triángulos y Cuadriláteros", se estudian nociones geométricas básicas. En la segunda se estudian "Polígonos y Cuerpos Geométricos" donde se abordan construcciones geométricas con instrumentos y procesadores geométricos, con privilegio del GeoGebra. Para esta investigación se elige el curso de "Geometría Proporcional", debido a que los estudiantes han recibido una preparación en los conocimientos básicos y experiencias en construcciones geométricas. De los cuatro estudiantes, elegidos, tres de ellos tenían estudios universitarios inconclusos en la Universidad del Bío-Bío con una duración aproximada de 3 semestres en la carrera de Pedagogía en Educación Matemática, cuya malla curricular considera las asignaturas de "*Geometría Euclidiana Plana*" y "*Geometría del Espacio*". El cuarto estudiante no tenía estudios universitarios anteriores al ingreso a la carrera de Pedagogía de Educación Básica

Diseño metodológico

El diseño consta de las siguientes fases: Análisis a priori de las situaciones, Aplicación, Análisis de las producciones, Confrontación de los análisis y Conclusiones.

Análisis a priori

A continuación se presenta el **análisis a priori** de cada situación. Se indica la configuración a la que deben llegar, su protocolo de construcción, los conocimientos previos mínimos que los estudiantes deben movilizar para la resolución del problema, y las actividades cognitivas (aprehensiones) correspondientes que deben ser evidenciados. En cuanto a las tareas de probar y mostrar, se espera que realicen algunas de las siguientes acciones: a) En G1, calculando medidas, o bien, trazando arcos de circunferencia, b) En G2, demostrando, asumiendo la veracidad del resultado encontrado, recurriendo a alguna definición o propiedad.

Análisis a priori de la Situación 1

Esta situación contiene tres tareas, y se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- Trazado de segmentos, perpendiculares, circunferencia, tangente.
- Rotular con notaciones adecaudas
- Los conceptos de radio, diámetro, perpendicularidad y paralelismo
- Los teoremas de congruencia y de Thales

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que dejen en evidencia las siguientes:

- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades)
- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construído)

Para la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes construyan la siguiente **configuración**:

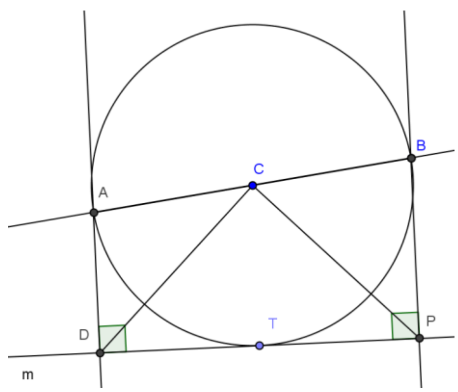


Figura 1

Entre las posibles **dificultades** se pueden prever: a) Imprecisiones en el uso instrumentos de construcción que llevan a conclusiones equivocadas, b) Dificultades con el trazado de circunferencia, de perpendiculares ya sea en un punto de la recta o desde un punto fuera de ella, y c) Descuido con las notaciones de elementos construidos, lo que puede conducir a construcciones no solicitadas.

Para la **Tarea 2** se espera que establezcan un **protocolo de construcción** que tenga los siguientes pasos como mínimo:

1) Costrucción de la circunferencia dados su centro C y un punto de ella, A o B.
2) Construcción del diámetro AB.
3) Construcción de la tangente en un punto dado. (m y T en este caso)
4) Construcción de la recta que contiene a un punto y es perpendicular a una recta dada. (A y m en este caso; determinando el pié de la perpendicular. Punto D en el enunciado) .Ídem para B, m, P.
5) Identificar segentos congruentes o de igual longitud.

Las principales **dificultades** para esta tarea están en que no se respete el orden de construcción.

Respecto a la **Tarea 3**, se espera que los estudiantes respodan situándose en uno de los paradigmas, G1 o G2 para justificar sus producciones.

En el paradigma G1. Validando por medición con regla graduada de la producción realizada. Por ejemplo, si se obtiene la producción siguiente, bastaría medir.

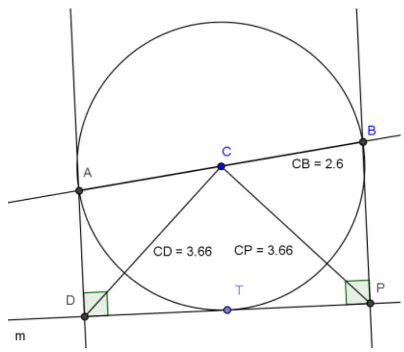


Figura 2

Como dificultad, se puede indicar que las medidas varíen por la inexactitud de la construcción. Esta dificultad desaparece si la construcción se hiciera con un procesador geométrico correctamente utilizado.

También en el paradigma G1. Validando con uso de compas la producción realizada. Por ejemplo si se obtiene la producción siguiente

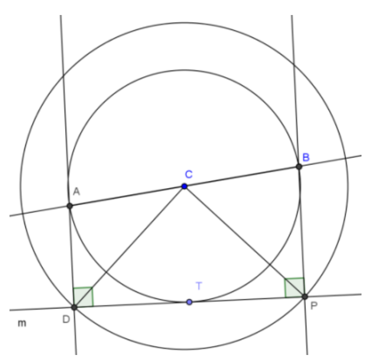


Figura 3

En este caso la **dificultad** radica en la inexactitud de la construcción con regla y compas, si ésta se realiza sin un procesador geométrico.

En cuanto al paradigma G2. La validación es recurriendo a definiciones y teoremas de Congruencias y de Thales.

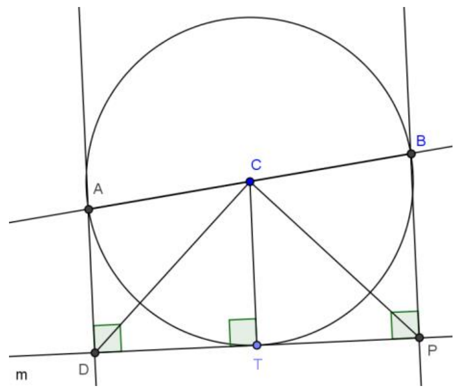


Figura 4

- Para la validación se precisan las hipótesis:

CT ⊥ m

AD //CT // BP

r = $AC = BC$

Por el Teorema de Thales se puede escribir: $\frac{PT}{TD} = \frac{BC}{CA}$

Como $\frac{BC}{CA} = 1$ se tiene $\frac{PT}{TD} = 1$

Luego: PT = TD (primera conclusión)

Por el segundo teorema de congruencia (Criterio LAL)

Comparamos los triángulos DTC y PTC

- PT = TD
- $\angle$ DTC = $\angle$ PTC = 90°
- TC = r lado común

Luego los triángulos DTC y PTC son congruentes

DC = PC (segunda conclusión)

Con la segunda conclusión se obtiene lo pedido.

Entre las **dificultades** que podrían tener algunos estudiante están, el no distinguir la hipótesis de la tesis. Además no reconocer en las informaciones alguna propiedad o teorema pertinente que le ayude a encontrar el camino para la validación.

Análisis a priori de la Situación 2

Esta situación contiene tres tareas y se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- Trazado de segmentos, perpendiculares, arcos de circunferencia
- Rotular con notaciones adecuadas
- Propiedades de la altura en un triàngulo
- Los teoremas de congruencia y de Pitágoras

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que se dejen en evidencia las siguientes:

- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades a recurrir)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construído)

En la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes siguiendo el enunciado lleguen a construir la siguiente **configuración**:

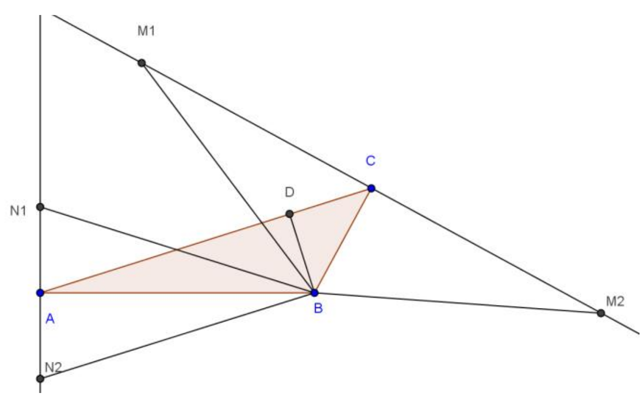


Figura 5

Entre las posibles **dificultades** se pueden prever: a) Imprecisiones en el uso instrumentos que lo llevarían a conclusiones equivocadas, b) Dificultades con el trazado de la altura del lado AC, c) Dificultades con el trazado de perpendiculares por los puntos A y C, d) Dificultades para determinar los puntos M y N, respetando las condiciones de equidistancia, y e) Descuido con las designaciones de elementos construidos, lo que puede conducir a construcciones no solicitadas.

En la **Tarea 2** se espera que establezcan un **protocolo de construcción** que tenga por ejemplo los siguientes pasos:

1) Construcción del triángulo A, B y C.
2) Construcción de la altura interior del triángulo. Determinación y rotulación del pie de la altura (D en este caso)
3) Construcción de las perpendiculares a AB en A y a CB en C
4) Determinación de los puntos N y M en las rectas perpendiculares determinadas en 3) respetando las condiciones de las hipótesis.
5) Identificar los segmentos de igual longitud (o congruentes) .

La principal **dificultad** para esta tarea está en el no respeto del orden de construcción.

En cuanto a la **Tarea 3**, se espera que los estudiantes justifiquen sus producciones en uno de los paradigmas, G1 o G2.

En el paradigma G1. Puede validar por medición con regla graduada. Por ejemplo, para la producción siguiente bastaría medir.

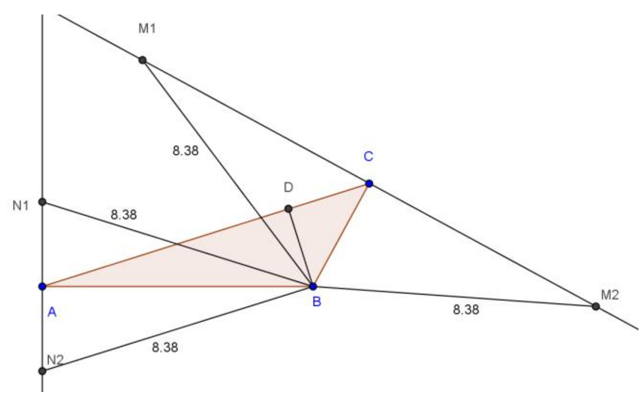


Figura 6

La **dificultad** se puede presentar en las medidas, ya que éstas se alteran por la inexactitud del instrumento o la impericia del constructor. Esta dificultad desaparece si la construcción se hiciera con un procesador geométrico correctamente utilizado.

También en el paradigma G1. Se puede validar con uso de compas. Por ejemplo, para la siguiente producción:

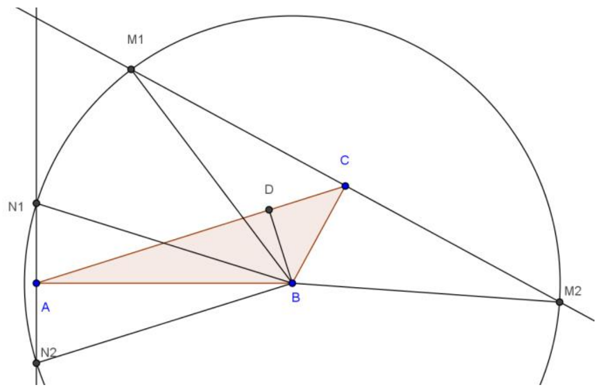


Figura 7

La **dificultad** en este caso se presenta por la inexactitud de la construcción con regla y compas. Ella desaparece si se realiza con un procesador geométrico.

En cuanto al paradigma G2. La validación debe recurrir a definiciones y Teoremas en este caso al teorema de Pitágoras.

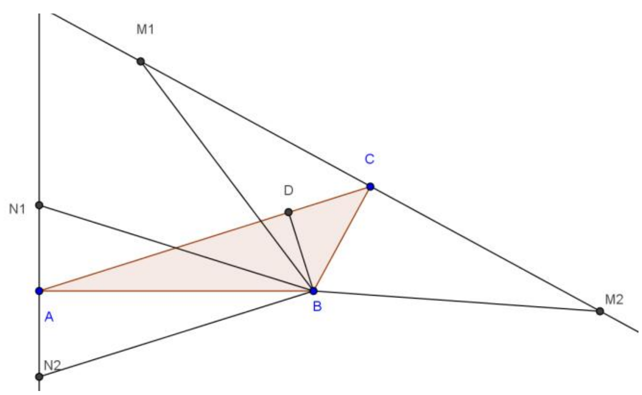


Figura 8

En efecto:

Hipótesis dadas en el enunciado son:

(1) BD altura

(2) AN ⊥ AB

(3) CM ⊥ BC

(4) $|AN| = |DC|$

(5) $|CM| = |AD|$

Lo que hay que probar (Tesis) es: $|BM| = |BN|$

Demostración (validación)

Triángulo BAD rectángulo hipótesis (1)

Donde por teorema de Pitágoras se tiene: $|BA|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$ (6)

Análogamente

Δ BCD rectángulo y $|BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2$ (7)

Δ BNA rectángulo y $|BN|^2 = |BA|^2 + |AN|^2$ (8)

Δ BMC rectángulo y $|BM|^2 = |BC|^2 + |CM|^2$ (9)

Conmutando (7): $|CD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2$ y sumando con (6)

Se obtiene: $|AD|^2 + |BD|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2 + |BA|^2$

Cancelando se tiene $|AD|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 + |BA|^2$ (10)

En (10) se sustituye $AD\ por\ CM\ y\ CD\ por\ AN$ (por 4 y 5)

Se obtiene $|CM|^2 + |BC|^2 = |AN|^2 + |BA|^2$ (11)

En (11) sustituyendo Desde (8) y (9)

Se obtiene

$$|BM|^2 = |BN|^2$$

Luego se deduce la tesis $|BM| = |BN|$

Entre las **dificultades** que podrían evidenciar algunos estudiantes están, el no distinguir la hipótesis de la tesis, no reconocer en las informaciones dadas alguna propiedad o teorema pertinente (aprehensión perceptiva) que le ayude a validar.

Respecto a las condiciones de aplicación

De común acuerdo con los estudiantes se fijó el día y la hora para la aplicación del instrumento en un trabajo absolutamente individual y sin consultas. La actividad se realizó en el Laboratorio de Didáctica de la carrera, donde se dispone de un pañol de notebook equipados. Al entregar las hojas que presentaban las situaciones, se explicó el objetivo de la experiencia. Cada situación iba en hojas separadas, con los espacios para desarrollar cada tarea. Además, no hubo limitación de tiempo, y tenían la libertad de utilizar todos los recursos que ellos consideraran pertinentes existentes en el Laboratorio (regla, compás, un procesador geométrico). Los estudiantes tardaron dos horas en entregar sus respectivas producciones.

Análisis de algunas producciones

A los estudiantes los nominaremos por Ei-j, donde i precisa el número correspondiente al estudiante y j precisa la situación 1 ó 2.

E 1-1:

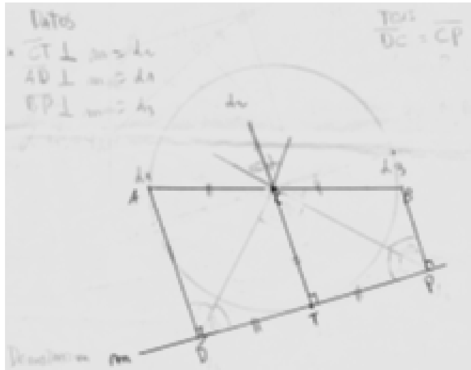


Figura 9

La configuración que realiza utilizando la regla y el compás (Figura 9), respeta la consigna efectuando un pasaje de lo discursivo a lo visual. Rotula correctamente las unidades figurales: puntos T, A, B, C, D y P; y recta m. Utiliza códigos habituales en la figura para informar la igualdad de medidas de segmentos, paralelismo de rectas, ángulos rectos entre otros. Designa los segmentos AD, CT y BP por l_1, l_2 y l_3, respectivamente, e indica sus condiciones de perpendicularidad respecto de la recta m. Designa por α y β a los ángulos formados por las prolongaciones de los segmentos CD, CT y CP. Borra de su desarrollo los ángulos α y β, en los vértices D y P.

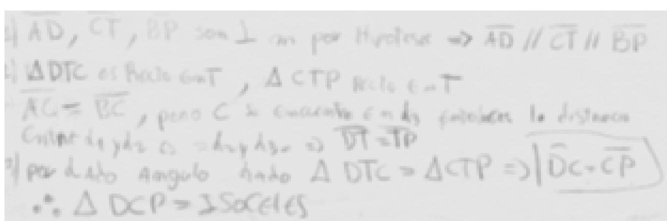


Figura 10

La demostración (Figura 10) de la tesis la realiza en los tres pasos que describimos a continuación:

- En 1) recurre a la relación entre paralelismo y perpendicularidad, propiedad que utiliza implícitamente.
- En 2) se apoya en la propiedad de la distancia entre paralelas, para probar la congruencia de los segmentos DT y TP, recurriendo a las transitividad de la relación de igualdad.
- En 3) recurre al criterio de congruencia (LAL) para probar la congruencia de los triángulos DTC y CTP.

- Concluye así la igualdad de los segmentos DC y CP.

A pesar de que no justifica explícitamente las propiedades o teoremas que utiliza y su escritura no es rigurosa, esta demostración se sitúa en el paradigma G2. No obstante la producción es incompleta puesto que el protocolo de construcción solicitado no lo realiza, siendo este la segunda tarea del problema.

Las operaciones cognitivas que se perciben aquí son: aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la configuración), al usar códigos usuales, se deja implícito el proceso de construcción (aprehensión perceptiva). Y la aprehensión discursiva en su proceso de validación donde pone en juego la definición de tangente, la relación entre paralelismo/ perpendicularidad y un teorema de congruencia.

E 4-1

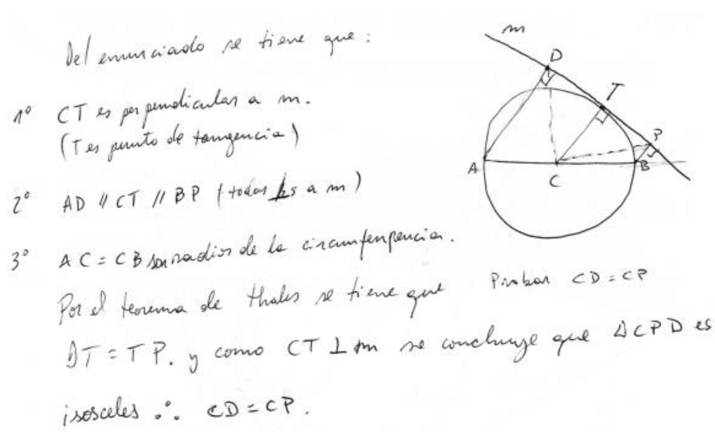


Figura 11

Su configuración la construye a mano alzada considerando la consigna (Figura 11). Rotula las unidades figurales. Realiza su desarrollo en tres puntos. En el primero, considera datos de la hipótesis. Señala que T es punto de tangencia y agrega el segmento CT, indicando su perpendicularidad a la recta m.

La demostración de la tesis la realiza en los dos pasos que describimos a continuación:

- En su 2º punto, deduce el paralelismo de los segmentos AD, CT y BP, apoyándose en la relación de perpendicularidad y paralelismo, la que es clara de su figura, pero no la justifica señalando la propiedad misma.

- En su 3º señala que AC y CB son radios. Deduce que DT y TP son iguales, aplicando el teorema de Thales y el hecho que CT es perpendicular a m concluye que el triángulo CPD es isósceles, pero no lo justifica y obtiene la tesis.

Esta producción de E4-1 se sitúa en el paradigma G2 a pesar de la falta de justificación en sus deducciones, no queda claro cuánto le influye la figura en ellas.
En relación a las operaciones cognitivas en juego se observa, la aprehensión discursiva en la construcción cuidadosa de la configuración solicitada. Además queda en evidencia la aprehensión operativa al añadir el segmento CT y señalar con línea punteada los segmentos de los cuales debe probar su congruencia o igualdad de sus medidas. También podría haber una aprehensión perceptiva, en el paso 2º de su desarrollo, por visualización del paralelismo en la configuración. Por otra parte en esta producción está ausente el protocolo de construcción solicitado en la tarea 2.

Situación 2

E4-2:

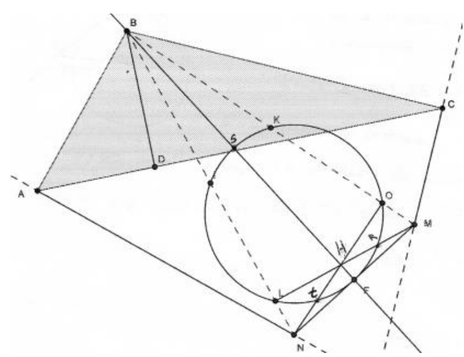
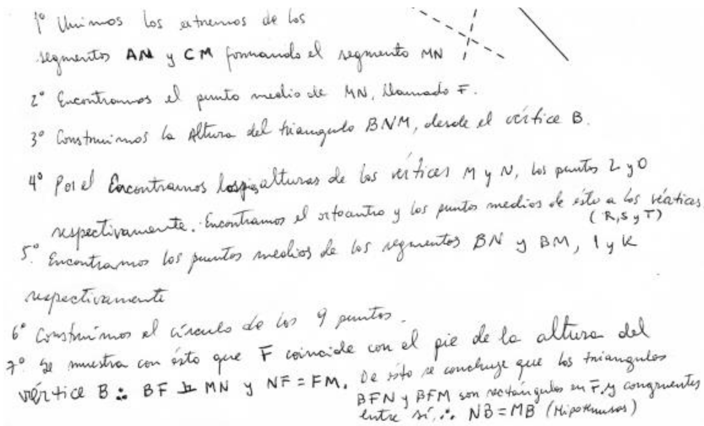


Figura 12

El estudiante E4 utiliza el procesador geométrico GeoGebra (Figura 12) según el enunciado del problema y rotula correctamente las unidades figurales, añadiendo nuevos elementos. Señala con línea punteada los segmentos de los cuales debe probar su congruencia. El triángulo BNM está totalmente explícito en la configuración.



1° Unimos los extremos de los segmentos AN y CM formando el segmento MN
2° Encontramos el punto medio de MN, llamado F.
3° Construimos la Altura del triangulo BNM, desde el vértice B.
4° ~~Por el~~ Encontramos los ~~pies~~ alturas de los vértices M y N, los puntos L y O respectivamente. Encontramos el ortocentro y los puntos medios de éste a los vértices. (R, S y T)
5° Encontramos los puntos medios de los segmentos BN y BM, I y K respectivamente
6° Construimos el círculo de los 9 puntos.
7° Se muestra con ésto que F coincide con el pie de la altura del vértice B ∴ BF ⊥ MN y NF = FM. De ésto se concluye que los triangulos BFN y BFM son rectángulos en F y congruentes entre sí ∴ NB = MB (Hipotenusas)

Figura 13

La descripción del procedimiento de construcción (Figura 13) contiene siete pasos, a saber: 1°) Determina el segmento MN. 2°) Determina el punto medio F de MN. 3°) Construye la altura del triángulo BNM desde el vértice B. 4°) Determina los pies de las alturas de los lados BM y BN denotándolos L y O respectivamente. Determina el ortocentro rotulándolo H y los puntos medios de los segmentos HM, HB y HN, denotándolos por R, S y T respectivamente. 5°) Determina los puntos medios de los segmentos BN y BM, rotulándolos por I y K respectivamente. 6°) Construye el "círculo de los nueve puntos" con el procesador geométrico que tiene la herramienta de construir una circunferencia dados tres puntos. Verifica en la configuración que la circunferencia pasa por los puntos F, R, O, K, S, I, L y T (8 puntos). 9°) Deduce que F coincide con el pie de la altura trazada desde el vértice B a NM (el 9° punto), y afirma que BF $\perp$ MN y NF = FM. Concluyendo que los triángulos BFN y BFM son rectángulos en F y congruentes entre sí, y por lo tanto NB = MB pues son hipotenusas.

En esta descripción de su procedimiento el estudiante E4 construye puntos relacionados con "el círculo de los 9 puntos" (Teorema de Feuerbach), conocimiento anterior adquirido por él. E4 trabaja en el triángulo BNM, y construye los puntos de la hipótesis del teorema, obteniendo una configuración clara. Verifica que este triángulo está dividido en dos triángulos congruentes y por lo tanto demuestra lo pedido. No obstante, E4 no se pregunta si el punto medio F coincide con el pié de la altura de NM trazada desde B; lo que se puede interpretar que él por visualización de su configuración asume que coinciden, y por ello le resulta la congruencia que demuestra lo pedido. Pero esto no tiene relación con el Teorema ni con el Corolario. Puesto que el teorema refiere a un triángulo cualquiera para obtener la

circunferencia que contiene los 9 puntos y cuando el triángulo es isósceles los puntos son 8 (el corolario). Con su procedimiento E4 se sitúa en el paradigma G1.
En cuanto a las operaciones cognitivas se evidencia una aprehensión discursiva adecuada al dar cuenta de la consigna, y la interacción de las aprehensiones discursiva y operativa al usar el procesador geométrico.

Confrontación de los análisis a priori y el de resultados de la aplicación.

Situación 1: La construcción de la figura asociada al enunciado de la Situación 1 exigió a los estudiantes una aprehensión secuencial de trazados de segmentos de modo de visualizar las condiciones para la aplicación del teorema de Thales. También visualizar posibles triángulos congruentes para la aplicación de los teoremas de congruencia.
Los estudiantes E1, E2 y E3 realizan una construcción con regla y compás, y E4 a mano alzada. Los estudiantes E1, E2 y E4 efectúan una aprehensión discursiva con cambio desde lo discursivo a lo visual en forma correcta. Pero presentan dificultades en el trazado de paralelas y perpendiculares por lo que en este caso, no se manifiesta la aprehensión operativa figural.

E1, E2 y E4 hacen una construcción con mayor exactitud. En cambio, E3, a pesar de usar instrumentos, su construcción no da cuenta de la perpendicularidad, quedando su representación distorsionada. Ninguno de los estudiantes presentó el protocolo de construcción, quedando el procedimiento implícitamente en las configuraciones que daban cuenta de la consigna.

Todos los estudiantes se situaron en el paradigma G2. E2, E3 y E4 presentan una prueba apoyándose en el Teorema de Thales, la congruencia de triángulos y las relaciones métricas en una circunferencia. E1 utiliza la equidistancia de las rectas paralelas y la congruencia de triángulos, condiciones que se esperaban en el análisis a priori.

Los procesos discursivos desarrollados por ellos, particularmente son una mezclas de lo discursivo natural y discursivo teórico. Además, no fueron rigurosos en la escritura, ni justificaron los pasos que establecieron en la prueba. Claramente distinguieron entre hipótesis y tesis, no evidenciado la dificultad prevista en el análisis a priori.

En cuanto a los conocimientos previos que se esperaba que fueran puestos en escena, tales como los conceptos de perpendicularidad, paralelismo y tangente a una circunferencia en un punto de ella, aplicación de propiedades, teoremas (de congruencia, de Thales), efectivamente aparecieron mayoritariamente en las respuestas de los estudiantes que en general se situaron en G2, no obstante las demostraciones fueron incompletas, desarrollos implícitos sin justificaciones.

Situación 2: Al igual que en la situación anterior, la construcción de la figura asociada al enunciado implicó una aprehensión secuencial de trazados de segmentos: lados del triángulo, la altura y las perpendiculares; además de la determinación de los puntos M y N bajo las condiciones establecidas en la hipótesis.

Los estudiantes E1 y E3 presentaron construcciones mixtas, sus configuraciones están hechas con instrumentos y a mano alzada. E4 lo hace con un procesador geométrico; los estudiantes E1, E3 y E4 efectúan una aprehensión discursiva con cambio desde lo discursivo a lo visual. No obstante las configuraciones fueron parciales, ya que establecieron los puntos M y N como únicos y no en duplas, como se esperaba en el análisis a priori. E2 construyó el triángulo y solamente trazó la altura sin continuar con las instrucciones, lo que podría significar debilidad en los conocimientos requeridos.

Por su parte E1 visualiza dos triángulos, ANB y MCD, y afirma que son rectángulos, equivocándose al confundir el punto B con D, siendo el triángulo MCB al cual se refiere; un descuido al rotular, dificultad prevista en el análisis a priori. Por último afirma que mostrar que los puntos M y N equidistan de B es equivalente a demostrar que el triángulo MBN es isósceles, no lo prueba. Esta propiedad siendo cierta no fue prevista en el análisis a priori.

Los estudiantes E3 y E1 en lugar de demostrar lo pedido que se refiere a la congruencia de los segmentos BN y BM la cambian por probar que el triángulo NMB es isósceles.

En cuanto a las hipótesis, E3 añade que los triángulos ADB y CDB son rectángulos, pero no utiliza esta información en su argumentación. Este estudiante, fija su atención en el triángulo MNB. Indica que al trazar las alturas desde los vértices M, N y B, determina los correspondientes pies de las alturas denotándolos por F, G y E. Además, denota por E’ el punto medio de NM; afirma además que E debe coincidir con E', y si es así, EN = EM y EB $\perp$ NM, y que por esta razón el triángulo NMB es isósceles, lo que esperaba demostrar.

Sin embargo, esta forma de enfocar el problema no es válida, ya que se refiere a la construcción por GeoGebra, sin realizarla, y a un teorema llamado "Teorema de Apolonio de los 9 puntos", pero en realidad intenta recurrir al Teorema de los Nueve Puntos de Feuerbach. E3 no enuncia el teorema y aplica mal, ya que solo evidencia 4 puntos que son los pies de las tres alturas y el punto medio del lado MN. E3 considera el problema resuelto y trata de resolver a partir de la configuración resultante a mano alzada.

Esta estrategia no estaba prevista en el análisis a priori, pero se considera un aporte ya que las nociones que ponen en juego son básicas y permiten refuerzo de algunas nociones geométricas elementales.

E4, a diferencia de E3, va construyendo las condiciones para aplicar el Teorema de los Nueve Puntos evidenciando la aplicación de las aprehensiones discursiva y operativa, y el razonamiento discursivo natural. Solución que se ha detallado en la descripción de E4.
Ninguno de los estudiantes presentó el protocolo de construcción, no obstante tres estudiantes logran la configuración solicitada, quedando tácito el procedimiento de construcción.

Respecto a los conocimientos previos de los estudiantes, E2, no logró abordar el problema, E1, sólo representó la consigna, sin resolver nada; E3, lo enfrentó representando la consigna con el uso del procesador geométrico GeoGebra y el Teorema de los Nueve Puntos, pero no menciona cómo éstos justifican el enunciado; por último, E4, hace la construcción con el procesador geométrico, y muestra la consigna, en una mezcla entre un procedimiento de construcción y la aplicación del Teorema de los Nueve Puntos de Feuerbach, mostrado ocho de los nueve puntos, ya que E4 aplica el teorema en el caso particular del triángulo isósceles, que establece la equidistancia requerida.

En resumen, en relación a la solución de las situaciones planteadas, tres de los estudiantes dejaron en evidencia la movilización de conocimientos previos en torno a las propiedades de la circunferencia, propiedades de triángulo y la relación entre triángulo y circunferencia, con distintos grados de profundidad, y acorde a sus experiencias adquiridas en estudios previos universitarios. El estudiante E2 ingresó directamente a la carrera de "Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática", por ello necesita progresar en Geometría.

Respecto a las habilidades de comunicación escrita, los estudiantes no explicaron paso a paso el procedimiento de construcción geométrica, sino de manera sintética e incluso en forma implícita. No explican su raciocinio ni dan cuenta de justificaciones.

Sólo uno de los estudiantes participantes, quien tiene estudios previos de Arquitectura, demostró tener habilidades para usar un procesador geométrico, lo utilizó para desarrollar la situación 2.

Respecto a la validación de las respuestas.

A raíz de la falta de justificaciones de los estudiantes, y como una forma de completar la información, se procedió a hacer una entrevista grabada en la que cada uno de ellos expresaba en forma oral las razones de sus procedimientos. Quedó en evidencia que las experiencias previas condicionan las respuestas. El estudiante que no tenía estudios en Pedagogía en Educación Matemática, manifiesta que su experiencia sólo es la obtenida en la carrera. Los otros tres estudiantes, con estudios previos de Pedagogía en Educación Matemática, expresan que "la representación gráfica no es tan importante, sino que lo importante es la demostración", lo que se contradice con sus producciones. Por otro lado, a la pregunta qué les sería más fácil probar o demostrar, indicaron que probar, pues "probar se asocia más a algo aritmético" y que "demostrar requiere más que una justificación", y que "lo tecnológico permite visualizar", pero "el trasfondo va más en la demostración". Sin embargo, en ambas situaciones se les solicita probar (en el análisis a priori se esperaban respuestas situadas en G1) y ellos optaron por situarse en G2 sin hacer uso de las reglas de G2, y relegaron el uso de la tecnología a un segundo plano. Al parecer los estudiante por las respuestas dadas en la entrevistas, consideran que demostrar es sin construcciones o dibujos y sin justificaciones.

A modo de cierre:

¿Qué se logró?

- Conocer el nivel de profundidad de los contenidos conceptuales y procedimentales en el eje temático de geometría que tienen los estudiantes de pedagogía en educación básica con especialidad en educación matemática
- Establecer que tienen concepciones preconcebidas que dificultan un desarrollo progresivo en el aprendizaje de la geometría
- Establecer la necesidad de intervención de profesores con el objetivo de favorecer el conocimientos disciplinares de los estudiantes en geometría
- Establecer la necesidad de adecuar los enunciados de problemas geométricos tradicionales de modo que planteen preguntas o desafíos que motiven a la búsqueda de respuesta o de caminos para la resolución del problema como una estrategia de aprendizaje exitosa.

¿Cuál es la concepción de geometría que tienen los estudiantes?

- Ellos tienen concepciones preconcebidas:
    - La representación figural no es importante
    - Demostrar es lo más difícil
    - Probar o verificar lo asocian con lo algorítmico
    - El uso de la tecnología solo sirve para visualizar

¿Qué dificultades presentan?

- En el proceso de construcción no es explícito el procedimiento
- Falta práctica en el uso de instrumentos de construcción con lápiz y papel
- Presentan un desarrollo de motricidad fina deficiente
- No distinguen los paradigmas geométricos de G1 y G2.
- No están familiarizados con el marco G1:
    - No se dan cuenta que las figuras representan objetos de la realidad.
    - No saben que con los instrumentos físicos (regla, compás, escuadra, etc.) y midiendo es posible probar o verificar
- Cuando se sitúan en G2 no usan los instrumentos apropiados, que se refieren a definiciones, propiedades y teoremas.
- Usan un lenguaje mixto entre el natural y formal

- No justifican sus afirmaciones y los procedimientos utilizados
- Intentan demostrar por sobre la verificación o comprobación pero en forma muy deficiente.
- Relegan a un segundo plano el uso del procesador geométrico.
- No todos los estudiantes logran una construcción geométrica, independientemente del recurso didáctico con el que se lleven a cabo.
- La causa del problema aparece más que en un tema de recursos, es el poco uso y magra comprensión de aspectos conceptuales y procedimentales.
- En cuanto a los procesos cognitivos, los estudiantes muestran diferentes niveles de razonamiento, privilegiando el proceso discursivo natural, aunque deficientemente, pues no comunican describiendo o justificado sus procedimientos.

Con esos hallazgos quedan en evidencia:

- La necesidad de fortalecer la generación de aprendizajes geométricos con diseños didácticos apropiados y que se recurra las TICS.
- Que la enseñanza discursiva o secuencial que privilegia la clase expositiva no permite desarrollar el pensamiento divergente en general y más particularmente en geometría.
- La necesidad de romper con los enunciados tradicionales centrados en los cálculos, con el fin de plantear problemas que los sobrepasen y aborden situaciones de visualización y construcción que permitan conjeturar, probar y demostrar utilizando objetos propios de la geometría.

Referencias

Ávalos, B. y Matus, C. (2010). La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional. *Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M*. Santiago: Ministerio de Educación.

Barreto, J. (2012). Deducción del Teorema de Pitágoras en trigonometría como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Premisa 14, 53*, 35-49. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/53%20Barreto.pdf

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Colombia. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2001). *La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo*. Traducción de Hernandez, V. y Villalba, M. Recuperado de http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm

Duval, R (2003) Décrire, visualiser, raisonner: quels «apprentissages premiers» de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 8*, 13-62.

Duval, R., (2010). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. *Tecné, Episteme y Didaxis*. *27*(1), 108-129. Recuperado de http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/viewFile/998/1011

Guzmán, I. (2009). Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, septiembre, N° 19, 22-33.

Kuzniak, A., Guzmán, I., Houdement, C., Consigliere, L., Castela, C., Rauscher, J.C. (2006) Proyecto ECOS-CONICYT 2003-2005. Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. *Didactique des Mathématiques*. Université Paris 7 – Denis Diderot.

Kuzniak, A. (2008) Diversidad de las matemáticas enseñadas "aquí" y "en otro lugar": el ejemplo de la geometría. *Matematicalia. Vol. 4*, N° 1. En http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=446&Itemid=270

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma, 10*(2), 10 – 26. Recuperado de http://revistasigma.udenar.edu.co/articulos/Vol%C3%BAmen%20X%202/2.pdf

MINEDUC. (2011). *Estándares Orientadores para Egresados de Pedagogía en Educación Básica*. Ministerio de Educación. Santiago de Chile.

Molina, G., Rosas, A. y Castañeda, A. (2011).Construcción geométrica dinámica y modelo de Van Hiele. Una experiencia de formación de profesores. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 1150–1158. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.

Autores

Marco Antonio Rosales Riady, M.Sc.

Director Escuela de Pedagogía en Educación Matemática. Académico del Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad del Bío-Bío, Chile. Magíster en Enseñanza de las Ciencias, Mención Didáctica de las Matemáticas. Doctorando en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos, Chile. Línea de Investigación: Aprendizaje de la Geometría, Formación Docente. E-mail: mrosales@ubiobio.cl.

Ismenia Guzmán Retamal, Dra.

Docteur en Didactiques des Mathématiques, Université Louis Pasteur de Strasbourg, Francia. Profesora Fides et Labor, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesora Titular, Depto. de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile. Línea de Investigación: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, Formación Docente. E-mail: ismenia.guzman@ulagos.cl