DESARROLLO DE LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA: TEXTOS ARGUMENTATIVOS DE ESTUDIANTES

Soledad Estrella[1]
soledad.estrella@pucv.cl
Hugo Alvarado[2]
alvaradomartinez@ucsc.cl
Raimundo Olfos[1]
raimundo.olfos@pucv.cl
LidiaRetamal[2]
lretamal@ucsc.cl
[1]*Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*
[2]*Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile*

Recibido: 17/01/2019 **Aceptado:** 25/04/2019

RESUMEN

Este trabajo analiza el desarrollo de la comprensión probabilística que presentan niños con talento académico tras una secuencia de aprendizaje de probabilidades. Se reporta un estudio descriptivo interpretativo del cambio en las argumentaciones iniciales y finales escritas, a partir de siete ítems abiertos de probabilidad, caracterizando los argumentos provistos por 20 estudiantesde 11 a 13 años de edadsegún la taxonomía SOLO. Los textos argumentativos finales contienen un repertorio mayorde estrategias en la asignación de probabilidades y en el uso de lenguaje probabilístico, evidenciando un incrementoen el conocimiento de la alfabetización probabilística.
Palabras claves: educación estadística, probabilidad, razonamiento probabilístico, taxonomía SOLO, alfabetización probabilística.

DEVELOPMENT OF PROBABILITY LITERACY: WRITTEN ARGUMENTS BY STUDENTS

ABSTRACT

In this paper, we analyze the development of academic talented children in probabilistic understanding concerning to a learning sequence of probability. We report a descriptive interpretive study of the change in initial and final written arguments, based on seven open-ended items of probability. The arguments provided by 20 11- 13 year old students were characterized following the SOLO taxonomy. The final argumentative texts contain greater repertoire of strategies in the assignment of probabilities and in the use of probabilistic language, evidencing knowledge increment in probabilistic literacy.
Key Words: statistical education, probability, probabilistic reasoning, SOLO taxonomy, probability literacy.

INTRODUCCIÓN

La presencia e importancia de la Probabilidad en el currículo escolar es una tendencia internacional, las directrices promueven que debe desarrollarse desde la educación primaria las componentes de la alfabetización probabilística: las ideas probabilísticas, el lenguaje y asignación de probabilidades. Desde la infancia los niños, y también los adultos, poseen ideas informales y prejuicios en situaciones probabilísticas o en las cuales interviene el azar (Brousseau, 2009; Fischbein y Schnarch, 1997; Kahnemany Tversky, 1972). El hecho de que muchas de estas ideas sean erróneas muestra las limitaciones de argumentos puramente deductivos. Aunque aún se desconocen las principales dificultades de los estudiantes con muchos conceptos de estadística y de probabilidad, Garfield y Ben-Zvi (2008) han indagado en cómo las personas hacen juicios y toman decisiones alafrontar situaciones de incertidumbre. Estos autores estudian la epistemología del concepto, la complejidad cognitiva, y errores y sub-comprensiones en el razonamiento probabilístico.

El currículo de Probabilidad y Estadística de primaria contempla el desarrollo de las intuiciones probabilísticas con actividades de asignación cualitativa (imposible, probable y seguro) y cuantitativa (fracciones y porcentaje), no obstante, su implementación en la institución escolar no articula las ideas informales y creencias sobre las probabilidades que tienen los estudiantescon el razonamiento formal de probabilidad, y que dificultan el aprendizaje de los estudiantes. Otrode los factores que inciden es la débil formación de los profesores en estarama de la matemática,habiéndose detectado dificultades de comprensión de la probabilidad intuitiva (Batanero, Contreras, Cañadas, y Gea, 2012) y de significado de la probabilidad (Gómez, Contreras, y Batanero, 2015).

Frente a este escenario, y en ausencia de estudios sobre oportunidades de aprendizaje estocástico en estudiantes con potencial académico, emerge la necesidad de proveer a los niños en edad escolar –futuros ciudadanos– de la oportunidad de desarrollar una actitud crítica y un conocimiento que les permita decidir frente a la ingente información e incertidumbre a la que están expuestos y contribuir a su alfabetización probabilística.

En este escrito reconocemos a niños con talento académico a aquellos que se distinguen como talentosos en el ámbito de la escuela, que cognitivamente pueden analizar y relacionar los acontecimientos con mayores niveles de complejidad que sus compañeros (Carreño, 2015). Los niños con talento académico se caracterizan por un mayor desarrollo en el procesamiento de la información, mayor capacidad metacognitiva, *insight* en la resolución de problemas, buena capacidad creativa y motivación intrínseca por el aprendizaje.Un estudio longitudinal de estudiantes chilenos con talento académico participantes en uno de estos Programas, ha encontrado que el éxito en lo cognitivo-cuantitativo (puntajes significativamente más altos) parece indicar que los niños de primaria expresan preferencias sistemáticas por cursos relacionados con las matemáticas (Merino, Mathiesen, Mora, Castro, y Navarro, 2014).

Este estudio analiza el desarrollo de la comprensión de las probabilidades de niños con talento académico, quienes participaron en lecciones de Probabilidaden un curso-taller y se centra en la evaluación de la producción de textos argumentativos con el fin de detectar sus conocimientos sobre probabilidad.El estudio da cuenta de las diferencias en las comprensiones de los niños al inicio y término del curso-taller, evidenciado por el nivel de las argumentaciones escritas dadas en las respuestas a un cuestionario de probabilidades. Específicamente, nos preguntamos,

a. ¿Cómo están expresados en sus textos argumentativos los conocimientos de probabilidad adquiridos por los niños?
b. ¿Cómo cambian sus textos argumentativosacerca de situaciones de incerteza luego de las lecciones de probabilidad?

MARCO CONCEPTUAL

Habilidades desde el currículo de matemática

Varios países hanincluido en el currículo los temas de Probabilidad y Estadística (Franklin et al., 2007). Nueva Zelanda es reconocido como un país pionero en educación estadística que lleva casi un tercio de siglo incluyendo la estadística en toda su escolaridad, e integrando estos tópicosen algunos niveles desde hace casi cinco décadas (Burguess, 2007), siendo la estadística uno de los tres ejes en el nuevo currículo y un eje crítico en el aprendizaje de las matemáticas (Sharma, 2014). En Chile desde hace algunas décadas,y cada vez con mayor énfasis, se han incorporado en el currículo escolar los contenidos de Estadística y Probabilidad (MINEDUC, 1990, 2009, 2012). En los años ochenta sólo se consideraban estos tópicos en el último año de la educación secundaria, en cambio, hacia los noventa, diferidamente se incluyeron en secundaria, y en algunos niveles delsegundo ciclo de primaria. Actualmente abarcan toda la escolaridad.

Las bases curriculares de Matemática de los grados 7 a 10(MINEDUC, 2015), establecen que el eje de Probabilidad y Estadística responde a la necesidad que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. En el área de Probabilidad, se pretende que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias.Los conocimientos previos de azar adquiridos esencialmente en los grados 5 y 6, corresponden a las predicciones y realización de experimentos con dados y monedas, (MINEDUC, 2012, 2015).

Argumentar y modelar son habilidades promovidas en los currículos escolares de muchos países. El desarrollo del pensamiento matemático comprende, entre otros, el desarrollo de habilidades cognitivas que promueven el pensamiento, en particular, la argumentación y la modelación, entendiendo que argumentar es formular opiniones fundamentadas, verbalizando sus intuiciones y concluyendo correctamente, así como detectar afirmaciones erróneas o generalizaciones abusivas; y modelar se refiere a construir una versión simplificada y abstracta de un sistema más complejo, que involucra una variedad de representaciones de datos seleccionando y aplicando métodos apropiados y herramientas para resolver problemas del mundo real (MINEDUC, 2012).

Los estándares de la matemática escolar propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de EEUU [NCTM] (2000) consideran desde pre-kínder el desarrollo y evaluación de argumentos matemáticos y lógicos para justificar conclusiones, crear y usar representaciones para comunicar ideas, resolver problemas, modelar e interpretar fenómenos. Aunque, precisamos, que específicamente la capacidad de producir argumentos justificativos aparece entre los 8 a 9 años, (Pontecorvo y Girardet, 1993), esto es, en los grados 3 y 4.

Alfabetización probabilística

La alfabetización estadística ha sido definida por varios investigadores del área (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Watson, 2006a; Wild y Pfannkuch, 1999); sin embargo, la alfabetización probabilística tiende a mantenerse implícita en las definiciones de alfabetización estadística (Gal, 2005). Al respecto, Watson (2006a) señala que la alfabetización estadística es un punto de encuentro de la estadística y la probabilidad del mundo actual.

Como se señalaba, el actual currículo chileno introduce la enseñanza de la Estadística y de la Probabilidad a través de todos los nivelesescolares, en concordancia con las tendencias internacionales que responden a las demandas de la actual sociedad.Esta propuesta curricular favorece la experimentación para, a través de ella, llegar a la teoría.

La característica principal de la Estadística es hacer uso de modelos aleatorios, que involucran varias acepciones de la probabilidad. Este estudio entiende que el complejo concepto de aleatoriedad contiene aspectos referidos al proceso de generación de los resultados aleatorios (experimento aleatorio), a cada resultado aislado (sucesos) y al patrón obtenido en la serie de resultados de dicho proceso (secuencia). En la enseñanza de la probabilidad en la escuela nos interesa evaluar en estudiantes con talentos académicos los siguientes enfoques:

Significado informal de Probabilidad. Sharma (2014) considera que la probabilidad informal está firmemente establecida en la cultura común y que obstaculiza el aprendizaje de la probabilidad formal. Un ejemplo de ello es la creencia que al lanzar un dado existe más posibilidad que salga un “6”, debido a que en muchos juegos de mesa, se espera que salga un “6” más que cualquier otro número del dado, o que salga “cara” porque estéticamente resulta más interesante que el “sello” de la moneda. English y Watson (2016) señalan que las creencias intuitivas sobre "artefactos aleatorios" pueden influir aún más en las respuestas de los estudiantes. Amir y Williams (1999) sostienen que creer en la suerte puede contribuir a que el resultado del lanzamiento de una moneda o la forma en que se lanza tiene un impacto o producirá el resultado preferido;todas estas creencias pueden incidir en la comprensión de los niños de la probabilidad formal.

Significado clásico de Probabilidad. Reconocida como regla de Laplace, establece la probabilidad de un suceso como el cociente entre los casos favorables y el número de casos posibles, bajo condiciones de un número finito de elementos del espacio muestralequiprobable. El significado clásico de probabilidad es popular en la enseñanza primaria debido al interés de los niños por los juegos de azar y sus características de equiprobabilidad, pero ha perdido el predominio en primaria porque exige un razonamiento combinatorio, el cual es cognitivamente complejo para niños.

Significado experimental de Probabilidad. La probabilidad experimental se basa en datos recogidos a través de la experimentación, en que las frecuencias relativas determinan la probabilidad de un suceso, y la probabilidad teórica se obtiene suponiendo la misma probabilidad en el espacio muestral (English y Watson, 2016). Aunque el currículo propone llegar de la probabilidad experimental a la teórica, surgen complejidades cognitivas, por ejemplo, la probabilidad experimental muestra más variabilidad que la teórica en la medida que se realicen pocos ensayos. En el contexto escolar chileno, por lo general, se trabaja con pocos ensayos y se entregan los valores de otras ocurrencias anteriores para estimar la frecuencia relativa.

Además, persisten varias ideas equivocadas que surgen cotidianamente en razonamientos sobreprobabilidades, muchos de las cuales se han estudiado (Estrella, 2017; Kahneman, Slovic, y Tversky, 1982; Serrano, 1996). Por ejemplo, lafalacia del jugadores una falacia lógica por la que se cree erróneamente que los sucesos pasados afectan a los futuros en lo relativo a actividades aleatorias, como en muchos juegos de azar. Esta falacia puede comprender las siguientes ideas equivocadas respecto a un suceso aleatorio: tiene *más* probabilidad de ocurrir porque *no* ha ocurrido durante cierto período, o tiene *menos* probabilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto período, o tiene *más* probabilidad de ocurrir si no ocurrió *recientemente*, o tiene *menos* probabilidad de ocurrir si ocurrió *recientemente*.

Las probabilidades de que algo suceda la próxima vez no están necesariamente relacionadas con lo que ya sucedió, especialmente en muchos juegos de azar. Esto suele resumirse en la frase "los dados (o monedas) no tienen memoria", pues su naturaleza es la misma, independiente del número de lanzamientos y resultados previos. La falacia del jugador puede ilustrarse considerando el lanzamiento repetido de una moneda. Si aquella está equilibrada, las opciones de que salga cara son exactamente 0,5 (una de cada dos). Las opciones de que salgan dos caras seguidas es 0,5×0,5=0,25 (una de cada cuatro), las de obtener tres caras seguidas son 0,5×0,5×0,5=0,125 (una de cada ocho), y así sucesivamente.

Analizar las respuestas de los sujetos frente a una situación probabilística permitiría indagar en la progresión de la no competencia a la competencia, asimismo, precisar el progreso jerárquico en la complejidad estructural de las respuestas de los sujetospermitiría evaluar la calidad del aprendizaje.

Taxonomía SOLO

La taxonomía SOLO, *Structure of theObservedLearningOutcomes* (Biggs y Collis, 1982) busca evaluar la calidad del aprendizaje describiendo una progresión de niveles en los que los sujetos integran más elementos a una respuesta dado un problema en un contexto particular, como en probabilidad y estadística. Watson (2006b) aplicó la taxonomía SOLO para indagar en el aprendizaje de la probabilidad de estudiantes, usándola como un instrumento para jerarquizar las respuestas de los estudiantes a una tarea, permitiéndole precisar el progreso del aprendizaje específico.Asimismo, García, Medina y Sánchez (2014) han aplicado los niveles de razonamiento de la taxonomía SOLO con estudiantes de secundaria y Bachillerato en una situación sobre probabilidad.

Este modelo jerárquico nos permite analizar las respuestas de los estudiantes y describir sus razonamientos.La taxonomía SOLO postula cinco niveles ascendentes:

1. Preestructural (P), el nivel más bajo, la respuesta que no ha captado la pregunta.
2. Uniestructural (U) la respuesta dada al ítem capta solo una parte de la tarea.
3. Multiestructural (M) la respuesta es sólo una descripción cualitativa de la situación.
4. Relacional (R) la respuesta da cuenta que integra la descripción cualitativa con un aspecto cuantitativo (en nuestro estudio, incluye uno de los conceptos referidos a expresión fraccionaria, decimal o porcentual).
5. Abstracto ampliado (A+) la respuesta integra lo cualitativo (en nuestro estudio, integra el lenguaje estocástico mostrando un mayor nivel de coherenciacon al menos dos aspectos cuantitativos, por ejemplo, incluye los conceptos fracción y porcentaje).

METODOLOGÍA

El procedimiento para llevar a efecto esta investigación considera un estudio descriptivo interpretativo del programa formativo de Probabilidades en cuanto a la experimentación y evaluación del aprendizaje de estudiantes con talento académico.

En Chile, seis universidades desarrollan Programas de desarrollo de talentos académicos para la formación extracurricular de los niños. Uno de estos programas conocido como Buenos Estudiantes con Talento Académico, BETA, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, complementa la educación regular y se propone satisfacer las necesidades de desarrollo cognitivo y socioemocional de niños de alto potencial académico al nivel de sus capacidades y competencias, mediante el ofrecimiento de cursos-talleres (en adelante, curso) que abordan diferentes contenidos, entre ellos, la probabilidad.

Participantes

En el estudio participaron 20 estudiantes con talento académicoque cursaban el grado 6 y el grado 7 de primaria (11 y 9 estudiantes respectivamente), 12 hombres y 8 mujeres, con edades entre los 11 y 13 años, todospertenecientes a diferentes establecimientos educacionalespúblicos de la región de Valparaíso. El curso en el que participaban era paralelo y complementario a la educación formal, ofrecido fuera del horario escolar, durante un mediodía a la semana. Todos los estudiantes participaron libremente y por propia elección en el curso de Probabilidades reportado.

El grupo de los estudiantes no había recibido educación formal de Probabilidades y acorde a su edad estaban en condiciones para desarrollar las operaciones lógicas propias del razonamiento combinatorio, teniendo los conocimientos básicos de fracciones y comparación de razones según su escolaridad.

El curso fue ofrecido por dos docentes, uno en el rol de profesor y el otro como profesor colaborador, quienes tienen más de una década de experiencia en el diseño de situaciones de aprendizaje, y hanimplementado conjuntamente por más de tres años cursos de Probabilidad en el mismo Programa.Ambos profesores se adhieren a una docencia para niños con talento académico que postula la presentación de contenidos complejos y profundos que integran lo teórico y lo práctico, tratando de desarrollar habilidades de pensamiento complejas, y de adaptarse a los distintos estilos de aprendizaje(Conejeros, Gómez, y Donoso, 2013).

Metodología de la experimentación

La secuencia de aprendizaje de Probabilidades entregada a los niños con talento académico, bajo unsignificado experimental de la probabilidad, se realizó durante dos meses, conocho sesiones y un total de16 horas cronológicas. El curso fue planificado para otorgar una enseñanza, en el sentido de Cabrera (2011), promotora de desafíos cognitivos que responden a las características cognitivas de los estudiantes con talento académico, permitiendo incrementar el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y creativo. El rol de los docentesfuepromover la discusión en pleno del curso y la exposición de las diversas representaciones y respuestas provistas por los estudiantes a los problemas propuestos, (Estrella, 2017).

Las lecciones consideraron en su planificación las nociones de combinatoria y probabilidades, que incorporaron siempre la realización de experimentos aleatorios con el fin de permitirles descubrir por medio de la experiencia la probabilidad experimental (entendida como "probabilidad frecuentista", Batanero et al., 2005; Hawkins y Kapadia, 1984) y compararla con la probabilidad teórica, procurando cimentar un lenguaje probabilístico. Fundamentalmente se puso en juego la integración de la probabilidad experimental y la probabilidad teórica. En un marco de trabajo intragrupos, con énfasis en la discusión intergrupal y plenaria, de modo que los estudiantes alcanzasen las conclusiones finales desde la consolidación de las propias argumentaciones y/o la discusión entre sus pares (e.g., Brousseau, 1986; Estrella y Olfos, 2010).

Además, en todas las lecciones se proveyó de material manipulable para el trabajo experimental en sala, como dados de 4 a 20 caras, naipes, ruletas, fichas y bolitas de colores. Se les instó a obtener datos empíricos para obtener frecuencias relativas en contextos reales, a comparar las probabilidades experimentales con sus predicciones originales para que experimentaran la variación que ocurre en sucesos aleatorios (English y Watson, 2016);confrontar la eventual emergencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) con el fin de enfrentarlo con éxito (Amir y Williams, 1999; Khazanov, 2008); y finalmente realizar abstracción de los conceptos hasta llegar a la probabilidad teórica.

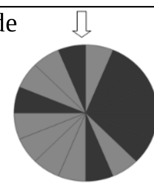
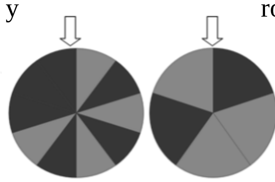
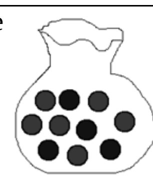
En las lecciones se plantearon situaciones probabilísticas clásicas desde Glayman y Varga (1975), y otras propuestas para la introducción de probabilidades y combinatoria disponibles en el sitio web del NCTM (2000).El enfoque analítico fue desarrollado a partir del análisis combinatorio, el uso de diagramas de árbol y triángulo de Pascal. También, fueron tratados fenómenos no determinísticosa través de la realización de experimentos aleatorios con dispositivos manipulativos para vincular las probabilidades experimentales con las teóricas. Las lecciones proveyeron de ambientes deexperimentaciónde manera informal de diversos conceptos (sucesos probables e imposibles, equiprobables y no equiprobables, la probabilidad como una medida entre 0 y 1) y procedimientos (como diagramas de árbol, triángulo de Pascal, tablas de doble entrada, entre otros). En las situaciones experimentales primeramente ellos predecíanen forma oral y/o escritapara probar y reconocer la propia intuición, luego se realizaban los análisis mediante diversas representaciones construidas por ellos, y con los resultados obtenidos generalizaban y confrontaban con la primera intuición.

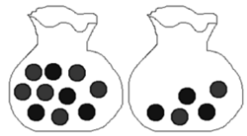
Instrumento

El cuestionario fue aplicado al inicio y al final del curso de Probabilidades en la modalidad de pre y post-test, en la lección 1 y en la lección 8 respectivamente. Los datos se recolectaron desde los argumentos escritos en una prueba de lápiz y papel de los siete ítems de un cuestionario. Además de evaluar los textos argumentativos, se calificó con 1 punto las respuestas correctas, y 0 puntos las parcialmente correctas y las erróneas.

Tres ítems -3, 5 y 7- provienen del estudio realizado por Maury (1987); tres ítems -1, 2 y 6- de Cuadra (1997);y un ítem-4- elaborado por los autores desde un contexto usual de lanzamiento de monedas,ver Tabla 1.

Tabla 1. Ítems de cuestionario de probabilidad y su objetivo.

	Ítem	Objetivo
1	La ruleta está pintada de azul y rojo. Después de dar vueltas se detiene en un color indicado por la flecha. ¿Qué color es más probable que indique la aguja? Justifique. 	Diferenciar casos favorables y no favorables. Valorar cualitativamente posibilidades (significado informal). Asignar probabilidad con razonamiento proporcional (significado clásico)
2	La ruleta está pintada de azul y rojo. Después de dar vueltas se detiene en un color indicado por la flecha. ¿Qué color es más probable que indique la aguja? Justifique. 	Diferenciar casos favorables y no favorables. Valorar cualitativamente posibilidades (significado informal). Usar fracciones o razones (significado clásico)
3	Ambas ruletas están pintadas de azul y rojo. ¿Qué ruleta se debe escoger para que sea más probable obtener rojo? Justifique. 	Asignar posibilidades a casos favorables y posibles (significado informal). Comparar probabilidades con razonamiento proporcional (significado clásico)
4	Se lanza una moneda. En los cinco primeros lanzamientos se ha obtenido cara. En el sexto lanzamiento, ¿saldrá cara o sello? Justifique.	Estimar la probabilidad en ensayos repetidos (significado experimental). Pesquisar falacia del jugador con sucesos equiprobables.
5	La bolsa tiene 10 bolitas entre rojas y azules. Se extrae una al azar. ¿Cuántas bolitas de cada color se debe tener para que la probabilidad de sacar una azul sea igual a la de sacar una roja?Justifique. 	Determinar condiciones de equiprobabilidad. Asignar probabilidad con razonamiento proporcional (significado clásico)
6	Se lanza un dado. La primera vez sale “1” y en las restantes tiradas sale “5”. En la novena tirada, ¿Qué número saldrá? Justifique. 	Estimar la probabilidad en ensayos repetidos (significado experimental). Pesquisar falacia del jugador con sucesos equiprobables.

7	Se tienen dos bolsas con bolitas rojas y azules. ¿En cuál de las dos bolsas es más probable sacar una bolita roja? Justifique.		Asignar posibilidades a casos favorables y posibles (significado informal). Comparar probabilidades con razonamiento proporcional (significado clásico)

Fuente: Elaboraciónpropia.

A continuación se especifican algunos de los objetivos de cada uno de los ítems del cuestionario que dan cuenta de la alfabetización probabilística.

*Respuestas esperadas del objetivo: diferenciarcasos favorables y posibles(ítem 1 y 2).*Dos ítems comparan casos favorables y no favorables variando los casos posibles. El ítem 1 sitúa una ruleta particionada en cinco partes iguales siendo dos partes rojas y tres azules. Aplicando la probabilidad simple como el cociente de casos favorables y casos posibles se obtiene que es más probable que la aguja indique el color azul, pues son 3 de 5 casos. En el ítem 2 la ruleta está particionada en 16 partes, ocho de color rojo y ocho azules. En este caso ambos sucesos color rojo y azul tienen la misma probabilidad que la aguja indique el color azul o rojo y es 0,5. Estos dos ítems sencillos cuantifican las probabilidades sin formalismo matemático y posteriormente conducen a trabajar con la regla de Laplace.

Respuesta esperada del objetivo: comparar probabilidades con razonamiento proporcional (ítem 5). El ítem 5 muestra una bolsa compuesta por 6 bolitas rojas y 4 azules, y plantea cambiar la composición para que ambos colores tengan la misma probabilidad,se esperaconcluir con 5 bolas azules y 5 rojas.

Respuestas esperadas del objetivo: comparar probabilidades de razonamiento proporcional en dos situaciones (ítem 3 y 7). En los ítem 3 y 7 el estudiante debe elegir una de dos ruletas con mayor probabilidad de obtener rojo y elegir una de las dos bolsas con mayor probabilidad de sacar bolitas rojas respectivamente. En el ítem 3 el estudiante debe optar por la primera ruleta que tiene 6 partes rojas de un total de 10, y el ítem 7 opta por la primera bolsa con probabilidad de 0,6 pues contiene 6 rojas de un total de 10 bolas. En esta situación se desarrollan las habilidades en el manejo de fracciones y de razón, destrezas que son necesarias para la apropiación del concepto de probabilidad clásica.

Respuestas esperadas del objetivo: analizar la falacia del jugador (ítem 4 y 6). Los ítems 4 (lanzamiento de una moneda) y 6 (lanzamiento de un dado) pretenden determinar si influyen en la respuesta los resultados obtenidos anteriormente. En ambos experimentos los sucesos son independientes(obtener una cara en el lanzamiento de una moneda es independiente de lo obtenido en el lanzamiento anterior), el espacio muestralesequiprobable (la probabilidad de sacar una cara es 0,5 y es la misma que la de obtener un sello), y los experimentos se respetenbajo las mismas condiciones.

Metodología de la evaluación del aprendizaje

Para abordar en profundidad el estudio de las respuestas de los sujetos, sedescriben en forma resumida los resultados generales del cuestionario; luego se analizan y describen algunas respuestas y argumentos dados en el pre y post-test a los ítems 4 y 6 referidos a la falacia del jugador, y finalmente se analizanlos argumentos de las respuestasescritas de dos casos con desempeños extremos mediante la asignación de niveles taxonómicos de SOLO. Primeramente la asignación de estos niveles es consensuada por dos de los investigadores, y luego vuelve a ser consensuada por otros dos investigadores de este estudio.

Este procedimiento consensuado valida la propuesta evaluativa de los textos argumentativos, realizado a través del análisis de un conjunto de rasgos textuales que reflejan las capacidades de los sujetos para organizar un escrito argumentativo sobre el tema de Probabilidad. Con ello se espera haber discriminadoel desempeño de los individuos estableciendo diferencias entre los diversos niveles de logro según sus argumentos escritos, y diagnosticado el nivel de competencia en su alfabetización probabilística.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resultados generales del cuestionario

Las puntuaciones (y porcentajes) obtenidas por todos los estudiantesque participaron tanto en el pre-test y el post-test se resumen en Tabla 2.

Tabla 2. Tabla de frecuencias absolutas (porcentajes) de los estudiantes que respondieron correctamente en prey post-test

N° ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Pre-test	14 (70)	9 (45)	12 (60)	2 (10)	15(75)	2 (10)	2 (10)
Post-test	18 (90)	14 (70)	17 (85)	15 (75)	18 (90)	14 (70)	10 (50)

La alta proporción de estudiantes que respondió correctamente tanto en el pre-test como en el post-test a los ítems 1, 2, 3 y 5, sugiere que estos niños poseen una buena intuición probabilística.

En la Tabla 2 se observa que los ítems con al menos el 60% de respuestas correctas en el pre-test, fueron los ítems 1, 3, (comparar casos favorables y no favorables, y determinar probabilidad informal y clásica) y 5 (determinar condiciones de equiprobabilidad, y determinar probabilidad clásica). En cambio, comparando ambas respuestas correctas en el pre y post-test, se observa una mayor diferencia de respuestas correctas en los ítems 4, 6 (determinar probabilidad experimental, y pesquisar falacia del jugador con sucesos equiprobables) y el ítem 7 (comparar casos favorables y no favorables, y determinar probabilidad informal y clásica).

Al comparar los porcentajes de respuestas correctas en su pre-test, sorprende el bajo número de respuestas correctas de los ítems 4 y 6, monedas y dados, cuyo contenido de probabilidad relacionaba la falacia del jugador con sucesos equiprobables.

Los ítems 3 y 7, miden el mismo contenido, comparar casos favorables y no favorables para determinar probabilidades, la diferencia entre ellos es el contexto, de ruletas y bolitas respectivamente. El número de respuestas correctas en el pre-test del ítem 3 confirma lo señalado por Maury (1988), y también concluido por Cuadra (1997), la utilización de ruletas como material de referencia, favorece el correcto razonamiento de tipo probabilístico.

En el post-test, el 85% de los estudiantes responden correctamente al ítem 3, ellos comparan probabilidades, independiente de la distribución espacial de los colores en la ruleta y el tamaño de los sectores, y consideran la cantidad de partes en que está dividida cada ruleta; en cambio, el 50% de los estudiantes responde en forma correcta el ítem 7, ellos comparan probabilidades considerando la proporción de bolitas de cada color en cada bolsa y establecen la comparación de razones con distinto consecuente. Por tanto, estos ítems muestran diferencias en la utilización de esquemas operatorios en función del tipo de tarea, lo cual contradice el supuesto piagetiano de que una vez adquirida una operación se aplica en todo tipo de situaciones (Piaget e Inhelder, 1974).

Las respuestas correctas de los 20 estudiantes a cada uno de los 7 ítems del testse han tabulado y graficado (ver Tabla 2 y Figura 1). En los diagramas de caja se observa la dispersión de estas respuestas correctas, siendo el pre-test el de mayor variabilidad con un 50% central de respuestas correctas ubicadas en intervalo de 12 puntos de ancho, es decir, entre un mínimo de 2 respuestas contestadas correctamente y de 14 respuestas. Además, muestra que en el pre-test la mitad de los estudiantes contestó 9 o menos respuestas correctas.

En cambio, en el post-test un 50% central de los estudiantes contestó entre 14 y 18 respuestas correctas, un 50% de los estudiantes contestó más de 15 respuestas correctas,con un mínimo de 10 respuestas contestadas correctamente observándose una menor dispersión. Todo lo anterior denota que tras la secuencia de lecciones de probabilidad aumentan las respuestas correctas en el post-test.

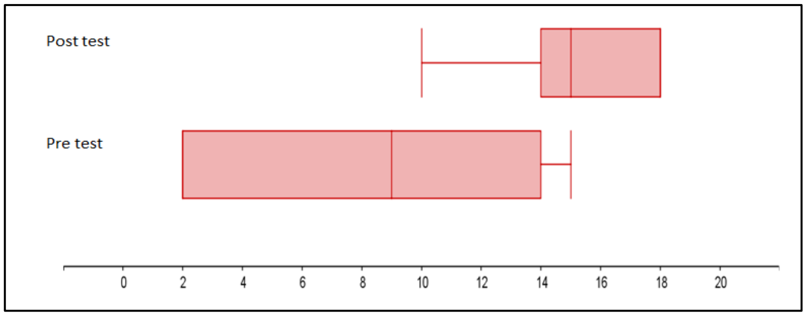


Figura 1. Respuestas correctas de los 20 estudiantes en el pre y pos-test.

En lo que sigue, primeramente, hemos elegido los ítems 4 y 6 relativos a la falacia del jugadorpara realizar un análisis más detallado de las respuestas, debido a la dificultad que tuvieron los estudiantes con estosdos ítems en el pre-test y el avance en su aprendizaje en el pos-test. En segundo lugar ycon la expectativa de comprender el progreso del aprendizaje de la probabilidad, secomparan y discuten los resultados obtenidos en todos los ítems según la taxonomía SOLO de dos casoscon desempeños extremos, uno con el más bajo desempeño y otro con el mayor desempeñoen el pre-test.

Resultados del análisis de los ítems 4 y 6

Ítem 4. Se lanza una moneda. En los cinco primeros lanzamientos se ha obtenido cara. En el sexto lanzamiento, ¿saldrá cara o sello? Justifique.

Ítem 6. Se lanza un dado. La primera vez sale "1". Y en las restantes tiradas sale "5". En la novena tirada, ¿Qué número saldrá? Justifique.

En el ítem 4 sobre el lanzamiento de una moneda y la obtención de cinco caras seguidas, un estudiantepodría señalar: "Si en el siguiente lanzamiento saliese cara, habrían salido seis caras consecutivas". La probabilidad de que esto suceda es $0,5^6 = 0,015625$y luego en el siguiente lanzamiento la probabilidad de que salga cara es sólo 1 entre 64.Se dice que este es el paso que engaña al razonamiento. Si la moneda está equilibrada y se excluye la posibilidad de caer de canto, entonces mediante la probabilidad clásica debe sersiempre la probabilidad de 0,5 tanto para cara como para sello. Aunque la probabilidad de lograr una serie de seis caras consecutivas (0,015625), lo esantesde que la moneda se tire por primera vez.Despuésde los primeros cinco lanzamientos los resultados ya no son desconocidos, y por tanto no cuentan. Cada uno de los dos posibles resultados, cara o sello, tienen la misma probabilidad independientemente del número de veces que la moneda se haya lanzado antes, y de los resultados obtenidos. Razonar que es más probable que el próximo lanzamiento será sello en vez de cara debido a los anteriores lanzamientos es la falacia: la idea de que una racha de suerte pasada influya de alguna forma en las posibilidades futuras.

Los ítems 4 y 6 pretenden determinar si influyen en la respuesta los resultados obtenidos anteriormente, ambos ítems tienen en común el trabajo con la independencia de sucesos. Las respuestas en el pre-test evidencian la falacia del jugador, en las respuestas erróneas de los niños se observa que se influenciaron por los datos entregados en la descripción de la experiencia, o en palabras de Fischbein (1975), estos estudiantes no han desarrollado intuiciones primarias sobre la independencia de sucesos. En el pre-test se encuentran respuestas que tanto Piaget como Fischbein (1975) han previsto para estudiantes en edad preescolar (estudiantes de menos de 5 años de edad). Entre los argumentos de las respuestas en el pre-test destacamos:

a) la creencia de que los sucesos aleatorios pueden ser controlados por la persona que realiza el experimento: "depende de qué lado ponga la moneda"(E1, 12 años y 1 mes, hombre), "dependerá de la forma en que lo tire [el dado]"(E18, 12 años y 3 meses, hombre); y
b) la percepción de la representación del objeto: [la imagen del ítem muestra el lado de sello de una moneda] "sello porque en el dibujo sale"(E14, 12 años y 1 mes, mujer); [la imagen del ítemmuestra dos caras del dado con el 3, 5 y 6] "4 porque está en medio de los dos" (E15, 11 años y 5 meses, mujer).

Al comparar las comprensiones de los estudiantes en el pre-test y en el post-test, sus textos argumentativos registran el cambio en sus razonamientos. En el pre-test E20 (13 años y 3 meses, hombre) contestaba erróneamente "cara, ya que es la tendencia, seguro que la moneda tiene algo", y el mismo estudiantede 13 años, luego de la secuencia de aprendizaje señala en su respuesta "es la misma probabilidad de ambos, tanto cara como sello, los resultados experimentales son diferentes a la teoría, 1/2=1/2". Otro estudiante, E13 (11 años y

11 meses, hombre) argumentaba en el pre-test erróneamente, “cara, porque si ya los cinco lanzamientos salieron cara puede ser muy posible que salga cara de nuevo” y luego de la secuencia de aprendizaje argumentó “este caso es equiprobable porque aunque haya salido cara los 5 lanzamientos anteriores igualmente el sexto lanzamiento puede salir cara o sello porque tienen el 50%”.

Textos argumentativos según taxonomía SOLO

El avance más destacable logrado por estos niños tras las clases de probabilidades es la calidad de los argumentos de sus respuestas al cuestionario. La Tabla 3ofrece un ejemplo de respuesta al ítem 1 que muestran el progreso de losestudiantes, E2 y E16, en su desempeño.

Tabla 3. Ejemplos de respuesta al ítem 1 con desempeño progresivo de los estudiantes E2 y E16.

Edad	Pre-test	Post test
estudiante de 11 años 5 meses (E2)	“es más probable que salga azul, porque hay más segmentos azul que rojo”	“azul porque tiene más probabilidad, P(salga azul) = 3/5=60%, P(salga rojo) = 2/5=40%”
estudiante de 11 años 4 meses (E16)	“azul, porque está solo un poco apoyado para allá”	“azul porque la probabilidad es de 3/5 y del rojo es 2/5”

Todas las respuestas de los estudiantesa los ítems se clasificaron de acuerdo a la taxonomía SOLO. En el pre-test los estudiantes muestran una estructura simplificadaenlos 4 niveles superiores, y la mayoría de sus respuestas se clasificó en el post-test como multiestructural. Para precisar los hallazgos, y como se señalaba, en este escrito se presentan dos casos que muestran dos avances diferentes en el pre y post-test, los estudiantes E17 y E13.

Dos casos con desempeños extremos: E17 y E13

La Tabla 3muestra los niveles de respuesta de estudianteE17 de 13 años y 2 meses de edad, quien tuvo mayor desempeño en pre y post-test, en ambos testobtuvo 7 respuestas correctas de 7. En las respuestas del post-test de E17, se evidencia el progreso del desempeñoen la mayor consistencia en la argumentación, pues pasa de un nivel multiestructural (M) al relacional (R) y abstracto ampliado (A+), mostrando una descripción cualitativa que relaciona en forma coherente con lo cuantitativo. En la Tabla 3 se ha sombreado el nivel de la taxonomía abstracto ampliado (última columna), nótese el avance en los niveles taxonómicos de la estudianteE17, el progreso en el desempeño se evidencia en la mayor consistencia en la argumentación, mostrando una descripción cualitativa que relaciona en forma coherente con lo cuantitativo.

Tabla 3. Niveles de respuestas de estudiante E17 (13 años 2 meses) conmayor desempeño en pre y post-test.

Ítem	Respuestaen pre-test	Niveles	Respuestaen post-test	Niveles
1	Azul, porque hay 3 de azul y solamente 2 de rojo, por lo que es más probable que salga azul	M Descripcióncualitativa	Azul, porque el 60% de la ruleta está pintada azul	R Medida Cuantitativa
2	En ambos colores porque hay la misma cantidad de espacio en cada color. Rojo 8/16, azul 8/16	R Medida Cuantitativa	Puede salir rojo o azul, porque cada color hay 8/16 que puede salir equivalente a 1/2=50%	R Medida Cuantitativa
3	A porque si juntamos las partes en la A hacen más de la mitad, en cambio la B si los juntamos los trozos no alcanza una mitad	M Descripcióncualitativa	La ruleta A, porque tiene un 60% de que puede salir rojo, en cambio la ruleta B solo tiene un 40% de posibilidad	R Medida Cuantitativa
4	Puede salir cualquiera, porque por azar puede salir un lado u otro	M Descripcióncualitativa	Puede salir cualquiera porque ambas tienen un 50% de posibilidades que salgan	R Medida Cuantitativa
5	5 azules y 5 rojas porque existirá la misma cantidad en la bolsa y podría salir cualquiera	M Descripcióncualitativa	5 rojas y 5 azules, porque asi hay un 50% de que salga rojo y otro 50% de que salga azul	R Medida Cuantitativa
6	Puede salir cualquier numero ya que para todos representan 1/6 de las caras del dado y tienen la misma posibilidad	R Medida Cuantitativa	Puede salir cualquier número del 1 al 6, porque todos tienen 1/6 de posibilidades igual al 17%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico
7	A porque hay 6 rojas y 4 azules lo que hace que hayan más probabilidades de que salga una roja que en la bolsa B en donde hay 2 rojas y 3 azules	R Medida Cuantitativa	En la bolsa A, porque hay 6/10 rojas lo que es un 60% en cambio en la bolsa B solo hay 2/5 lo que es el 40%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico

La Tabla 4registra los niveles de respuestas del segundo caso,el estudianteE13 de 11 años y 11 mesescon mayor diferencia de desempeño en el cuestionario, en el pre-testsolo 1 respuesta correcta de 7 y en el post-test 7 de 7. En las respuestas del post-testde E13, se aprecia un desempeño que va desde lo uniestructural a multiestructuralprogresando hacia mayoritariamente abstracto ampliado A+ (véase sombreado en última columna).

Tabla 4. Niveles de taxonomía SOLO de las respuestas de estudiante E13 (11 años 11 meses) con mayor diferencia de desempeño en pre y post-test.

Item	Respuestaen pre-test	Niveles	Respuestaen post-test	Niveles
1	Es más probable que salga azul porque hay más casilleros azul y dos de ellos están juntos	M Descripcióncualitativa	El color más probable que indique la flecha es el color azul porque tiene más casillas que el rojo. a=3/5=60%, r=2/5=40%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico
2	Es más posible que salga el azul porque sus casilleros están más juntos	U Capta solo una parte	El color en este caso los dos tienen la misma probabilidad que salga rojo o azul. a=8/16=4/8=1/2=50%, r=8/16=4/8=1/2=50%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico
3	A porque tiene más casilleros que el azul	M Descripcióncualitativa	La ruleta A es la más adecuada si uno quiere que salga rojo porque tiene r=6/10=3/5=60%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico
4	cara, porque si ya los cinco lanzamientos salieron cara puede ser muy posible que salga cara de nuevo	U Capta solo una parte	Este caso es equiprobable porque aunque haya salido cara los 5 lanzamientos anteriores igualmente el sexto lanzamiento puede salir cara o sello porque tienen el 50%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico
5	4 bolitas azules y 4 bolitas porque así	M Descripcióncualitativa	Debe tener 5 de cada color para que esto sea equitativo porque el color rojo tiene 2	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico

	será igual probabilidad que salga azul o roja		bolitas más que el azul, o sea el 60% y el color azul tiene dos bolitas menos que el rojo o sea el 50%	
6	5 porque el 1 sola vez salió 1 y en las restantes 5 puede que salga 5 de nuevo	U Capta solo una parte	Puede salir tanto 1,2,3,4,5,6 porque son equiprobables tienen la misma posibilidad	M Descripcióncuantitativa
7	A porque tiene más bolitas rojas que azules	M Descripcióncualitativa	La bolsa A es más probable que salga una bola roja porque tiene más bolitas rojas que azules. Bolitasr=6/10=3/5=60 % a=4/10=2/5=40%	A+ Medida Cuantitativa c/lenguaje estocástico

En la respuesta al ítem 7 en el post-test, E13 ocupa “r” como bolitas rojas y “a” como las azules, argumentalógicamente “[…] es más probable… porque…”, utilizando tanto expresiones fraccionarias como porcentuales, manifestándose el uso del procedimiento de simplificación de fracciones, y la equivalencia y conversión a porcentaje (primero realiza una simplificación, quizás innecesaria, y luego una amplificación para responder en términos de porcentaje):

la bolsa A es más probable que salga una bola roja porque tiene más bolitas rojas que azules.

Bolitas r=6/10=3/5=60% *Bolitas a=4/10=2/5=40%*

En las respuestas de E13 en el post-test se evidencia una organización en que aplica su preconcepto de suceso, lo asocia a un valor cuantitativo en al menos dos formas, fraccionaria y porcentual, y conjuga el discurso argumentativo a través de un vocabulario estocástico, integrando conceptos y procedimientos.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

En los textos argumentativosde los estudiantes con talento académico, antes y después en las experiencias de aprendizaje, se expresa que ellos mejoran el nivel de su argumentación y razonamiento probabilístico, tras un breve curso de 16 horas de clases sobre Probabilidades, en el que se privilegió un proceso dialéctico en el contexto de interacciones que fomentaron la discusión, y procuraron desarrollar el razonamiento de los estudiantes al describir, explicar y justificar los hallazgos y procedimientos utilizados, articulando argumentos formales de la teoría de probabilidades y justificando mediante argumentaciones con base numérica. El cambio en sus textos argumentativos emerge del aumento de respuestas correctas del pre-test al post-test de los estudiantes participantes, debido a la utilización y conexión del razonamiento proporcional en favor de la comparación de probabilidades clásicas en distintas situaciones espaciales propuesta en el cuestionario. Tanto en la expresión como en el cambio de sus textos argumentativos, consideramos que los estudiantes avanzaron hacia la comprensión del objeto matemático "probabilidad", al aplicar los distintos significados de la probabilidad: informal, clásico y experimental. La evaluación del curso por estos estudiantes fue positiva con un 97% de aprobación tanto para el profesor como para el profesor colaborador (96%), lo que da cuenta del buen ambiente de aprendizaje.

El análisis de los textos argumentativos de las respuestas de los estudiantes, realizado bajo la taxonomía SOLO registran el cambio en sus razonamientos, específicamente, asociaban lo cualitativo a un valor cuantitativo en al menos dos formas, fraccionaria y porcentual; y conjugaban el discurso argumentativo utilizando vocabulario estocástico al integrar su comprensión conceptual y procedimental. Mediante dos casos, de una estudiante y un estudiante, describimos los avances en el pre y post-test. Un caso mostraba el mayor desempeño, y el segundo caso, la mayor diferencia de desempeño. De las respuestas del post-test emergieron los cuatro niveles superiores de respuesta de los cinco propuestos por la taxonomía. Ningún estudiante entregó respuestas del nivel preestructural, lo que da cuenta de sus competencias variadas como estudiantes con talento académico. El análisis ha permitido discernir lo que Konold (1995) señalaba, las argumentaciones escritas de los sujetos, por ejemplo de la forma "cualquiera de las secuencias puede ocurrir" que si bien son ciertas no son lo mismo que la aseveración "todas son igualmente probables", pues permiten distinguir el nivel de comprensión en la argumentación.

Debido a la característica polifacética de la probabilidad, su aprendizaje requiere de una enseñanza que articule sus diferentes significados, esto es, el intuitivo o informal, clásico o laplaciano, experimental o frecuentista (Batanero, 2005; Sharma, 2014).En la planificación de las lecciones que presenta nuestro estudio, se integraron los distintos significados de la probabilidad y se propiciaron experiencias de aprendizajes promotoras de razonamiento y de activación dealfabetizaciones, cuyo enfoque de enseñanza preservaba el sentido de las prácticas que la generan. En concordancia con Gal (2005), el curso implementado incorporó las ideas probabilísticas, la asignación de probabilidades, y el uso de lenguaje probabilístico, como conocimientos basales que forman parte de la alfabetización probabilística.

Los conocimientos obtenidos en las investigaciones sobre la comprensión de la naturaleza y del desarrollo del pensamiento probabilístico deberían tener incidencia en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en el currículo escolar. Por ejemplo, reconocer que el conocimiento matemático de carácter probabilístico se sustenta en la noción de incertidumbre que es antagónica a la noción de certeza (la cual es característica de la enseñanza tradicional de la matemática, como aritmética, álgebra, o geometría); o tener en cuenta que las intuiciones primarias no evolucionan en paralelo al desarrollo del sujeto, como la lógica causal que es contra intuitiva en los sujetos (Fischbein, 1975); e incluso las actividades de probabilidad propuestas en textos escolares podrían reafirmar el uso de heurísticos, como la falacia del jugador (Serradó, Cardeñoso, y Azcárate, 2005).

Las orientaciones curriculares de matemática indican un conjunto de habilidades para desarrollar con los estudiantes de forma integrada los conocimientos de probabilidades, en nuestro caso la argumentación y modelación. El profesor de matemática debe desarrollar estas habilidades en su trabajo docente y cimentar una comprensión profunda de la probabilidad básica,como las ideas de aleatoriedad e independencia de eventos.Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo(2018) consideran que el profesor debe desarrollar una adecuada intuición probabilística de sucesos aleatorios, y valorarla para desarrollarla progresivamente en los estudiantes de acuerdo al nivel educativo escolar. En caso contrario provocará en los estudiantes dificultades de desarrollo del razonamiento probabilístico. En esta investigación el ítem 7 presentó la mayor dificultad de los estudiantes en que se considera comparar y relacionar probabilidades y emerge la propiedad de independencia de sucesos. Estas dificultades de comprensión probabilística también han sido reportados en estudiantes de secundaria (Sánchez y Valdez, 2017).

El aprendizaje de los estudiantes con talento académico da evidencias para ofrecer una enseñanza con más desafíos a grupos de estudiantes estándares y también a profesores, con el propósito de que los estudiantes se aproximen a una alfabetización probabilística, enfrentando situaciones desafiantes, utilizando un lenguaje amplio (verbal, numérico, gráfico y simbólico) y explorando posibles caminos de solución con artefactosaleatorios de tipo manipulativos y/o computacionales; y al discutir sus hallazgos desde la probabilidad experimental y compararla con sus conclusiones desde la probabilidad teórica, logren desarrollar una mayor comprensión de la probabilidad. No obstante, es deseable continuar con investigacionesque consideren el tiempo disponible de la implementación de la enseñanza para estudiantes estándares, actividades que integren los significados de la probabilidad, y que contemplenideas importantes tales como la aleatoriedad, independencia de eventos, problemas de razonamiento combinatorio, uso de softwares; así como nuevos estudios que amplíen la muestra de estudiantesa distintos centros educativos y lleven a cabo análisis estadístico inferencial.

REFERENCIAS

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 131-156.

Amir, G., & Williams, J.(1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking, *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(1),85-107.

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., & Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas, 261*, 78-84.

Batanero, C., Henry, M., &Parzysz, B.(2005). The nature of chance and probability. En Exploring probability in school, pp. 15-37. US: Springer.

Brousseau, G.(2009). Alternatives en didactique de la statistique. En*41èmes Journées de Statistique*. Bordeaux: SFdS

Biggs, J.B., & Collis, K.F. (1982).*Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *RecherchesenDidactique des Mathématiques*, *7*, 2, 33-115.

Burgess, T. (2007). I*nvestigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics*. Tesis de Doctorado. MasseyUniversity, Auckland, New Zealand.

Cabrera, P. (2011). ¿Qué debe saber y saber hacer un profesor de estudiantes con talento académico? *Estudios pedagógicos,37*, 2,43-59.

Carreño, R. (2015). Efecto del Programa BETA-PUCV sobre la conducta prosocial y la responsabilidad social de sus estudiantes: Un análisis con regresión por discontinuidad.*Estudiospedagógicos,41*, 2,41-53.

Cobb, G., & Moore, D.(1997).Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American MathematicalMonthly*, *104,* 9, 801-823.

Conejeros-Solar, M. L., Gómez-Arizaga, M. P., & Donoso-Osorio, E. (2013). Perfil docente para estudiantes/as con altas capacidades. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, 5*(11).

Cuadra, V. (1997).Razonamientos intuitivos de los niños a los 13-14 años de edad sobre probabilidades. Tesis master, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

English, L., &Watson, J. (2016).Development of probabilistic understanding in fourth grade. *JournalforResearch in MathematicsEducation*, *47*, 1, 28-62.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En Salcedo, A. (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, pp.173-194. Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Universidad Central de Venezuela.

Estrella, S., &Olfos, R. (2010). Changing the understanding of Probability in talented children. En*Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010),* Ljubljana, Slovenia. Netherlands: International Statistical Institute.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., &Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandría: American Statistical Association.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Holanda: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E., &Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 1, 96–105.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En *Exploring probability in school*, pp. 39-63. US: Springer.

García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y Bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5- 23.

Garfield, J., &Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Holanda: Springer.

Glaymann, M., &Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*.Barcelona: Editorial Teide.

Gómez, E., Contreras, J. M., & Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, pp. 69-72.

Hawkins, A., &Kapadia, R. (1984).Children's conceptions of probability- A psychological and pedagogical review.*Educational Studies in Mathematics*, *15*,349-377.

Kahneman, D., &Tversky, A. (1972).Subjective probability: A judgment of representativeness.*Cognitive psychology*, *3*, 3,430-454.

Kahneman, D., Slovic, P., &Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*.New York Cambridge: University Press.

Khazanov, L. (2008). Addressing students' misconceptions about probability during the first years of college.*Mathematics and Computer Education*, *42*, 3,180-192.

Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, *3*, 1, 1-9.

Lecoutre, M-P.(1992). Cognitive 936 models and problem spaces in "purely random" situations.*Educational Studies in Mathematics, 23*,557-568.

Maury, S. (1988).Procedures dans la resolution de problems probabilistes, *Actes du colloque de Sevres*. Paris: Editions la Pensee.

Merino, J. M., Mathiesen, M. E., Mora, O., Castro, G., & Navarro, G. (2014). Efectos del Programa Talentos en el desarrollo cognitivo y socioemocional de sus estudiantes. *Estudios pedagógicos*, *40*(1), 197-214.

Gobierno de Chile-MINEDUC (1990). *Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza LOCE*. Santiago de Chile: MINEDUC.

Gobierno de Chile-MINEDUC (2001). *Programa educación media, formación general,*Santiago de Chile: MINEDUC.

Gobierno de Chile-MINEDUC (2012). *Bases Curriculares de la Educación Básica, Matemática*.Santiago de Chile: MINEDUC.

Gobierno de Chile-MINEDUC (2015). *Nuevas Bases Curriculares y Programas de Estudio 7° y 8° año de Educación Básica / 1° y 2° año de Educación Media.*Santiago de Chile: MINEDUC.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000),*Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Piaget, J., &Inhelder, B.(1974*). La genèse de l'idée de hazard chezl'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Pontecorvo, C., &Girardet, H.(1993).Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and Instruction*, *11*, 365–395.

Sánchez, E., &Valdez, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (11), 127-143.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., &Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *StatisticsEducationResearchJournal*, *4*(2), 59-81.

Serrano, L. (1996).*Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la probabilidad*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.

Sharma, S. (2014).Cultural Influences in ProbabilisticThinking.*Journal of Mathematics Research, 4*(5), 63-77.

Watson, J. (2006a). Assessing the development of important concepts in statistics and probability. En G. F. Burrill y P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eight yearbook*, pp. 61-75. Reston, VA: NCTM.

Watson, J. (2006b). *Statistical literacy at school*.Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wild, C., &Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International StatisticalReview*, *67*, 3, 223-248.

Autores:
Soledad Estrella
soledad.estrella@pucv.cl
Doctora en Didactica de la Matematica por la PUCV,
sus lineas de investigacion se enfocan en el desarrollo del pensamiento estadistico y probabilistico, y el desarrollo profesional docente a traves de Estudio de Clases.
Es representante nacional del CIAEM, investigadora asociada del CIAE y miembro del directorio de la Asociacion Chilena de Investigadores en Educacion.

Hugo Alvarado
alvaradomartinez@ucsc.cl
Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España.
Es miembro del directorio de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, SOCHIEM
Sus líneas de investigación son
Educación en Probabilidades y Estadística escolar y universitaria

Raimundo Olfos
raimundo.olfos@pucv.cl
Doctor en Educacion Matematica por University of Wales.
Es presidente de la Sociedad Chilena de Educacion Matematica, SOCHIEM,
y miembro del directorio de la Asociacion Chilena de Investigadores en Educacion, AChIE.Sus lineas de investigacion son: formacion de profesores, curriculo y evaluacion en matematica escolar.

Lidia Retamal
lretamal@ucsc.cl
Magister en Estadística por la Universidad de Concepción, Chile.
Sus líneas de investigación son
Educación en Probabilidades y Estadística escolar y universitaria.