

OBJETOS DE APRENDIZAJE TRIDIMENSIONALES CONSTRUIDOS CON EL SOFTWARE GEOGEBRA

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa

iaqchan@ulbra.br

Universidade Luterana do Brasil

Recibido: 08.01.2019 Aceptado: 25.04.2019

RESUMEN

Este artículo presenta los objetos de aprendizaje tridimensionales desarrollados para dar apoyo al aprendizaje de conceptos matemáticos del Cálculo Diferencial e Integral en el estudio de funciones multivariadas. El objetivo fue elaborar y utilizar objetos de aprendizaje tridimensionales interactivos, que ofrecen soporte en la visualización de las características de las funciones multivariadas en situaciones problemáticas con temáticas de interés para estudiantes de Ingeniería. Se realizó un experimento con tres grupos de estudiantes de Cálculo Diferencial e Integral de la carrera de Ingeniería, en la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA), con resultados que indican que el uso de representaciones tridimensionales estereoscópicas (utilizando gafas 3D) auxilian en el entendimiento de la variabilidad de la función por la visualización e interacción con los objetos tridimensionales, llevando a la comprensión de las características de las funciones multivariadas en un determinado punto.

Palabras Clave: Educación Matemática; Enseñanza superior; Objetos de Aprendizaje; Objetos tridimensionales.

OBJETOS DE APRENDIZAGEM TRIDIMENSIONAIS CONSTRUÍDOS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

RESUMO

Este artigo apresenta os objetos de aprendizagem tridimensionais desenvolvidos para dar apoio à aprendizagem de conceitos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral no estudo de funções multivariadas. O objetivo foi elaborar e utilizar objetos de aprendizagem tridimensionais interativos, que oferecem suporte na visualização das características das funções multivariadas em situações problemas com temáticas de interesse para estudantes de Engenharia. Foi realizado um experimento com três turmas de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Engenharia, da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), com resultados que indicam que o uso de representações tridimensionais estereoscópicas (utilizando óculos 3D) auxiliam no entendimento da variabilidade da função pela visualização e interação com os objetos tridimensionais, levando à compreensão das características das funções multivariadas em um determinado ponto.

Palavras Chave: Educação Matemática; Ensino Superior; Objetos de Aprendizagem; Objetos Tridimensionais.

TRIDIMENSIONAL LEARNING OBJECTS BUILT WITH GEOGEBRA SOFTWARE

ABSTRACT

This paper presents the three dimensional learning objects developed to support the learning of mathematical concepts of Differential and Integral Calculus in the study of multivariate functions. The objective was to elaborate and use interactive three-dimensional learning

objects, which support the visualization of the characteristics of multivariate functions in situations with problems of interest to Engineering students. An experiment was carried out with three classes of Differential and Integral Calculus of an Engineering course of the Lutheran University of Brazil (ULBRA) with results that indicate that the use of three-dimensional stereoscopic representations (using 3D glasses) help in the understanding of the variability of the function by visualization and interaction with three-dimensional objects, leading to an understanding of the characteristics of multivariate functions at a given point.

Keywords: Mathematical Education; Higher education; Learning Objects; Three-dimensional objects.

INTRODUÇÃO

O estudo das funções inicia no Ensino Médio explorando situações matemáticas para a compreensão das características relacionadas com o valor e variação da função de uma variável em um determinado ponto. São apresentados os conceitos para entendimento da característica de valor positivo, negativo e zero da função, função crescente e decrescente, com suporte nas representações geométricas, dada as dificuldades da generalização somente a partir de definições matemáticas. Esse conhecimento é expandido no Ensino Superior com o Cálculo Diferencial e Integral e as funções de multivariadas.

Para o estudo de funções com várias variáveis, em particular com duas variáveis independentes, se utiliza de objetos gráficos como as curvas de nível e figuras bidimensionais em perspectiva representando superfícies tridimensionais para auxílio na compreensão das características das funções multivariadas, requerendo do observador a capacidade de interpretação da imagem bidimensional para compreensão das informações nela contida.

Os paradigmas atuais da educação incentivam o uso de recursos computacionais na prática pedagógica de maneira a proporcionar ao aluno situações para a aprendizagem significativa. Neste contexto, segundo Alves (2012), o uso de *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, permitem criar situações para a produção de conjecturas e formulação de hipóteses a partir das discussões das propriedades geométricas e topológicas de conceitos complexos fortemente apoiadas na visualização e experimentações através da manipulação dos objetos geométricos.

A VISUALIZAÇÃO

A visualização, como uma maneira de organizar o pensamento e dar suporte a

compreensão dos conceitos matemáticos, vem sendo abordada em pesquisas que trazem como pauta das discussões, o ensino que valoriza a construção dos conceitos em detrimento dos processos algorítmicos. Os estudos sobre a visualização originaram-se na área da psicologia que estabelece a relação das habilidades de visualização com as habilidades cognitivas espaciais (LOHMAN, 1996).

Entendendo que processo de visualização é uma ação mental ou física nas quais as imagens mentais estão envolvidas, considera-se então dois processos na visualização, a *interpretação de informação para criar imagens mentais* e a *interpretação da imagem mental para gerar informação*, com a segunda podendo ser a observação e análise de imagens mentais; a transformação de imagens mentais em outras imagens; e a transformação de imagens em outro tipo de informação (GUTIÉRREZ, 1996).

Se na psicologia as pesquisas sobre visualização, habilidade espacial e imagem mental são de longa data, na educação matemática estes estudos iniciam na década de 80, sendo fundamentados nos estudos da psicologia cognitiva levando em conta os aspectos do pensamento visual na aprendizagem matemática, no campo da didática da matemática, semiótica e perspectivas sócio-culturais (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012).

De acordo com o contexto, psicologia, matemática ou educação matemática, o termo visualização é interpretado de maneira diferente. Segundo Gutiérrez (1996), na educação matemática, são usados desenhos, figuras, diagramas, representações computacionais como parte das atividades diárias nas salas de aula. De modo que os educadores matemáticos consideram que a imagem mental e as representações externas têm que interagir para uma melhor compreensão e solução da situação problema.

Segundo Lohman (1996) a habilidade espacial é considerada como a habilidade de gerar, reter, recuperar e transformar imagens visuais. Entende-se dessa forma que é necessário o acesso a informação na forma de imagem, para que ela posteriormente possa ser reproduzida mentalmente ou externamente para a resolução de um problema. Nesse contexto desenvolveram-se os objetos de aprendizagem os objetos de aprendizagem tridimensionais, as sequências didáticas para a aprendizagem do Cálculo com funções multivariadas.

Os trabalhos consideram que a abstração, o raciocínio e a lógica são essenciais para a aprendizagem matemática, e valorizam mais a compreensão do que o processo algorítmico, fazendo uso das imagens como um suporte ao pensamento matemático, propiciando um ambiente experimental interativo que possibilita ao aluno realizar conjecturas e, em um processo de interação, observação e reflexão para generalizar propriedades e abstrair conceitos.

REPRESENTAÇÃO TRIDIMENSIONAL

Historicamente a representação bidimensional de objetos tridimensionais adquire forma no século XIX com a perspectiva cavaleira, que utiliza uma projeção cilíndrica oblíqua para criar a ilusão da realidade tridimensional. A representação em perspectiva é aprimorada na renascença com o uso da perspectiva linear, utilizando a projeção cônica com um ou dois pontos de fuga (CORREIA DE SÁ; ROCHA, 2010).

Ressalta-se que as representações em perspectiva proporcionam a noção de profundidade e distância baseadas nas habilidades de interpretação do observador que imagina e compreende quais objetos, ou partes desse, estão mais à frente ou mais atrás em relação ao observador.

Os homens têm noção de profundidade, distância e tamanho dos objetos no espaço tridimensional graças à disposição dos olhos a frente da cabeça que proporciona a visão binocular ou estereoscópica. A visão tridimensional é resultado da interpretação, pelo cérebro, das duas imagens bidimensionais que cada olho capta do objeto observado e as informações sobre o grau de convergência e divergência eixos visuais (SISCOUTTO et al., 2004).

Uma das maneiras de se obter a estereoscópica é através do uso conjunto de imagens anáglifas, que mesclam duas imagens bidimensionais de cores vermelha e ciano, obtidas de dois pontos de observação diferentes, e que devem ser visualizadas com o uso óculos especiais, com lentes de cor vermelha na esquerda e ciano na direita, para a correta separação da imagem de maneira que o cérebro interprete a imagem com a noção de profundidade.

O GeoGebra é um programa de Matemática Dinâmica para Geometria, Álgebra e Cálculo (HOHENWARTER; PREINER, 2007), com suporte a construções tridimensionais

com representações em perspectiva paralela, oblíqua, cavalera e estereoscópica anáglifa. O suporte a representação estereoscópica do GeoGebra, permite o desenvolvimento de objetos tridimensionais, como é o caso das superfícies geradas por funções de duas variáveis independentes.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Os estudos realizados tiveram foco na produção e uso de objetos de aprendizagem tridimensionais interativos para o estudo das funções multivariadas, em particular com duas variáveis. As interações foram idealizadas para proporcionar situações que permitam a visualização das propriedades geométricas e topológicas associadas às características da função em um determinado ponto, assim como a região topológica abaixo da superfície formada pela função, com o objetivo de auxiliar o estudante na compreensão dos conceitos matemáticos do Cálculo com base na visualização dos objetos geométricos explorando a percepção de profundidade, baseada na estereoscopia, de modo a minimizar as dificuldades de interpretação da imagem bidimensional como um objeto tridimensional.

Os objetos de aprendizagem foram desenvolvidos com o *software* GeoGebra, utilizando o recurso de 3D, os mesmos foram utilizados em um experimento realizado com três turmas de Cálculo Diferencial e Integral para os cursos de Engenharias da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), do município de Canoas do estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

Durante o experimento os estudantes interagiram com os objetos de aprendizagem, em atividades orientadas pelo professor, buscando estabelecer relações com o conteúdo desenvolvido nas disciplinas de Cálculo.

A coleta de dados foi realizada pela observação participante do pesquisador e com as opiniões dos estudantes durante o experimento que foram gravadas e transcritas para análise.

OS OBJETOS DE APRENDIZAGEM TRIDIMENSIONAIS

Entendendo que objetos de aprendizagem sem um design instrucional são somente objetos de conhecimento (MERRILL, 2002), os objetos desenvolvidos para o Cálculo Diferencial e Integral, envolvendo funções de duas variáveis, foram idealizados para proporcionar aos estudantes situações para explorarem e formularem conjecturas,

confrontando conceitos e conhecimentos prévios apresentados nas funções de uma variável independente.

Os objetos de aprendizagem foram desenvolvidos utilizando duas janelas, uma para interação (bidimensional) e outra para a visualização (tridimensional).

O primeiro objeto de aprendizagem foi desenvolvido para o estudo da derivada direcional. Neste objeto o estudante pode manipular o ponto e a direção que se está verificando a derivada direcional. Na janela tridimensional o estudante visualiza o plano tangente no ponto selecionado e a projeção do vetor direção. Os botões permitem que sejam ocultadas a função, o vetor direção e o plano tangente, diminuindo a quantidade de objetos gráficos para facilitar a visualização e exploração de situações.

A atividade com este objeto de aprendizagem é organizada e orientada fazendo uso de questionamentos para que o aluno tenha como referência seus conhecimentos prévios sobre funções de uma variável. O objeto de aprendizagem permite que se introduza a função a ser estudada, sendo recomendado o uso de várias funções.

Como exemplo, apresenta-se o parabolóide $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. A organização da atividade para a análise da função pode ser realizada através de algumas perguntas que orientam o aluno a realizar as manipulações, observações e a formulação de conjecturas sobre as características da função no ponto. As perguntas foram:

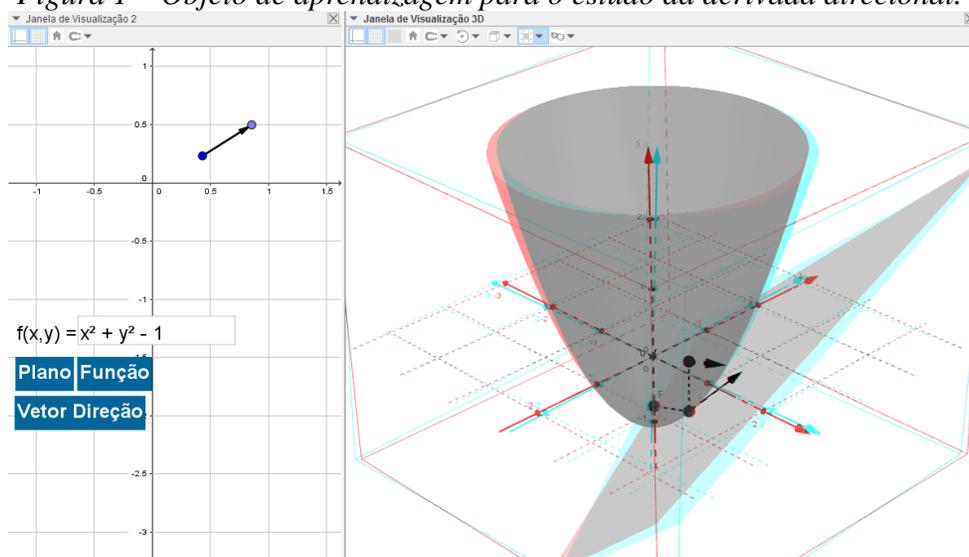
- Qual o valor de $f(2, -2)$, $f(0,1)$ e $f(0,0)$? Escolhendo os pontos para gerar as situações de valor positivo, negativo e zero.
- No ponto $(1,1)$ a função é crescente ou decrescente? [A condução dessa pergunta objetiva que o aluno identifique a necessidade de se adotar uma direção pois não é possível afirmar a característica de variabilidade da função somente com o ponto].
- Lembrando que na função de uma variável temos um ponto crítico quando a taxa de variação é zero, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Para o ponto $(1,0)$ (que não é um ponto crítico da função) temos um ponto de máximo ou de mínimo? Nesse ponto existe uma direção na qual a taxa de variação é nula? Então porque não é ponto crítico? [Para esses questionamentos deve-se ativar o vetor direção e o plano tangente do objeto de

aprendizagem para que, através de experimentações, o estudante identifique a variação é nula ocorre em duas direções, e que isso não é condição para que o ponto seja um ponto crítico].

- A função tem um ponto de máximo ou de mínimo definido? Quais são as características de variação nesse ponto? [O professor deve conduzir o aluno para que ele manipule o ponto analisado eo ponto de vista da projeção tridimensional, de modo que este identifique o ponto de mínimo do parabolóide e, realizando mudanças no vetor direção, verifique que a taxa de variação permanece nula para qualquer direção no ponto (0,0)].
- Mudando a função para $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$, a mesma tem um ponto de máximo ou de mínimo definido? Quais são as características da função no ponto (0,0)? [O hiperbolóide de uma folha tem um ponto crítico que não é ponto de máximo ou de mínimo, mas um ponto de sela. Nesta situação o estudante, através da rotação do hiperbolóide, verifica as propriedades do ponto crítico e comprova pela visualização que não basta somente a variação nula em todas as direções para que seja ponto de máximo ou de mínimo].

Observa-se o objeto de aprendizagem para o estudo da derivada direcional, construído no *software* GeoGebra, na Figura 1.

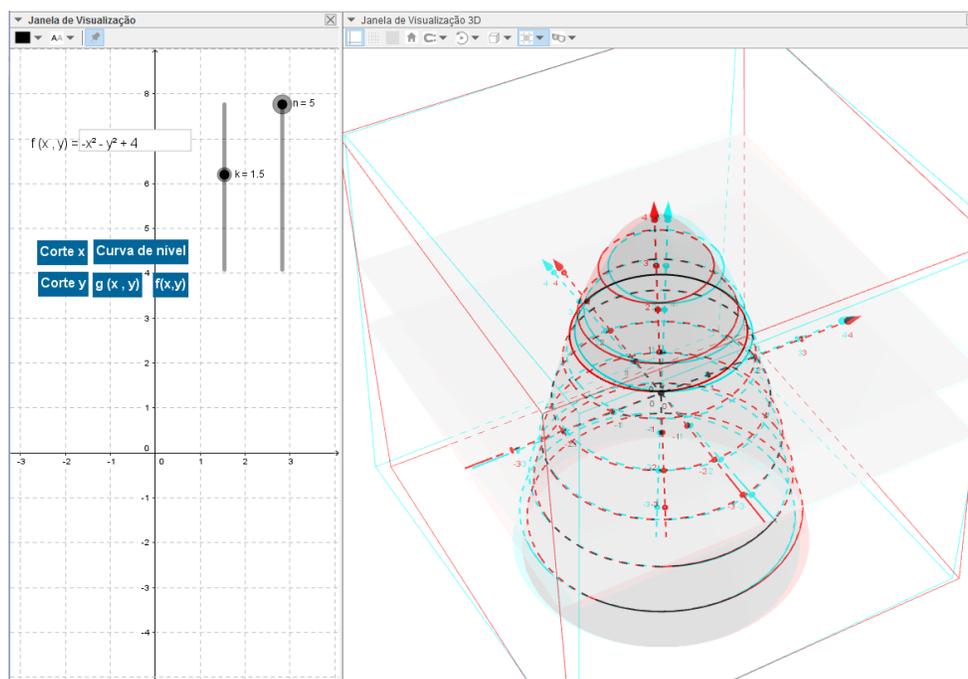
Figura 1 – Objeto de aprendizagem para o estudo da derivada direcional.



Fonte: O autor.

A figura 2 apresenta o objeto tridimensional para aprendizagem de curvas de nível e as integrais duplas para cálculo da região topológica delimitada pela função.

Figura 2-Objeto de aprendizagem para curvas de nível e estudo de regiões entre funções



Fonte: O autor.

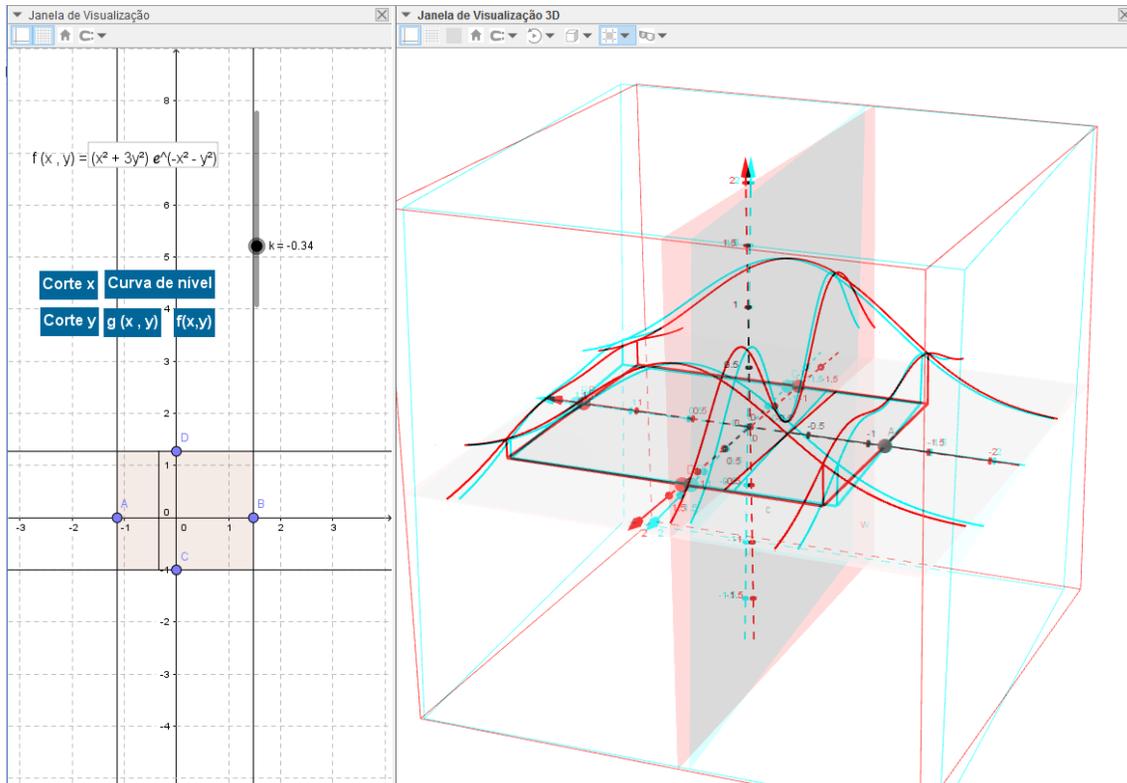
Para o estudo de curvas de nível, o objeto possui botões para ativar o plano de corte paralelo ao plano XY. Para as curvas de nível tem-se disponível dois botões, um que controla o plano de intersecção paralelo ao plano XY e outro que apresenta as curvas para os valores inteiros de $f(x, y)$.

O estudante manipula o controle k e altera o plano paralelo ao plano XY que apresenta a curva de intersecção com a função identificando o que é a curva de nível. Manipulando o controle n , aparecem curvas de nível com valores inteiros para $f(x, y)$ e rotacionando a função para uma vista de topo o aluno visualizará as curvas de nível. Essa atividade permite a compreensão da relação entre a representação bidimensional das curvas de nível e a representação tridimensional da função.

Para o estudo das integrais duplas e regiões topológicas entre a função e o plano XY, o objeto de aprendizagem, na figura 3, disponibiliza botões para ativar o plano de corte perpendicular ao eixo x ou y , para dar suporte ao conceito da integral dupla.

É possível usar da visualização para fazer um paralelo em relação a soma de Riemann como a soma das regiões definidas pelo plano manipulado. No painel esquerdo é possível manipular os pontos A, B, C e D que definem a região retangular que define os intervalos de integração em relação às variáveis.

Figura 3-Objeto de aprendizagem para curvas de nível e estudo de regiões entre funções



Fonte: O autor.

Nos dois objetos o estudante insere a função que deseja estudar nos campos apropriados, possibilitando o estudo de quaisquer funções. O uso da representação geométrica tridimensional permite a interpretação do objeto estudado com noções de profundidade, evitando a perda de informação que ocorre na representação em perspectiva. As imagens apresentadas no presente artigo foram reproduzidas com o recurso estereoscópico anáglifo e recomenda-se o uso dos óculos apropriados para melhor visualização.

CONCLUSÕES

As aulas que apresentam funções multivariadas com gráficos desenhados a mão livre, ou projeções estáticas em perspectiva, não oferecem a mesma facilidade de interpretação que as imagens tridimensionais com a noção de profundidade como as estereoscópicas. O uso dos

objetos de aprendizagem tridimensionais nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral objetivam minimizar os problemas de compreensão das características das funções em um determinado ponto, assim como, os problemas de otimização, pela interação e interpretação gráfica das situações.

O uso do GeoGebra para o estudo das funções multivariadas, ofereceu a experimentação de situações diferenciadas que possibilitaram a observação das características e propriedades geométricas dos objetos de estudo para formulação de conjecturas e compreensão dos conceitos matemáticos estudados, a derivada direcional, os pontos críticos de funções multivariadas, a representação por curvas de nível e a região topológica delimitada pela superfície e o plano XY.

Nas três turmas que tiveram suporte com os objetos de aprendizagem, comparativamente com semestres anteriores, observou-se que ampliou a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, não ficando na operacionalização sistemática e algébrica para o cálculo de pontos críticos e integrais duplas. Os resultados indicam que o uso de representações tridimensionais estereoscópicas (utilizando óculos 3D) auxiliam no entendimento da variabilidade da função pela visualização e interação com os objetos tridimensionais, levando a compreensão das características das funções multivariadas em um determinado ponto.

Ressalta-se que os objetos fazem parte de uma sequência didática envolvendo o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral para funções de várias variáveis. As atividades subsequentes a atividade que utiliza os objetos geométricos, devem explorar as conjecturas e hipóteses levantadas pelos estudantes e expandi-las para funções com mais de duas variáveis e que não possuem representação geométrica. Deste modo o recurso de visualização é parte do processo de significação de conceitos aplicados a qualquer função, independentemente do número de variáveis e, a aprendizagem, deve seguir até os conceitos se desvincularem das representações geométricas.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, [s. l.], v. 1, n. 1, p. 6, 2012. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8239/6616>>

- CORREIA DE SÁ, C.; ROCHA, J. *Treze Viagens Pelo Mundo da Matemática*. [s.l.] : Universidade do Porto, 2010.
- FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática : conceitos, tendências e perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa*, [s. l.], v. 14, n. 1, p. 31–45, 2012.
- GUTIÉRREZ, Á. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In: PROCEEDINGS OF THE 20TH PME CONFERENCE 1996, *Anais...* [s.l: s.n.] Disponível em: <<http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>>. Acesso em: 25 mar. 2016.
- HOHENWARTER, M.; PREINER, J. Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, [s. l.], v. 7, 2007. Disponível em: <http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html>
- LOHMAN, D. F. Spatial Ability and g. In: *Human Abilities: Their Nature and Measurement*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 97–116.
- MERRILL, D. Position statement and questions on learning objects research and practice. In: *Learning objects technology: Implications for educational research and practice*, AERA. New Orleans.
- SISCOUTTO, R. A. et al. Estereoscopia. In: KIRNER, C.; TORI, R. (Eds.). *Realidade Virtual: Conceitos e Tendências*. Petrópolis,RJ. p. 354.

Autor

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa

iaqchan@ulbra.br

Doutor em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM)
pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) de Canoas.

É professor do Curso de Matemática Licenciatura
e dos cursos de Engenharia da ULBRA