

**RAZONAMIENTO *UP and DOWN*:  
¿RECONOCEN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO  
EVIDENCIAS DE SU DESARROLLO?<sup>1</sup>**

*Àngela Buforn*

[angela.buforn@ua.es](mailto:angela.buforn@ua.es)

*Ceneida Fernández*

[ceneida.fernandez@ua.es](mailto:ceneida.fernandez@ua.es)

*Salvador Llinares*

[sllinares@ua.es](mailto:sllinares@ua.es)

*Universidad de Alicante, España*

**Recibido:** 16/11/2017 **Aceptado:** 26/11/2017

**Resumen**

La coordinación de la idea de fracción como unidad múltiple con la idea de fracción unitaria como unidad iterativa se denomina razonamiento *Up and Down*. Este estudio examina cómo estudiantes para maestro reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento *Up and Down* en las respuestas de estudiantes a un problema de representar fracciones y las actividades que proponen para su desarrollo. Los participantes del estudio fueron 91 estudiantes para maestro que analizaron tres respuestas de estudiantes a un problema que implicaba un razonamiento *Up and Down* para proponer nuevas actividades para apoyar o consolidar este razonamiento. Los resultados subrayan la dificultad de los estudiantes para maestro en identificar y usar los elementos matemáticos vinculados al razonamiento *Up and Down* para generar un discurso articulado sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Además indican que no existe una relación clara entre la manera en la que los estudiantes reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento *Up and Down* en los estudiantes y las actividades que proponen para apoyarlo.

**Palabras clave:** mirada profesional, comprensión de los estudiantes, esquema fraccionario, razonamiento up and down.

**REASONING *UP and DOWN*: DO PRE-SERVICE TEACHERS RECOGNIZE  
EVIDENCE OF ITS DEVELOPMENT?**

**Abstract**

The coordination of the idea of fraction as a multiple unit with the idea of unit fraction as an iterative unit is called reasoning up and down. This study examines how pre-service primary school teachers recognize evidence of students' reasoning up and down in an activity of representing fractions and the activities pre-service teachers propose for its development. The participants of the study were 91 pre-service teachers who analyzed three students' answers to a problem involving reasoning up and down and propose activities to support or consolidate this reasoning in students. Results underline pre-service teachers' difficulties in identifying and using the mathematical elements linked to the reasoning up and down to generate an articulated discourse of students' mathematical thinking. Furthermore, results indicate that there is not a clear relationship between the way pre-service teachers recognize evidence of

---

<sup>1</sup> **Reconocimientos.** Esta investigación ha recibido el apoyo en parte del Proyecto I+D+i EDU2014-54526-R del MINECO, España, y en parte de la Ayuda para Contratos Predoctorales para la Formación de Doctores BES-2015-074424.

reasoning up and down in students and the activities proposed for its development.

**Keywords:** professional noticing, students' mathematical thinking, fractional scheme, reasoning up and down.

### **Introducción**

El concepto de fracción es un objetivo relevante en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria. Aspectos importantes de la comprensión de la relación parte-todo del concepto de fracción son la consideración de las fracciones como unidades múltiples y la idea de fracción unitaria como una unidad iterativa (Hackenberg, 2007; Kieren, 1993; Norton y Wilkins, 2009; Steffe y Olive, 2010). La coordinación de la idea de fracción como unidad múltiple ( $a/b$  como  $a$  veces  $1/b$ ) con el uso de la fracción unitaria ( $1/n$ ) como unidad iterativa para representar otra fracción se denomina *razonamiento up and down* (Lamon, 2007).

En este sentido, el conocimiento del maestro de los elementos matemáticos vinculados al razonamiento up and down (las ideas de fracción como unidad múltiple y la fracción unitaria como unidad iterativa) puede ayudarle a interpretar la comprensión matemática de los estudiantes y a decidir cómo actuar para que el estudiante progrese conceptualmente (competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes). Sin embargo, en relación al significado parte-todo del concepto de fracción tenemos poca información sobre cómo los maestros consideran los elementos matemáticos de los problemas, cómo interpretan el pensamiento matemático de sus estudiantes y qué actividades proponen para ayudar a los estudiantes a progresar conceptualmente.

Nuestro estudio se enmarca en esta línea de investigación y, en particular, examina cómo estudiantes para maestro consideran los elementos matemáticos implicados en una actividad que implica un razonamiento up and down, cómo reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de estudiantes y las actividades que proponen para ayudar a los estudiantes a progresar conceptualmente.

### **Marco Teórico**

#### **Conocimiento de matemáticas y mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes**

Investigaciones recientes indican que la competencia docente mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en la capacidad de los profesores de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos

para poder tomar decisiones sobre la enseñanza debidamente fundamentadas (Mason, 2002). Jacobs, Lamb y Philipp (2010) particularizan esta competencia al caso del pensamiento matemático de los estudiantes considerando que está formada por tres destrezas interrelacionadas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes; interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir qué actividades proponer teniendo en cuenta la información generada.

Desde esta perspectiva, los estudiantes para maestro deben aprender a reconocer evidencias de cómo los estudiantes de educación primaria resuelven los problemas para inferir información sobre cómo están comprendiendo y poder proporcionar actividades para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión o a consolidarla. Estudios previos han mostrado que la identificación de los elementos matemáticos relevantes en un problema permite al estudiante para maestro estar en mejores condiciones para reconocer la comprensión de los estudiantes (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Callejo y Zapatera, 2016; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015; Son, 2013). Este hecho subraya la relación entre conocimiento de matemáticas y conocimiento de las matemáticas y los estudiantes (Bartell et al., 2013; Spitzer, Phelps, Beyers, Johnson y Sieminski, 2011) como componentes del conocimiento de matemáticas para enseñar. Es decir, los estudiantes para maestro deben aprender a identificar los elementos matemáticos relevantes que intervienen en el problema para poder reconocer que su comprensión constituye un avance conceptual de los estudiantes (Key Developmental Understanding – KDU, Simon, 2006).

Un KDU es la comprensión de un elemento matemático que implica un avance conceptual por parte de los estudiantes, es decir, un cambio en la capacidad de los estudiantes para pensar y/o percibir determinadas relaciones matemáticas, por lo que se convierte en un elemento clave para el desarrollo de un concepto (Simon, 2006). Por tanto, un objetivo del proceso de llegar a ser maestro es aprender a identificar los elementos matemáticos en los problemas cuya comprensión constituye un avance conceptual en los estudiantes. En el caso de la comprensión de la relación parte-todo del concepto de fracción, la coordinación de la idea de fracción como unidad múltiple con el uso la fracción unitaria como unidad iterativa puede considerarse un avance conceptual en la comprensión de las fracciones (KDU).

### Razonamiento up and down como un KDU de la relación parte-todo del concepto de fracción

Uno de los procesos clave en la comprensión de la relación parte-todo del concepto de fracción es la coordinación de las fracciones unitarias como unidades iterativas con la idea de la fracción como una unidad múltiple (Buforn y Fernández, 2014; Kieren, 1993; Steffe y Olive, 2010). La coordinación de estas dos ideas es clave para la constitución del significado de fracción y, por tanto, se puede considerar un KDU. Dicha coordinación se manifiesta en las actividades que implican un razonamiento up and down, es decir, actividades que requieren identificar el todo dada una fracción, y a partir del todo representar otra fracción (Behr y Post, 1992). Por ejemplo, la siguiente actividad (Lamon, 2005, p.73):

**Figura 1.** Problema cuya resolución implica la coordinación de las ideas de fracción como una unidad múltiple ( $3 + 2/3 = 11/3 = 11$  veces  $1/3$ ) y fracción unitaria como unidad iterativa ( $4$  veces  $1/3 = 4/3$ )

*La parte sombreada de esta figura representa  $3\frac{2}{3}$ .*

*¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?*



The figure consists of three identical rectangles arranged horizontally. Each rectangle is divided into four smaller rectangles by a horizontal line and a vertical line. The first two rectangles are completely shaded with diagonal lines. The third rectangle has three of its four smaller rectangles shaded, while the bottom-right one is white.

Una manera de resolver esta actividad implica desempaquetar la fracción considerada como una unidad múltiple, es decir, ver  $3\frac{2}{3}$  como  $11/3 = 11$  veces  $1/3$ . La identificación de la fracción unitaria ( $1/3$ ) permite usarla como una unidad iterativa (ya que el rectángulo pequeño es una representación de  $1/3$ ), para determinar el valor de los 4 rectángulos pequeños (4 rectángulos pequeños serían 4 veces  $1/3$ , es decir,  $4/3$  o  $1\frac{1}{3}$ ).

Nuestro estudio se apoya en la hipótesis de que la identificación de la coordinación de una fracción como unidad múltiple con el proceso de usar la fracción unitaria como unidad iterativa como un KDU por parte de los estudiantes para maestro, les ayudará a centrar su mirada sobre las características de la comprensión de los estudiantes y sobre las propuestas de actividades que puedan apoyar el progreso de sus estudiantes.

Nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo los estudiantes para maestro reconocen evidencias del razonamiento up and down y lo consideran un avance conceptual (KDU) en las respuestas de los estudiantes?
- ¿En qué medida las actividades propuestas por los estudiantes para maestro apoyan el avance conceptual de los estudiantes?

## **Método**

### **Participantes y contexto**

Los participantes del estudio fueron 91 estudiantes para maestro de Educación Primaria (EPM) matriculados en un programa de formación inicial en la Universidad de Alicante (España). Dicho programa tiene una duración de cuatro cursos (ocho semestres) y ofrece formación sobre la enseñanza de las matemáticas, ciencias experimentales y sociales y lengua (español, inglés y la lengua vernácula), formación básica en pedagogía y psicología y la realización de prácticas de enseñanza en los centros de educación primaria. Previamente a la recogida de datos, estos estudiantes para maestro habían cursado una asignatura centrada en contenido aritmético (en el primer curso) y otra centrada en contenido geométrico (en el segundo curso).

En el momento de la recogida de datos, los estudiantes para maestro estaban cursando una asignatura sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria en el tercer curso. Esta asignatura tiene como objetivo que los estudiantes para maestro aprendan a reconocer características de la comprensión de los estudiantes de educación primaria de diferentes conceptos matemáticos para proponer actividades que apoyen su progresión conceptual, es decir, tiene como objetivo desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Después de haber estudiado el bloque sobre las características del aprendizaje de la estructura multiplicativa (fracción, razón y proporción), los estudiantes para maestro respondieron a dos tareas. En la primera tarea, resolvieron diferentes problemas relativos a las fracciones, razón y proporción, y en la segunda se les pedía interpretar respuestas de estudiantes a estos mismos problemas para proponer una actividad que ayudara a estos estudiantes a progresar en su comprensión. En este informe nos centramos en el problema cuya resolución implicaba la coordinación de las ideas

de fracción como una unidad múltiple y la fracción unitaria como unidad iterativa (que hemos denominado razonamiento up and down) (Figura 1).

### La tarea

En primer lugar, los estudiantes para maestro resolvieron el problema de la Figura 1. Posteriormente, resolvieron la tarea de interpretar las respuestas de estudiantes a este problema. Esta tarea estaba formada por el problema, respuestas de estudiantes que evidenciaban diferentes características de desarrollo del razonamiento up and down (Buforn y Fernández, 2014; Hackenberg, 2007; Steffe y Olive, 2010) y cuatro cuestiones (Figura 2).

**Figura 2.** Problema, respuestas de los estudiantes evidenciando diferentes características del razonamiento up and down y cuestiones que debían contestar los estudiantes para maestro

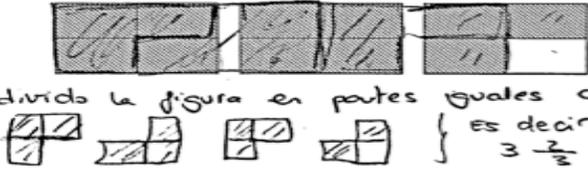
La parte sombreada de esta figura representa  $3 + \frac{2}{3}$ . ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?

**Respuesta 1**



Representa  $\frac{1}{3}$  del total. Hay 3 rectángulos de 4 rectángulo pequeños. por lo tanto cada figura de 4 rectángulos es  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{2}{3}$

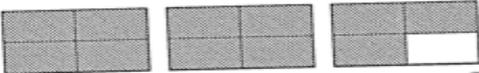
**Respuesta 2**



Si divido la figura en partes iguales obtengo a

Es decir  $3 \frac{2}{3}$  } 2 figuras sombreadas y  $\frac{2}{3}$

**Respuesta 3**



Según la porción pintada podemos deducir que 3 rectángulos pequeños forman una unidad, por lo que hay 3 unidades y  $\frac{2}{3}$  que son 2 rectángulos más. Entonces, 4 rectángulos pequeños serán  $1 + \frac{1}{3}$

a) ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver este problema? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas de los estudiantes? Justifica tu respuesta.

c) Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.

d) Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.

Las tres respuestas muestran diferentes características del razonamiento up and down (Buforn y Fernández, 2014): en la respuesta 1, el estudiante no identifica el todo, por lo que no es capaz de ver la fracción dada como una unidad múltiple a partir de la representación de

$3+2/3$ , y confunde el todo con toda la figura (los tres rectángulos grandes). En la respuesta 2, el estudiante identifica la fracción  $1/3$  como el rectángulo pequeño en la figura lo que le permite reconstruir el todo (iterando 3 veces  $1/3$ ) e identificar que 3 rectángulos pequeños son el todo. Sin embargo, no identifica la fracción impropia que forman los 4 rectángulos pequeños. Finalmente, en la respuesta 3, el estudiante reconstruye el todo y representa la fracción impropia al coordinar las ideas de fracción como unidad múltiple y usar la fracción unitaria como unidad iterativa. El estudiante identifica que 3 rectángulos pequeños son el todo al reconocer la fracción unitaria  $1/3$  e iterarla 3 veces para representar el todo. Después, identifica los 4 rectángulos pequeños como la fracción  $4/3$  ( $1+1/3$ ; 4 veces  $1/3$ ). La respuesta 3 es una evidencia de que el estudiante coordina las dos ideas que implica el razonamiento up and down (la fracción como una unidad múltiple y usar la fracción unitaria como una unidad iterativa).

Respecto a las cuestiones, las dos primeras están centradas en que los estudiantes para maestro identifiquen los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema (cuestión a) y reconozcan diferentes características del desarrollo del razonamiento up and down (cuestión b). En las otras dos cuestiones se pide proponer actividades (o modificar el problema presentado) para ayudar al estudiante a avanzar en su comprensión (cuestiones c y d).

### **Análisis de los datos**

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los 91 estudiantes para maestro al problema de la Figura 1 y las respuestas a las cuatro cuestiones planteadas en la tarea 2 (Figura 2). El proceso de análisis siguió dos fases. En la primera, nos centramos en cómo los estudiantes para maestro resuelven el problema. En la segunda fase, cómo los estudiantes para maestro reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes y qué actividades proponen.

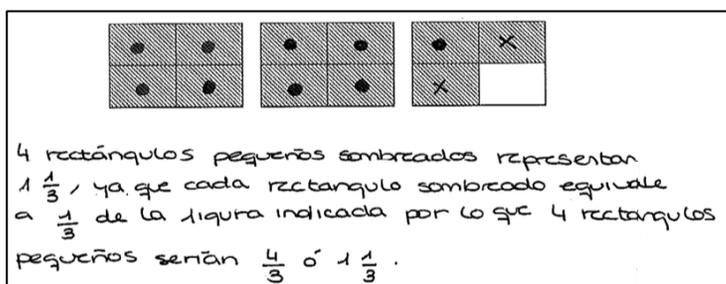
#### *Cómo los estudiantes para maestro resuelven el problema*

Categorizamos las respuestas de los estudiantes para maestro considerando si la resolución del problema era correcta o incorrecta (codificando con 1 si era correcta y 0 si era incorrecta o la habían dejando en blanco). En relación con las estrategias, y teniendo en cuenta las características del desarrollo del razonamiento up and down (Buforn y Fernández, 2014),

nos fijamos en si los estudiantes para maestro coordinaban las dos ideas implicadas en este razonamiento. De esta manera definimos tres niveles de desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes para maestro.

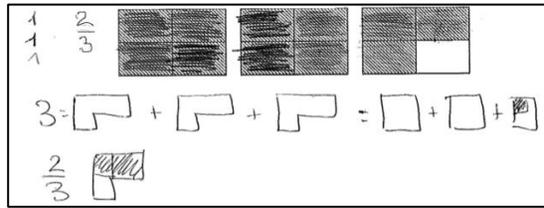
Si el estudiante para maestro coordina las dos ideas resolviendo adecuadamente el problema, se clasificaba como Nivel 2 de desarrollo (coordinación de la fracción como una unidad múltiple con la fracción unitaria como unidad iterativa). Por ejemplo, en la respuesta de la Figura 3 el estudiante para maestro reconoce la representación dada de  $3+2/3$  como  $11/3$  (11 veces  $1/3$ ) e identifica la fracción unitaria  $1/3$  como un rectángulo pequeño y la itera para indicar que 4 rectángulos pequeños son  $4/3$  o  $1+1/3$ .

**Figura 3.** Respuesta correcta, reconstruye el todo a partir de la fracción unitaria e identifica la fracción representada por los cuatro rectángulos (Nivel 2)



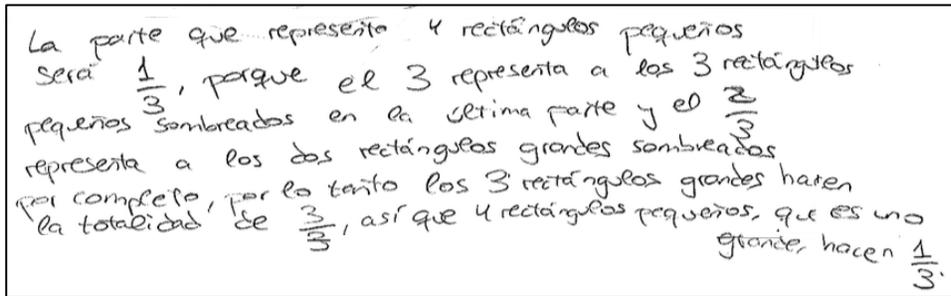
Se consideraba Nivel 1 cuando el estudiante para maestro es capaz de reconstruir el todo pero no de representar la fracción pedida (Figura 4). Es decir, tenemos evidencias de que considera la representación de la fracción dada como 11 veces  $1/3$ , pero no es capaz de iterar  $1/3$  para superar el todo (y por tanto no es capaz de representar fracciones impropias).

**Figura 4.** Respuesta de un EPM asignada como Nivel 1 de desarrollo del razonamiento up and down



Finalmente, se consideraba Nivel 0 de desarrollo del razonamiento up and down cuando el estudiante para maestro no es capaz de reconocer la fracción como una unidad múltiple, ni de usar la fracción unitaria como unidad iterativa. Por ejemplo, confundiendo el todo con los 3 rectángulos (Figura 5).

**Figura 5.** Respuesta de un EPM asignada como nivel 0 de desarrollo del razonamiento up and down



*Cómo los estudiantes para maestro reconocen el desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes y qué actividades proponen*

En esta fase se realizó un análisis inductivo generando categorías sobre cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos implicados en el problema y reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes y qué actividades proponen para el progreso conceptual del estudiante. Para ello, un grupo de tres investigadores analizaron primero una pequeña muestra de los datos y discutieron las categorías identificadas. Una vez que los investigadores llegaron a un acuerdo, se añadieron nuevos datos con el objetivo de revisar el sistema de categorías creado inicialmente lo que permitió generar las categorías finales.

Respecto a los elementos matemáticos del problema identificados por los estudiantes para maestro se generaron dos categorías: Identifican (I) y No Identifican (NI). Fueron

codificadas como *Identifican* (I) cuando los estudiantes para maestro indican las dos ideas implicadas en el razonamiento up and down. Por ejemplo, en la siguiente respuesta “[es necesario] identificar el todo y [usar] la fracción unitaria para poder representar la fracción pedida” consideramos que identifica los elementos relevantes para representar la fracción impropia pedida. Por otra parte, cuando el estudiante para maestro realiza un discurso general usando términos procedentes de la teoría como por ejemplo “parte-todo” o “fracción” pero sin indicar de manera precisa los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema se agruparon en la categoría *No Identifican* (NI).

En relación a cómo los estudiantes para maestro reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento up and down se generaron tres categorías. En primer lugar, estudiantes para maestro que *Reconocían Evidencias* de las diferentes características del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes (RE). Por ejemplo, “*el estudiante 1 no ha tenido en cuenta los datos del problema y ha identificado el todo como los tres rectángulos, por tanto resuelve mal el problema; el estudiante 2, identifica correctamente la unidad pero no termina el problema al no representar la parte que se pide; el estudiante 3 resuelve bien el problema ya que identifica la unidad como 3 rectángulos pequeños y obtiene la fracción que representa los 4 rectángulos*”. En segundo lugar, los estudiantes para maestro que únicamente indicaban si la respuesta era correcta o no, sin reconocer características del desarrollo del razonamiento up and down, fueron agrupados en una categoría que denominamos *No Reconocen Evidencias* (NRE). Por ejemplo, “*el estudiante 1 no sabe resolver el problema; el estudiante 2 empieza bien pero no lo termina; y el estudiante 3 lo resuelve correctamente*”. Finalmente, las respuestas en blanco o que indicaban desconocimiento de lo que estaba implicado en las respuestas fueron agrupadas en una categoría que denominamos *No Comprenden* (NC). Por ejemplo “*la respuesta 1 es correcta porque 4 rectángulos son  $1/3$  de toda la figura; las otras dos respuestas son incorrectas porque no identifica bien el todo*”.

En relación a las decisiones de acción, las actividades propuestas y su justificación se agruparon en tres categorías. Una categoría son las actividades que reflejan un foco conceptual al estar relacionadas con la idea de unidad y/o fracción unitaria como una unidad iterativa. Estas actividades se dirigen a potenciar la comprensión de los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down (fracción unitaria, unidad iterativa, fracción como

unidad múltiple) (por ejemplo, “que la unidad fuera  $4/4$  en lugar de  $3/4$  de un rectángulo grande para facilitar la búsqueda de la unidad”, e “indicar la fracción unitaria para guiarles en la tarea”). Otra categoría son las actividades que no se centran en los elementos matemáticos específicos implicados en el razonamiento up and down, proporcionando una perspectiva más general. Por ejemplo, cuando solo se mencionan cambios en los modos de representación (“modificar la tarea a un contexto discreto” o “cambiar los rectángulos por otras formas geométricas”) o solo se menciona el uso de recursos. La última categoría generada son respuestas en blanco o sin sentido.

### Resultados

La sección de resultados se divide en tres partes: desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes para maestro; relación entre el conocimiento de los estudiantes para maestro del razonamiento up and down y cómo interpretan la comprensión de los estudiantes; y, finalmente, en qué medida los estudiantes para maestro proponen actividades considerando el desarrollo del razonamiento up and down como un avance conceptual (KDU) en la comprensión de las fracciones.

#### Desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes para maestro

La Tabla 1 muestra el nivel de desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes para maestro. Dieciocho de los 91 estudiantes para maestro resuelven el problema correctamente (reconstruyen el todo e identifican la fracción impropia pedida), coordinando la idea de la fracción como una unidad múltiple con el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa para representar la fracción impropia pedida. Estos estudiantes para maestro consideran  $3+2/3$  como una unidad múltiple  $3+2/3=11/3$  (11 veces  $1/3$ ), identifican la fracción unitaria  $1/3$  como un rectángulo pequeño, e iteran 4 veces  $1/3$  para conseguir identificar la fracción  $4/3$  como el rectángulo grande.

Por otra parte, tres estudiantes para maestro reconstruyen el todo pero no identifican la fracción impropia pedida, por lo que solo son capaces de ver la fracción dada ( $3+2/3$ ) como una unidad múltiple. Finalmente, 70 estudiantes para maestro no identifican el todo (12 consideran como todo los tres rectángulos sin tener en cuenta los datos proporcionados por el problema, 27 generan estrategias sin sentido y 31 dejan el problema en blanco).

**Tabla 1.** Niveles de desarrollo del razonamiento up and down.

		Total	%
<b>Resuelven correctamente el problema</b>	Nivel 2. Reconstruyen el todo e identifican la fracción impropia	18	20%
	Nivel 1. Reconstruyen el todo pero no identifican la fracción impropia pedida	3	
<b>Resuelven incorrectamente el problema</b>	Nivel 0. No identifican el todo (no consideran la fracción $3 + 2/3 = 11/3$ como una unidad múltiple), o proporcionan respuestas en blanco o sin sentido	70	80%
	<b>Total</b>	91	100%

**Relación entre el conocimiento de los estudiantes para maestro del razonamiento up and down y su interpretación de las respuestas de los estudiantes**

De los 91 estudiantes para maestro, 20 dejaron en blanco la cuestión relativa a reconocer evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes (cuestión b). De los 71 estudiantes para maestro restantes, la Tabla 2 muestra la relación entre los elementos matemáticos identificados en el problema por los estudiantes para maestro y cómo los usan para reconocer evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes.

**Tabla 2.** Relación entre los elementos matemáticos identificados del razonamiento up and down por los estudiantes para maestro y cómo los usan para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes

		Sobre las respuestas de los estudiantes			Total
		Reconocen evidencias (RE)	No reconocen evidencias (NRE)	No comprenden (NC)	
<b>Sobre los elementos matemáticos en el problema</b>	Identifica los elementos matemáticos del razonamiento up & down (I)	32	10	-	42
	No identifica los elementos matemáticos del razonamiento up & down (NI)	-	20	9	29
	<b>TOTAL</b>	32	30	9	71

De los 42 estudiantes para maestro que identifican los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down como relevantes en la resolución del problema (fracción unitaria como unidad iterativa y la fracción como una unidad múltiple y su coordinación en la reconstrucción del todo y la representación de una fracción impropia), solo 32 de ellos los usan para justificar sus evidencias sobre el desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes (I-RE). Una respuesta típica de este grupo de estudiantes para maestro es:

*“a) Conocimiento del todo y que el todo no tiene por qué ser la figura dibujada, sino una parte de ella. Conocimiento de fracciones mixtas y de la fracción unitaria.*

*b) Respuesta 1: Este alumno deduce bien cuál es su todo y para conocer el valor de los 4 cuadraditos, busca la fracción unitaria y completa la figura, que será un todo y  $1/3$  de otro todo.*

*Respuesta 2: Esta alumna lo hace de forma correcta [parte] porque halla el todo a partir de la fracción  $3+2/3$ . Pero no responde correctamente a la pregunta que se le ha planteado sobre qué son los cuatro cuadrados, se queda en conocer cuál es su todo.*

*Respuesta 3: No reconoce bien el todo, no entiende la fracción  $3+2/3$  y lo que hace es simplemente decir que cada figura (cuatro cuadrados) es un todo.”*

Este estudiante para maestro parece reconocer la idea de fracción como una unidad múltiple identificando la representación dada como 11 veces  $1/3$ , y el papel de la fracción unitaria como elementos relevantes en la resolución del problema. Además, reconoce diferencias en las respuestas de los estudiantes (diferentes características del razonamiento up and down) usando los elementos matemáticos para describir estas diferencias. Así, indica que el estudiante 1 reconstruye el todo identificando la fracción unitaria e iterándola para representar la fracción pedida; el estudiante 2 reconstruye el todo pero no representa la fracción pedida ya que no es capaz de usar la fracción unitaria para representar una fracción impropia; el estudiante 3 no comprende la fracción  $3+2/3$  (es decir, no entiende la fracción como una unidad múltiple) lo que le impide reconstruir el todo.

Por otro lado, 10 estudiantes para maestro de los 42 que identifican los elementos matemáticos implicados en la resolución del problema, solo proporcionan comentarios generales al describir las respuestas de los estudiantes basándose en la corrección de las

respuestas o proporcionando comentarios sin vincularlos a alguna evidencia (I-NRE). Por ejemplo:

*“a) Se usa el concepto de fracción como parte-todo en un contexto continuo. Hay que reconocer el todo y tener la capacidad de dividirlo en partes iguales.*

*b) En la respuesta 1 el alumno tiene asociados los conceptos nombrados anteriormente.*

*En la respuesta 2 no interpreta bien el dibujo.*

*En la respuesta 3 podemos comprobar que el alumno ha comprendido los conceptos.”*

Este tipo de respuesta indica que hay estudiantes para maestro que pueden mencionar los elementos matemáticos implicados en el problema (categoría I) pero algunos de ellos tienen dificultades en usarlos para reconocer características del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes.

Finalmente, 29 estudiantes para maestro no identifican los elementos matemáticos del problema y eso les lleva a proporcionar comentarios generales sin reconocer evidencias (NI-NRE), a dejarlo en blanco o a dar una interpretación errónea por el desconocimiento de lo que estaba implicado en las respuestas (NI-NC).

Estos datos parecen indicar que reconocer los elementos matemáticos relevantes en un problema (en nuestro caso, la coordinación de la fracción como una unidad múltiple con la idea de la fracción unitaria como unidad iterativa) es necesario para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes, ya que únicamente aquellos estudiantes para maestro que identificaron dichos elementos fueron capaces de reconocer características del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes (I-RE). Sin embargo, también hubo estudiantes para maestro (n=10) que aun habiendo identificado los elementos matemáticos implicados en el problema no fueron capaces de reconocer diferencias en las respuestas de los estudiantes (I-NRE). Este hecho parece indicar que la generación de un discurso para reconocer evidencias del desarrollo del razonamiento up and down no depende únicamente de reconocer las matemáticas implicadas en el problema. Estos datos sugieren que identificar los elementos matemáticos del problema no es una condición suficiente para generar un discurso en relación a las diferencias en el desarrollo del razonamiento up and down.

Para clarificar esta inferencia, analizamos la relación entre el éxito en la resolución del problema y el uso de los elementos matemáticos del problema para reconocer diferencias en el razonamiento up and down de los estudiantes (Tabla 3). Para analizar esta relación, consideramos los 71 estudiantes para maestro que resuelven el problema y que no dejan en blanco la cuestión relativa a interpretar las respuestas de los estudiantes. Así, de los 18 estudiantes para maestro que resuelven correctamente el problema (situados en el nivel 2 en el desarrollo del razonamiento up and down), tres de ellos no contestan la cuestión sobre la identificación de la comprensión (cuestión b) por lo que solo consideramos 15 estudiantes para maestro de este grupo. Por otra parte, de los 73 estudiantes para maestro que resuelven incorrectamente el problema, 17 de ellos dejan en blanco la cuestión sobre interpretar las respuestas, por lo que solo consideramos 56 estudiantes para maestro en este grupo.

**Tabla 3.** Relación entre el nivel de éxito en la resolución del problemas y el uso de los elementos del problema para interpretar las respuestas de los alumnos (n=71)

Resolución	Sobre el problema	Sobre las respuestas			Total
		Reconocen evidencias (RE)	No reconocen evidencias (NRE)	No comprenden (NC)	
<b>Correcto</b> (n=15)	Identifica los elementos matemáticos del razonamiento up and down (I)	8	3	-	11
	No identifica los elementos matemáticos del razonamiento up and down (NI)	-	4	-	4
<b>Incorrecto</b> (n=56)	Identifica los elementos matemáticos del razonamiento up and down (I)	24	7	-	31
	No identifica los elementos matemáticos del razonamiento up and down (NI)	-	16	9	25
<b>TOTAL</b>		32	30	9	71

De los 15 estudiantes para maestro que resuelven correctamente el problema, 11 identifican adecuadamente los elementos matemáticos implicados en el problema pero solo

ocho de ellos reconocen diferencias en las respuestas de los estudiantes. Por otro lado, hay 4 estudiantes para maestro que no identifican los elementos implicados y tampoco reconocen diferencias en las respuestas de los estudiantes.

De los 56 estudiantes para maestro que resuelven incorrectamente el problema, 31 son capaces de identificar los elementos matemáticos del problema y 25 no. De los 31 estudiantes para maestro que identifican los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down, 24 de ellos los usan para reconocer diferencias en las respuestas de los estudiantes, y 7 de ellos no reconocen. Una razón de este comportamiento podría ser el formato en el que se diseñó la tarea, ya que el hecho de presentar tres respuestas con diferentes características pudo ayudar a algunos estudiantes para maestro a reconocer diferencias entre ellas. Además, los datos de la Tabla 3 indican la dificultad que tienen los estudiantes para maestro para generar un discurso adecuado sobre los elementos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes y sobre las diferencias en las respuestas.

### **En qué medida las actividades propuestas por los estudiantes para maestro apoyan el avance conceptual de los estudiantes**

Los estudiantes para maestro proporcionan 94 actividades para el estudiante que no habían comprendido los elementos matemáticos del razonamiento up and down (algunos estudiantes para maestro proporcionan más de una actividad). De estas actividades, 41 tienen un foco conceptual vinculado al significado de la fracción como una unidad múltiple y a la fracción unitaria como una unidad iterativa, que son los elementos implicados en el razonamiento up and down, 13 son generales centradas en el cambio del modo de representación o en el uso de recursos, y 40 sin sentido o en blanco.

La Tabla 4 muestra la relación entre el tipo de actividad que proponen cuando un estudiante no comprende los elementos matemáticos implícitos en el problema y cómo reconocieron evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en las respuestas de los estudiantes.

**Tabla 4.** Características de las actividades que los EPM proponen para ayudar a los estudiantes que no comprendieron los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down (N=94)

Características	Sobre las respuestas de los estudiantes					
	I-RE	I-NRE	NI-NRE	NC	Blanco	Total
Foco conceptual: fracción como unidad múltiple y fracción unitaria como unidad iterativa	23	6	10	2	0	41
Propuestas generales sobre el uso de recursos o modos de representación	5	0	6	2	0	13
En blanco o sin sentido	5	4	6	5	20	40
<b>TOTAL</b>	<b>33</b>	<b>10</b>	<b>22</b>	<b>9</b>	<b>20</b>	<b>94</b>

De las 41 propuestas que tienen un foco conceptual, 23 son propuestas por estudiantes para maestro que identifican los elementos matemáticos en el problema y reconocen diferencias en las respuestas de los estudiantes. De las 53 propuestas generales o en blanco, diez de ellas proceden también de estudiantes para maestro que han identificado los elementos matemáticos del problema y reconocen evidencias del razonamiento up and down. Este dato apoya la inferencia de que generar un discurso adecuado en relación a los elementos matemáticos implicados en el problema y reconocer diferencias en las respuestas de los estudiantes no asegura el ser capaz de proponer actividades con apoyo conceptual (de los 33 estudiantes para maestro que muestran evidencias de este discurso adecuado, solo 23 realizaron propuestas de actividades conceptuales). Al mismo tiempo que, no generar un discurso usando los elementos matemáticos de manera adecuada para hablar sobre las matemáticas del problema y sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (grupos I-NRE, NI-NRE y NC; n=61) no impide que algunos estudiantes para maestro puedan proporcionar actividades con un foco conceptual (18 de estos 61 estudiantes para maestro).

La Tabla 5 muestra la relación entre las características de las actividades propuestas para consolidar el desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes que resolvían adecuadamente el problema. Para este caso, los estudiantes para maestro proporcionan 92 actividades, 25 de las cuales tienen un foco conceptual, 14 son propuestas generales sin considerar los elementos matemáticos y 53 son respuestas sin sentido o en blanco.

**Tabla 5.** Características de las actividades que los EPM proponen para consolidar el desarrollo del razonamiento up and down

Características	Sobre las respuestas de los estudiantes					
	I-RE	I-NRE	NI-NRE	NC	Blanco	Total
Foco conceptual: fracción como unidad múltiple y fracción unitaria como unidad iterativa	13	2	7	3	0	25
Propuestas generales sobre el uso de recursos o modos de representación	6	3	5	0	0	14
En blanco o sin sentido	13	6	8	6	20	53
<b>TOTAL</b>	<b>32</b>	<b>11</b>	<b>20</b>	<b>9</b>	<b>20</b>	<b>92</b>

Un dato relevante es el incremento de propuestas sin sentido o respuestas en blanco (n=53) y la disminución de propuestas con un foco conceptual en relación a las propuestas dirigidas a los estudiantes que no resolvían el problema (n=25). Estos datos parecen indicar que fue más difícil para los estudiantes para maestro proponer actividades para consolidar el desarrollo del razonamiento up and down que proponer actividades para apoyar su desarrollo.

### Discusión

El objetivo de esta investigación es examinar cómo estudiantes para maestro reconocen evidencias del razonamiento up and down como un avance conceptual (KDU) en la comprensión del concepto de fracción y qué actividades proponen para desarrollarlo. (Hackemberg, 2007; Lamon, 2005). Los resultados indican dos ideas relevantes. En primer lugar, subrayan la dificultad de los estudiantes para maestro en identificar y usar los elementos matemáticos vinculados al razonamiento up and down para generar un discurso articulado sobre las matemáticas del problema y sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. En segundo lugar, nuestros resultados indican que no existe una relación clara entre la manera en la que los estudiantes reconocen evidencias del desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes y las actividades que proponen para apoyarlo.

### **Sobre la relación entre el conocimiento de matemáticas y la capacidad para reconocer características del desarrollo del razonamiento up and down**

Nuestros resultados indican que los estudiantes para maestro tienen dificultades para resolver problemas que requieren reconstruir el todo a través de iterar la fracción unitaria y

representar una fracción impropia (razonamiento up and down) ya que 70 estudiantes para maestro no fueron capaces de identificar el todo (es decir, de considerar la fracción como una unidad múltiple). Estas dificultades influyeron a la hora de desarrollar un discurso rico en detalles cuando interpretaban las respuestas de los estudiantes a este tipo de problemas ya que únicamente la mitad de los estudiantes para maestro fueron capaces de identificar las ideas de fracción como una unidad múltiple y de fracción unitaria como unidad iterativa como elementos matemáticos relevantes del problema y reconocer diferencias en las respuestas de los estudiantes.

Sin embargo, de 70 estudiantes para maestro que habían resuelto incorrectamente la actividad, la mitad de ellos fueron capaces de generar un discurso adecuado sobre los elementos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes. Una razón de este comportamiento podría ser el formato en el que se diseñó la tarea, ya que el hecho de presentar tres respuestas con diferentes grados de desarrollo del razonamiento up and down parece que les pudo ayudar a reconocer algunas características del pensamiento matemático de los estudiantes.

Por otra parte, nuestros resultados muestran que identificar los elementos matemáticos en el problema no implica usarlos para reconocer diferencias en las respuestas de los estudiantes, sugiriendo que el conocimiento matemático no es suficiente para realizar un análisis adecuado del pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell et al., 2013). Estos resultados subrayan la compleja relación entre el discurso que el estudiante para maestro puede generar en relación a las matemáticas del problema y el discurso generado al describir las respuestas de los estudiantes. Además, todos los estudiantes para maestro que reconocieron evidencias del desarrollo del razonamiento up and down de los estudiantes generando un discurso articulado a través de los elementos matemáticos implícitos en dichas respuestas, habían identificado los elementos matemáticos en el problema. Este hecho permite asumir la existencia de relaciones de dependencia entre las destrezas de identificar e interpretar que articulan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Barhardt y van Es, 2015; Ivars, Fernández y Llinares, 2016).

## **Sobre la propuesta de actividades para apoyar el desarrollo del razonamiento up and down**

En relación a la habilidad de proponer actividades para apoyar y consolidar el desarrollo del razonamiento up and down teniendo en cuenta las diferentes respuestas de los estudiantes, nuestros resultados subrayan tres aspectos. En primer lugar, la dificultad que tuvieron los estudiantes para maestro en proponer actividades centradas en los elementos matemáticos relevantes cuando no habían sido capaces de identificarlos previamente. En segundo lugar, que el identificar los elementos matemáticos relevantes en el problema no es suficiente para proponer actividades con un foco conceptual. Finalmente, que los estudiantes para maestro tuvieron más dificultades en proponer actividades para consolidar el desarrollo que en proponer actividades para apoyar el progreso del razonamiento up and down.

Estos tres aspectos sugieren que los estudiantes para maestro deben llegar a conocer los elementos matemáticos relevantes en el problema desde la perspectiva del aprendizaje para reconocer que su comprensión implica un avance conceptual (KDU) cuando tienen que proponer actividades con un foco conceptual. En nuestra investigación, esto quiere decir que la generación de un discurso sobre el pensamiento matemático de los estudiantes usando los elementos matemáticos relevantes del problema, les ha ayudado a proponer actividades con un foco conceptual (tanto para desarrollar el razonamiento up and down como para consolidarlo).

Sin embargo, el generar un discurso articulado sobre el pensamiento matemático de los estudiantes no ha garantizado que se propusieran actividades con un foco conceptual. Esta característica también ha sido identificada en otras investigaciones centradas en examinar la relación entre las destrezas de identificar, interpretar y decidir cómo responder teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes que conceptualizan la competencia docente mirar profesionalmente (Barhardt y van Es, 2015; Callejo y Zapatera, 2016; Ivars et al., 2016; Son, 2013). Este hecho pone de manifiesto que las relaciones entre las destrezas de identificar e interpretar las respuestas de los estudiantes para proponer actividades de enseñanza apoyadas en las inferencias sobre la comprensión de los estudiantes son complejas mostrando el vínculo entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de las matemáticas de los estudiantes.

## Referencias

- Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship between pre-service science teachers' ability to attend, analyse and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83-93.
- Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 57-79.
- Behr, M. y Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.
- Bufo, A. y Fernández, C. (2014). La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias. *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 491-500). Baeza: CEAM.
- Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 309-333.
- Hackenberg, A. (2007). Units coordination and the construction of improper fraction. A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 27-47.
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La matematica e la sua didattica, Bologna*, 24(1-2), 79-96.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Kieren, C. (1993). Rational and fractional number. From quotient fields to recursive understanding. En T. Carpenter, E. Fennema, y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ
- Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.
- Norton, A. y Wilkins, J. L.M. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fractions schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, 150-161.

- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, 13(6), 1305-1329.
- Simon, M.A. (2006). Key Developmental Understandings in Mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371.
- Son, J.W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 49-70.
- Spitzer, S. M., Phelps, C. M., Beyers, J. E., Johnson, D. Y. y Sieminski, E. M. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 67-87.
- Steffe, L. P. y Olive, J., (2010). *Children's Fractional Knowledge*. London: Springer-Verlag.

***Autores:***

***Àngela Buforn***

[angela.buforn@ua.es](mailto:angela.buforn@ua.es)

***Ceneida Fernández***

[ceneida.fernandez@ua.es](mailto:ceneida.fernandez@ua.es)

***Salvador Llinares***

[sllinares@ua.es](mailto:sllinares@ua.es)

*Departamento de Innovación y Formación Didáctica*

*Universidad de Alicante, España*

*Telf: +34 965909700*

*Dirección Postal: C/ Aeroplano, s/n*

*03690, Sant Vicent del Raspeig*

*Alicante (España)*