

Reseña de Tesis Doctoral
**“LA DEMOSTRACIÓN EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA:
UN ESTUDIO CON FUTUROS DOCENTES DE MATEMÁTICA”**

Fredy Enrique González

fredygonzalezdem@gmail.com

Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina”
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela

Recibido: 29 /09/2016 **Aceptado:** 09/11/2016

Resumen

La Tesis Doctoral, intitulada “La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica: Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática”, presentada por Martha Iglesias, MSc, para optar al Grado de Doctor en Educación, en la UPEL Maracay, con la tutoría del Dr. José Ortiz Buitrago, de la Universidad de Carabobo; fue defendida en la UPEL Maracay, durante la mañana del 24 de octubre de 2014, con la participación en el jurado de los doctores Mario Arrieche, Luis Capace, Rolando García, Fredy González y José Ortiz (Tutor). Este logro académico ocurre cuarenta años después de que Fredy Mulino Betancourt (1974) se convirtiera en el primer venezolano de obtener su grado académico de Doctor con una tesis asociada con Educación Matemática. Tomando en cuenta que es apenas en 2012 cuando en Venezuela se autorizó el funcionamiento de un Doctorado específico en Educación Matemática (González, 2014), la tesis de Martha Iglesias junto con la de Andrés González (2015), se constituye en un hito con el que se cierra un ciclo histórico, preludio de las primeras tesis doctorales específicas en Educación Matemática que se producirían en Venezuela en 2016, correspondiendo a José Servelión Graterol (2016) el mérito de ser el primer venezolano que obtiene el Doctorado en Educación Matemática en un programa específico de este campo disciplinario realizado totalmente en el país.

Palabras Clave: Didáctica de la Geometría, Hexágono Didáctico Matemático, Conocimiento Profesional del Profesor de Matemática

Doctoral thesis review

**THE DEMONSTRATION IN ENVIRONMENTS OF DYNAMIC GEOMETRY: A
STUDY WITH FUTURE MATH TEACHERS**

Abstract

The Doctoral Thesis, entitled "The Demonstration in Dynamic Geometry Environments: A Study with Future Teachers of Mathematics", presented by Martha Iglesias, MSc, to opt for the Degree of Doctor in Education, UPEL Maracay, with the tutoring of Dr. José Ortiz Buitrago, from the University of Carabobo; was defended at UPEL Maracay, on the morning of October 24, 2014, with the participation of Mario Arrieche, Luis Capace, Rolando García, Fredy González and José Ortiz (Tutor) on the jury. This academic achievement occurs forty years after Fredy Mulino Betancourt (1974) became the first Venezuelan to obtain his doctoral degree with a thesis associated with Mathematics Education. Taking into account that it is only in 2012 that in Venezuela a specific doctorate in Mathematics Education was authorized (González, 2014), the thesis of Martha Iglesias together with that of Andrés González (2015), constitutes a milestone with which closes a historical cycle, prelude to the first specific doctoral theses in Mathematics Education that would occur in Venezuela in 2016, corresponding to José Servelión Graterol (2016) the merit of being the first Venezuelan to

obtain the Doctorate in Mathematics Education in a program Specific of this disciplinary field made entirely in the country.

Keywords: Didactics of Geometry, Mathematical Didactic Hexagon, Professional Knowledge of the Mathematics Teacher

Durante mucho tiempo esperé por el momento de tener en mis manos la Tesis Doctoral de la admirable profesora Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa, quien comenzó su andadura en la Educación Matemática allá por el año 1986, cuando formó parte de la Cohorte Inaugural del Curso Educación Matemática que forma parte de las asignaturas obligatorias contempladas en el Plan de Estudios que ha de completarse en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), para obtener el título de Profesor de Matemática; el anhelado día llegó el jueves dos de octubre del año 2014 cuando su autora, directamente, lo colocó en mis manos; el Jueves Doctoral de ese día se re-significó; en efecto, Martha con esa entrega quizás sin estar muy consciente de ello, se estaba convirtiendo en un referente importante para la Educación Matemática venezolana, pues estaba completando su carrera formativa al más alto nivel, en la misma institución que le ha visto desarrollarse como educadora matemática desde su formación inicial.

La ocasión fue propicia para recordar que Martha formó parte de la Cohorte Fundacional del Curso de Educación Matemática que se incorporó al Plan de Estudios de la Especialidad de matemática, cuando el IPMAR elevó su rango académico al integrarse como núcleo de la UPEL.

A quien esto escribe, le cabe el honroso privilegio de haber estado presente tanto en el origen como en el extremo y en otros puntos del vector directriz descrito por la trayectoria de nuestra querida compañera, Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa (me cuento entre los pocos que cada vez que la menciono pronuncio sus nombres y apellidos completos), cuya defensa de Tesis Doctoral es el motivo que nos reunió ese día, en el Aula 6 de la Planta Baja del Edificio donde funcionan los Departamentos de Matemática, Castellano e Informática de la UPEL Maracay, a sus colegas, familiares y discípulos de ayer y de hoy.

En esta su Tesis Doctoral, Martha asume con sabiduría dos de sus grandes asuntos de apasionado interés indagatorio: “*su bella Geometría*” y la “*formación inicial de los docentes de Matemática*” a los cuales hermana mediante la tecnología representada en un Software de Geometría Dinámica (SGD) sobre cuya base llevó a cabo el estudio.

Desde el inicio de la lectura se advierte la presencia de un ser humano singular que reconoce y admira a sus progenitores, tanto a los que le dieron el aliento vital como a quienes desbrozaron el camino del ámbito matemático al que dedica sus desvelos. Además, también tiene presentes a quienes le han acompañado a través de este largo trajinar: sus maestros, colegas y amigos; sus estudiantes, su Universidad y, por supuesto, a quien asumió la conducción del quehacer cognitivo de Martha durante este último tramo: su Tutor, el Dr. José Ortiz a quien deseo expresar mi palabra de felicitación, gratitud y reconocimiento por este nuevo aporte a la comunidad venezolana de educadores matemáticos.

De acuerdo con lo que se aprecia en su Índice General (pp. v-xvi) pudiera pensarse que la TD de Martha es una más de las tantas que ahora abultan los anaqueles de las bibliotecas y centros de información y documentación de nuestras universidades. Los tres primeros capítulos están intitulados de la manera convencional; en ellos se describen, sucesivamente, el problema, los referentes teóricos y el abordaje metodológico; al examinar el número de páginas utilizados para cada capítulo (12, 72 y 11, respectivamente), se advierte que se está ante un trabajo sólidamente argumentado desde el punto de vista teórico, puesto que prácticamente el 75% del texto correspondiente a la proyección del estudio fue invertido en la construcción de un piso conceptual sin fisuras, para lo cual se apeló al examen de 163 referencias.

Para la construcción del Problema de Investigación, Martha se hace consciente de su realidad próxima y se ubica en el contexto de la formación inicial de profesores de Matemática, pero no restringiéndola al ámbito concreto de la Institución donde ella forma a futuros profesores, sino ubicándola en el marco de las preocupaciones indagatorias que convocan el interés de practicantes de la Educación Matemática tanto a nivel nacional como internacional:

Por consiguiente, la formación inicial de los docentes de Matemática debe ser un escenario propicio para la reflexión didáctica en torno a las situaciones problemáticas fundamentales del campo de la Educación Matemática y la búsqueda de soluciones efectivas a las mismas. (p. 5)¹

A partir de este marco general, Martha va acotando la temática hasta enfocarla en un aspecto particular.

¹ Este número indica la página de la Tesis Doctoral de Martha Iglesias de donde es extraída textualmente la cita.

Como puede inferirse, en el ámbito global de la Educación Matemática, hay un persistente interés por los asuntos asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y por la formación que en estos aspectos han de poseer los docentes de Matemática. Así que la preparación para enseñar Geometría es un asunto que compete a los formadores de los futuros profesores de Matemática; y en este sentido, la autora del presente estudio, quien es formadora de profesores en una Universidad Pública Venezolana dedicada a la formación docente, ha puesto en juego ciertas acciones dirigidas al desarrollo de competencias para la enseñanza de la Geometría en sus estudiantes... (p. 6).

Para abordar este asunto, la doctorante vuelca nuevamente la mirada hacia la producción científica que, en el ámbito internacional, se ha generado en el campo de la Geometría y su Didáctica, encontrando que

Para comenzar es importante resaltar que los software de Geometría Dinámica (en adelante, SGD) han alcanzado un lugar privilegiado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en diversos países (p. 7)

Pero, adoptando una actitud prudentemente crítica y reflexiva, Martha no se deja obnubilar por el recurso tecnológico, considerándolo como una panacea; al contrario, destaca sus méritos y, al mismo tiempo, reconoce las dificultades que el uso de los SGD acarrearán; entre éstas destaca que:

en la última década, la influencia del uso de un SGD sobre el proceso de la demostración matemática en Geometría es una cuestión abierta a nivel investigativo (p. 10)

Así que el impacto del uso del mencionado dispositivo tecnológico está considerado como “una cuestión abierta” en Educación Matemática; es decir, aún no respondida por la investigación en este campo disciplinario. Y es este el reto asumido por la autora: sumergirse en el examen de los procesos que ponen en juego los Futuros Profesores de Matemática (FPM) para llevar a cabo la resolución de problemas que implican demostraciones geométricas, utilizando SGD y, a partir de allí, derivar proposiciones de implementación que sean susceptibles de ser incorporadas en los planes de formación inicial de profesores de Matemática, de modo que en dichos planes puedan ser incluidos espacios donde se lleven a cabo acciones que propicien el desarrollo de competencias para gestionar de manera idónea el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

En la **construcción del problema** se destaca un juego dialéctico entre lo global y lo local; entre lo general y lo específico, ya que se establecen conexiones adecuadas entre los siguientes asuntos: formación de profesores, procesos de enseñanza y aprendizaje de la

Geometría, resolución de problemas, y uso de las tecnologías, con el abordaje de un asunto concreto (la Demostración en Geometría) para generar propuestas para la formación de los futuros profesores de Matemática.

Para la construcción de su *Repertorio de Coordenadas Teórico-Conceptuales de Referencia*, Martha considera tres ámbitos: a) la formación inicial de profesores; b) los estudios sobre el desenvolvimiento del pensamiento geométrico y la didáctica de la Geometría; y c), el análisis didáctico como una herramienta útil en el diseño de proposiciones didácticas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en general y de la Geometría, en particular.

En cuanto a la *Formación Inicial de Profesores*, muestra cómo este asunto constituye un motivo de reflexión en el campo de la Educación Matemática a escala mundial; para ello recurre a la revisión de documentos asociados con eventos tales como el ICME, CERME, CIBEM, RELME y COVEM, mediante los cuales se evidencia cómo la formación y el desarrollo profesional de los profesores de Matemática es un vigente campo de ocupación indagatoria por parte de un amplio conglomerado de investigadores en Educación Matemática a escala internacional.

Un hecho que puede ser inferido a partir de esta revisión y que merece ser destacado es la *consideración del Profesor de matemática como un profesional*; este no es un asunto menor; al contrario es la valorización de una quehacer lamentablemente postergado y desmeritado en nuestro ámbito; así que si al profesor de Matemática se le asume como un profesional, entonces resulta perentorio caracterizar y promover esa profesionalidad. Por ello, Martha examina diversos “*Modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática*”; así, destaca los aportes de Schulman (2005), Ball y sus Colaboradores (2005, 2008), y J. D. Godino (2009), al tiempo que reconoce los llamamientos de quienes, en Venezuela, abogan por la profesionalización de la docencia en Matemática. Aquí sería conveniente incorporar los aportes del trabajo que lleva a cabo Dario Fiorentini (2003), quien plantea una interesante estrategia para el desenvolvimiento profesional del profesor de Matemática.

Así que, reconociendo el carácter profesional del ejercicio de la docencia en Matemática, se explicitan los dominios de conocimientos que definen esa profesionalidad; a saber: los que se requieren para gestionar la enseñanza de la Matemática (en la perspectiva de

Shulman) y los que son imprescindibles en relación con: a) la Matemática como ciencia; b) los factores condicionantes del aprendizaje de la Matemática; y, c) los avatares de la Educación Matemática, en tanto que disciplina (EM) y también como formación matemática de las personas (em).

Esta concepción genérica de la profesionalidad del quehacer docente en Matemática ha de expresarse de un modo explícitamente ostensible; para ello se adopta, como perspectiva curricular de la formación del profesor de Matemática, la noción de competencia.

La sección de la Tesis Doctoral en la que se examina el asunto de las Competencias Profesionales que *ha de alcanzar* el profesor de Matemática (y ya en esta expresión “ha de alcanzar” va implícita una idea interesante en cuanto al carácter procesual de la competencia como un estatus al cual se arriba de manera progresiva) comienza con un examen del concepto propuesto por el Proyecto Tuning_AL (Beneitone, Esquetini, González, Marty, Siufi & Wagenaar, 2007) en cuyo marco se destacan las 27 competencias específicas para el área de Educación. Además de lo expuesto en este Proyecto Tuning-AL, fueron consideradas otras iniciativas relativas a la noción de competencia en general, como la de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) con el cual se asocian dos importantes proyectos: Definición y Selección de Competencias (DeSeCo) y el *Program International for Students Assesment* (PISA), dada la trascendencia que este último tiene sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática a escala internacional, Martha examina la evolución que la noción de Competencia Matemática ha tenido a lo largo de cinco ejecuciones de la Evaluación PISA que ha sido realizada cada tres años a partir del 2000.

La revisión de los informes de la OCDE en relación con las cinco evaluaciones PISA realizadas hasta el momento permite comprender la trayectoria del enriquecimiento progresivo que ha tenido la noción de Competencia Matemática como consecuencia de la incorporación de los resultados de la investigación en Educación Matemática, especialmente las dirigidas por Niss y Højgaard (2011) quienes, en su Proyecto sobre Competencias y Aprendizaje Matemático, señalan que

un buen profesor de Matemática debe poseer una gama de competencias matemáticas y didácticas específicas; así, en cuanto a las competencias didácticas, estos autores mencionan las siguientes:

1. Competencia curricular: Está dada por la capacidad de analizar y evaluar diversos documentos curriculares (incluyendo los programas de estudio y los libros de texto)

relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y, a partir de ello, elaborar planes de clases que contribuyan al logro de los fines formativos propios del nivel o modalidad educativa.

2. Competencia de enseñanza: Teniendo en cuenta las razones que justifican la enseñanza de la Matemática en los distintos niveles educativos, los fines que se persiguen y el alcance de los programas de estudio, así como los rasgos relevantes de sus estudiantes, se aspira que el profesor sea capaz de planificar y llevar a cabo secuencias didácticas concretas con diferentes objetivos; esto implica, por un lado, el diseño o la selección de tareas que motiven a los estudiantes a involucrarse en actividades propias del quehacer matemático y, por otro, la elaboración o la escogencia de materiales y recursos didácticos que favorezcan el aprendizaje de un tema matemático.

3. Competencias de revelar e interpretar el aprendizaje: Dado que el aprendizaje, la comprensión y el dominio individual de las matemáticas se expresa en situaciones concretas, se requiere que el profesor sea capaz de revelar e interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes y el dominio de competencias matemáticas, así como sus concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas y, además, sea capaz de identificar el desarrollo de las mismas en el tiempo.

4. Competencias de evaluación: Esta competencia abarca la capacidad para seleccionar o diseñar instrumentos que permitan revelar y evaluar – en forma continua - el rendimiento y las competencias matemáticas de un grupo de estudiantes; así como la capacidad para analizar críticamente los resultados alcanzados a través de la utilización de tales instrumentos y, además, el ser capaz de comunicarse con los estudiantes sobre las observaciones e interpretaciones hechas, y luego ayudarles a corregir, mejorar o desarrollar sus competencias matemáticas.

5. Competencias de cooperación: Esta competencia comprende, en primer lugar, el ser capaz de cooperar con colegas y otras personas respecto a la enseñanza de la Matemática y sus relaciones con otras disciplinas; y, en segundo lugar, la competencia incluye la posibilidad de cooperar con los padres y representantes de los estudiantes y las autoridades educativas acerca de las condiciones de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

6. Competencia de desarrollo profesional: Esta competencia incluye la posibilidad de desarrollar otras competencias como profesor de Matemática, ya que, se trata de ser capaz de organizar o participar en actividades que pudieran contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas y didácticas, teniendo en cuenta las condiciones reinantes. Para ello se requiere el desarrollo del pensamiento reflexivo en y sobre la práctica docente, con el propósito de identificar necesidades formativas e intereses profesionales en torno a las cuales seleccionar u organizar las actividades como la participación en grupos de estudio y proyectos de investigación, teniendo en cuenta los aportes de la investigación en Educación Matemática.

Asimismo, en relación con las competencias matemáticas de un profesor de Matemática, Niss y Højgaard (2011) parten del supuesto que éstas tienen que incluir las competencias que se aspira desarrollen y pongan en práctica los estudiantes, pero adicionando ciertas capacidades propias del quehacer docente; es decir, es necesario

realizar una descripción didáctica de las competencias matemáticas que debe alcanzar un profesor de Matemática. (pp. 51-52)

Una idea clave aquí es que el profesor de Matemática, además de las que le son inherentes a su propia condición de tal, debe él mismo haber alcanzado aquellas competencias que aspira que sus estudiantes logren.

Asimismo, en relación con las competencias matemáticas de un profesor de Matemática, Niss y Højgaard (2011) parten del supuesto que éstas tienen que incluir las competencias que se aspira desarrollen y pongan en práctica los estudiantes, pero adicionando ciertas capacidades propias del quehacer docente; es decir, es necesario realizar una descripción didáctica de las competencias matemáticas que debe alcanzar un profesor de Matemática. (p. 52):

Por tanto, el profesor de Matemática ha de ser “no sólo matemáticamente competente” sino además, también “didácticamente competente”

No es suficiente que un profesor sea matemáticamente competente, es necesario que ponga en juego el conocimiento didáctico del contenido matemático al momento de diseñar, gestionar y evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje, teniendo en mente la necesidad que sus estudiantes progresivamente desarrollen y practiquen competencias matemáticas según las exigencias propias del nivel o modalidad educativa; es decir, es necesario que el profesor también sea didácticamente competente. (pp. 54-55).

Así que resulta imprescindible pensar en ¿cómo se forma a un profesor de Matemática que integre armoniosamente estos dos ámbitos de competencia: el matemático y el didáctico?.

En ese sentido, la autora asume la idea de un modelo formativo basado en la noción de aprendizaje situado (Sagástegui, 2004) que incorpore a los Estudiantes para Profesor de Matemática (EPPM) en procesos de observación e inmersión en prácticas equivalentes o análogas a las que habrán de desarrollar en el futuro con procesos de reflexión en y sobre la acción.

Entre los modelos formativos examinados están los de Brown, Collins y Duguid (1989) (situaciones auténticas y propias de la comunidad docente), Gómez-Chacón (2005) (escenarios de enseñanza y aprendizaje de la Matemática), García y Sánchez (2002) (entornos de aprendizaje), Blanco y Contreras (2002) (tareas didáctico-matemáticas) y Cardeño y Azcárate (2002) (ámbitos de investigación profesional). Para ampliar este aspecto podría ser útil examinar el Modelo de los Encuentros Presenciales de Trabajo (EPT) propuesto por González (2010) y el de los Encuentros Edumáticos de González (2000) y Martínez (2003, 2008).

El otro de los pilares sobre los que Martha Iglesias fundamenta la construcción de su RCT-CR es “la investigación sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría”; para ello, comienza haciendo alusión al estudio promovido por Miguel de Guzmán en 1992 y cuyos resultados se expresaron en el Informe del ICMI denominado *Perspectivas sobre la Enseñanza de la Geometría para el S. XXI* (Mammana y Villani, 1998), en el que se alude a: razones para enseñarla, con qué finalidad, cuáles contenidos abordar, qué estrategias poner en juego, cómo evaluar su aprendizaje, cuál debe ser la formación de docentes y qué innovaciones proponer; este trabajo fue continuado, y en 1995 se realizó la Conferencia de Catania² en donde se dieron a conocer los resultados del seguimiento al estudio promovido por De Guzmán e impulsado por el ICMI; lo que de ellos se desprende es que la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría es un asunto de importante interés indagatorio por parte de la comunidad de Educación Matemática a escala mundial.

Es en este contexto donde Martha ubica su estudio, enfatizando sobre los asuntos cognitivos y didácticos implicados por el desarrollo del Pensamiento Geométrico y la enseñanza y aprendizaje de la Geometría; en relación con lo primero asume el Modelo Van Hiele y enfoca su atención hacia la demostración; en cuanto a lo segundo, decide asumir los abordajes tecnológicos (SGD) y el análisis didáctico (Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013) como marco para la puesta en escena de proposiciones didácticas específicas para organizar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en contextos de formación inicial de profesores de Matemática.

De esta parte de la Tesis Doctoral se han de resaltar revisión histórica, epistemológica, cognitiva y didáctica que la autora hace en torno a la Demostración en Geometría, enfatizando las dos últimas, lo cual la lleva a consideraciones de carácter filosófico que le permiten examinar cuestiones tales como: contexto de justificación y contexto de descubrimiento; relaciones entre intuición, demostración y argumentación; el problema de la evidencia, el cual es central para considerar el asunto de la necesidad de la demostración, en donde está implicado un asunto de transición cultural de lo evidente -a partir de lo concreto- a la demostrabilidad, es decir, de la necesidad de demostrar, lo cual se ve favorecido con el uso de los SGD, tal como lo evidencian los trabajos del PME examinados por la autora

² Una traducción del documento central considerado en este evento puede verse en <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>

Según la perspectiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática (Génova – Italia), Boero (1999) plantea que la aproximación a la demostración pertenece a una forma más general de aprendizaje cultural y cognitivo y, por ende, ingresar a la cultura de los teoremas significa desarrollar competencias específicas inherentes a la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas. Además, este investigador estudia los roles múltiples de la argumentación en las actividades matemáticas concernientes a teoremas y la mediación del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración.

*Los investigadores pertenecientes al Grupo Internacional de Psicología en Educación Matemática (PME) también han centrado sus esfuerzos en el análisis de la influencia de un SGD sobre los estudiantes y las concepciones de la demostración matemática mientras los estudiantes están resolviendo problemas geométricos en un ambiente mediado por tal software. En el volumen 44 (1-2) de la revista *Educational Studies in Mathematics* publicado en el año 2000, los investigadores del PME abordan esta temática. Entre sus aportes destacan los siguientes:*

1. Hanna (2000) explora el papel de la demostración en la Educación Matemática y justifica su importancia en los planes de estudio. Además, promueve una discusión sobre ciertas aplicaciones de los SGD como herramientas valiosas en la enseñanza de la demostración. Además, señala que el uso de un SGD en las clases de Matemática será eficaz en la medida que se acompañe de tareas cuidadosamente diseñadas y que le brinden a los estudiantes las oportunidades para: construir figuras geométricas dadas ciertas condiciones, visualizar relaciones entre los objetos que la conforman, establecer ciertas conjeturas, cometer errores, reflexionar y ofrecer explicaciones matemáticas tentativas. Por ello, para Hanna, el desafío del profesor en el aula es aprovechar la emoción y el disfrute por la exploración para motivar a los estudiantes a suministrar una prueba, o al menos hacer un esfuerzo para seguir una prueba dada.

2. Mariotti (2000) intenta clarificar el papel de un SGD, como el Cabri II, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Esta autora centra su atención en la construcción social del conocimiento y en la mediación semiótica lograda a través de los artefactos culturales (perspectiva de Vigotsky).

3. Jones (2000) estudia la influencia a largo plazo del uso de un SGD sobre la construcción de nociones amplias del razonamiento deductivo. Se centra en la evolución de la capacidad que tienen los estudiantes para hacer uso preciso del lenguaje matemático y clasificar correctamente una familia de cuadriláteros, a partir de la exploración visual de las similitudes y diferencias existentes entre ellos. Asimismo, señala que el uso de un SGD ayudó a los estudiantes a formular declaraciones razonablemente precisas sobre las propiedades y relaciones existentes entre los distintos tipos de cuadriláteros, y para llevar a cabo deducciones correctas, las cuales considera dos pasos importantes en la construcción de pruebas.

4. Marrades y Gutiérrez (2000) investigan las maneras en que el SGD puede usarse para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes de la naturaleza de la demostración matemática y mejorar sus habilidades asociadas a la demostración, teniendo como base la exploración, la heurística y la visualización.

5. Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2000) analizan las conjeturas, los métodos activos y las explicaciones dadas por los estudiantes cuando se enfrentaron con las contradicciones o contraejemplos; es decir, analizan el papel de las refutaciones en los ambientes de Geometría Dinámica.

6. Laborde (2000) intenta desarrollar un discusión global sobre el papel que desempeñan los SGD, teniendo en cuenta la variedad de posibles contextos para la demostración en este tipo de ambiente, la naturaleza cognoscitiva y social de la demostración como reflejo del entorno que se construyó alrededor del uso de un SGD, de observar a demostrar y la superación de la oposición entre hacer y demostrar. (pp. 77 y sgtes.)

La investigadora también examinó los estudios que al respecto fueron dados a conocer en ediciones especiales de las revistas *Educational Studies in Mathematics* (2000) y *ZDM* (2002 y 2008), y en la publicación, en 2012, del Estudio ICMI (Hanna y De Villiers, 2012) que, iniciado en 2007, “abordó cuestiones relevantes de la prueba y la demostración en la educación matemática” (p. 81). Sobre la base de todo lo anterior, la autora enuncia la noción de demostración que asumirá en el estudio.

Por lo tanto, en esta investigación, la demostración matemática se entiende como “una práctica argumentativa orientada por las leyes de la lógica formal o reglas de inferencia y dirigida a entender el porqué es válida una proposición matemática y convencer a otros y quizá a uno mismo de su validez” (Iglesias y Ortiz, 2013, p. 242). Esta acepción guarda relación con lo propuesto por Flores (2007), quien asumió a la demostración o prueba como el resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos desde el punto de vista de la lógica formal. Además, sin perder de vista que la demostración como proceso guarda relación con diversas actividades propias del quehacer matemático: exploraciones, estrategias heurísticas, reconocimiento de patrones o regularidades, formulación de conjeturas, verificación empírica, explicaciones, etc. (p. 83)

El tercer componente de este Repertorio Teórico-Conceptual de Referencia es la noción de Análisis Didáctico el cual es asumido como una herramienta que facilita el diseño y la gestión de unidades didácticas con contenido geométrico.

En el informe se consigna el abordaje metodológico puesto en juego durante el estudio; se percibe un esfuerzo de reconstrucción retrospectiva que organiza y da sentido de continuidad a un conjunto de acciones que la autora desplegó en su cotidianidad como docente

y que, a partir de una Contemplación Hermenéutica (González & Villegas, 2009) ponen en claro una trayectoria de indagación interpretada a partir de los planteamientos de Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), como fases de una investigación cualitativa.

Procedimientos e Instrumentos

Dado que, en esta investigación se siguió un paradigma cualitativo interpretativo, la misma se desarrolló atendiendo a las fases propuestas por Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), las cuales son: (a) Fase preparatoria, (b) Fase de Trabajo de Campo, (c) Fase Analítica y (d) Fase Informativa. Para estos autores, teniendo en cuenta el carácter continuo del proceso de investigación, estas fases “no tienen un principio y final claramente definidos, sino que se superponen y mezclan unas con otras, pero siempre en un camino hacia adelante en el intento de responder a las cuestiones planteadas en la investigación” (p. 63). Seguidamente, se describen cada una de las fases que conformaron esta investigación:

Fase preparatoria, la cual se sustentó en la reflexión en y sobre la práctica en torno a la problemática relacionada con la formación docente en el área de Geometría y su Didáctica, así como la revisión de fuentes documentales relacionadas con esta temática. Esta fase abarcó dos etapas no disjuntas: (a) la elaboración del proyecto de tesis doctoral, el cual fue revisado y confrontado ante tres investigadores activos en el ámbito de la Educación Matemática, con el propósito de valorar su calidad científica y viabilidad; (b) la planificación de las actividades a ser desarrolladas en el curso de RPG_AC durante el período académico 2011 – 1, teniendo como referencia los tres componentes del análisis didáctico (Gómez, 2007; Rico y Fernández-Cano, 2013) para la fase de diseño y siguiendo el esquema propuesto por Iglesias (2008) y que aparece reseñado en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013).

Fase de trabajo de campo, coincidió en espacio y tiempo con el desarrollo del curso de RPG_AC durante el período académico 2011 – 1; sin embargo, como se comenta en el Capítulo VI, el diseño de la unidad didáctica con contenido geométrico por parte de los profesores en formación se siguió desarrollando en la Fase de Ejecución de Proyectos Educativos, bajo la orientación de la autora, con lo cual se produjo una prolongación del trabajo de campo inicialmente previsto. Esta fase abarcó las siguientes actividades:

Revisión de fuentes documentales: Se realizó una revisión de fuentes documentales impresas y electrónicas relacionadas, entre otros, con los siguientes tópicos: (a) La formación inicial de los profesores de Matemática, teniendo en consideración los modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática, sus competencias profesionales (matemáticas y didácticas) y algunos modelos formativos; (b) La investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, con énfasis en los componentes y propiedades del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, el uso de los software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática, la demostración en Geometría, y el análisis didáctico como herramienta para

diseñar unidades didácticas con contenidos geométricos. Esta revisión permitió conocer los avances de la investigación sobre la demostración en ambientes de Geometría Dinámica y sustentar a cada uno de los componentes del curso de RPG_AC, así como analizar la información recabada durante el desarrollo de este curso. Los asuntos antes mencionados han sido dados a conocer en el Capítulo II (Referentes Teóricos). (p. 89)

Llegado a este punto hago consciencia de una característica distintiva de los estudios en los que un investigador aborda su práctica propia como asunto de interés indagatoria, como lo es el caso de Martha; en efecto, ella es al mismo tiempo investigadora e investigada puesto que el “escenario donde se llevaron a cabo las experiencias de aprendizaje que son el objeto de este estudio” es un curso que ella misma concibió, diseño, implementó, desarrolló, gestionó, evaluó y, además, abordó investigativamente para desarrollar su Tesis Doctoral. Aquí será interesante conocer ¿cómo ella concilió en la práctica los roles de facilitadora e investigadora del Curso de RPG_AC?

En el *Capítulo IV de la Tesis Doctoral* se dedica a caracterizar el curso RPG_AC apelando a las herramientas que le proporciona el Análisis Didáctico junto con el modelo de Ricardo Luengo y otros, para el diseño de actividades didácticas cuya acción inicial es un “Diagnóstico de Partida” que toma en cuenta aspectos cognitivo afectivos de los estudiantes, especificidades del contenido a ser abordado y condiciones socio institucionales (tiempo, recursos, nivel educativo).

Seguidamente, efectuó varios análisis; el primero, análisis del **contenido**; aquí es menester destacar uno de los interesantes aportes, entre muchos, del trabajo de Martha Iglesias: la vinculación de dos propuestas de planificación y gestión de cursos de Matemática como lo son el Mapa de Enseñanza y Aprendizaje de un tema matemático (elaborado por Mauricio Orellana, 2002; Venezuela) y el de los Organizadores del Currículum (propuesto por Luis Rico, 1997; Ortiz, Rico, & Castro, 2007), todo ello enmarcado en un contexto de Resolución de Problemas y en un ambiente tecnológicamente mediado. Otro análisis realizado fue el **cognitivo**; para ello, consideró los niveles del modelo propuesto por los Van Hiele, la noción de Competencia Matemática, los errores en los que potencialmente podrían incurrir los estudiantes, y las dificultades que éstos podrían confrontar durante el proceso en cuanto a: los objetos matemáticos considerados, los procesos de pensamiento matemático implicados, las prácticas de enseñanza puestas en juego por el profesor (esto se emparenta con la noción de Obstáculo Didáctico), nivel de desenvolvimiento cognitivo del estudiante, así como los

aspectos de su dinámica afectiva (actitudes, emociones y creencias). Entre los análisis efectuados también estuvo el de la **instrucción**, en el cual rinde cuenta de los pormenores de tres talleres realizados y en el marco de los cuales tuvieron lugar las experiencias de aprendizaje que sirvieron de base a la producción de esta Tesis Doctoral (p. 115);

Cuadro 20
Actividades didácticas propuestas en los talleres que conformaron el curso de RPG AC

Fases de Aprendizaje	Taller n° 1	Taller n° 2	Taller n° 3
Información	Revisar una presentación sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.	Leer y analizar el artículo "Explorando ángulos y triángulos con doblado de papel" (Arrieché e Iglesias, 2010).	Siguiendo el esquema de construir, explorar, conjeturar y validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles.
Orientación Dirigida	Realizar algunas construcciones con regla y compás, haciendo uso del Cabri – Géomètre II y, luego, elaborar las macros correspondientes.	Realizar la construcción de la herramienta triangular tanto con doblado de papel como en un ambiente de Geometría Dinámica.	
Explicación	Analizar las construcciones geométricas con regla y compás previamente realizadas, lo cual implicaba la identificación de las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de tales construcciones	Analizar las construcciones geométricas previamente realizadas y dar respuesta a las preguntas planteadas en el artículo.	
Orientación Libre	Aplicar los conocimientos geométricos en la realización de construcciones geométricas con regla y compás, dados los objetos iniciales y los objetos finales, sin presentar, en forma explícita, un procedimiento que conduzca a una construcción consistente.	Seleccionar la construcción de un objeto geométrico con doblado de papel y, luego, realizar la construcción equivalente con regla y compás en un AGD.	
Integración	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	

El desarrollo de estos talleres se llevó a cabo de conformidad con las Fases de Aprendizaje derivadas del Modelo de Van Hiele (pp 66-67);

Además, en el modelo de Van Hiele se propone que cualquier estrategia didáctica orientada a propiciar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, según los niveles mencionados, debe contemplar las siguientes fases de aprendizaje:

Fase 1: Información: El docente procura familiarizar a los estudiantes con el tópico geométrico a considerar en la sesión de trabajo. También sirve para que el profesor conozca cuáles conocimientos previos poseen sus estudiantes y qué tipo de tareas son capaces de realizar según su capacidad de razonamiento geométrico.

Fase 2: Orientación guiada o dirigida: El docente, en forma oral o mediante hojas de trabajo, orienta a los estudiantes para que realicen las exploraciones geométricas iniciales y los induce a observar algunos elementos relacionados con las propiedades geométricas relevantes. En este sentido, Gutiérrez y Jaime (2012) señalan que "el objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos,

propiedades, figuras, etcétera, principales en el área de la geometría que están estudiando” (p. 57).

Fase 3: Explicitación: El docente incentiva a los alumnos para que comuniquen y expliquen, en forma oral o por escrito, los resultados obtenidos a través de sus exploraciones geométricas. Gutiérrez y Jaime (2012) hacen un llamado de atención:

La tercera fase no hay que entenderla como un período de actividad entre las fases 2 y 4, sino que se trata de una fase transversal, que se superpone a las demás fases, pues hay que aprovechar cualquier momento propicio para promover el diálogo entre los estudiantes (con participación o no del profesor, según interese) (p. 58).

Fase 4: Orientación Libre: El docente propone a los estudiantes que realicen ciertas actividades tales como la resolución de problemas geométricos, con el propósito de facilitar el proceso de transferencia y consolidación de los aprendizajes; es decir, se busca con ello que los estudiantes utilicen y combinen los nuevos conocimientos y habilidades geométricas para resolver problemas que pudieran abordarse de diferentes maneras.

Fases 5: Integración: El docente pudiera pedir a los estudiantes que, por ejemplo, hagan un resumen de los aspectos relevantes del tópico tratado, con la finalidad de organizar lógicamente y como un todo (visión global) los nuevos aprendizajes geométricos (conceptos, propiedades, procedimientos, formas de razonar, etc.).

Según Gutiérrez y Jaime (2012), las fases de aprendizaje, componente prescriptivo del modelo de Van Hiele, “constituyen una propuesta metodológica para los profesores que les indican cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos para que faciliten el progreso de los estudiantes y gradúen su aprendizaje” (p. 56).

T1 (Construcciones con regla y compás en AGM, pp. 116-124), T2 (Equivalencia de construcción de figuras geométricas: doblado de papel y construcciones con regla y compás en AGD, pp. 125 y sgtes). El análisis del T2 pone de manifiesto una interesante cuestión: el vínculo posible entre lo concreto, manipulable empíricamente (doblado de papel) y lo abstracto (accesible axiomáticamente: las definiciones y propiedades de la Geometría Euclídea); esta relación concreto-abstracto se ve potenciada por la utilización del SGD.

Antes de entrar en especificidades del Taller 3 (T3), la autora examina el esquema siguiente: construir → explorar → conjeturar → validar (el cual es semejante al propuesto por Piaget para la adquisición de conceptos: manipular → verbalizar → representar → simbolizar), teniendo presentes los Estándares del NCTM, en particular los referidos a los contenidos geométricos; dicho esquema fue tenido en cuenta por autores como Claudi Alsina

(1999); Patricia Perry y sus colaboradores (2006); y Homero Flores (2007) y resulta confirmado por este trabajo de Martha Iglesias; con este capítulo da respuesta a la primera pregunta de la investigación.

En el Capítulo V de la Tesis Doctoral se da respuesta a las preguntas 2, 3 y 4 y por ende lograr los correspondientes objetivos relacionados con: *uso del SGD*; *justificaciones* a la solución dada a los problemas; y competencias matemáticas puestas en práctica para resolver los problemas. En relación con lo primero, esboza las facilidades ofrecidas por el Cabri-II, cuya aplicación será evidenciada a partir del examen del corpus informativo generado por el uso de este SGD; en cuanto a las justificaciones, se apoya en los trabajos de Homero Flores (2007) (esquemas de argumentación; Cuadro 39, p. 153) y de Patricia Perry y sus colaboradores (2006) (producciones derivadas de la actividad demostrativas: explicaciones, prueba y presentación sistemática; p. 152).

Cuadro 39
Esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007)

Denominación	Descripción
Autoritarios	Sus argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna autoridad; en este caso, puede ser un compañero, un libro de texto o el facilitador del curso.
Simbólicos	En los que el profesor en formación utiliza un lenguaje matemático y símbolos de manera superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.
Fácticos	En los que el profesor en formación hace un recuento de lo que hizo o repite hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo, se limita a exponer una serie de pasos como si fueran un algoritmo.
Empíricos	En los que el profesor en formación se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar un argumento.
Analíticos	En los que el profesor en formación sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida

La elaboración de este Capítulo ha debido implicar una labor de *arqueología cognitiva profunda*, puesto que, a partir de los vestigios dejados por la actividad de los sujetos participantes en el estudio, iluminados por los referentes teóricos asumidos, pudo llegarse a explicitar las competencias matemáticas puestas en práctica (Cuadros 89 y 90, p. 293, 295) y el nivel de razonamiento geométrico alcanzado (pp. 294-295) por competencias (p. 298).

En el Capítulo VI se responde a la quinta de las interrogantes de investigación y por ende, se satisface el quinto objetivo específico del estudio, relativo a las Competencias Didácticas de los EPPM sujetos participantes en esta investigación; como estrategia de análisis

se adoptó una integración de los planteamientos que, en relación con las competencias profesionales del profesor de matemática, han sido hechas por educadores matemáticos relevantes y por organizaciones que en el ámbito internacional, se ocupan de este asunto.

Es así como Martha Iglesias integra:

- Conocimientos y Destrezas del Profesor de Matemática (Azcárate, 1998) con Categorías del Conocimiento Base para la Enseñanza (Shulman, 2005)
- Competencias Específicas del ámbito educativo con dominio del conocimiento profesional docente (Proyecto Tuning-AL; Beneitone, Esquetini, González, Marty, Siufi & Wagenaar, 2007)
- Pautas para analizar conocimientos didáctico-matemáticos con diseño de unidades didácticas (Godino, 2009)
- Competencias matemáticas y Didácticas (Niss y Højgaard, 2011)

Por tanto, este análisis se sustenta sobre un triángulo cuyos vértices son la Matemática a enseñar, las Habilidades Didáctico-Matemáticas, y Competencias Didáctico-Matemáticas.

De la Matemática a ser enseñada se requiere una terna integrada por Dominio del Contenido matemático propiamente dicho, el dominio de los aspectos didácticos asociados con dicho contenido, conocimientos relativos a cómo los estudiantes aprenden Matemática y, conocimientos de acciones estratégicas que puedan ser puestas en juego en la enseñanza para hacer posible dicho aprendizaje; esto se vincula con la proposición de Schulman. Las Habilidades Didáctico-Matemáticas se refieren a consideraciones relativas al dominio que, desde una perspectiva didáctica, los Profesores de Matemática deben tener en torno a las entidades (procesos o productos) que se ponen en juego durante una situación de enseñanza aprendizaje matemático, como por ejemplo, las condiciones de existencia y otras cualidades de los objetos matemáticos, los modos de legitimación de las aserciones matemáticas, la relacionabilidad de los objetos matemáticos con otras áreas disciplinarias, los requerimientos de procesos tales como resolución de problemas, desarrollo de demostraciones, medidos de comunicación matemática, modos de representación de sus objetos, etc.

Las Competencias Didáctico-Matemáticas remiten a los que pudieran ser concebidos como Macro Procesos propios de la dinámica misma de la Matemática como disciplina, asociados con procesos de índole cognitiva que son activados cuando se realiza una tarea matemática; aquí también se incluyen los que tienen que ver con la gestión de los

compromisos habituales de todo profesor como planificador, desarrollador, ejecutor, de la Evaluación.

Para la develación de las competencias didácticas, los sujetos fueron requeridos por una tarea que será cotidiana en su desempeño habitual como docente en ejercicio: “diseñar una unidad didáctica con contenido geométrico” para lo cual asumieron como referente el “Mapa de Enseñanza Aprendizaje de un Tema Matemático” (Mauricio Orellana) y las tres dimensiones del Análisis Didáctico: contenido (tema); cognitivo (niveles de Van Hiele), y de instrucción (diseño de tareas propiciatorias de aprendizajes de la Matemática).

Cabe señalar que esto no se limitó a ser una tarea dentro de una asignatura, sino que muchos de los estudiantes decidieron poner en práctica la propuesta didáctica diseñada para lo cual aprovecharon el espacio institucional que ofrece a Fase de Ejecución de Proyectos Educativos, lo cual hicieron adoptando una perspectiva investigativa; así que aunque no se lo explicita aquí, lo que se hizo fue poner en práctica la estrategia de Aprendizaje Basado en la Investigación.

Entre los logros de esta Tesis Doctoral se pueden destacar:

1. Establecimiento de relaciones entre los dominios de los conocimientos matemáticos para la enseñanza y las competencias didáctico matemáticas con la definición de indicadores que facilitan el análisis de estas competencias en EPPM.

En esta investigación se ha logrado establecer relaciones entre los dominios de los conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill et al., 2008) y las competencias didáctico – matemáticas (Azcárate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011) y, además, definir indicadores tanto para las competencias matemáticas como para las didácticas (ver Cuadros 18 y 91). Estos indicadores han guardado relación con los contenidos y objetivos de aprendizaje previstos para cada uno de los tres talleres que conformaron el curso de RPG_AC y que fueron descritos en el Capítulo IV; asimismo, tales indicadores han facilitado el análisis de las competencias matemáticas y didácticas de los profesores en formación cuando ejecutaron ciertas tareas didáctico – matemáticas.

2. Integración de las competencias matemáticas y didácticas en los futuros profesores de Matemática; esto podría coadyuvar al acortamiento de la

distancia entre matemáticos y profesores de Matemática (Hexágono Didáctico Matemático, p. 340)

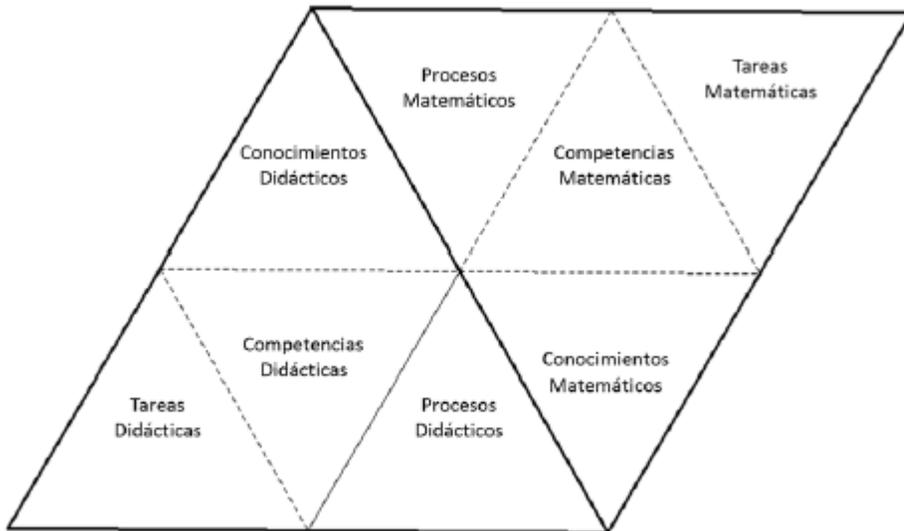


Gráfico 75. Componentes de las competencias profesionales de un profesor de Matemática.

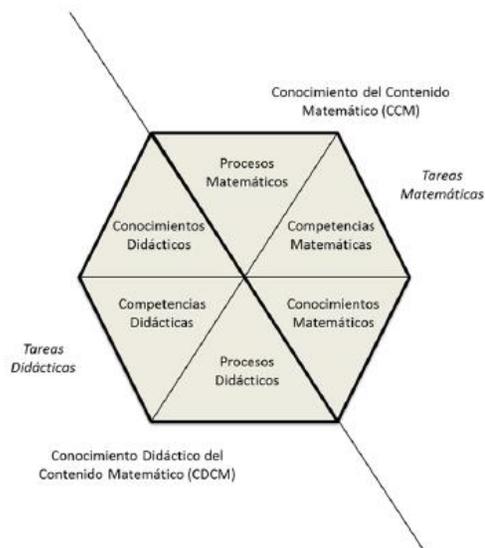


Gráfico 76. Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 1).

Caracterización final:

1. Este es un trabajo que logra; confirmar, validar, ensayar, ratificar, reiterar resultados de investigación; con ello se podría atender a una petición justa que es que la investigación en Educación Matemática llegue al aula de clases.
2. Confiere protagonismo activo a los sujetos participantes de la investigación.
3. Pone en práctica propuestas propias.
4. Sienta bases para la configuración de estrategias de formación inicial de profesores.
5. Otorga rango al contenido matemático.
6. Integra docencia con investigación.

Referencias

- Alsina, C. (1999). Intuición y Deducción en Geometría. En E. Veloso, H. Fonseca, J.P. da Ponte y P. Abrantes (Eds.). *Ensino da Geometria no virar do milenio* (pp. 33 - 41). Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Azcárate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: Análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 129 – 142
- Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows Mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29 (3), 14 - 46. 348
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389 - 407.
- Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G., & Wagenaar, R. (2007) (Eds.). *Informe Final – Proyecto Tuning – América Latina 2004 – 2007*. Bilbao, España: Universidad de Deusto.
- Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la Geometría. En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 93 - 124). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.
- Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración: Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y en la Educación Matemática [Documento en línea]. *La lettre de la Preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 99 07/08. Disponible en:
- Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18 (1), 32 – 42. Traducción del original inglés: Pablo Manzano Bernárdez.

- Cardeñoso, J. M. y Azcárate, M. P. (2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional (AIP). En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 181 - 226). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.
- Fiorentini, D. (Org.). (2003). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas, SP: Mercado de Letras.
- Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (1), 63-98.
- García, M. y Sánchez, V. (2002). Una Propuesta de Formación de Maestros desde la Educación Matemática: Adoptando una perspectiva situada. En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 61-91). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.
- Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 – 31.
- Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez-Chacón, I.M. (2005). Tendencias y retos en formación de Profesores en Matemáticas. Vivir el presente y crear futuro en la cooperación Europa – Latinoamérica. En I.M. Gómez-Chacón y E. Planchart (eds.), *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica* (pp. 15 – 31). Bilbao: Universidad de Deusto.
- González, A. (2015). *Procesos del Pensamiento Algebraico en Entornos de Aprendizaje Mediadados Tecnológicamente*. Tesis Doctoral, Universidad Central de Venezuela.
- González, F. & Villegas, M. (2009, jan./abr.). Fundamentos Epistemológicos en la Construcción de una Metodica de Investigación. *Atos de Pesquisa em Educação*. ISSN 1809– 0354 v. 4, nº 1, p. 89-121.
- González, F. (2000). Agenda latinoamericana de investigación en educación matemática para el siglo XXI. *Educación Matemática*, 12 (1), pp. 107-128. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., de C.V.
- González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de matemática. *SAPIENS* [online]. vol.11, n.1, pp. 47-59. ISSN 1317-5815.
- González, F. (2014, septiembre). Notas Históricas acerca del Doctorado en Educación Matemática de Venezuela. *Revista UNION, Número 39*, pp 171-184
- Graterol, J. S. (2016). *Dos Educadores Matemáticos y una Didáctica*. Tesis Doctoral del Programa de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” Maracay
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55 – 70.
- Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 127 – 150.

- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 5 – 23.
- Hanna, G. y De Villiers, M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En G. Hanna y M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 1 – 10). Dordrecht: Springer.
- <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeIT.html>
[Consulta: 2012, Mayo 4]
- Iglesias, M. (2008). *Proyecto Docente en el área de Geometría y su Didáctica*. Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230- 247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student's interpretations when using Dynamic Geometry Software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 55 – 85.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 151 – 161.
- Mammana, C. y Villani, V. (1994). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Discussion Document for an ICMI Study. *L' Enseignement Mathématique*, 40, 345 – 357.
- Mariotti, M.A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 25 - 53.
- Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a Dynamic Computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 87 – 125.
- Martínez Padrón, O. (2003). *El dominio afectivo en educación matemática: aspectos teórico-referenciales a la luz de los encuentros edumáticos*. Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro, Turmero.
- Martínez Padrón, O. (2008). *Creencias y Concepciones en Encuentros Edumáticos*. Tesis Doctoral no publicada. Instituto Pedagógico de Caracas.
- Mulino Betancourt, F. (1974). *Historical development of mathematics education in Venezuela during the eighteenth and nineteenth centuries*. Tesis doctoral (no publicada), Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University.
- Niss, M. y Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. (English edition). Roskilde University, Department of Science, Systems and Models, IMFUFA.
- Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática*, 11(2), 21- 42.

- Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Granada: Comares.
- Ortiz, J., Rico, L., & Castro, E. (2007). Organizadores del Currículo como Plataforma para el Conocimiento Didáctico. Una Experiencia con Futuros Profesores de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 21–32.
- Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas, en Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 39-59. Barcelona: Horsori
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1 - 22). Granada: Comares.
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.
- Sagástegui, D. (2004). Una apuesta por la cultura: el aprendizaje situado. *Sinéctica*, 24, 30 – 39.
- Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2), 1-30. (Trabajo original publicado en inglés en 1987).

Autor:

Fredy González. PhD con énfasis en Matemática Educativa (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1997); Master en Matemática. Profesor de Matemática. Se ha desempeñado durante más de dos décadas a la formación de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL Maracay, Venezuela), siendo coordinador fundador del Doctorado en Educación Matemática 2008-2013 y Subdirector de Investigación y Postgrado (1999-2003). Coordinador del componente de investigación del Centro de Estudios Educativos del Instituto Tecnológico de Santo Domingo (CEED-INTEC, 2015-2016). Desarrolla investigación en Historia de la Educación Matemática. Ha publicado más de medio centenar de artículos en revistas indexadas, siendo profesor invitado de numerosas universidades iberoamericanas. E mail. fredygonzalez@hotmail.com