LA ARITMÉTICA EN LAS ESCUELAS NORMALES ESPAÑOLAS EN LA SEGUNDA REPÚBLICA Y LOS AÑOS PREVIOS

Encarna Sánchez Jiménez
esanchez@um.es
Dolores Carrillo Gallego
carrillo@um.es
Universidad de Murcia, España

Recibido: 28/04/2018 **Aceptado:** 28/05/2018

Resumen

El primer tercio del siglo XX en España fue un periodo de intensas reformas educativas, en particular, en la formación de los maestros. Era un momento de propuestas innovadoras, que tuvieron como referencia los movimientos pedagógicos que se difundían entonces, sobre todo el de la Escuela Nueva. Estudiamos la innovación en el ámbito de la enseñanza de la aritmética en las instituciones de formación de maestros, a través del análisis de las obras de un profesor referente de la renovación de la enseñanza de la matemática en las Escuelas Normales. Pretendemos identificar qué aportaciones realizó a la formación matemático-didáctica de los maestros en este ámbito. En la investigación se combina el método histórico con herramientas de la teoría antropológica de lo didáctico para el análisis del contenido. El análisis praxeológico junto con el ecológico nos permite establecer qué características de las propuestas innovadoras son específicas de las matemáticas y qué reelaboración pudo haberse realizado. En definitiva, mostramos cómo las condiciones institucionales y el modelo pedagógico imperante en una época van a determinar propuestas y prácticas docentes las cuales, por otro lado, se ven fuertemente influidas por el modelo epistemológico de las matemáticas que guía dichas propuestas.

Palabras clave: Historia de la educación matemática, propuestas innovadoras, escuelas normales, enseñanza de la aritmética

ARITHMETIC IN SPANISH TEACHER TRAINING COLLEGES IN THE SECOND REPUBLIC AND PREVIOUS YEARS

Abstract

During the first third of the 20th Century in Spain there was a period of intense educational reforms, particularly in teacher training. It was a time of innovative proposals, which had as a reference point international education movements, especially the new school movement. We study innovation in the field of arithmetic teaching in teacher training institutions, through the analysis of the works of a teacher who is a reference in the renewal of mathematics teaching in teacher training colleges. We intend to identify what contributions he made to the mathematical-teaching training of teachers in this field. The research combines the historical method with tools of anthropological didactic theory for content analysis. The praxeological analysis together with the ecological analysis allows us to establish which characteristics of the innovative proposals are specific to mathematics and which rework could have been carried out. In short, we show how the institutional conditions and the pedagogical model prevailing at one time will determine teaching proposals and practices which, on the other hand, are strongly influenced by the epistemological model of mathematics that guides these proposals.

Keywords: History of Mathematics Education, innovative proposals, teacher training institutions, arithmetic instruction .

A ARITMÉTICA NAS ESCOLAS NORMAIS DE ESPANHA NA SEGUNDA REPÚBLICA E OS ANOS PREVIOS

Resumo

O primeiro terço do século XX na Espanha foi um período de intensas reformas educacionais, particularmente na formação de professores. Foi um momento de propostas inovadoras, que teve como referência os movimentos pedagógicos então difundidos, especialmente o da Nova Escola. Estudamos a inovação no campo do ensino de aritmética em instituições de formação de professores, através da análise dos trabalhos de um professor referentes à renovação do ensino de matemática nas Escolas Normais. Pretendemos identificar quais as contribuições realizadas para a formação matemática-didática de professores neste campo. Na pesquisa o método histórico é combinado com ferramentas da Teoria Antropológica da Didática para a análise do conteúdo. A análise praxeológica, juntamente com a análise ecológica, permite estabelecer quais características das propostas inovadoras são específicas da matemática e quais retrabalhos poderiam ter sido feitos. Em suma, mostramos como as condições institucionais e o modelo pedagógico vigente em uma época determinarão propostas e práticas de ensino que, por outro lado, são fortemente influenciadas pelo modelo epistemológico de matemática que orienta essas propostas.

Palavras-chave: História da educação matemática, propostas inovadoras, escolas normais, ensino de aritmética

Introducción

Este trabajo presenta las propuestas didácticas para la enseñanza de los conocimientos aritméticos a los futuros maestros en un momento clave de historia de la educación en España, cuando a nivel internacional triunfaba el movimiento de la Escuela Nueva y en nuestro país, además, había un anhelo de cambio, político y social pero también, y sobre todo, educativo. Nos referimos a los años previos a la Segunda República y al periodo republicano.

La investigación tiene una componente descriptiva que da cuenta de lo que se hacía o de lo que se planteaba por parte de quienes lideraban las reformas o representaban las propuestas más innovadoras. Junto a la explicación de las propuestas nos proponemos analizarlas, con las herramientas que la didáctica de la matemática proporciona, profundizar en ellas, compararlas, dilucidar qué elementos de las teorías didácticas que las motivaban se reflejan en ellas y cómo. E igualmente nos interesa la interpretación que de esas teorías hacían los profesores de matemáticas de las escuelas normales, y qué elementos del modelo epistemológico de las matemáticas que las sustentaba son visibles en sus propuestas didácticas.

Para nuestro estudio emplearemos las obras escritas por el profesor José María Eyaralar para sus alumnos normalistas, en particular las que escribió de aritmética, Nuevo Tratado de Aritmética y Aritmética Intuitiva. También otros trabajos del mismo autor que nos permiten conocer mejor su visión acerca de la enseñanza de esta materia, como el libro Metodología de la Matemática, escrito con posterioridad, en 1933, y los artículos que publicó, sobre todo en la Revista de Escuelas Normales, durante las décadas tercera y cuarta del pasado siglo. Estos artículos, a diferencia de los libros, no iban dirigidos a sus alumnos sino a profesores de matemáticas, de escuela normal sobre todo, y contienen comentarios y reflexiones en torno a la enseñanza de la matemática, algunos en particular de la aritmética, y ayudan a interpretar lo que aparece en sus libros. Elegimos a este autor porque es el único profesor normalista de ese periodo, entre los que lideraron la renovación pedagógica en la enseñanza de las matemáticas, que escribió libros de aritmética destinados específicamente a las escuelas normales.

Por los mismos años otros profesores normalistas -Francisco Romero, Felipe Sáiz Salvat, Margarita Comas, Aurelio R. Charentón, Manuel Xiberta, Daniel Carretero- escribieron libros de aritmética para la escuela primaria o para el bachillerato y también libros de metodología de la matemática. Estas obras permiten conocer las ideas que tenían sus autores sobre cómo debía enseñarse la aritmética, también a los maestros, pero no fueron escritas para las normales. Daniel Carretero sí escribió un libro de aritmética para estudiantes de escuela normal, pero no se observa en este libro la influencia de la Escuela Nueva, como sí se percibe claramente en los de Eyaralar; además, Carretero apenas publicó un par de artículos -solo uno de aritmética- y ninguna obra de metodología de la matemática, lo que hace difícil el análisis de la epistemología de este profesor y la detección de referencias del modelo pedagógico que sustenta su propuesta, en cualquier caso menos interesante que la de Eyaralar.

La importancia del análisis de manuales escolares para la investigación de la historia de las disciplinas o, más bien, la necesaria relación entre ambos ha sido señalada por numerosos historiadores de la educación. González y Sierra (2004) subrayaba el papel de los libros de texto para investigar la historia de la educación, a la vez que advertía de la escasez de estudios que contemplen esta fuente, en el caso de las matemáticas.

Viñao (2006) destaca el análisis de libros, junto al de los planes de estudio, publicaciones de los profesores, datos relativos al profesorado y todo aquello que permita conocer datos sobre la práctica escolar como elementos necesarios para el análisis de una disciplina. El profesor Valente afirma

> o problema de utilização de livros didáticos como fontes para história da educação, em particular, como fontes para história da educação matemática, pode ficar balizado pela

> busca inicial daquelas produções inovadoras que, de tempos em tempos, surgem como veículos de uma nova proposta para o ensino de matemática. Esses didáticos inovadores, como se disse, são fruto dos mais diversos determinantes históricos. No entanto, buscar num determinado período histórico, livros didáticos inovadores representa uma condição necessária para a escrita da trajetória histórica de um determinado saber. (Valente, 2007, p. 42)

Ambos profesores, desde la historia de la educación o desde la historia de la educación matemática, advierten de que el análisis de los libros no puede realizarse con independencia del contexto político y de otros factores igualmente determinantes, sino que ha de abordarse desde una perspectiva más amplia, situándolo en la investigación sobre la historia de las disciplinas escolares, considerando la formación de los autores y el contexto pedagógico e institucional en el que fueron escritas las obras didácticas. Chachaoua y Comiti (2010) reconocen la riqueza del análisis de manuales para la investigación sobre los sistemas educativos, e insisten en la necesidad de analizar el proceso de estudio y las prácticas matemáticas que el libro puede llevar a desarrollar, considerando a la vez el contexto institucional en el que se producen los manuales.

Situamos por ello este trabajo en un marco que integra la historia de la educación y la didáctica de la matemática, y que ha de considerar a la vez otras disciplinas relacionadas con ellas, como la historia, la legislación o la matemática.

Herramientas teóricas para el análisis de los contenidos aritméticos

El análisis de los textos y, en particular, de algunas nociones o aspectos que contienen, ha de hacerse desde una teoría o marco teórico que lo sustente. Se trata de un análisis histórico, que debe tener en cuenta el método histórico de investigación. Como nos interesa analizar contenidos de matemáticas, ciertas herramientas de la didáctica de la matemática nos resultan de utilidad. Nos referimos concretamente a las herramientas de la Teoría antropológica de la didáctico (TAD), un marco teórico que otorga un papel primordial a la perspectiva epistemológica y que a la vez sostiene la necesidad de considerar los aspectos institucionales, esto es, la institución en la que tiene lugar el estudio de las matemáticas e incluso las instituciones que intervienen tanto en la producción del conocimiento matemático como en su propagación y uso (Chevallard, 2001). Este enfoque liga los aspectos matemáticos y los pedagógicos y promueve una visión integrada de ambos al estudiar las cuestiones relativas a la educación matemática y, en particular, interpretar la historia de la educación matemática.

La TAD sostiene la imposibilidad de desligar las facetas matemática y didáctica del trabajo matemático. La noción de praxeología, fundamental en esta teoría, viene a reforzar esta idea. Una hipótesis básica de la teoría antropológica es que cualquier actividad matemática puede describirse en términos de praxeologías, que serán praxeologías u organizaciones matemáticas o bien organizaciones didácticas. Las primeras se refieren a la realidad matemática que se puede construir cuando se estudia un tema matemático y la segunda al modo en que se lleva cabo ese estudio (Chevallard, 1999).

Una praxeología surge a partir de una cuestión problemática por resolver, que actúa como cuestión generadora, en torno a la cual se construyen en la institución de que se trate tareas o, más bien, tipos de tareas y técnicas o tipos de técnicas, no necesariamente algorítmicas, con las que abordar y resolver los tipos de tareas; ambos elementos constituyen la praxis. El componente teórico o logos de la praxeología está formado por la tecnología que explica y justifica las técnicas en la institución considerada y la teoría, en el nivel de superior de justificación. Por otra parte existe una jerarquía de praxeologías; atendiendo a su complejidad las praxeologías pueden ser puntuales, locales, regionales o globales, cada una conteniendo a varias de las anteriores. Así, se dicen puntuales cuando implican un solo tipo de tareas, locales si se trata de varias puntuales compartiendo una tecnología común para todas las técnicas, regionales si es una misma teoría la que da soporte a las tecnologías de varias praxeologías locales y, por último, globales si involucran diferentes teorías.

Las nociones que componen una praxeología son relativas, ya que las cuestiones, tareas, técnicas o justificaciones existentes o que es posible que existan tienen o dejan de tener sentido según la institución en la que se desarrolla el proceso de estudio. Tampoco la función de estas nociones ha de ser la misma con independencia de la institución; en los siguientes apartados veremos cómo la función que desempeñan las técnicas de cálculo en la institución de formación de maestros difiere de la que tienen en la escuela primaria, pues dejan de ser una mera herramienta o técnica de cálculo y se convierten en entes matemáticos objeto de análisis -en el que intervienen las propiedades de las operaciones-.

Describir y analizar las organizaciones matemáticas y didácticas presentes en una propuesta de estudio de la matemática -o de ciertos contenidos aritméticos- es un trabajo complejo que supone tratar de identificar y de comprender la reconstrucción que se hace del saber matemático en una determinada institución, en nuestro caso la escuela normal española en el periodo considerado. Este estudio praxeológico comprende el análisis de elementos de las organizaciones matemáticas, así como de las organizaciones didácticas que dan respuesta a la cuestión de cómo organizar el estudio de una organización matemática. En nuestro análisis sobre cómo plantea Eyaralar la enseñanza de la aritmética para los futuros maestros buscamos detectar componentes de estas praxeologías matemáticas y didácticas, así como las funciones que pueden llevar asociadas.

Al llevar a cabo el análisis de las tareas propuestas en los libros de aritmética que analizamos nos preguntamos si son suficientemente representativas, si su autor se preocupa por la razón que motiva su estudio, si son pertinentes para los conocimientos matemáticos a cuya adquisición han de servir, si se integran en el resto de la actividad matemática o aparecen encerradas en un tema…, entre otras. De igual manera hay que preguntarse sobre el proceso que lleva a la construcción de la técnica -si en esa construcción tiene algún papel el estudiante-, sobre su inteligibilidad o transparencia, su fiabilidad, su alcance y posibles ampliaciones, sobre la economía de la técnica, cuando analicemos una técnica o comparemos varias entre sí.

Asímismo el análisis del logos de la praxeología conlleva formularse preguntas sobre la existencia o no de justificaciones para las técnicas, los tipos de validaciones o el papel de las justificaciones en el proceso de estudio.

El análisis praxeológico en la TAD se complementa con el punto de vista ecológico, que toma en consideración cuestiones que no son exclusivas del estudio de la matemática, sino que pertenecen a otros niveles, y que se derivan de la pedagogía subyacente, los modelos sociales o las decisiones políticas, entre otros. Todo ello configura un marco en el cual se desarrolla el estudio de las matemáticas y que impone ciertas condiciones o restricciones en cuanto a cómo puede llevarse a cabo este proceso, sin olvidarnos de las propias de la institución en la que se desarrolló la enseñanza y el aprendizaje de esta materia. Es lo que Chevallard (2002) denomina niveles de codeterminación didáctica, una jerarquía de niveles en cada uno de los cuales las organizaciones matemáticas y didácticas se condicionan mutuamente. El nivel pedagógico, el escolar y el social aparecen situados por encima de los niveles disciplinar y didáctico, influyendo en las elecciones didácticas, no siempre exclusivas de las matemáticas, y delimitando el conjunto de las decisiones posibles.

Solo desde la combinación de estas dos perspectivas es posible completar el estudio descriptivo de las propuestas con otro análisis que, desde las condiciones y también las restricciones por las que se ven afectadas, nos permita interpretar y comprender esas propuestas con una visión más integradora.

José María Eyaralar Almazán

José María Eyaralar Almazán nació en Guadalajara en 1890, pero pasó parte de su infancia y su adolescencia en Huesca. En la universidad de Zaragoza se licenció en Química, pero desde que finalizó los estudios su interés se centró primero en las matemáticas y enseguida en su enseñanza. Ingresó en la Escuela Superior del Magisterio en 1915 para ser profesor de escuela normal y acabó en 1918, siendo el número uno de su promoción. Trabajó en las Normales de Cádiz, Huesca, Barcelona y la mayor parte de su vida profesional en Baleares hasta 1936, año en el que comenzó la Guerra Civil española y fue encarcelado.

Su dedicación a la formación de maestros fue vocacional, renunció a una plaza de catedrático de instituto en favor de otra en la Escuela Normal de Barcelona. Solicitó ser becado por la Junta para la Ampliación de Estudios y en 1922 solicitó y obtuvo una estancia en París "para estudiar en Francia la enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria hasta la profesional de Saint Cloud, siempre con referencia a la Escuela Normal" (Eyaralar, 1922, p. 8). Visitó en París, en 1923, escuelas maternales, primarias y normales y presentó como resumen de su estancia la memoria titulada La enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria hasta la profesional, que la Junta publicaría en 1924 con el título La enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas francesas.

Publicó varios libros, casi todos destinados a servir de texto en las Normales, y es autor de bastantes artículos, algunos para hacer crítica de cuestiones educativas o sociales, publicados en revistas baleares, y otros para tratar cuestiones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en las normales, publicados en su mayoría en la Revista de Escuelas Normales. Se implicó de manera activa en la vida educativa y cultural de Palma de Mallorca y participó en numerosas actividades relacionadas con la formación del magisterio y con la divulgación educativa. Murió en 1944, tras haber sido excarcelado y degradado a maestro de primera enseñanza.

Propuesta de José María Eyaralar para el estudio de la numeración

Elegimos para nuestra investigación los dos textos de aritmética citados, escritos por Eyaralar para sus alumnos normalistas. Se trata de dos obras que situamos en una misma institución, la escuela normal, pero en dos momentos históricos diferentes, ya que la primera es de 1922 y la segunda se publicó en 1932, un año después de que se proclamara la II República. Tenemos la suerte por tanto de disponer de un libro y de su reelaboración posterior, a tenor de la experiencia con el primero y de la nueva situación política, que había traído cambios sustanciales en el terreno educativo, en particular, cambios legislativos que afectaban a la estructura y a los contenidos de los estudios de formación del magisterio.

Hemos seleccionado contenidos relativos a la enseñanza de la numeración y de las operaciones con números naturales, por considerarlos representativos de la orientación que se pretende que tenga la enseñanza de la aritmética en la formación de los maestros de primera enseñanza. Ello nos permitirá dilucidar las propuestas didácticas en relación con la aritmética, más concretamente, qué reconstrucción se hace de la numeración y de las operaciones aritméticas básicas en las condiciones ecológicas existentes en la institución en la que situamos nuestro estudio.

Para reflexionar sobre la forma en la que Eyaralar consideraba que había de estudiarse la aritmética en la enseñanza normalista y el papel que había de desempeñar esta formación, es necesario que consideremos las razones de ser que se le atribuían a los contenidos estudiados, qué conocimientos previos se toman como base para construirla, analizar las tareas propuestas al alumnos identificando sus elementos más significativos y las dificultades que pueden llevar asociadas entre otras cosas. Todo ello constituye un conjunto de indicadores para conocer la epistemología de este profesor en relación con esta parte de la matemática.

En el Nuevo Tratado de Aritmética comienza planteando una cuestión problemática que justifica la necesidad de un sistema de numeración: poder representar los números de manera más eficaz que con un conjunto coordinable con ellos, teniendo en cuenta que son infinitos, o sea, cómo representar un conjunto infinito de números con un conjunto finito -no solo en sentido matemático, sino manejable- de símbolos, además de “darles un nombre que respondiese al concepto abstracto que de ellos se adquiría” (Eyaralar, 1922, p. 8). Pero la razón de ser de un sistema de numeración no es solo la anterior, como en las propuestas calificadas de clásicas (Sierra, 2006) sino, sobre todo, la “necesidad de determinar un conjunto, esto es, de poder reconocerlo y de saber si es mayor o menor que otro” (Eyaralar, 1922, p. 8) mediante un procedimiento más eficaz, más económico, que la construcción de un conjunto coordinable real o representado gráficamente. La evolución desde las primeras respuestas al problema planteado hasta el sistema de numeración posicional aparece aquí como un avance en la eficiencia de la técnica de designación de los números.

Para ilustrar la respuesta primera a este problema, el agrupamiento en unidades colectivas, se sirve de ejemplos históricos o de la vida cotidiana (pliegos, cuadernillos, manos, si se trata de papel). Sin embargo, advierte de la diferencia entre estos ejemplos y un verdadero sistema de numeración, puesto que en la vida cotidiana el principio del agrupamiento no se prolonga de forma indefinida, solo llega hasta un cierto orden y de este orden se tendrá cualquier número de unidades cuando hayamos de referirnos a cantidades más grandes. Vemos aquí una limitación de las técnicas empleadas en estos ejemplos no matemáticos, que alude a su alcance. Asimismo aclara el carácter convencional de la base decimal y pone ejemplos históricos de otras bases.

La numeración escrita la presenta pues como respuesta a la cuestión inicial. Lejos de proporcionar una respuesta definitiva, antes de presentar el sistema de numeración hace un recorrido por las respuestas provisionales, desde las más simples, como expresar la cantidad de elementos de una colección representando gráficamente otra colección coordinable con ella, pasando por soluciones intermedias, como sustituir varios de los símbolos anteriores por otros (sistemas aditivos) o proponer una escritura consistente en escribir las unidades de cada orden seguidas de una letra que indique el orden de unidades, en base diez, como una forma simplificada de escribir la descomposición polinómica de un número (sistemas multiplicativos). Como ejemplo de estos últimos escribe, por ejemplo, el número 342065 de la forma $3\overline{c}$,$4\overline{d}$, $2\overline{u}$, 6 d, 5 u).

Merece la pena comentar cómo emplea la historia de la matemática, no solo con un interés meramente cultural, sino también didáctico. Frente a una presentación de la matemática como ciencia no solo descontextualizada sino despersonalizada, las referencias a la historia o, más aún, la construcción del sistema de numeración mediante un recorrido por soluciones intermedias de estructura similar a las históricas -a veces históricas, como en el caso del sistema romano- viene a dar “un sentido humano estas verdades demasiado abstractas”, dando “sensación de vida a estos estudios” (Eyaralar, 1932, p. 90) y mostrando el sistema de numeración actual como una construcción histórica, una obra humana. Además, este recorrido le permite una construcción progresiva del sistema de numeración desde el más simple hasta el actual, como pone de manifiesto en su Metodología de la Matemática:

> Para que el conocimiento de los sistemas de numeración sea completo y educativo desde un punto de vista humano, es necesario que se estudien los diferentes sistemas, sus evoluciones con los inconvenientes y ventajas que presentan (numeración romana inclusive), para llegar a percibir la larga evolución del pensamiento humano hasta la adquisición del actual y maravilloso mecanismo. (Eyaralar, 1933, p. 43)

Mencionar estos sistemas diferentes al actual le sirve para poner de manifiesto -lo hace explícitamente- que el principio posicional es un convenio, así como la razón de ser de la existencia del cero.

Pero hay otro motivo para incluir estas ‘respuestas provisionales’ a la cuestión planteada y no comenzar presentando la solución definitiva o sistema posicional, ignorando cualquier aspecto del proceso hasta su creación. Esta construcción paulatina, mostrando la evolución de la técnica, le permite aludir a razones de tipo tecnológico, como cuando incluye un análisis del sistema romano relativo a su dominio de validez o alcance, señalando como principal inconveniente del sistema romano su inadecuación para el cálculo.

En la Aritmética Intuitiva la extensión dedicada al tema del número y la numeración se reduce en trece páginas, casi a la mitad de la obra anterior, y la atención dedicada a las observaciones de carácter histórico es menor. En este caso la respuesta inicial a la cuestión planteada es lo que denomina “procedimiento natural”, que en realidad es un sistema multiplicativo en base diez -con representaciones muy similares al descrito anteriormente-, y el principio posicional o “procedimiento sistemático” lo presenta como una evolución de aquel, una vez que los símbolos que indican el orden de unidades se eliminan y solo la posición indica el valor de cada dígito. En cambio aparecen enumerados los principios en los que se basa el sistema posicional y con una presentación destacada.

La representación gráfica de los números en la recta numérica (semirrecta, puesto que representa números naturales o, en todo caso, no negativos) está presente en las dos obras de aritmética, con un valor representativo e instrumental a la vez (Font, Godino y D’Amore, 2007). Tiene una función más representativa en el primer libro, ligada a la definición de número, como conjunto de segmentos o como medida, si el segmento de extremos 0 y 1 se toma como unidad (Eyaralar, 1922, p. 30), y ambas funciones en la segunda obra -en la que se limita a representar números naturales-, ya que sirve para definir qué es contar (recorrer los números desde el cero hacia la derecha) y el orden en los naturales (por la posición que ocupan dos números en la recta) pero, a la vez, proporciona una técnica para ello, usando la representación de los números en la recta.

Aunque en su segundo libro de aritmética presenta los contenidos de manera más breve y simplificada, hay no obstante lugar para el cuestionamiento de las técnicas. En relación con la técnica de agrupar para asignar un número a una colección afirma que "esta manera de contar nos muestra la constitución del número y nos da una clara idea de él" (Eyaralar, 1932, p. 15). Poco después, en su Metodología de la Matemática incluye un relato para niños El rebaño de Juanillo (pp. 238-242) que proporciona al maestro una cuestión motivante para la tarea de comparar dos colecciones, en este caso una misma colección -un rebaño de ovejas- en dos momentos diferentes. Las técnicas para realizar tarea son: construcción de una colección coordinable con guijarros, cambiar cada 10 guijarros por una piedra más grande; cambiar cada diez piedras por otra mayor y, finalmente, emplear números. En este libro, escrito tan solo un año después que su segundo libro de aritmética, insta a los maestros a cuestionar las técnicas, analizando sus ventajas e inconvenientes, desde la escuela primaria para poder apreciar la eficacia de la solución que se ha llegado a institucionalizar frente a otras posibles.

Los ejercicios que propone en sus libros constituyen un indicador más de la epistemología que sustenta las propuestas didácticas de Eyaralar. A diferencia de otras propuestas en las que el trabajo con distintos sistemas implica poner el énfasis en la tarea de expresar un mismo número en varias bases, la función que Eyaralar atribuye al trabajo con distintos sistemas de numeración es la de ayudar a comprender el sistema usual y a analizarlo. El trabajo con diferentes sistemas y, en particular, las tareas de cambio de base y de escribir números en otros sistemas son usadas, en el segundo libro, como una técnica didáctica para favorecer la comprensión del alumno:

> 4.Representando la unidad por **I**, la decena por I-I y la centena por **I=I**, representar los números 3, 24, 205, 300, 132, 123, 312
> [...]
> 6. Distribuir un conjunto en unidades de los diferentes órdenes del sistema de base 10 y representarlo con la notación adoptada en **4** y con la usual. (Eyaralar, 1932, p. 21)

Sirva de ejemplo estos dos ejercicios (basta fijarse en los números elegidos en el ejercicio 4), que retoma de algún modo en la Metodología cuando propone, para que los niños trabajen con un sistema aditivo, los mismos símbolos que había inventado, al estilo de lo que había observado en Francia para trabajar los algoritmos de la suma y la resta (Eyaralar, 1924,

p. 21; 1933, p. 203). Ejercicios en los que se proporcionan símbolos inventados y se pide representar números en un sistema aditivo a alumnos de primaria, para comprender el principio del agrupamiento, los vemos también en la obra del profesor normalista Aurelio Rodríguez Charentón (Charentón, 193?, p. 54). Eyaralar propone además para la escuela primaria representaciones menos esquemáticas, que había observado durante su estancia en ese país, como haces de palillos y, en general, si se trata de números pequeños, representaciones de objetos o puntos para representar gráficamente las unidades de los distintos órdenes, dejando claro que "la agrupación en este caso es esencial si se quiere que sean percibidos como un conjunto" (Eyaralar, 1933, p. 203).

En su segunda Aritmética insiste más en ejercicios que suponen la comparación de números con iguales dígitos permutados o con ceros intermedios, en los que el principio posicional es parte de la técnica para resolverlos.

El interés por resaltar el carácter convencional de los símbolos aritméticos le lleva a insistir en tareas como estas, en la misma obra: "Escribir en caracteres asirios 34, 22, 200", "Escribir con caracteres griegos 35, 44, 78, 845, 12 , 45" (Eyaralar, 1933, p. 137).

Las descomposiciones de números, sobre todo las que se basan en la estructura decimal, van a ligar el estudio del número al de las operaciones. Para trabajar este tipo de descomposiciones en la escuela primaria recurre de nuevo a materiales observados durante el disfrute de su beca en Francia (Figura 1).

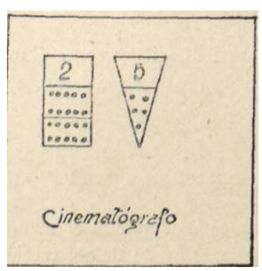

Figura 1. Cinematógrafo numérico.
Eyaralar, J.M. (1933, p. 207).

Otros materiales que sugiere, muchos de los cuales había visto usar en Francia, son para trabajar la evaluación de cantidades y la asignación de números o las descomposiciones de números pequeños en otros dos de todas las manera posibles.

El estudio de las operaciones aritméticas: la multiplicación

Para estudiar el tratamiento dado a las operaciones elegimos la multiplicación. Esta operación es introducida de manera similar en ambos libros, un problema contextualizado en el que el multiplicador expresa las veces que se repite el multiplicando. La función de este problema es dar sentido a la definición de multiplicación como suma reiterada, que viene justo después. En ambos libros da una segunda definición de multiplicación, “hacer un número tantas veces mayor como unidades tiene otro” (Eyaralar, 1932, p. 58). Así pues, en las definiciones que da el multiplicando y el multiplicador son números de diferente naturaleza, actuando el segundo de operador escalar, lo que explicita de inmediato Eyaralar cuando aclara que “El producto es de la misma especie que el multiplicando y el multiplicador es, como tal, un número abstracto” (Eyaralar, 1922, p. 58). Y repite la aclaración, esta vez con unn ejemplo: “El multiplicando es en los problemas un número concreto, en nuestro ejemplo cristales, mientras que el multiplicador es un número abstracto, 4, puesto que se limita a indicar cuántas veces ha de repetirse el multiplicando. El producto es concreto y de la misma naturaleza que éste” (Eyaralar, 1932, p. 58).

En cuanto a la “multiplicación gráfica” (Eyaralar, 1922, p. 59), solo la vemos en la Aritmética Intuitiva, para la segunda definición de multiplicación, planteando el problema de obtener un segmento 3 veces mayor que otro dado, y la técnica es iterar 3 veces el segmento dado en una semirrecta a partir del origen.

Lo que sí incluye en las dos Aritméticas es la representación gráfica de un producto, representando los factores en ejes cartesianos (primer cuadrante) y trazando paralelas a los ejes, para obtener un rectángulo en el que cada unidad de superficie será una de las unidades del producto (Figura 2). Un tipo de representación que extiende después al espacio, para ilustrar la multiplicación de tres sumandos (figura 3).

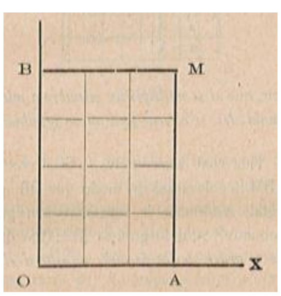

Figura 2. Multiplicación gráfica Eyaralar (1922, p. 64).

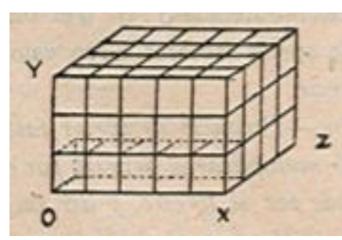

Figura 3. Multiplicación gráfica. Eyaralar (1932, p.70).

Esta representación la retoma para dar una justificación intuitiva de la propiedad conmutativa, aunque después incluya otra demostración con un ejemplo genérico. En realidad no hay en ninguno de los libros -tampoco en ninguno de los textos de la época- ejemplos de problemas en los que las cantidades que intervienen puedan ser consideradas como multiplicando o como multiplicador (Sánchez Jiménez, 2015, cap. 3), como es el caso de los problemas combinatorios, de los que solo hallamos uno en el libro de 1932: “¿Cuántos niños hay en 8 filas de a 4? ¿Y en 4 filas de a 8? ¿Pueden pasar fácilmente de una a otra formación?” (Eyaralar, 1922, p. 78), a pesar de que estos problemas son los que mejor se prestan -junto con los de áreas- a trabajar la propiedad conmutativa (Vergnaud, 1981). Quizá por ello en el Nuevo Tratado de Aritmética, en el que las propiedades de la multiplicación se introducen a partir de una situación contextualizada, no se hace así con la propiedad conmutativa, seguramente porque el tipo de problema que mejor se prestaría a ello no encaja en las definiciones de multiplicación que da en el libro. De hecho hallamos un problema en este libro que pone el énfasis en el papel de cada uno de los números que intervienen en la operación: “¿Puede escribirse 8 metros x 6 pesetas? ¿Qué significa 8 metros por 6? ¿Y 6 pesetas por 8?” (Eyaralar, 1922, p. 174).

El coste de efectuar una suma reiterada, que presenta como técnica de partida, ligada a la definición de la operación, es lo que motiva la búsqueda de una técnica más económica, que va construyendo progresivamente: productos con los dos factores de una cifra, multiplicando de varias cifras y multiplicador de una y ambos factores de varias cifras. Para el primer caso presenta la tabla denominada ‘pitagórica’ y explica cómo construirla sumando, para generar cada fila, la fila anterior con la primera. Para los otros dos casos emplea una justificación, basada en los productos parciales, en la que está implícita la descomposición polinómica del número -que en su primer libro no había formulado explícitamente- y la propiedad distributiva. Vemos pues como la tecnología de la técnica forma parte de la construcción de esta última.

Se observan algunas diferencias, sutiles pero no desdeñables, en los libros. En ambos e inmediatamente después de las dos definiciones de multiplicación, es decir, como consecuencia de la definición, aclara las equivalencias entre los diferentes órdenes de unidades en el sistema posicional o, más bien, puesto que esto está implícito en la propia estructura del sistema de numeración, lo relaciona con la operación de multiplicar:

> Con arreglo al convenio anterior [la segunda definición de multiplicación], una centena es 10 veces mayor que una decena, y una unidad de millar es 100 veces mayor que una decena simple, puesto que equivale a diez grupos de a diez decenas. (Eyaralar, 1922, p. 58)

A continuación, expone, aclarando el carácter de convenio, el resultado de multiplicar un número por 1 y por cero (sin denominarlos elemento neutro ni elemento absorbente, respectivamente), aunque solo en la segunda de las Aritméticas insiste este carácter convencional: "aquí cae en defecto la definición, por no concebirse sumas de un sumando ni de cero sumandos" (ib.). Aunque Eyaralar poseía una buena formación matemática, superior a la de los profesores normalistas de su época (Sánchez Jiménez, 2015), lo cierto es que con la definición que figuraba en sus libros el carácter convencional de ambos productos era lo coherente. Vemos una muestra del interés por presentar una matemática que huya del formalismo pero no de una presentación rigurosa, en el sentido de coherente, lo que es un rasgo característico de la epistemología de este profesor.

Contrastando el contenido de los dos libros de aritmética con el de metodología, escrito en la misma época que el segundo de aquellos, observamos otras muestras de una reelaboración. En ambas ocasiones comienza con un problema multiplicativo que le sirve de ejemplo para dar sentido a la definición, pero en el segundo libro los números son de una cifra, mientras que antes el multiplicando era de tres cifras, conforme a lo que figura en el listado de Consejos acerca de una lección de Matemáticas, que elabora junto con sus alumnos normalistas y que figura en la Metodología de la Matemática: "Emplear números sencillos y reales cuando se explica" (Eyaralar, 1933, p. 399). Vemos aquí otro gesto que forma parte de la técnica didáctica de este profesor, elegir números pequeños y cómodos a la hora de representarlos y operar con ellos, gesto técnico para procurar que la complejidad del cálculo no obstaculice la propiedad que se pretende hacer comprender, consideración que forma parte de la tecnología didáctica de Eyaralar en ese momento.

El tratamiento de las propiedades de la multiplicación y la distributiva de esta operación respecto de la suma presenta diferencias en los libros de aritmética analizados. En el primero que se publicó, para estudiar la propiedad distributiva comienza por plantear un problema contextualizado y comprobar que el resultado resolviéndolo de dos formas es el mismo, a partir de lo cual formula la propiedad, que demuestra formalmente. En el segundo libro comienza planteando la resolución de una operación de dos formas, deshaciendo o sin deshacer el paréntesis y solo con dos sumandos y no cuatro. Ahora la resolución es por medio de una representación gráfica, un rectángulo de base la suma de los dos números que forman el multiplicando y de altura el multiplicador (Figura 4), y tras ella la demostración analítica, aunque no algebraica sino con ese mismo ejemplo, que actúa como ejemplo genérico. Estamos ante una demostración más intuitiva, que en favor de la intuición renuncia al formalismo, pero no a la racionalidad.

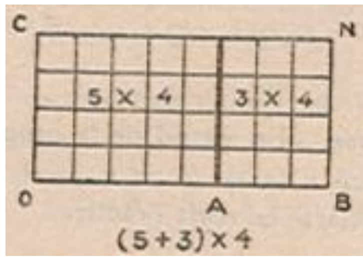

Figura 4. Propiedad conmutativa de la multiplicación.
Eyaralar (1932, p.65)

La Aritmética Intuitiva incluye inmediatamente después de la propiedad distributiva, como aplicación, técnicas abreviadas para multiplicar por 11 y por 9. Tras la extensión de la definición y de las propiedades de la multiplicación a más de dos factores, el espacio dedicado en ambas obras a la multiplicación lo ocupa el apartado de multiplicación rápida o cálculo rápido.

Como hemos dicho en la introducción de este trabajo uno de los aspectos que hay que considerar en el análisis de libros de texto es el momento de su edición. En el periodo en el que fueron escritas las obras que estudiamos, la simplificación y el ahorro de tiempo en los cálculos era relevante y esto repercutía en los objetos del estudio, o sea, en los contenidos matemáticos que se consideraba que debían formar parte de la formación matemática de un individuo y, por ende, de un maestro. Es por eso que los libros de aritmética dedicaban bastante espacio al llamado ‘cálculo rápido’. Si actualmente interesan sobre todo el cálculo mental y la estimación, antes de la existencia de aparatos electrónicos que hiciesen los cálculos la economía de las técnicas de cálculo, mental o escrito, era un objetivo en la enseñanza primaria y en la formación de los maestros.

La concepción de Eyaralar acerca de la matemática y su enseñanza se refleja igualmente en este apartado, más extenso en la última obra que en la primera. Las técnicas menos costosas que el algoritmo usual se exponen de forma justificada, de manera que este componente tecnológico de la praxeología matemática es a su vez una técnica didáctica para incidir con los estudiantes de la escuela normal en la comprensión de las propiedades estudiadas y de las propias reglas del sistema de numeración.

> Multiplicación por 25.- Siendo 25 = 100 : 4, será N x 25 = N x 100 : 4, lo cual nos dice que para multiplicar un número por 25 basta multiplicarle por 100 y hallar su cuarta parte.
> Ejemplo: 382 x 25 = 38200 : 4 = 9550.
> Esta operación es útil para convertir reales en céntimos. (Eyaralar, 1932, p. 73).

En un artículo sobre el cálculo mental, publicado en la Revista de Escuelas Normales, aclara cuál es su interés por estos procedimientos abreviados de cálculo, más allá que la búsqueda de técnicas más económicas que el algoritmo usual, y afirma que “la explicación y la práctica de este ejercicio [técnica abreviada para multiplicar números de dos cifras] constituye un medio excelente para repasar la constitución de los números y las propiedades del producto de los diferentes órdenes” (Eyaralar, 1928, p. 19).

De hecho, en el apartado destinado a ejercicios muchos de ellos tienen por objeto el cuestionamiento de las técnicas para multiplicar; son problemas que se cuestionan alguno de los requisitos de la técnica: “¿Puede multiplicarse el multiplicando por cada cifra de multiplicador tomando éstas en un orden cualquiera? Aplíquese a 48329 · 547” (Eyaralar, 1922, p. 174; 1932, p. 81). También abundan los problemas que demandan al alumno variaciones o adaptaciones de las técnicas estudiadas, que suponen hacer intervenir el principio posicional y las propiedades de la multiplicación, como cuando se pide al alumno que ‘invente’ nuevas técnicas de cálculo rápido, adaptando alguna de las vistas antes: “¿Cómo puede hallarse más fácilmente el producto de un número por 82? ¿Y por 93? ¿Y por 248?” (Eyaralar, 1932, p. 82).

Pero vuelve a haber diferencias entre un libro y otro. En el Nuevo Tratado de Aritmética hay ejercicios de carácter abstracto, en los que los números se representan por letras y los enunciados y las justificaciones que pide han de hacerse, por tanto, en un marco algebraico. Diez años después, cuando desde las instituciones oficiales se propugnaba una atención especial a la intuición en la enseñanza en general, y a la de la matemática en particular, las letras se sustituyen por números y las pruebas formales por ejemplos genéricos, para favorecer las funciones de descubrimiento y de explicación.

Se percibe la influencia del modelo pedagógico de la nueva educación también en algunos otros gestos didácticos, como la inclusión de problemas de carácter lúdico, presentes solo -en el caso de los problemas multiplicativos- en el segundo libro de aritmética. Algunas veces son curiosidades aritméticas: “Obtener: 142857 por 2, 3, 4, 5 y 6; y observar la peculiaridad que presentan los productos” (Eyaralar, 1932, p. 78). En Metodología de la Matemática son frecuentes las referencias a la necesidad de hacer la enseñanza no solo activa sino ‘grata’, incluso dedica un apartado a las recreaciones matemáticas y a los juegos, con ejemplos entre los que figuran juegos para aprender la tabla de multiplicar, como este que propone para calcular un producto de dos números mayores que 5:

> levantar en cada mano tantos dedos como representa el exceso sobre 5 de cada uno de los factores. Su suma representa decenas de producto, a las que hay que agregar el producto de los números representados por los dedos sin alzar de cada mano. (Eyaralar, 1933, pp. 155-156)

Ciertamente este juego se propone para la escuela primaria, pero cuando se dirige a los estudiantes normalistas se preocupa por “el fundamento de ello” (ib. p. 156), y proporciona la justificación analítica de la técnica, es decir, el carácter lúdico no es una alternativa a una matemática razonada, sino que según las condiciones de los alumnos, más bien actúa como recurso para plantear una tarea de validación.

Influencia de las condiciones ecológicas en las propuestas analizadas

La renovación pedagógica en España en el primer tercio del siglo XX no se concibe sin considerar el papel de una serie de instituciones, entre las que destacamos, por su papel en la renovación de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas normales, la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio y la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones científicas (JAE), instituciones ambas que marcaron la formación de José María Eyaralar.

La Escuela Superior del Magisterio, como se llamaba en un principio, se creó en 1909 para formar al profesorado de las escuelas normales y a los inspectores de primera enseñanza, formar a los aspirantes del Instituto-Escuela en materias pedagógicas y ser un centro superior de investigación pedagógica. Se ingresaba por oposición, con el título previo de maestro o licenciado y su régimen era de internado. Los estudiantes tenían la oportunidad de participar en múltiples actividades de índole educativa y cultural, organizadas por la propia Escuela o por otras instituciones educativas y culturales de índole renovadora, muchas de ellas dimanadas en cierto modo de la Institución Libre de Enseñanza. En lo referente a las matemáticas este centro proporcionaba una formación esencialmente disciplinar y no metodológica, aunque es cierto que la estancia en ella daba a los alumnos la oportunidad de conocer las nuevas ideas pedagógicas y las propuestas renovadoras en otras materias, ideas que en muchos casos ellos intentarían trasladar a las matemáticas, aunque con diferente perspicacia (Sánchez Jiménez, 2015, cap. 2).

La JAE se creó en 1909 con la función de propiciar los intercambios de investigadores y profesores con otros países, estimular la investigación en España -para ello creó Laboratorios, como el Matemático- e impulsar el desarrollo de instituciones educativas. La estancia que Eyaralar pudo realizar en las escuelas francesas no vino sino a reforzar sus ideas pedagógicas y la epistemología de la matemática de este profesor.

El Nuevo Tratado de Aritmética ya contiene el germen de lo que será el modelo pedagógico que inspira las propuestas de este profesor, pues recoge algunos principios pedagógicos, en relación con esta materia, en el capitulo dedicado a la numeración. Defendía una enseñanza ‘objetiva’ (partir de objetos manipulables, antes de pasar a la representación gráfica y finalmente a los símbolos), ‘graduada’ (ir introduciendo paulatinamente los distintos tramos numéricos), ‘asociativa’ (relacionar las numeraciones oral y escrita y la numeración con las operaciones, y también la aritmética con la geometría y otras ciencias), ‘activa y agradable’ (propone servirse de narraciones y juegos), una ‘preparación para la vida’ (referir los números a cuestiones prácticas) (Eyaralar, 1922, p. 23-24).

Estas y otras ideas, que retoma en la Metodología, son en su formulación general producto de su época, reflejo de la pedagogía dominante, la Escuela Nueva, que Eyaralar asume desde su primera obra y que hemos visto reflejada en sus propuestas para el estudio de la numeración y de las operaciones. Este principio de hacer la enseñanza activa e intuitiva le lleva a ser crítico con la manera de enseñar la aritmética que había visto en Francia, ya que mientras en las escuelas maternales observa, y recoge después en su libro sobre metodología, multitud de materiales, en las escuelas primarias considera que la enseñanza es “un tanto seca y formalista, en lo que al cálculo se refiere” (Eyaralar, 1924, p. 28).

Sin embargo, el modelo pedagógico derivado del movimiento de la Escuela Nueva se veía afectado, en el caso de Eyaralar, por el modelo epistemológico de las matemáticas que guiaba sus planteamientos didácticos, lo que le llevaba a insistir en que la enseñanza de las matemáticas ha de ser activa e intuitiva pero a la vez razonada; la intuición no sustituye al razonamiento, más bien está al servicio de este.

En todo caso sí está en contra del formalismo excesivo o innecesario, siempre en función de la institución en la que se estudian las matemáticas, sea una institución de formación de maestros o una escuela primaria. Como consecuencia, defiende la necesidad de partir de las experiencias del niño, pero a la vez, considera la naturaleza de las matemáticas, ciencia deductiva, abstracta, y estas restricciones de tipo epistemológico son las que, junto a las condiciones ecológicas, sirven de base a las propuestas para la enseñanza de la matemática y, en particular, de la aritmética.

Un ejemplo de cómo las ideas innovadoras no eran aplicadas sino a través del filtro de una reflexión basada en su idea sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre cómo ha de ser su enseñanza, es su pensamiento acerca del uso de la Historia como recurso didáctico; opina que no ha de ser anecdótico, con fines únicamente culturales o para captar la atención de los alumnos, tal como se hacía en Francia con la historia del sistema métrico (ib., p. 41), sino que debe formar parte de la técnica didáctica, y esto es precisamente lo que hemos visto que hacía con la historia de la numeración.

Su epistemología le lleva a poner de manifiesto la naturaleza de la matemática; así, aunque recurre a ejemplos contextualizados (docenas y gruesas, en base 12) para explicar el principio del agrupamiento -algo coherente con las ideas pedagógicas del momento y la importancia concedida a la intuición-, hace explícita a los alumnos la diferencia entre los agrupamientos según una cierta base en la vida cotidiana -que usa como ejemplo de 'modelo real'-, y el modelo matemático, en el que se agrupa indefinidamente.

La perspectiva ecológica considera las condiciones institucionales en las que se estudian las matemáticas, en este caso las escuelas normales en las primeras décadas del pasado siglo. Eyaralar escribe sus obras para la formación de maestros y, en consecuencia, proponía un estudio integrado de los aspectos matemáticos y didácticos.

Una muestra de ello es la propuesta de trabajo con los materiales o recursos gráficos, que no se limita a describir su uso y ventajas sino que los estudia de manera crítica y comparativa, para proporcionar a los que han de enseñar en la escuela primaria criterios para sus elecciones didácticas.

Otro ejemplo lo tenemos en el cuestionamiento de las técnicas para representar números y operar con ellos, en términos de inteligibilidad, fiabilidad, economía o alcance, como cuando advierte de las ventajas del sistema posicional sobre el romano para construir algoritmos eficaces para las operaciones, o cuando señala la economía de símbolos que supone el sistema posicional sobre uno de tipo multiplicativo.

Se percibe igualmente la influencia de la institución a la que van dirigidas las propuestas sobre la enseñanza de la aritmética en la importancia que concede a la comprensión de las propiedades y a las justificaciones intuitivas -con más protagonismo en el segundo libro- susceptibles en algunas ocasiones de reproducirse en la primera enseñanza.

Con la llegada de la Segunda República se produjeron cambios legislativos, entre ellos el Plan de 1931, que introdujo cambios estructurales y de contenidos en el sistema de formación de los maestros. Las asignaturas disciplinares dejan paso a las metodologías específicas, en el que se conoce como Plan profesional. Por tanto, cambian las condiciones ecológicas y en la Aritmética Intuitiva, escrita en plena etapa republicana, se advierte que las nuevas orientaciones pedagógicas tenían por fin todo el espacio y las condiciones para manifestarse e influir en las propuestas educativas y que la intuición como principio que guiara la práctica docente adquiría más importancia.

Eso motivó, por ejemplo, una mayor presencia de las representaciones gráficas, también para las justificaciones o validaciones, e incluso que la función de este recurso no se limitase a contribuir a la explicación de unas demostraciones más analíticas, sino que se sustituyeran las pruebas formales por demostraciones 'no matemáticas' (Cabassut, 2005), no solo de tipo gráfico o 'visual', muchas de ellas ya presentes en el Nuevo Tratado de Aritmética, sino también por ejemplos que actuaban como 'ejemplos genéricos'. Esto se advierte que se hace, la mayoría de las veces, más por motivos didácticos que porque los alumnos -que habían cursado el bachillerato- no dispusieran de los conocimientos matemáticos para movilizar argumentos formales; el interés de Eyaralar se centraba más en la funciones de 'descubrimiento' y 'explicativa' de la demostración que la mera función de 'verificación' de las propiedades (De Villiers, 1990).

Pero podemos suponer otro motivo para los cambios que se observan en las demostraciones de las propiedades aritméticas en ambos libros. Es cierto que se suprimen las pruebas analíticas, formales, pero también se observa algo que, a primera vista, podría parecer contrario al propósito de una enseñanza más intuitiva. Mientras que en el Nuevo Tratado de Aritmética para demostrar una propiedad parte de un problema contextualizado, de la vida cotidiana, en la Aritmética Intuitiva el ejemplo de partida, aunque suele ser más simple, es numérico, sin referencia a ninguna situación real. La Aritmética Intuitiva se había de usar en las Normales al tratar cuestiones metodológicas relacionadas con el aprendizaje de los contenidos aritméticos, usando esos contenidos como ejemplo para tratar cuestiones más transversales de la metodología de la matemática. Es decir, el propósito ya no debía de ser tanto enseñar aritmética a los futuros maestros, como servir a fines más relacionados con el carácter profesionalizador que ahora se pretendía que tuviesen las normales. Por ello ahora lo que importa es proporcionar una demostración que, aunque la llama "analítica", se realiza en el terreno de la aritmética, más relacionada con la enseñanza primaria, usando números y sin recurrir al álgebra, pero 'guardando la traza de las operaciones', tal como se procedería para demostrarlo de manera formal; en el bachillerato los alumnos habrían estudiado las demostraciones formales de esas mismas propiedades que figuran en los dos libros analizados. Más allá de los motivos de economía didáctica derivados de la estructura del nuevo plan de estudios (las asignaturas de matemáticas habían pasado de 4,5 horas semanales a lo largo de tres cursos a 3 horas un solo curso), ahora el énfasis no estaba en que los alumnos comprendieran las propiedades, que debían conocer de antemano, lo que importaba era mostrar otros métodos de validación no formales, para unos alumnos que habían de enseñar aritmética a niños de primaria.

Con el diseño del nuevo plan de estudios, el tiempo que se podría dedicar a tratar un contenido aritmético se vio reducido, lo que explicaría que la extensión del nuevo texto reformulado fuera mucho menor, con la consiguiente influencia en su contenido.

Esto se aprecia en el tratamiento dado a la numeración, por ejemplo, en la extensión que dedica al sistema romano, mucho menor en su segundo libro. Esta menor atención probablemente no se debiera a que no considerara ya tan importantes las ventajas que señalaba diez años antes. En su Metodología insistía en estudiar otros sistemas, prestando atención a "sus evoluciones con los inconvenientes y ventajas que presentan" (Eyaralar, 1933, p. 43) y cita expresamente el sistema romano. Parece pues que su no inclusión en el libro de Aritmética de 1932 no se debe a un cambio de estatus de este conocimiento por parte de Eyaralar, sino más bien a razones de extensión y a la procedencia de los alumnos, además de a la existencia de un tratado de Metodología en el que comentaba estas cuestiones.

Consideraciones finales

El análisis llevado a cabo permite extraer varias conclusiones, no solo sobre la renovación de la enseñanza de la matemática y, más concretamente de la aritmética, que se gestó y se empezó a llevar a cabo por un grupo de profesores normalistas comprometidos con el cambio social, que buscaban a través de la educación. De ellos, Eyaralar presenta una de las propuestas más lúcidas, fruto de su preparación matemática y de las influencias recibidas pero, sobre todo, gracias a la reflexión constante y a su capacidad de integrar las ideas del movimiento pedagógico de la Escuela Nueva con las características de la matemática, que él comprendía bien.

La combinación de los estudios praxeológico y ecológico ha permitido reconocer rasgos de las propuestas que son suficientes para calificarlas de actuales. Hemos visto ejemplos de cómo organizar la enseñanza a partir de una cuestión generadora, que aporte una razón de ser a los objetos y nociones matemáticas que se estudian. Nuestro análisis pone de manifiesto algunos rasgos que se quiere promover del aprendizaje de las técnicas y que están lejos de las propuestas clásicas: construcción paulatina de las técnicas, cuestionamiento de las mismas y búsqueda de relaciones entre ellas, etcétera. E igualmente podemos citar el uso que hace de las representaciones gráficas, para hacer las propiedades intuitivas y a la vez para servir a la validación, concretamente a las funciones de explicación y descubrimiento. O el recurso, mayor en las obras de 1932 y 1933, a las tareas matemáticas recreativas.

Los grandes principios pedagógicos que estaban influyendo en las personas más inquietas y en las instituciones más renovadoras finalmente también provocaron un cambio en la legislación educativa, cuando las condiciones políticas lo hicieron posible. La investigación realizada nos lleva a concluir que necesitaban adaptarse a la singularidad de las matemáticas. En este sentido, Eyaralar supo elaborar una propuesta de enseñanza intuitiva, pero sin perder la racionalidad, adaptando el nivel de rigor a la institución a la que dirigía sus trabajos y a los fines de esa institución. El poder disponer de dos libros acerca de los mismos nociones matemáticas, escritos en momentos próximos pero cuando el sistema de formación de los maestros ha experimentado un cambio de gran alcance, permite hacer incluso un análisis comparativo del contenido de ambas obras.

Aquí es precisamente donde las nociones teóricas de la didáctica de la matemática, y en particular, las de la teoría antropológica permiten un análisis más fino del contenido, que completa el análisis que se puede hacer desde la historia de la educación. Vemos pues cómo la investigación en historia de la educación matemática precisa de una perspectiva que comprende varios ámbitos, los más generales de la historia de la educación y los específicos de la didáctica de la matemática, que han de apoyarse mutuamente, y el análisis de los manuales escolares es uno de los espacios que quizá precisa más y muestra mejor la necesidad de esta perspectiva conjunta.

Referencias

Cabassut, R. (2005). *Demonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne. Mathematics*. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. French. <tel-00009716>. Disponible en https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716 Consulta: 01/04/2018.

Chachaoua, Hamid y Comiti, Claude (2010). "L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique". En A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action,* 771–789. Montpellier,: IUFM de l'Academie de Montpellier.

Charentón, A.R. (193?). *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Madrid: Estudio de Juan Ortiz.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). *Aspectos problemáticos de la formación docente*. Conférence donnée le 1er avril 2001 dans le cadre des XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) tenues à l'Escuela de Magisterio de Huesca (Université de Saragosse). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15. Consulta: 01/04/2018.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, *La Pensée Sauvage*, Grenoble, 41-56. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53 Consulta: 01/04/2018.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Phytagoras, 24*, 17-24. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/264784642_The_Role_and_Function_of_Proof_in_Mathematics Consulta: 01/04/2018.

Eyaralar, J.M. (1922). *Nuevo Tratado de Aritmética*. Madrid: Reus.

Eyaralar, J.M. (1922). Carta al Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas. *Expediente JAE / 49-170.* Archivo JAE, 8-9.

Eyaralar, J.M. (1924). La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas. *Anales de la JAE*, *tomo XIX*, 1–96.

Eyaralar, J.M. (1928). El cálculo mental. *Revista de Escuelas Normales, 50,* 18–19.

Eyaralar, J.M. (1932). *Aritmética Intuitiva*. Madrid: Reus.

Eyaralar, J.M. (1932). Curiosidades Matemáticas. *Revista de Escuelas Normales, 87*, 90–92.

Eyaralar, J.M. (1933). *Metodología de la Matemática*. Madrid: Reus.

Font, V.; Godino, J.D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics eduation. *For the learning of mathematics*, *27*, 2-7.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. E*nseñanza de las Ciencias, 22(3)*, 389–408

Sánchez Jiménez, E. (2015). Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936), Tesis Doctoral, Universidad de Murcia. En: http://hdl.handle.net/10201/47449 Consulta: 01/04/2018.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid. Disponible en http://eprints.ucm.es/7373/1/T29075.pdf Consulta: 01/04/2018.

Valente, W.R. (2007). História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.* V2.2, 28-49.

Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la Mathématique et la Réalité. Berna: Peter Lang.

Viñao, A. (2006). Viñao Frago, Antonio: La historia de las disciplinas escolares. *Historia de la Educación*, *25*, 243–269.

Autoras

Encarna Sánchez Jiménez; Lic. Ciencias (Sec. Matemáticas).
Doctora por la Universidad de Murcia
Miembro del Consejo de Coordinación del Centro de Estudios para la Memoria Educativa (CEME)
Profesora de Didáctica de la Matemática /
Facultad de Educación. Universidad de Murcia
Líneas de Investigación:
Historia de la Educación Matemática /Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)
esanchez@um.es

Dolores Carrilo Gallego; Lic. Matemáticas.
Doctora por la Universidad de Murcia
Directora del Centro de Estudios para la Memoria Educativa (CEME)
Profesora de Didáctica de la Matemática /
Facultad de Educación. Universidad de Murcia
Líneas de Investigación:
Historia de la Educación Matemática /Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)
carrillo@um.es