

TRANSICIÓN DE LA MATEMÁTICA DE LA ESCUELA SECUNDARIA A LA DE LA UNIVERSIDAD A TRAVÉS DEL ÉNFASIS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Renne Peña

rennepena@uan.edu.co

Rafael Sánchez

lamonedar@uan.edu.co

Universidad Antonio Nariño, Colombia.

Recibido: 12/02/201 **Aceptado:** 03/05/2018

Resumen

El presente artículo muestra el resumen de la Tesis Doctoral donde se implementa un modelo didáctico para favorecer la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad, con base en la resolución de problemas retadores como herramienta didáctica. De este modo los resultados prácticos experimentales obtenidos en la investigación demuestran la validez de las bases teóricas desarrolladas y su aplicabilidad en la escuela secundaria y universitaria al conseguir un mejor entendimiento de las matemáticas elementales y a su vez un desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.

Palabras clave: transición, problemas retadores, pensamiento matemático.

TRANSITION OF THE MATHEMATICS FROM THE SECONDARY SCHOOL TO THE UNIVERSITY THROUGH THE EMPHASIS IN THE MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING

Abstract

This article shows the summary of the Doctoral thesis where it is implemented a didactic model to favor the transition from high school to university mathematics, based on the solution of challenging problems as a didactic tool. In this way the experimental results obtained in the research demonstrate the validity of the theoretical bases developed and its applicability on the secondary and university levels by obtaining a better understanding of elementary mathematics and in turn a development of mathematical thinking in the student.

Keywords: transition, challenging problems, mathematical thinking.

Introducción

En educación matemática la resolución de problemas es una metodología de enseñanza empleada por los docentes con el propósito de mejorar la comprensión y el entendimiento del estudiante en el aula de clases, de este modo la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el estudio ICMI 16 (Barbeau & Taylor, 2005) sugieren que algunos maestros utilizan problemas para desarrollar el conocimiento y la comprensión que deben adquirir los estudiantes en el área de matemáticas, lo que quiere decir que utilizan un enfoque basado en la solución de problemas.

Es así como debido a las actuales demandas de formación a nivel universitario, la solución de problemas podría ser una posible alternativa que responda a las exigencias generadas por una nueva cultura de aprendizaje, donde se aborden situaciones problemáticas y problemas matemáticos retadores, como método de enseñanza didáctico. En efecto uno de los propósitos de la solución de problemas matemáticos es desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes, lo cual a su vez podría ayudar a una mejor transición entre la escuela secundaria y la universidad.

De este modo el objetivo de la enseñanza a nivel universitario, debe ser la formación de profesionales que tengan la capacidad de emplear en forma estratégica y competente los conocimientos que han adquirido en contextos inciertos y en continuo cambio. El nuevo enfoque del proceso de enseñanza a nivel universitario, debe apoyarse en nuevas formas de aprender (Pozo & Pérez, 2011), de modo que la psicología del aprendizaje y la educación en la actualidad se puedan definir en términos de un aprendizaje constructivo.

Descripción del problema

Los estudiantes que ingresan a las universidades colombianas se pueden caracterizar por no ser formados en una cultura de aprendizaje basada en la solución de problemas, dicha afirmación se puede evidenciar al verificar los resultados arrojados por el estudio PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE) 2012, que permite comparar la educación colombiana con otros sistemas educativos (ver Tabla 1).

Tabla 1. Resultados pruebas PISA 2012.

	Matemáticas	Lectura	Ciencias
Shanghái-China	613	570	580
Promedio OECD	494	496	501
Chile	423	441	445
México	413	424	415
Uruguay	409	411	416
Costa Rica	407	441	429
Brasil	391	410	405
Argentina	388	396	406
Colombia	376	403	399
Perú	368	384	373

En los resultados de la prueba PISA 2012 es evidente como el desempeño de los estudiantes colombianos, particularmente en matemáticas, se mantiene por debajo del promedio

de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). En consecuencia, Colombia se ubica dentro de los últimos puntajes de América Latina, y, por tanto, del total de los países participantes. Como puede observarse, en matemáticas, 7 de cada 10 estudiantes colombianos se encuentran por debajo del nivel 2, considerado por la OCDE como el mínimo necesario para participar en una sociedad moderna, 3 de cada 100 se desempeñan en el nivel 4, es decir por encima del mínimo esperado, aunque no al nivel óptimo para la realización de actividades cognitivas complejas, y ninguno se encuentra en el nivel 6, donde los estudiantes se caracterizan por tener potencial para realizar actividades de alta complejidad cognitiva o científica.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba PISA 2012, se evidencia la necesidad de proponer un currículo colombiano en matemáticas más retador, de tal modo que se pueda integrar la resolución de problemas y se busque el desarrollo del pensamiento matemático. En ese mismo sentido De Losada (2011) en el XXIV Coloquio distrital de matemáticas y estadística, afirma que hay que enfrentar dos aparentes paradojas que han aparecido en los últimos 15 años en el contexto de la educación matemática. La primera surge en Singapur, donde el Ministerio de Educación ha pedido a los maestros que enseñen menos para que los estudiantes puedan aprender más y la segunda corresponde al desarrollo de un currículo muchos más retador para todos los estudiantes donde se involucre la creatividad, la motivación y el reto.

De los anteriores planteamientos se puede deducir que, gracias a un currículo más retador y a la solución de problemas retadores, se puede llegar a propiciar una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Dicha relación se definiría como un enriquecimiento mutuo que se da entre el entendimiento de la matemática y el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante, siendo el mismo cíclico y dinámico a la vez.

Es así como el estudiante que cursa el último grado de educación secundaria o el primer semestre de universidad, debe tener la oportunidad de encontrar una matemática más retadora, donde se ponga de manifiesto aspectos relevantes para su proceso de aprendizaje. De Losada (2011) manifiesta que existen razones suficientes para impulsar y renovar la educación matemática en Colombia, que aplica tanto a nivel de educación media como superior, lo cual

significa que para llevar a cabo un verdadero giro en el proceso de enseñanza de la matemática es indispensable realizar una planeación cuidadosa de clase donde se propongan problemas originales y retadores utilizando representaciones no estándar.

Al tener en cuenta los anteriores argumentos, surge el siguiente problema de investigación ¿Cómo favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad?

Algunos Referentes Teóricos

Teoría de la resolución de problemas: existe diversidad en la tipología de problemas que se emplean en matemáticas; la diferencia más importante para los profesores de matemáticas reside en los problemas que se denominan como rutinarios y los que no son rutinarios.

Se puede denominar como problema rutinario aquella situación que puede ser resuelta empleando un criterio que el estudiante aplica sin ningún esfuerzo ni conflicto, y que dada esta circunstancia no existe para el estudiante ningún tipo de desafío a su conocimiento. De este modo el estudiante obtiene cierta práctica en la aplicación de una regla para solucionar otros ejercicios que tengan características similares a la del problema formulado.

Por otra parte, un problema no es rutinario cuando el estudiante debe aportar cierto elemento de imaginación y originalidad para poder abordarlo, de esta forma enfrentar un problema no rutinario implica que el estudiante requiere un verdadero esfuerzo para encontrar su solución. Sin embargo, se debe partir del hecho que el estudiante no resolverá la situación presentada si no tiene razones para hacerlo.

Modelo de solución de problema propuesto por Polya: el modelo de solución de problemas que propone Polya (1965) se basa en cuatro fases, las cuales aparecen en su libro “Cómo plantear y resolver problemas” y se mencionan a continuación.

En la primera fase denominada comprensión del problema, es fundamental que el enunciado de la situación problema planteada sea comprendida por el alumno, de modo que tenga la capacidad de separar las principales partes del problema, determinar la incógnita, establecer los datos relevantes y encontrar las condiciones de la situación presentada.

Para la segunda fase, designada como concepción de un plan, se establece que el

estudiante tiene un plan cuando sabe o al menos tiene una idea de los cálculos, razonamientos o construcciones que debe realizar para resolver la situación que se le planteó.

La tercera fase llamada por el autor ejecución del plan, consiste en ejecutar la concepción de la idea para solucionar el problema, tarea que no es nada sencilla, para lograr esta meta es necesario que el alumno ponga en juego todos los conocimientos que ha adquirido, su pensamiento matemático, concentración y hasta buena suerte.

Por último, se tiene la fase denominada visión retrospectiva en la cual es importante realizar un proceso de reconsideración de la solución, por ello es necesario verificar el resultado del plan concebido.

El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático: el razonamiento se caracteriza por ser un proceso del pensamiento que posibilita obtener conclusiones a partir de ciertas premisas preestablecidas, de acuerdo a esta concepción se puede realizar una distinción entre razonamiento inductivo y deductivo. Para Poincaré (1929) la inducción se refiere al acto de reflexionar y tratar la naturaleza del razonamiento matemático, de modo que la inducción es el camino para llegar al conocimiento en cualquier ciencia, particularmente en la matemática, donde se parte de situaciones particulares para poder establecer regularidades y por último generalizar. A su vez Whitehead (2012) establece que la inducción parte de la percepción de lo general a lo particular, de distinguir lo que se conserva invariante y lo que es transitorio, durante el proceso de la generación del conocimiento científico.

Razonamiento inductivo y educación matemática: en los estándares curriculares establecidos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) se puede evidenciar como la generalización debe ser uno de los principales objetivos en educación matemática, esta afirmación se realiza gracias a la importancia de la inducción y del razonamiento inductivo en el proceso de formación de los estudiantes. Por ello se puede considerar a la inducción como un medio poderoso para la adquisición de conocimientos y el descubrimiento en matemáticas, de tal modo que los estudiantes experimenten situaciones semejantes a las que debe vivir un matemático en su rol como científico. Es evidente entonces como la inducción se puede describir en términos de la recolección de ideas, donde se pueda

vislumbrar aspectos que van más allá de lo que podemos percibir, de modo que se puedan ver regularidades y además plantear conjeturas. De acuerdo con las observaciones que se han venido realizando, el National Council of Teachers of Mathematics afirma que hacer matemáticas implica descubrimiento y las conjeturas son el principal camino hacia el descubrimiento.

El papel de las representaciones visuales en el aprendizaje de las matemáticas: el sentido de la visión es la fuente más importante de información que poseemos sobre el mundo que nos rodea, pues la mayor parte del cerebro participa en este proceso ya sea manteniendo el control visual del movimiento, percibiendo el entorno, codificando símbolos, formas o color de los objetos.

Las matemáticas, como producto del intelecto humano, tratan con objetos y entes muy diferentes a los que podemos encontrar en los fenómenos físicos, pues dependen en gran medida de su visualización en diferentes formas o niveles. Es así como este tipo de visualizaciones se encuentran mucho más allá del campo visual de la geometría o de la visualización espacial en matemáticas. Es importante resaltar el concepto de Zimmermann y Cunningham (1991) al proponer que la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre las imágenes y diagramas, que se crean en nuestra mente, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y hacer avanzar la comprensión.

Generación de un currículo más retador en matemáticas para todos los estudiantes: De Losada (2011) propone que se debe diseñar y desarrollar un currículo matemático más retador para todos los estudiantes, de este modo se puede analizar la matemática como ciencia y además efectuar una práctica docente más profunda en donde se deje de lado los prejuicios del maestro.

Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede encontrar una línea de investigación y desarrollo enmarcada en el diseño, organización y realización de diversos aspectos que buscan promover una experiencia más retadora en matemáticas. Uno de los aspectos más importantes de esta teoría consiste en poder describir la naturaleza del pensamiento matemático y determinar cómo se puede llevar a cabo el desarrollo del mismo en el aula de clase, de tal forma que sea para el estudiante apropiado y divertido.

Comunidades de práctica: a nivel académico, las instituciones se basan en el supuesto

que el aprender debe ser un proceso de carácter individual que simplemente tiene un principio y un final, con el propósito que los estudiantes presten atención al docente o se centren en resolver ciertos ejercicios propuestos. Para Wenger (2010) es necesario replantear el proceso de aprendizaje en el aula, teniendo en cuenta que puede ser un fenómeno primordialmente social donde se refleja la naturaleza del ser humano como individuo capaz de conocer, en este sentido las comunidades de practica tiene en cuenta que somos seres sociales, el conocimiento es una cuestión de competencia en relación con el campo de desempeño del individuo y el conocimiento que se adquiere participando en la consecución de estas competencias.

Curso de solución de problemas: el curso de solución de problemas matemáticos es una propuesta metodológica que tiene como propósito servir como escenario para lograr realizar exitosamente la transición de los estudios secundarios a los universitarios en matemáticas y nivelar sin repasar repetitivamente los conceptos matemáticos elementales de los alumnos que ingresan a las facultades de ingeniería, licenciatura, ciencias administrativas, económicas y sociales en la Universidad Antonio Nariño.

Modelo Didáctico Implementado en el Curso de Solución de Problemas Matemáticos

El modelo didáctico para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos, proporciona un soporte teórico a las dificultades que presentan los estudiantes que realizan la transición de la escuela secundaria a la terciaria.

Las fases que sustentan el modelo didáctico propuesto se consideran factibles para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos, donde convergen aspectos didácticos, matemáticos, conceptuales, psicológicos, pedagógicos, epistemológicos que permiten establecer objetivos instruccionales, desarrolladores y formativos para la propuesta. Estos objetivos enmarcan las fases de planificación docente, contenidos de la secuencia didáctica de actividades, elaboración de secuencia didáctica de actividades, formulación de problemas retadores, saberes previos, validación de los contenidos propuestos en la secuencia didáctica de actividades, abordaje del problema, resolución del problema retador y socialización de resultados, donde cada una de estas fases se favorecen una a la otra y gracias al sistema de actividades compuesto por

problemas retadores, favorece el proceso de entendimiento de las matemáticas elementales en los estudiantes y el desarrollo de su pensamiento matemático.

El modelo didáctico propuesto para la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos, se validó por medio del método Delphi para el procesamiento de los resultados de encuestas a expertos en investigación educacional.

Metodología

El estudio se realizó con dos grupos de estudiantes diferentes, el primero de ellos estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell y el segundo, con estudiantes de la Universidad Antonio Nariño. En el curso de grado once participaron veintiún estudiantes, trece hombres y nueve mujeres, en la cátedra de solución de problemas participaron veintinueve estudiantes, veintiún hombres y ocho mujeres, quienes durante el segundo semestre de 2016 estaban cursando el primer semestre de diversas facultades de ingeniería en la Universidad Antonio Nariño.

La implementación del curso de solución de problemas matemáticos en el Colegio José María Carbonell y la Universidad Antonio Nariño, se llevará a cabo inicialmente interviniendo al grupo de estudiantes con una prueba de entrada para establecer los saberes previos que tienen los estudiantes en relación con la teoría de números, el álgebra, la geometría y la combinatoria; esta prueba servirá para contrastar el estado inicial de los estudiantes, comparado con el nivel de entendimiento en matemáticas elementales y desarrollo de pensamiento matemático que muestren al finalizar la secuencia didáctica que se propone en la investigación. De esta forma se pretende favorecer el entendimiento en matemáticas elementales y desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad a través de la solución de problemas retadores.

Para el diseño de las actividades se tienen en cuenta los planteamientos formulados por el panel de expertos del estudio ICME 13 (Gueudet, Bosch, DiSessa, Kwon, & Verschaffel, 2016), en relación con las transiciones que se dan entre la escuela secundaria y la del nivel terciario. De este modo para el diseño del curso de solución de problemas para estudiantes de grado oncenso, se tuvo en cuenta que las matemáticas en secundaria hacen hincapié en la

producción de resultados y un aspecto más práctico de la actividad matemática, donde los axiomas, definiciones y pruebas se utilizan más para embellecer la clase de matemática que con un sentido práctico, mientras que para el diseño del curso de solución de problemas universitario, se tuvo en cuenta la organización teórica de los contenidos matemáticos, el reconocimiento de fundamentos del conocimiento, el trabajo con teoremas y demostraciones.

No obstante, lo que se quiere en realidad es minimizar el sentido incompleto de las matemáticas en la escuela secundaria, teniendo en cuenta que aparecen como un conjunto de tareas aisladas que tienen una sola técnica de solución, donde la validación de los resultados se basa más en evidencias que en una construcción formal, al igual que la incompletitud que se da a nivel universitario al introducir resultados teóricos sin conexión con los problemas y tareas que los motivan, así la necesidad de nuevos conocimientos está relacionada en raras ocasiones con el contenido y las prácticas de la matemática de la escuela secundaria (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

Es así como la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria se considera como una transición crítica (Yerushalmy, 2005), pues en ella se involucra un notable cambio en la forma de pensar del estudiante. Esta transición es también considerada crítica, pues conlleva a obstáculos epistemológicos y una discontinuidad entre los contenidos que se trabajan en la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario. Por ello la secuencia de actividades se centra en cuatro ramas de la matemática elemental las cuales son la teoría de números, la combinatoria, el álgebra y la geometría, que son contenidos genéricos que se abordan en las matemáticas a nivel de educación superior.

Por las consideraciones anteriores, para el diseño de las clases se tiene en cuenta como el estudiante debe mejorar sustancialmente las herramientas que utiliza en la solución de problemas matemáticos, como por ejemplo el lenguaje verbal, la semiótica y las representaciones involucradas en las soluciones que presenta.

Es importante destacar que en el diseño de las actividades se tuvo en cuenta que la transición que realizan los estudiantes es de carácter cognitivo, por ello se utilizaron diferentes marcos teóricos para su elaboración. Con referencia a lo anterior el panel de expertos que trabajó el tema en el ICME 13 (Gueudet, Bosch, DiSessa, Kwon, & Verschaffel, 2016), establece que

las transiciones que se dan deben ser de carácter general y no particulares, como por ejemplo la transición de la aritmética al álgebra. Puntualmente cada una de las actividades se enmarcó dentro de dos preguntas que caracterizan el diseño de las clases en los cursos de solución de problemas matemáticos, las preguntas abordan las características propias del área de matemáticas y las prácticas pertinentes que se deben dar en cada grupo, las cuales son ¿Cuáles son esas características? y ¿Cuáles son las similitudes (continuidad) y diferencias (discontinuidad) entre las matemáticas y las prácticas de los distintos grupos?

Por ello se evidencia como las temáticas de cada curso guardan alguna relación sin que deban ser las mismas, lo que también ocurre con los problemas formulados. De este modo con la implementación de la secuencia didáctica de actividades se trata de develar las respuestas a las interrogantes que plantean el panel de expertos en el congreso ICME 13 (Gueudet, Bosch, DiSessa, Kwon, & Verschaffel, 2016) que investiga las transiciones en educación matemática.

Es importante mencionar que lo que se quiere en el diseño del curso en general es superar obstáculos epistemológicos que conducen a una discontinuidad en el aprendizaje de las matemáticas (Sierpinska, 1990). Por ello se quiere romper este paradigma en el momento que los estudiantes resuelven problemas retadores que generen un entendimiento de las matemáticas elementales y a su vez generen un desarrollo del pensamiento matemático.

Como apreciación final es importante mencionar que el hecho de tomar contenidos de la matemática elemental, se ajusta a los lineamientos que proponen el panel de expertos en el congreso ICME 13 (Gueudet, Bosch, DiSessa, Kwon, & Verschaffel, 2016) que investiga el tema de transiciones en matemáticas en los niveles de educación escolar y superior. Cabe agregar que el panel de expertos afirma que, al construir conceptos robustos en matemáticas elementales en un nivel avanzado, se logra romper la discontinuidad que se presenta en la matemática de la escuela secundaria a la universitaria.

Análisis de los resultados de la implementación del modelo didáctico y la respectiva secuencia de actividades

Con el objetivo de establecer los cambios positivos en los alumnos de la Institución Educativa Distrital José María Carbonell que participaron del curso de solución de problemas matemáticos, se comparó el promedio que obtuvieron en las pruebas Saber 11 en matemáticas, con el promedio de años anteriores en la misma área. Como se puede observar en la Figura 1, el

promedio del desempeño en las pruebas Saber 11 de los estudiantes de grado once que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos fue de 51,61 puntos en el área de matemáticas, lo que representa un aumento en un 13,67% respecto al año anterior, además fue el puntaje más alto registrado en los últimos diez años en la Institución Educativa José María Carbonell.

Figura 1. Histórico del promedio de las pruebas Saber 11 en el área de matemáticas de los años 2007 a 2016 en la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.



Adicionalmente para constatar que hubo un cambio positivo en los estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos de grado oncenno, se diseñó una encuesta de satisfacción con el propósito de comparar su actitud hacia las matemáticas con las que muestran sus compañeros actuales en las instituciones educativas en que se encuentran inscritos.

La encuesta se aplicó a quince de los veintiuno estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos de grado once, pues sólo ellos continuaron sus estudios a nivel de educación tecnológica o superior en diferentes instituciones donde toman cursos relacionados con el área de matemáticas. La encuesta de satisfacción cuenta con una serie de enunciados, en los cuales los estudiantes consultados deben establecer en qué grado se encuentran de acuerdo o en desacuerdo con dicho enunciado, los mismos cuentan con una escala Likert que permite evaluar cuantitativamente sus opiniones (ver Tabla 2).

Tabla 2. Tabulación encuesta de satisfacción aplicada a estudiantes de grado once de la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

	Escala Likert	Totalmente en Desacuerdo	En desacuerdo	Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí	F. Absoluta	0	0	0	3	12
	F. Relativa	0%	0%	0%	20%	80%
He encontrado el curso de solución de problemas matemáticos intelectualmente estimulante	F. Absoluta	0	0	0	1	14
	F. Relativa	0%	0%	0%	6,66%	93,30%
Mi interés por las matemáticas ha aumentado luego de cursar la cátedra de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	2	13
	F. Relativa	0%	0%	0%	13,33%	86,66%
El curso de solución de problemas matemáticos me ha motivado a ampliar mis conocimientos en matemáticas fuera de clase	F. Absoluta	0	0	1	3	11
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	20%	73,33%
Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas gracias al curso de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	4	11
	F. Relativa	0%	0%	0%	26,66%	73,33%
El curso de solución de problemas matemáticos estimuló mi deseo de llegar lo más lejos posible en mis intereses académicos	F. Absoluta	0	0	1	5	9
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	33,33%	60%
Recomendaría el curso de solución de problemas matemáticos a estudiantes de otras universidades	F. Absoluta	0	0	0	3	12
	F. Relativa	0%	0%	0%	20%	80%
Resolver problemas matemáticos o en otras áreas relacionadas es placentero para mí	F. Absoluta	0	0	2	5	8
	F. Relativa	0%	0%	13,33%	33,33%	66,66%
Utilizar las matemáticas en otras cátedras es satisfactorio para mí	F. Absoluta	0	0	1	4	10
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	26,66%	66,66%
Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios	F. Absoluta	0	0	0	6	9
	F. Relativa	0%	0%	0%	40%	60%
Espero utilizar habitualmente la matemática en mi vida como futuro profesional	F. Absoluta	0	0	0	0	15
	F. Relativa	0%	0%	0%	0%	100%
Me gustaría como futuro profesional tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar matemáticas	F. Absoluta	0	0	1	5	9
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	33,33%	60%
Me siento mejor preparado que mis compañeros de clase en las asignaturas relacionadas con matemáticas	F. Absoluta	0	0	1	7	7
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	46,66%	46,66%
Mi desempeño académico en las áreas del conocimiento relacionadas con matemáticas son mejores que las de mi compañeros de clase	F. Absoluta	0	0	3	9	3
	F. Relativa	0%	0%	20%	20%	20%

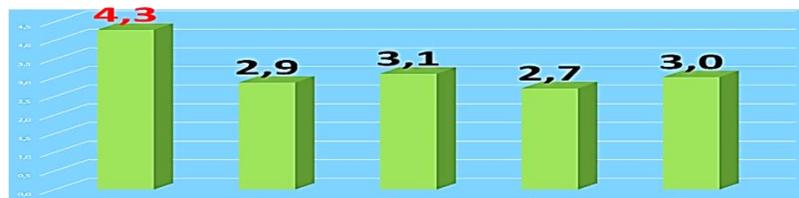
De acuerdo con los resultados obtenidos en la encuesta de satisfacción, se pudo constatar como los quince estudiantes que continuaron sus estudios a nivel de educación tecnológica o superior de la Institución Educativa José María Carbonell, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas de acuerdo con las respuestas brindadas. Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede afirmar que los estudiantes de grado once que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos, donde se implementó el modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento, permitió una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario.

Con el propósito de determinar los cambios positivos de los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que participaron de la cátedra de solución de problemas matemáticos, se comparó el promedio de notas finales obtenido en los cursos de Solución de

Problemas Matemáticos, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, con otros grupos de estudiantes.

A continuación, se muestra el promedio de notas finales (Figura 2) de los alumnos que participaron en el estudio realizado en la presente investigación y se contrastan con el promedio de notas obtenidos por cuatro grupos de estudiantes de la sede sur de la Universidad Antonio Nariño que cursaban simultáneamente la cátedra de solución de problemas matemáticos con otras propuestas de trabajo en clase, pero los mismos contenidos.

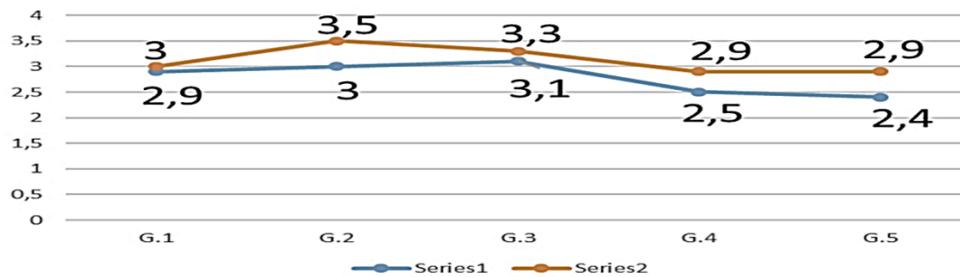
Figura 2. Promedio de notas definitivas de los cursos de solución de problemas matemáticos 2016 – 2 sede sur Universidad Antonio Nariño.



En la Figura 2 el primer promedio que aparece corresponde a las notas definitivas obtenidas por los estudiantes que estudiaron bajo la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación; se observa cómo este promedio es mayor al promedio de notas obtenido por los cuatro grupos de estudiantes que cursaban simultáneamente la misma asignatura en la sede sur de la Universidad Antonio Nariño. Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede inferir que el curso de solución de problemas matemáticos al incorporar una secuencia didáctica de actividades conformada por problemas atractivos, estimulantes y llenos de interés (Mazarío, I., Sanz, T., Hernández, R., Yll, M., Horta, M. & Mazarío, A., 2002), promueve una motivación intrínseca (Middleton, 1995) en los estudiantes, obteniendo un mejor rendimiento académico en comparación con otros alumnos.

Después de lo anteriormente expuesto, en la Figura 3 se muestra el promedio de notas finales en el curso de Cálculo Diferencial de los alumnos que participaron en el estudio realizado en la presente investigación y se contrastan con el promedio de notas obtenidas por los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que cursaban simultáneamente la cátedra de solución de problemas matemáticos con otras propuestas de trabajo en clase, pero con los mismos contenidos.

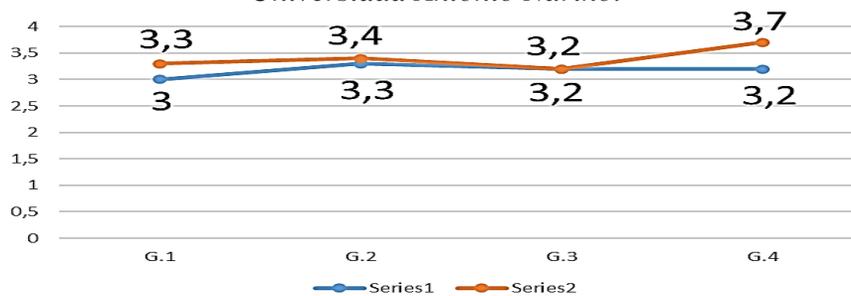
Figura 3. Promedio de notas definitivas de los cursos de Cálculo Diferencial 2016 – 2 sede sur Universidad Antonio Nariño.



Cómo puede apreciarse en la Figura 3, la serie 2 corresponde al promedio de notas definitivas obtenidas por los estudiantes inscritos en los cursos de Cálculo Diferencial que estudiaron bajo la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación. Se puede observar cómo este promedio es mayor al promedio de notas obtenido por sus compañeros de clase (serie 1) en los cinco cursos de Cálculo Diferencial que se orientaron en la sede sur de la Universidad Antonio Nariño. Hechas las consideraciones anteriores se puede deducir que el curso de solución de problemas matemáticos que se plantea en la actual investigación propicia en el estudiante el desarrollo de actitudes relacionadas con hábitos de trabajo, curiosidad e interés por investigar y resolver problemas, donde intervienen la creatividad, la formulación de conjeturas, la flexibilidad para modificar o cambiar su propio punto de vista y, lo más importante, la autonomía intelectual para abordar situaciones nuevas con la confianza de aprender (Gómez, 2009), lo que se deriva en un mejor rendimiento académico en cursos de matemáticas a nivel de educación superior.

Dadas las condiciones que anteceden, en la Figura 4 se puede apreciar el promedio de notas definitivas de la cátedra Cálculo Integral de los estudiantes que participaron en el estudio realizado en la presente investigación y se contrastan con el promedio de notas obtenidas por sus compañeros de clase en la Universidad Antonio Nariño, teniendo en cuenta que esta asignatura la cursaron en el período académico posterior al curso de Cálculo Diferencial.

Figura 4. Promedio de notas definitivas de los cursos de Cálculo Integral 2017 – 1 sede sur Universidad Antonio Nariño.



Tal como se observa en la Figura 4, la serie 2 corresponde al promedio de notas definitivas obtenidas por los estudiantes inscritos en los cursos de Cálculo Integral que estudiaron con la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación. Puede observarse cómo este promedio es mayor o igual al promedio de notas obtenido por sus compañeros de clase (serie 1) en los cuatro cursos de Cálculo Integral que se orientaron en la sede sur de la Universidad Antonio Nariño. Es importante mencionar que del 18,51% de alumnos que reprobaron esta cátedra, ninguno de ellos pertenecía al grupo de estudiantes que participaron en el estudio realizado en la presente investigación.

Adicionalmente para constatar que hubo un cambio positivo en los estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos universitario, se diseñó una encuesta de satisfacción con el propósito de comparar su actitud hacia las matemáticas con las que muestran sus compañeros en la Universidad Antonio Nariño.

La encuesta se aplicó a veintitrés de los veintinueve estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos a nivel terciario, pues sólo ellos continuaron sus estudios en la Universidad Antonio Nariño. En la actualidad toman las siguientes clases de matemáticas: Cálculo Integral (4 alumnos), Álgebra Lineal (6 alumnos), Ecuaciones Diferenciales (1 alumno) y Cálculo Multivariado (14 alumnos), es importante tener en cuenta que algunos de ellos toman dos cursos simultáneamente. Respecto al marco general de la encuesta de satisfacción, la misma cuenta con una serie de enunciados en los cuales los estudiantes consultados deben establecer en qué grado se encuentran de acuerdo o en desacuerdo con dicho enunciado, los mismos cuentan con una escala Likert que permite evaluar cuantitativamente sus opiniones, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Tabulación encuesta de satisfacción aplicada a estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

	Escala Likert	Totalmente en Desacuerdo	En desacuerdo	Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí	F. Absoluta	0	0	0	2	21
	F. Relativa	0%	0%	0%	8,69%	91,30%
He encontrado el curso de solución de problemas matemáticos intelectualmente estimulante	F. Absoluta	0	0	0	0	23
	F. Relativa	0%	0%	0%	0%	100%
Mi interés por las matemáticas ha aumentado luego de cursar la cátedra de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	1	22
	F. Relativa	0%	0%	0%	4,34%	95,65%
El curso de solución de problemas matemáticos me ha motivado a ampliar mis conocimientos en matemáticas fuera de clase	F. Absoluta	0	0	0	5	18
	F. Relativa	0%	0%	0%	21,73%	78,26%
Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas gracias al curso de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	5	18
	F. Relativa	0%	0%	0%	21,73%	78,26%
El curso de solución de problemas matemáticos estimuló mi deseo de llegar lo más lejos posible en mis intereses académicos	F. Absoluta	0	0	0	2	21
	F. Relativa	0%	0%	0%	8,69%	91,30%
Recomendaría el curso de solución de problemas matemáticos a estudiantes de otras universidades	F. Absoluta	0	0	0	1	22
	F. Relativa	0%	0%	0%	4,34%	95,65%
Resolver problemas matemáticos o en otras áreas relacionadas es placentero para mí	F. Absoluta	0	0	2	5	8
	F. Relativa	0%	0%	8,69%	21,73%	69,56%
Utilizar las matemáticas en otras cátedras es satisfactorio para mí	F. Absoluta	0	0	0	3	20
	F. Relativa	0%	0%	0%	13,04%	86,95%
Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios	F. Absoluta	0	0	4	8	11
	F. Relativa	0%	0%	17,39%	34,78%	47,82%
Espero utilizar habitualmente la matemática en mi vida como futuro profesional	F. Absoluta	0	0	0	0	23
	F. Relativa	0%	0%	0%	0%	100%
Me gustaría como futuro profesional tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar matemáticas	F. Absoluta	0	0	0	3	20
	F. Relativa	0%	0%	0%	13,04%	86,95%
Me siento mejor preparado que mis compañeros de clase en las asignaturas relacionadas con matemáticas	F. Absoluta	0	0	4	10	9
	F. Relativa	0%	0%	17,39%	43,47%	39,13%
Mi desempeño académico en las áreas del conocimiento relacionadas con matemáticas son mejores que las de mi compañeros de clase	F. Absoluta	0	0	3	11	9
	F. Relativa	0%	0%	13,04%	47,82%	39,13%

De acuerdo con los resultados obtenidos en la encuesta de satisfacción, se pudo constatar como los veintitrés estudiantes que continuaron sus estudios en la Universidad Antonio Nariño, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas de acuerdo con las respuestas brindadas. Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede afirmar que los universitarios que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos, donde se implementó el modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento, permitió una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario.

Conclusiones

Los resultados prácticos experimentales obtenidos en la investigación desarrollada corroboran la validez de las bases teóricas desarrolladas y su aplicabilidad en la escuela

secundaria y universitaria al conseguir:

- Disminuir la brecha que existe entre los niveles de educación media y superior, al intentar realizar una aproximación entre las prácticas pedagógicas de la escuela secundaria y vincularlas a las exigencias de la educación superior a través de la solución de problemas matemáticos, lo que promueve una relación dinámica y positiva entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.
- Mejorar el proceso de aprendizaje en el área de matemáticas de la escuela secundaria y de la universidad, al superar los obstáculos epistemológicos que muestran los estudiantes respecto a la inadecuada interpretación de las propiedades de los números, en particular los enteros.
- Un desarrollo del pensamiento formal en el estudiante por medio del análisis combinatorio, al vincular progresivamente esquemas intuitivos que terminen siendo aproximaciones a las ideas normativas, de modo que el alumno se aproxime al concepto que se desea que construya a través de la solución de problemas.
- Difuminar la frontera que existe entre los contenidos y los conceptos que se trabajan en la escuela secundaria como en educación superior, por medio de la resolución de problemas algebraicos, que ha sido durante mucho tiempo el tema de transición por excelencia utilizado por los investigadores en educación matemática a nivel mundial.
- Propiciar en los estudiantes la construcción de conceptos robustos y formales en geometría, los cuales disminuyen las discontinuidades en el currículo que se imparte a nivel secundario y terciario. Sobre la base de las consideraciones anteriores se promueve en el alumno procesos matemáticos como la visualización y el sentido espacial.

Partiendo del significado de los objetos, la práctica, la comunidad y la identidad, que propone Wenger (2010), se evidencia como los integrantes de los cursos de solución de problemas matemáticos del Colegio José María Carbonell y de la Universidad Antonio Nariño, tienen un mejor entendimiento de la matemática elemental y un desarrollo del pensamiento matemático gracias al inevitable proceso de participación social en el aula de clases.

Gracias al diseño y desarrollo de un currículo matemático más retador como se propone en los cursos de solución de problemas matemáticos, se permite que el profesor analice su práctica docente de una forma más profunda, dejando de lado sus propios prejuicios. Es así

como el autor de la presente tesis encontró una línea de investigación y desarrollo enmarcada en el diseño, organización y realización de diversos aspectos de la educación matemática que buscan promover una experiencia más retadora en matemáticas, logrando describir la naturaleza del pensamiento matemático y encontrando en la clase de solución de problemas matemáticos un camino para desarrollar esta teoría.

El promedio del desempeño en las pruebas Saber 11 de los estudiantes de grado once que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos presentado en la actual investigación, además de tener un aumento significativo respecto al promedio del año anterior, fue el puntaje más alto registrado en los últimos diez años en la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la encuesta de satisfacción, se pudo constatar como los estudiantes de grado once de la Institución Educativa José María Carbonell que continuaron sus estudios a nivel de educación tecnológica o superior, mostraron una actitud positiva hacia las matemáticas luego de haber tomado el curso de solución de problemas matemáticos en el que se implementó el modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento matemático, lo que les permitió una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la de la universidad.

Los estudiantes que estudiaron bajo la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación, obtuvieron un promedio de notas significativamente más alto en la cátedra solución de problemas matemáticos que los otros cuatro grupos de estudiantes que cursaban simultáneamente la misma asignatura en la Universidad Antonio Nariño. Significa entonces que la incorporación de una secuencia didáctica de actividades conformada por problemas atractivos, estimulantes y llenos de interés, suscita una motivación intrínseca que promueve el aprendizaje en los estudiantes, obteniendo un mejor rendimiento académico en comparación con otros alumnos.

El promedio de notas definitivas obtenidas por los estudiantes inscritos en los cursos de Cálculo Diferencial y Calculo Integral que participaron en la propuesta didáctica que se presenta en la actual tesis, fue mayor o igual al promedio de notas obtenido por sus compañeros de clase en la Universidad Antonio Nariño. Es evidente entonces como el curso de solución de problemas

matemáticos que se plantea en la actual investigación, desarrolla en el alumno actitudes relacionadas con hábitos de trabajo, curiosidad, interés por investigar y resolver problemas donde intervienen la creatividad, la formulación de conjeturas, la flexibilidad para modificar su propio punto de vista y de este modo obtener una autonomía intelectual para abordar situaciones nuevas con la confianza de aprender. Sobre la base de las consideraciones se puede concluir que el desarrollar una forma flexible e independiente de pensar permite a los estudiantes aprender otros dominios de las matemáticas con relativa facilidad, fomentando así un mejor rendimiento académico en cursos de matemáticas a nivel de educación superior.

Los resultados arrojados por la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que continuaron sus estudios de pregrado, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas, gracias al modelo didáctico que promueve el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento y que se aplicó en el curso de solución de problemas matemáticos, lo que les permitió tener una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la de la universidad.

La transición que experimentan los estudiantes de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria es considerada por muchos autores como una transición crítica, que conlleva a obstáculos epistemológicos y a una discontinuidad en los contenidos que se trabajan en la escuela secundaria y en el nivel terciario. Si bien estudios como el ICME 13 (Gueudet, Bosch, DiSessa, Kwon, & Verschaffel, 2016) han resaltado la importancia de encontrar posibles soluciones a esta problemática, en Colombia existen pocas investigaciones sobre la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria.

Recomendaciones

La implementación del curso de solución de problemas matemáticos sustentada en el modelo didáctico que fortalece el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad, en los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell y de la facultad de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de la investigación realizada en la presente tesis requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Profundizar en la aplicación de la propuesta didáctica a otros cursos de la educación básica

y media en Colombia.

- Divulgar los resultados obtenidos en la investigación a los docentes de las instituciones educativas donde se llevó a cabo el estudio, en relación con la metodología y la secuencia didáctica de actividades empleadas en el curso de solución de problemas matemáticos.
- Institucionalizar el modelo didáctico junto con su respectiva secuencia de actividades en los cursos de solución de problemas matemáticos de la Universidad Antonio Nariño.
- Continuar la investigación en la Universidad Antonio Nariño para indagar sobre los posibles efectos positivos que esta forma de enseñar las matemáticas tendría en cursos posteriores al de resolución de problemas matemáticos.
- Realizar nuevas investigaciones, desarrolladas por la comunidad científica dedicada a trabajar en el área de educación matemática en Colombia, que contribuyan a mejorar el proceso de transición que realizan miles de estudiantes que llegan a la universidad anualmente.

Referencias

- Barbeau, E., & Taylor, J. (2005). ICMI Study 16: Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom: Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 125 –139. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10649-005-8481-7>.
- Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique Des*, 1 – 47. Disponible en: <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsid=16461539>
- De Losada, M. (2011, Sep). Retos matemáticos: una agenda para investigación y acción. *XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Disponible en: <http://www.etnomatematica.org/memorias/MEMORIAS%20COLOQUIO%202011.pdf>
- Gómez, I. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática*, 21 (3), 5 – 32. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000300002&lang=pt
- Gueudet, G., Bosch, M., DiSessa, A., Kwon, O., & Verschaffel, L. (2016). Transitions in Mathematics Education. *The Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31622-2>
- Mazarío, I., Sanz, T., Hernández, R., Yll, M., Horta, M., & Mazarío, A. (2002). *Reflexiones sobre un tema polémico: la resolución de problemas*. Universidad de Matanzas. Editorial Universitaria. Disponible en: <http://libros.metabiblioteca.org/bitstream/001/358/5/978-959-16-0676-1.pdf>
- Middleton, J. (1995). A Study of Intrinsic Motivation in the Mathematics Classroom: A Personal Constructs Approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (3), 254-279. doi:10.2307/749130

- NCTM. (2003). *Standards for Secondary Mathematics Teachers*, 1–7. Disponible en: <http://www.ncate.org/ProgramStandards/NCTM/NCTMSECONStandards.pdf>
- Peña, R. (2017, Dec). Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos. Tesis Doctoral. Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
- Poincaré, H. (1929). Science and hypothesis. *Nature*, 123 (3104), 645 – 648. Disponible en: <https://doi.org/10.1038/123645a0>
- Polya, G (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [título original: How To Solve It?, 1945]. México: Trillas.
- Pozo, J., & Pérez, M. (2011). Psicología del Aprendizaje Universitario. La formación en Competencias. *Perfiles Educativos*, 33, 201 – 206. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S0185-26982011000100013&script=sci_arttext&tlng=pt
- Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24 – 41. Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/40247990>
- Wenger, E. (2010). Communities of practice and social learning systems: The Career of a concept. *Social Learning Systems and Communities of Practice*, 179 – 198. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-1-84996-133-2_11
- Whitehead, A. (2012). *An introduction to mathematics*. Courier Dover Publications. Disponible en: <file:///C:/Users/HP/Downloads/c05170fae8d4a8a0269783093f43ba22178f.pdf>
- Yerushalmy, M. (2005). Challenging Known Transitions: Learning and Teaching Algebra with Technology. *For the Learning of Mathematics*, 25 (3), 37 – 42. Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/40248510>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Autores:

Renne Peña

rennepena@uan.edu.co

¹Candidato a PhD en Educación Matemática

¹MSc. en Educación Matemática

¹Profesor de la Facultad de Ciencias

¹Universidad Antonio Nariño en Bogotá, Colombia.

Rafael Sánchez

lamonedar@uan.edu.co

PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, IVIC Premio Erdős 2010. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978. Asesor de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y de la Asociación Matemática Venezolana. Actualmente es profesor del programa de maestría y doctorado de la universidad Antonio Nariño en Bogotá, Colombia.