COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LAS ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA: UNA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Jeferson Takeo Padoan Seki
jefersontakeopadoanseki@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3543-5421
Universidade Estadual de Londrina - Londrina- PR -Brasil

Lourdes Maria Werle de Almeida
lourdes@uel.br
https://orcid.org/ 0000-0001-8952-1176
Universidade Estadual de Londrina - Londrina- PR -Brasil

Recibido: 21 de enero de 2021 **Aceptado:** 21 de mayo de 2021

Resumen

En este artículo investigamos, desde una perspectiva wittgensteiniana, la comprensión de los estudiantes en las actividades de modelación matemática desarrolladas en una disciplina de Matemáticas Financieras en un curso de Licenciatura en Matemáticas. Los fundamentos utilizados en esta investigación son el Modelación Matemática en la Educación Matemática y algunos escritos del filósofo Ludwig Wittgenstein, principalmente su obra Investigaciones filosóficas. Los datos relacionados con el desarrollo de una actividad de modelación matemática por parte de cinco estudiantes de la disciplina de Matemáticas Financieras fueron recolectados a través de grabaciones de audio y video, registros escritos, cuestionarios y entrevistas. El análisis de datos se realizó con base en el Análisis de Contenido, considerando las acciones de los estudiantes y los usos del lenguaje realizados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad de modelación matemática. Como resultado, se obtuvieron dos categorías que detallan la comprensión de los estudiantes en el desarrollo de la actividad de modelación matemática: comprensión de la situación del problema, comprensión de conceptos de Matemáticas; Estas categorías resultan de la identificación de elementos en juegos de lenguaje que surgieron en el desarrollo de la actividad de modelación matemática por parte de los estudiantes y de los criterios de comprensión caracterizados.

Palabras Clave: Educación Matemática; Modelación Matemática; Comprensión; Wittgenstein.

THE STUDENTS' UNDERSTANDING IN MATHEMATICAL MODELLING ACTIVITIES: A WITTGENSTENIAN PERSPECTIVE

Abstract

In this paper we investigate, based on a wittgensteinian perspective of language, students' understanding in mathematical modelling activities that were developed in a Financial Mathematics course at a Mathematics Degree. The foundations used in this research are Mathematical Modelling in Mathematical Education and some writings of the philosopher Ludwig Wittgenstein, specially his Philosophical Investigations book. Data related to the

development of a mathematical modelling activity collected with five students of the Financial Mathematics course were collected through audio and video recordings, written records, questionnaires, and interviews. Data analysis was performed based on content analysis and considering students actions indicative and their language uses in the development of the mathematical modelling activity. As a result, two categories that detail the students' understanding in the development of mathematical modelling activity were obtained: understanding of the problem situation, understanding of mathematical concepts. These categories result from the identification of elements in language games that emerged in the development of the mathematical modelling activity by the students and from the characterized understanding criteria.
Keywords: Mathematics Education; Mathematical Modelling; Understanding; Wittgenstein.

A COMPREENSÃO DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Resumo

Nesse artigo investigamos, sob uma perspectiva wittgensteiniana, a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática. Os fundamentos utilizados nesta pesquisa são a Modelagem Matemática na Educação Matemática e alguns escritos do filósofo Ludwig Wittgenstein, principalmente sua obra *Investigações Filosóficas*. Dados relativos ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática foram coletados por meio de gravações de áudio e vídeo, registros escritos, questionários e entrevistas. A análise de dados foi realizada com base na Análise de Conteúdo e considerou indicativos das ações e os usos da linguagem realizados pelos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Como resultado, duas categorias que detalham a compreensão dos estudantes no desenvolvimento da atividade de modelagem foram obtidas: compreensão da situação-problema, compreensão de conceitos matemáticos. Estas categorias decorrem da identificação de elementos em jogos de linguagem que emergiram no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática pelos alunos e dos critérios de compreensão caracterizados.
Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Compreensão; Wittgenstein.

Introdução

A introdução nas práticas pedagógicas de atividades que fomentem o uso da matemática para resolver problemas da sociedade, do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento tem sido objeto de interesse de pesquisadores e professores da área de Educação Matemática. Uma possibilidade para esta introdução, frequentemente referida, diz respeito às atividades de modelagem matemática, tendo em vista o entendimento de que a modelagem matemática possibilita abordar, na sala de aula, situações-problema não matemáticas e resolvê-las por meio da matemática.

Considerando que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática acontece a interlocução entre linguagens, problemáticas, interesses, objetivos e ações dos alunos, as discussões relativas a esta temática têm explorado diferentes aspectos, tais como, caracterizações e perspectivas de modelagem matemática (Blum, 2015; Carreira, Baioa e Almeida, 2020, por exemplo), uso da linguagem e seus desdobramentos para o *fazer* modelagem matemática e o uso da matemática em atividades de modelagem matemática (Almeida, 2014, 2018; Souza e Barbosa, 2014; Sousa e Almeida, 2019; Tortola e Almeida, 2018; Sousa e Barbosa, 2018), a compreensão em atividades de modelagem matemática (Brown e Edwards, 2011; Brown, 2017), entre outros.

No que se refere à compreensão, diferentes bases epistemológicas e filosóficas têm permeado os discursos daqueles que se interessam pela modelagem matemática. Neste artigo, particularmente, a problematização da compreensão se fundamenta em pressupostos do filósofo Ludwig Wittgenstein, considerando sua perspectiva filosófica a respeito da compreensão. Conforme propõe Wittgenstein (2014) e se discute em Sousa e Almeida (2019), Machado (2007) e Moreno (2003), olhar para a compreensão sob essa perspectiva implica considerar as ações dos alunos em uma prática linguística.

Com a finalidade de trazer ao debate esta perspectiva filosófica de pensar sobre a compreensão, temos como objetivo investigar a compreensão dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática. Nossas argumentações estão subsidiadas por uma análise, em uma abordagem qualitativa, de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por um grupo de cinco alunos da disciplina em questão.

A compreensão na filosofia de Wittgenstein

Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951) foi um filósofo austríaco cuja filosofia em sua fase madura é marcada por uma terapia filosófica que traz à tona a discussão de que não é razoável buscar um fundamento último para um conceito, mas pondera que o significado desse conceito se constitui nos seus usos em diferentes práticas ligadas à linguagem. Em sua obra *Investigações Filosóficas* Wittgenstein submete diferentes interpretações de conceitos à terapia filosófica, dentre os quais destacamos o conceito de compreensão, cujo significado se constitui nos usos do termo *compreensão* em práticas específicas de linguagem (Wittgenstein, 2014, § 531-532).

As práticas específicas de usos da linguagem são denotadas por Wittgenstein como *jogos de linguagem*, com alusão às atividades guiadas por regras. Para Wittgenstein (2014, § 23), "a expressão "jogo de linguagem" visa salientar que falar de uma língua é parte de uma forma de vida[1]" com regras bem definidas.

Os jogos de linguagem envolvem regras que orientam os usos de expressões e conceitos e que podem ser entendidas como placas de orientação que fornecem indicativos dos usos da linguagem, não de uma forma única e fixa, mas convencionadas em formas de vida (Wittgenstein, 2014, § 85). O conjunto de tais regras formam o que Wittgenstein denomina de gramática[2].

A intervenção terapêutica de Wittgenstein com relação à compreensão considera uma aparente confusão no que diz respeito ao que se entende por compreensão. Machado (2007), interpretando o texto de Wittgenstein, pontua que esta confusão surge quando se declara a compreensão como um estado mental oculto independente do contexto linguístico. Wittgenstein, de fato, se interessa em dissolver essa confusão, mostrando diversos usos da palavra compreensão em diferentes jogos de linguagem, associados entre si por parentescos, semelhanças de família[3], que em conjunto nos permitem ter uma visão panorâmica a respeito do tema.

Consideremos um exemplo discutido por Wittgenstein nos parágrafos 143 a 147 da obra Investigações Filosóficas em que em uma atividade matemática em sala de aula, o professor apresenta aos alunos a sequência de números 1, 4, 9, 16.... e pede para que eles continuem a escrever essa sequência. Wittgenstein sugere que os indícios de compreensão decorrem de reações dos aprendizes à apropriação de técnicas, em geral realizadas por meio do que o filósofo chama de *treino.* Assim, inferir se o aluno compreendeu a sequência, implica em observar se ele seguiu regras convencionadas em uma determinada forma de vida para continuar a escrever termos dessa sequência. Neste exemplo, Gottschalk (2018) argumenta que um critério que podemos usar para inferir sobre a compreensão dos alunos de como se continua essa sequência,

---

[1] A noção de forma de vida aparece poucas vezes no Investigações Filosóficas e diferentes interpretações têm sido designadas na literatura. Seguimos a interpretação de Gottschalk (2008, p. 80), de que formas de vida designam "nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades em geral, envolvidas com a linguagem".

[2] A noção de gramática pode ser entendida, segundo Moreno (2003, p. 116) "como sendo o conjunto de usos que fazemos das palavras que podem ser expressos sob a forma de um sistema de regras; uma vez cristalizados em regras e assim sistematizados, os usos das palavras esclarecem a significação dos conceitos e enunciados".

[3] A expressão *semelhanças de família* é utilizada por Wittgenstein para mostrar que não há uma característica comum que perpasse todos os diferentes usos de um conceito, mas apenas semelhanças que podem aparecer e desaparecer na medida em que olhamos e mudamos a comparação entre diversos jogos de linguagem (Wittgenstein, 2014, § 66-67).

pode ser, por exemplo, identificar se eles se referem à fórmula algébrica $y = x^2$ para dar continuidade na escrita dos termos da sequência.

Wittgenstein refuta a concepção mentalista de que compreensão é um estado mental[4] oculto, no qual compreender uma sequência é ter em mente sua lei de formação e fazer sua aplicação de *um golpe só* (Wittgenstein, 2014, §139, §197) como se todos os passos da escrita da sequência já estivessem pré-determinados na mente do aprendiz. Para Wittgenstein, os indícios de compreensão nesse caso se revelam nas ações dos aprendizes, no seguir regras, que não se baseiam, conforme sugere Machado (2007, p. 276), "na observação (introspecção) do estado do nosso aparelho mental", mas estão em manifestações linguísticas. Ou seja, o que o sujeito diz sobre a continuação da sequência ao continua-la é um indicativo da compreensão de tal sequência.

Em outro exemplo, na obra *Fichas (Zettel)*, Wittgenstein (1981, § 159-165) se refere à compreensão de um tema musical. Neste caso, o autor afirma que uma possiblidade para inferir sobre a compreensão do ouvinte da música é recorrer à explicação que ele é capaz de dar, verbalmente ou não (utilizando diferentes instrumentos linguísticos de uma cultura). Essa explicação revela as regras seguidas pelo ouvinte bem como as técnicas utilizadas para explicar, por exemplo, o ritmo, a harmonia, o tempo da música. Não se trata, portanto, de uma concepção mentalista em que a compreensão da música seria revelada numa vivência que acompanha o ato de ouvir (Wittgenstein, 1981, § 163). Neste caso, Wittgenstein (1981, § 163) afirma que "compreender uma frase musical é também compreender uma linguagem" e "compreender uma frase significa compreender uma língua. Compreender uma língua significa dominar uma técnica" (Wittgenstein, 2014, § 199).

Neste sentido, a gramática de 'compreender algo' é similar à gramática de 'ser capaz' de fazer algo em um determinado jogo de linguagem. Segundo Wittgenstein (2014, § 150), a gramática da palavra 'saber' goza de estreito parentesco com a gramática das palavras 'poder', 'ser capaz' de modo que compreender associa-se a dominar uma técnica.

Podemos considerar, portanto, que na perspectiva de wittgensteiniana, a compreensão está intimamente conectada com a capacidade de agir de determinado modo no interior de um jogo de linguagem, com certa finalidade e pressupõe o domínio de uma técnica (Baker e Hacker,

[4] Wittgenstein não nega a existência de estados mentais, uma vez que a existência de tais estados não é tema de sua reflexão, isto é, não é necessário recorrer aos estados mentais para conhecer a significação dos conceitos psicológicos.

2005, p. 53). Os critérios que utilizamos para dizer que alguém compreendeu uma palavra são de natureza pública e circunstanciais, podendo consistir “no modo como usamos a palavra, no modo como reagimos quando outros a utilizam ou ainda no modo como a explicamos quando somos solicitados a fazê-lo” (Glock, 1998, p. 92). Também para Gottschalk, (2008), tais critérios são circunstanciais, pois podemos admitir diferentes usos de nossas expressões linguísticas, tais como um uso descritivo (proposições empíricas[5]) e um uso normativo (proposições gramaticais[6]), que diferem de acordo com o jogo de linguagem em que tais proposições são usadas.

Diante dessas considerações, podemos dizer que investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática requer olhar para os diferentes jogos de linguagem associados ao desenvolvimento destas atividades, bem como para as regras e as técnicas utilizadas pelos alunos e então determinar critérios para inferir sobre a sua compreensão.

Modelagem Matemática

A modelagem matemática, viabilizando a interlocução entre matemática e realidade, visa à busca de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade, sendo essa busca mediada pela construção e validação de um modelo matemático. Modelo matemático, conforme sugerem Lesh e Harel (2003), é uma estrutura matemática capaz de revelar como aspectos relevantes da situação em estudo podem ser interpretados à luz da matemática. Assim, uma equação, uma tabela, um gráfico, são exemplos de modelos matemáticos.

Conforme apontam Pollak (2015), Almeida (2018), Blum (2015), entre outros, quando atividades de modelagem matemática são incluídas nas aulas de matemática, inicialmente os alunos precisam decidir quais aspectos da situação-problema são mais importantes e mantê-los.

[5] As proposições empíricas possuem função descritiva, pois podem ser falseadas pela experiência, por exemplo, a proposição “esta mesa tem o mesmo comprimento que a mesa acolá” (Wittgenstein, 2014, § 251) é uma proposição empírica, isto é, pode ser verificada por comparação entre os comprimentos das mesas.

[6] Já as proposições gramaticais têm função normativa, não são falseadas pela experiência e são regras convencionadas no interior de formas de vida, elas nos fornecem as condições para o que tem ou não sentido dizer, por exemplo, a proposição “toda vara tem um comprimento” (Wittgenstein, 2014, § 251), trata-se de uma proposição gramatical, pois não faz sentido dizer o contrário.

Em seguida, há a matematização, em que os alunos traduzem aspectos da situação-problema em termos matemáticos, levando à elaboração de um modelo matemático. Por fim, os alunos precisam traduzir os resultados matemáticos para o contexto da situação-problema, obtendo uma resposta para o problema inicial.

Para caracterizar estas ações dos alunos, Almeida e Vertuan (2014) associam ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática uma estrutura que inclui quatro fases: (i) inteiração, na qual os estudantes procuram se familiarizar com um tema a ser investigado; (ii) matematização, fase em que os estudantes buscam traduzir o problema real investigado em um problema matemático; (iii) resolução, os estudantes resolvem o problema matemático; e (iv) interpretação de resultados e validação, momento em que os estudantes devem interpretar a solução do problema matemático em termos do problema real e do tema investigado, validando ou não a solução obtida.

Conforme tem sido percebido na literatura (Kaiser e Sriraman, 2006; Blum, 2015; Galbraith, 2012; Almeida e Carreira, 2019; entre outros), os objetivos e as possibilidades para a integração da modelagem matemática nas aulas de matemática são diversos e podem estar ligados a diferentes interesses educacionais. Neste contexto, Buhrman (2017) e Carreira, Baioa e Almeida (2020) sugerem que a introdução de atividades de modelagem matemática nas aulas de matemática deve levar em consideração metas curriculares, objetivos de aprendizagem e discussões que vão para além da aplicação da matemática. Estes objetivos, todavia, não estão desvinculados da diversidade de conhecimentos que no interior destas atividades devem ser conectados e articulados de modo que a situação-problema em estudo possa ter uma interpretação matemática. Perrenet e Zwaneveld (2012, p. 3), neste sentido, ponderam que também na sala de aula "a modelagem matemática é, em primeiro lugar, sempre sobre algo, uma situação e um problema decorrente dessa situação, e que a matemática é 'apenas' uma parte de todo o processo".

Galbraith (2012), visando identificar diferentes finalidades da introdução da modelagem matemática na sala de aula amplia as discussões de Julie e Mudaly (2007) reativamente à caracterização de duas abordagens distintas: modelagem como veículo e modelagem como conteúdo. Como veículo a modelagem matemática visa atender a estrutura curricular de modo que a matemática deve emergir das atividades para auxiliar e prover o desenvolvimento do conteúdo matemático curricular. Já a modelagem matemática como conteúdo, "se propõe a capacitar os alunos a usar seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais e dar continuidade ao desenvolvimento dessa capacidade ao longo do tempo" (Galbraith, 2012, p. 13) e o foco nesse caso é o aprender fazer modelagem matemática e usar a matemática, técnicas e procedimentos da modelagem matemática para resolver problemas não matemáticos.

Seja como conteúdo ou seja como veículo, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em contextos educacionais envolve, dentre outras coisas, a investigação de uma situação real por meio da matemática e diferentes resoluções dos alunos, em decorrência de seus conhecimentos matemáticos e da situação investigada. Neste sentido, "a matemática necessária emerge do problema e suas especificidades" (Almeida, 2018, p. 19), o que acarreta no uso de diferentes regras e critérios para o que constitui uma solução aceitável aos modeladores.

Nesse contexto, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática envolve transições entre a linguagem natural da situação inicial e a linguagem matemática, estabelecendo um diálogo entre a matemática e nosso conhecimento da realidade (Almeida 2018; Tortola, 2016), bem como pode constituir, sob uma perspectiva wittgensteiniana, um modo de ver as situações com base em um sistema matemático (Tortola e Almeida, 2018; Souza e Barbosa, 2014) e no interior de jogos de linguagem específicos.

Levando em consideração os objetivos da introdução da modelagem matemática na sala de aula, os jogos de linguagem constituídos no desenvolvimento dessas atividades, podem, em alguma medida, se associar a esses objetivos, em sintonia com as considerações de Wittgenstein (2014) de que 'compreender algo' é similar à gramática de 'ser capaz' de fazer algo em um determinado jogo de linguagem. Assim, no âmbito do que nos propomos a discutir no presente artigo, buscamos na diversidade de usos de linguagens no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática os critérios para inferir em relação à compreensão dos alunos nesta atividade.

Procedimentos metodológicos

Para investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática, realizamos uma pesquisa empírica com uma turma de nove alunos de uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática. O professor da disciplina, um dos autores deste artigo, introduziu atividades de modelagem matemática nas aulas na expectativa de, com essas atividades, mediar o ensino e a aprendizagem de conteúdos constantes da programação da disciplina. As atividades eram desenvolvidas em grupos pelos alunos.

Para a discussão aqui pretendida nos referimos a uma das atividades de modelagem matemática desenvolvidas por um dos grupos formado por cinco alunos. Neste caso a temática da atividade, Financiamento de automóveis, foi escolhida pelos próprios alunos. No decorrer de quatro aulas o grupo de alunos investiu no desenvolvimento da atividade, sendo assessorado e auxiliado pelo professor sempre que este era solicitado. Após a elaboração de um relatório final da atividade fora do horário das aulas, uma aula foi destinada à apresentação da atividade do grupo para os demais alunos da disciplina.

Nossas argumentações com relação à compreensão dos alunos se fundamentam nos registros escritos produzidos pelos alunos, nas transcrições de gravações em áudio e vídeo e nos dados obtidos por meio de um questionário e da realização de uma entrevista com os alunos do grupo. Nas transcrições incluídas no artigo o professor é identificado com PP e os alunos por A_5, A_6, A_7, A_8 e A_9.

A análise das informações coletadas seguiu os encaminhamentos da análise de conteúdo, em uma abordagem qualitativa, de acordo com Bardin (2011). A análise de conteúdo, segundo Bardin (2011, p. 15), é "um conjunto de instrumentos metodológicos [...] que se aplicam a 'discursos' [...] extremamente diversificados".

Nessa pesquisa, coletamos os dados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e, em seguida, fragmentamos esses dados em unidades de análise (unidades de registro) das quais decorrem duas categorias. Esse processo analítico foi se constituindo a partir de inferências do professor (também o pesquisador) levando em consideração os pressupostos da filosofia de Wittgenstein.

As unidades de análise dizem respeito a conteúdos identificados nos diálogos, registros escritos e trechos da entrevista associados ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, que podem fornecer indicativos sobre as ações e os usos da linguagem dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, considerando que a compreensão, na perspectiva wittgensteiniana, se manifesta nos modos de agir dos alunos e de suas manifestações linguísticas.

No que tange à categorização, os critérios que utilizamos para agrupar as unidades de análise em categorias não foram tomados previamente, mas emergiram no decorrer da análise.

Esta abordagem se deu a partir da perspectiva filosófica adotada, na qual os critérios de compreensão (para dizer que alguém compreendeu algo) não são fixos, mas dependem das circunstâncias e do contexto linguístico em que a atividade está envolvida.

Atividade Financiamento de Automóveis

A atividade Financiamento de Automóveis surgiu a partir do interesse dos alunos do grupo em relação à compra de um carro e ao estudo de financiamentos, tópico que faz parte da programação da disciplina de Matemática Financeira. Para planejar a atividade e dar encaminhamento ao seu desenvolvimento, os alunos fizeram uma entrevista com interessados na compra de um carro e pesquisas na *internet.* A partir do detalhamento de diferentes classificações de financiamento (*leasing*, crédito direto ao consumidor e consórcio[7]) os alunos optaram pela modelagem da situação usando o financiamento com parcelas mensais fixas e delimitaram a situação conforme indica o Quadro 1.

[7] As informações sobre financiamento e consórcio foram obtidas pelos alunos nos sites:
Banco Central do Brasil (2018). *O que é sociedade de crédito, financiamento e investimento?*Disponível em https://www.bcb.gov.br. Acesso em 07/11/2018.
Associação Brasileira de Administradora de Consórcios (2018). *O que é consórcio*. Disponível em: http://abac.org.br/o-consorcio/o-que-e-consorcio. Acesso em: 25/08/2018.

Quadro 1 - Situação-problema e desenvolvimento da atividade Financiamento de Automóveis

Problema: Uma família é composta por três membros, sendo a mãe farmacêutica, o pai bioquímico e um filho de nove anos de idade. A família deseja comprar um veículo zero km. A renda desta família é de R$ 8.000,00. Com base na tabela de gastos (Tabela 1) e na renda, a família está disposta a comprometer, no máximo, R$ 2.130,00 com parcela para aquisição de uma carro zero km. Qual é o modelo do carro adequado a esta família? Considerando o valor da prestação e um parcelamento que pode variar entre 12 a 60 meses, qual carro esta família pode comprar.

Dados coletados

Tabela 1 – Gastos mensais do casal

Descrição dos Gastos Mensais	**Valor/Tempo**
Seguro Carro (Amarok)	R$ 300,00 – Mensal
Telefone Móvel	R$ 120,00 – Mensal
Mercado	R$ 800,00- Média Mensal
Internet e Telefone	R$ 200,00 –Mensal
Financiamento reforma	R$ 3.000,00 – Mensal (12 meses)
Água	R$ 90,00– Média Mensal
Luz	R$100,00 – Média mensal
Empregada doméstica	R$960,00
Fisk	R$300,00
Total	**R$5.870,00**

Tabela 2 – Taxa de juros das principais agencias financiadoras do mercado

Instituição	Taxa de juros ao mês (%)	Instituição	Taxa de juros ao mês (%)
Bradesco	**1,47%**	Banco do Brasil	**1,75%**
Santander	**1,72%**	Caixa Econômica Federal	**2,00%**
Itaú	**1,73%**	Chevrolet	**1,13%**

Fonte: Konkero (2018)

Hipóteses

- A tabela de gastos não irá variar ao longo dos anos durante o período do financiamento.
- Este casal não levará em consideração a marca do carro, mas sim a menor taxa de juros do mercado;
- As parcelas do financiamento são fixas.
- Todas estas instituições adotam o prazo de financiamento de 12 a 60 meses.

Variáveis

i: $taxa\ de\ juros$; n: $tempo\ (meses)$;
CF: $coeficiente\ de\ financiamento$;
VP: $valor\ financiado$;
PMT: $parcela\ do\ financiamento$;
RC: $renda\ do\ casal$; GM: $gastos\ mensais$.

Modelo Matemático

$$PMT = RC - GM$$

$$PMT = VP.\left(\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}\right) \text{ em que } CF = \frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

Resolução Matemática

Para $n = 12$

$$CF = \frac{0{,}0113}{1-\frac{1}{(1+0{,}0113)^{12}}}$$

$$CF = 0{,}089580220$$

$$VP = \frac{2130}{0{,}089580220}$$

$$VP \cong 23777{,}57$$

Para $n = 60$

$$CF = \frac{0{,}0113}{1-\frac{1}{(1+0{,}0113)^{60}}}$$

$$CF = 0{,}023040769$$

$$VP = \frac{2130}{0{,}023040769}$$

$$VP \cong 92444{,}83$$

Resposta para o problema

Essa família poderá comprar um carro cujo valor varia de R$ 23.777,57 à R$ 92.444,83. Dentre os modelos da instituição financiadora, essa família pode escolher um dos seguintes: OnixJoy 1.0, linha Prisma 1.4, linha Spin, Cobalt 1.8.

Validação

Simulação para 12 meses				
Valor financiado (R$)	Tempo (meses)	Taxa de juros (%)	Prestação	Total Pago (R$)
23.777,57	12	1,13 a.m	2.130,01	25.560,12

Simulação para 60 meses				
Valor financiado (R$)	Tempo (meses)	Taxa de juros (%)	Prestação (R$)	Total Pago (R$)
92.444,83	60	1,13 a.m	2.130,00	127.800,00

Fonte: relatório escrito do grupo G2.

A compreensão dos alunos no desenvolvimento da atividade [8]

Buscar indícios de compreensão dos alunos na atividade de modelagem matemática considerando uma perspectiva wittgensteiniana implica olhar para os usos que os alunos fizeram da linguagem, para os modos de agir, para suas explicações e para o emprego de técnicas e uso de regras no desenvolvimento da atividade. Nesta seção colocamos em diálogo, com pressupostos de Wittgenstein e alguns de seus interpretadores, as ações e os usos da linguagem feitos pelos alunos do grupo.

[8] As unidades de análise identificadas no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática são destacadas em itálico no decorrer desta seção.

A inteiração dos alunos com a situação-problema, mediada pela entrevista e por pesquisas em órgãos especializados sobre o tema e disponíveis em *sites* da *internet* se deu a partir do interesse do grupo por esta situação. Os alunos engajaram-se em um jogo de linguagem específico, do financiamento de um carro, que envolve significados específicos de termos e conceitos (como os tipos de financiamento, por exemplo) que são constituídos no interior desse jogo de linguagem.

Neste caso, nos fundamentamos na afirmativa de Wittgenstein (2014, § 560) de que "o significado da palavra é aquilo que a explicação do significado expressa" e em Glock (1998), que sugere que a compreensão de uma palavra pode ser identificada no modo o sujeito explica algo quando é solicitado a fazê-lo para caracterizar *as explicações dos alunos para o significado de termos específicos* como um critério de compreensão da situação-problema nessa atividade. Estas explicações dos alunos podem ser identificadas, por exemplo, nos diálogos entre professor e alunos durante a inteiração com a situação-problema:

> PP - Vocês afirmam que há dois tipos de financiamento, o Crédito Direto do Consumidor (CDC) e o Leasing. Vocês sabem qual e a é a diferença entre os dois?
> A_9 – Acho que sim professor. No leasing o carro é do banco e só no final quando todas as parcelas estão pagas, o carro passa a ser seu.
> PP – Certo! E o CDC?
> A_9 – Ah, é quando o carro é da pessoa já no início do financiamento e por isso a taxa de juros é maior.

Levando em consideração o conjunto de informações relativas às possiblidades de financiamento de um carro a que os alunos tiveram acesso, seria necessário fazer simplificações de modo a estruturar uma situação sobre a qual pudessem obter resultados. De fato, conforme apontam Pollak (2012) e Almeida (2018), entre outros, a modelagem matemática se dá considerando os aspectos relevantes para a situação e para os modeladores e, de modo geral, requer alguma simplificação da situação. A simplificação e estruturação da situação-problema podem ser evidenciadas na transcrição de diálogo dos alunos com o professor:

> PP – O que vocês precisam pensar agora no início é como funciona o financiamento, a taxa de juros que vão considerar, o preço do carro, se vocês vão usar algum investimento da poupança ou do tesouro direto, por exemplo.
> A_7 – É, também definir quanto a pessoa tem para pagar, o valor da parcela que vai pagar por mês [...] Os gastos dessa família. [...] (mostrando para os dados coletados que estão na tabela 1 no Quadro 1).

Neste caso, *a simplificação e estruturação da situação-problema* atuam como regra para prosseguir no desenvolvimento da atividade e seguir essa regra é um indício de que os alunos estão compreendendo a situação-problema, uma vez que sinaliza quais informações os alunos consideraram importantes para incluir no problema do financiamento de um carro.

Um desdobramento da compreensão da situação-problema diz respeito à formulação de um problema cuja resolução seja mediada pela matemática. Na atividade Financiamento de Automóveis, os alunos compreenderam que o financiamento de um carro precisa levar em conta o planejamento financeiro do comprador e, deste modo, consideraram a renda mensal e a tabela de gastos de uma família, bem como a possiblidade para o valor da prestação desta família. Com base nisso, os alunos formularam o seguinte problema: Considerando o valor da prestação e um parcelamento que pode variar entre 12 a 60 meses, qual carro esta família pode comprar? O que eles pretendiam então era determinar valores (mínimo e máximo) de um carro que esta família pode financiar a partir da renda e valor da prestação definidos.

Na perspectiva de Wittgenstein, quem compreende algo é capaz de fazer certas coisas para certos propósitos (Baker e Hacker, 2005). Na atividade de modelagem em estudo, havia o interesse dos alunos em conhecer algo para o qual não tinham uma resposta a *priori*. De fato, ficou bem definido na formulação do problema que nesta situação eles iriam determinar valor do carro que poderia ser financiado pela família. Conforme já pontuamos na seção anterior, formular um problema é um procedimento essencial na modelagem matemática de uma situação da realidade (Almeida, 2018; Pollak, 2012). Assim, a formulação também sinaliza que os alunos seguiram regras no desenvolvimento da atividade.

A resolução do problema se iniciou com a formulação de hipóteses, considerando as informações dos alunos sobre a situação conforme indica o Quadro 1. Os alunos formularam as seguintes hipóteses: a tabela de gastos da família não vai variar ao longo dos anos no período do financiamento; a família não levará em consideração a marca do carro, mas sim a menor taxa de juros do mercado; as parcelas do financiamento são fixas; todas as instituições financeiras permitem o prazo de financiamento de 12 a 60 meses.

Para resolver o problema com base nessas hipóteses e nos dados coletados, os alunos deveriam matematizar a situação e, particularmente, eles buscaram na disciplina de Matemática Financeira elementos para essa matematização. Assim, se por um lado os alunos estavam já imersos em jogos de linguagem a respeito de financiamentos de carros, por outro lado, ingressar e transitar com esta situação em jogos de linguagem da matemática era um desafio.

Os alunos já conheciam alguns conceitos de matemática financeira como, por exemplo, financiamento, fluxo de caixa e valor monetário conforme definidos em Puccini (2007). No caso da atividade de financiamento de automóveis, o fluxo de caixa da família que vai adquirir o carro corresponde à entrada de valor monetário na data da compra e de saídas mensais para o pagamento das parcelas.

Entretanto, o professor aproveitou a oportunidade para introduzir o conceito de valor presente (VP) de fluxo de caixa em um financiamento. O valor presente de um fluxo de caixa corresponde à soma dos valores das parcelas (PMT_j, com $j = 1, 2, \ldots n$) descontados na data focal 0 em um regime de capitalização de juros compostos, conforme a equação matemática $VP = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+1)^2} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$.

Na situação investigada na atividade, a opção da família foi de usar as parcelas do financiamento fixas (ou seja, $PMT_1 = PMT_2 = \cdots = PMT_n = PMT$). Então, o professor estabeleceu um diálogo com o grupo de modo que os alunos pudessem construir o modelo matemático para a situação:

> [...] PP – Vejam, o financiamento é um fluxo de caixa certo? Então para calcular o valor presente de um fluxo de caixa temos que calcular a soma dos valores presentes de cada parcela, assim: $\mathrm{VP} = \frac{\mathrm{PMT}_1}{(1+\mathrm{i})^1} + \frac{\mathrm{PMT}_2}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{\mathrm{PMT}_\mathrm{n}}{(1+\mathrm{i})^\mathrm{n}}$,
> Mas agora as parcelas são fixas, certo, ou seja $\mathrm{PMT}_1 = \mathrm{PMT}_2 = \cdots = \mathrm{PMT}_\mathrm{n} = \mathrm{PMT}$
> PP – Então vai ficar como? Vai ficar: $\mathrm{VP} = \mathrm{PMT}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^\mathrm{n}}\right)$, agora vocês precisam continuar, a partir daqui vocês conseguem obter o modelo matemático de vocês?

A partir desse diálogo os alunos do grupo perceberam que poderiam escrever o valor presente como $VP = PMT\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$. Um dos alunos ($A_9$) também identificou que na soma *VP* a expressão $\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$ corresponde à soma de *n* termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$.

Assim, algumas manipulações algébricas realizadas pelo grupo conduziram ao modelo matemático $PMT = VP.\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$. Neste modelo, a expressão $\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$ corresponde ao que é denominado de coeficiente de financiamento (CF).

Escrito de outro modo, o modelo matemático $VP = \frac{PMT}{CF}$ relaciona o valor presente do carro na data da compra (VP) com a parcela do financiamento (PMT) que a família consegue pagar de acordo seu planejamento financeiro. O valor desta parcela é determinado pela diferença entre a renda (RC) e os gastos mensais (GM) da família. Assim, $PMT = RC - GM$ e pode variar de 12 a 60 meses e incorporar a menor taxa de juros (i) do mercado. No Quadro 2 constam os procedimentos dos alunos para a obtenção do modelo, sinalizando *o uso adequado da matemática nesta situação.*

Quadro 2 - Dedução do modelo matemático

Valor mensal que o casal poderá pagar no financiamento. $$PMT = RC - GM$$ Dedução do coeficiente de financiamento $$VP = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$$ Temos $PMT_1 = PMT_2 = PMT_n = PMT$. Assim, $$VP = PMT\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^n}\right)$$ A segunda parte depois da igualdade corresponde à soma de uma PG finita. Sabendo que $s = a_1 \frac{(q^n-1)}{q-1}$, obtivemos $$VP = PMT.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right)$$	Isolando *PMT*, temos $$PMT = VP.\left[\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$ Dividindo por $(1+i)^n$ obtemos: $$PMT = VP.\frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$$ Reescrevendo, temos que: $$VP = \frac{PMT}{CF}$$ em que $CF = \frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$

Fonte: Registros escritos dos alunos

Para a resolução matemática apresentada no Quadro 2, os alunos usaram os conceitos de valor presente, valor presente de fluxo de caixa, capitalização no regime de juros compostos, progressão geométrica e soma de uma progressão geométrica finita. Estes conceitos foram articulados de modo que a resposta ao problema pudesse ser determinada. Nesse sentido, a articulação entre as informações, o problema e a matemática foi firmando jogos de linguagem que se referiam ora à linguagem matemática e ora à situação. Sobretudo, os alunos *identificaram conceitos e propriedades da matemática associados à abordagem da situação e seguiram regras da matemática financeira para construir um modelo matemático para a situação* e este seguir regras pressupõe o domínio das técnicas, o que configura um critério para indicar a compreensão dos alunos de conceitos matemáticos nessa atividade.

A compreensão de conceitos matemáticos pode ser evidenciada também nas *explicações que os alunos são capazes de dar sobre o uso desses conceitos na obtenção de um modelo matemático*, tendo em vista que, como pondera Glock (1998), ser capaz de dar uma explicação a respeito de uma expressão, por exemplo, é um critério para atribuir compreensão a alguém sobre essa expressão. As explicações dadas pelos alunos na atividade sinalizam sua compreensão dos conceitos de valor presente e de valor futuro e juros composto, como indica o diálogo:

> PP – Qual é o valor presente e o valor futuro na situação-problema de vocês?
> A8 – O valor futuro significa por quanto sai o carro no final do financiamento.
> A8 – O valor presente é o valor do carro sem juros, na data da compra.
> PP –E qual é a relação entre o valor presente e o valor futuro do carro? Qual é o regime de capitalização aqui?
> A9 e A7 – Juro composto.
> PP – Então como fica a relação entre o valor presente (VP) e o valor futuro (VF)?
> A7 – Ah é o montante né? Em relação ao capital.
> PP –E como podemos escrever isso?
> A7 – Assim: $\mathrm{VF} = \mathrm{VP}.(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$. Aqui i é a taxa de juros do financiamento professor.
> PP – Beleza!

Esse caso guarda semelhanças com o exemplo de Wittgenstein (2014, § 143) sobre a atividade de continuar uma sequência de números de acordo com uma fórmula algébrica. Da mesma forma que continuar uma sequência de números (por exemplo, a sequência $1, 4, 9, 16, \ldots$) não consiste em ter em mente (ocorrer para a pessoa) a fórmula algébrica $y = x^2$, deduzir o modelo matemático ($PMT = VP.\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$) não consiste em ter em mente a fórmula $VP = PMT\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$, mas se dá no seguir regras matemáticas, que orientam a dedução do modelo matemático, tal como uma placa de orientação mostra a direção de como prosseguir (Wittgenstein, 2014, § 85).

Em síntese, *o uso adequado da matemática na situação indicado na linguagem escrita e na linguagem oral dos alunos*; a *identificação de conceitos e propriedades da matemática associados à abordagem da situação*; o *seguir regras da Matemática Financeira e da Matemática em jogos de linguagem associados ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática para construção de um modelo matemático* e as *explicações que os alunos são capazes de dar sobre o uso desses conceitos na obtenção de um modelo matemático* constituem critérios para inferir sobre a compreensão de conceitos matemáticos na atividade Financiamento de Automóveis. Esses critérios são circunstanciais, uma vez que dependem dos usos de conceitos da Matemática e da Matemática Financeira no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, os quais tiveram uma função normativa, atuando como regras que forneceram condições para compreensão da situação-problema.

O uso normativo dos conceitos matemáticos na atividade vai ao encontro da perspectiva wittgensteiniana acerca do funcionamento de proposições matemáticas. Gottschalk (2008), à luz dessa perspectiva, argumenta que as proposições matemáticas têm uso gramatical, isto é, não podem ser negadas e nem confirmadas pela experiência, são regras de como proceder (um princípio de juízo). Diante dessas considerações, podemos dizer que as regras da Matemática seguidas no desenvolvimento da atividade orientaram os alunos na elaboração dos modelos matemáticos, fornecendo condições para compreenderem a situação-problema e resolvê-la.

A conexão entre o uso de regras da Matemática e a compreensão da situação-problema configura um 'modo de ver' a situação-problema de acordo com o modelo matemático obtido. O modo de ver pode se modificar em atividades de modelagem matemática, conforme se discute em Souza e Barbosa (2014) e em Tortola e Almeida (2018), a depender dos conceitos matemáticos usados, levando a diferentes respostas e interpretações para a situação-problema.

Na atividade do Financiamento de Automóveis, podemos identificar modos de ver dos alunos para esta situação-problema, ancorados em regras da Matemática, conforme sugere o diálogo:

> PP – O que foi essencial para desenvolver o modelo matemático?
> A_8 - Este modelo é válido para parcelas fixas, caso contrário não é válido. Por isso assumimos como hipótese que os gastos da família também vão permanecer constantes.
> A_6 – Também por que a gente já sabia a matemática da PG e outras coisas.
> A_7-Tem também que eles podem financiar o carro em 12 meses ou até em 60 meses.

Podemos inferir que a *análise e interpretação de características e especificidades da situação-problema usando regras da matemática* expressam um modo de ver a situação-problema. Este modo de ver se confirma e é considerado pertinente pelos alunos a partir da *interpretação de resultados e validação do modelo matemático* em atividades de modelagem matemática. De fato, no caso da atividade, os alunos apontaram possíveis valores e possíveis modelos de carro que a família considerada nesta situação e que faz este tipo de financiamento pode adquirir. A solução que apresentaram claramente informa que esta família pode comprar um carro com valor entre R$23477,57 e R$92444,83 (conforme o interesse da família de pagar o carro em 12 meses ou em outro prazo considerando a possibilidade de fazê-lo em até 60 meses) e esclarece quais modelos de carro podem adquirir considerando a menor taxa de juros (Quadro 1).

Em síntese, as unidades de análise que emergiram dos dados coletados na atividade Financiamento de Automóveis dizem respeito aos modos de agir, ao ser capaz de fazer certas coisas em determinadas circunstâncias e são manifestos em jogos de linguagem que se constituíram no desenvolvimento da atividade.

A partir dessas unidades de análise, podemos caracterizar duas categorias com relação à compreensão dos alunos na atividade de modelagem matemática: compreensão da situação-problema e compreensão de conceitos matemáticos, conforme sugere o Quadro 3.

Quadro 3 - Categorias da compreensão dos alunos na atividade de modelagem matemática

Categorias relativas à compreensão dos alunos	Unidades de análise: indícios de compreensão relativos aos critérios de compreensão
Compreensão da situação-problema	-Explicações dos alunos relativamente a significados de termos específicos dos jogos de linguagem da situação-problema; -Simplificação e estruturação da situação-problema; -Análise e interpretação de características e especificidades da situação-problema usando regras da matemática e da matemática financeira; -Interpretação de resultados e validação do modelo matemático.
Compreensão de conceitos matemáticos	-Explicações que os alunos são capazes de dar sobre o uso de conceitos na obtenção de um modelo matemático; -Seguir regras da Matemática Financeira e da Matemática em jogos de linguagem associados ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática; -Uso adequado da matemática na situação indicado na linguagem escrita e na linguagem oral dos alunos; -Identificação de conceitos e propriedades da matemática associada à abordagem da situação.

Fonte: os autores

A compreensão da situação-problema reúne unidades que sinalizam que, por um lado, os alunos identificaram as características e especificidades da situação e foram capazes de matematizá-las. Por outro lado, usando o modelo matemático construído, os alunos apresentaram uma resposta para o problema identificando o valor e o tipo de automóvel que a família considerada nesta situação pode adquirir. Neste sentido, a perspectiva wittgensteiniana para a compreensão vem ao encontro da valorização de aspectos já discutidos na literatura de modelagem matemática como, por exemplo, em Pollak (2015) e em Stilman et al. (2015), de que a identificação de um problema, a simplificação da situação que pode levar ao que estes autores denominam de situação idealizada, são aspectos relevantes em uma atividade de modelagem matemática.

A compreensão de conceitos matemáticos, por sua vez, vem se consolidar a partir de unidades de análise que confirmam que o uso da matemática em atividades de modelagem matemática é circunstancial. De fato, os conceitos de matemática financeira viabilizaram a obtenção de uma resposta para problema, entretanto, o modelo matemático foi construído considerando especificidades da situação e o trabalho algébrico se deu usando conceitos matemáticos com os quais os alunos já estavam familiarizados, como por exemplo, a soma de termos de uma progressão geométrica. Neste sentido, os alunos usaram técnicas e seguiram regras da matemática e da matemática financeira que são peculiares para uma forma de vida caracterizada para estudantes de uma disciplina de Matemática Financeira.

Embora identificadas em unidades de análise distintas, a compreensão da situação-problema e a compreensão da matemática não são independentes. Neste contexto, Pollak (2015) argumenta que em atividades de modelagem matemática nem a matemática nem a situação da realidade têm soberania. O equilíbrio entre o uso de informações da situação e o uso da matemática torna robustas as soluções encontradas. Assim, os critérios de compreensão também não são excludentes e a compreensão da situação e da matemática se complementam na modelagem matemática da situação.

Podemos, portanto, mediante a análise das ações dos alunos na atividade do Financiamento de Automóveis, identificar semelhanças entre a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos matemáticos quando consideramos que esses dois usos do termo compreensão ocorrem em jogos de linguagem internos à atividade de modelagem matemática.

Nesse exercício de ver semelhanças de família podemos dizer que a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos matemáticos são interdependentes, uma vez que as regras e as ações utilizadas pelos alunos na manifestação de compreensão da situação-problema e dos conceitos matemáticos estão diretamente vinculadas às regras e ações do fazer modelagem matemática, que também podem ser caracterizadas a partir das ações necessárias em atividades de modelagem matemática, indicadas por Almeida (2018) e Blum (2015), por exemplo.

Se olharmos para os jogos de linguagem da situação-problema e os jogos de linguagem da matemática e da matemática financeira, podemos perceber diferenças entre a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos matemáticos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Isto se dá, pois os usos de expressões e conceitos da situação-problema possuem função descritiva em relação à situação-problema, enquanto os usos de proposições da matemática e da matemática financeira possuem função normativa, são regras de como proceder na elaboração dos modelos matemáticos e funcionam como condições de compreensão da situação. Neste contexto, parafraseamos Almeida (2014) que afirma que “no que se refere ao olhar sobre a matemática, sobre os modelos matemáticos e os procedimentos (matemáticos) de construção e interpretação ou uso desses modelos, as semelhanças de família parecem ter uma caracterização diferente. As regras que regem estes jogos são outras”.

Assim, ao olharmos para a compreensão dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática sob uma perspectiva wittgensteiniana nos afastamos de uma concepção mentalista, em que compreender algo é um estado mental oculto, e nos aproximamos de uma perspectiva da compreensão como uma atividade linguística, em que compreender algo é ser capaz de agir de determinados modos no interior de um jogo de linguagem, na qual mudanças no modo de agir implicam mudanças na própria compreensão (Machado, 2007).

Sob essa perspectiva, uma vez que as regras que orientam o fazer modelagem matemática não são fixas, mas dependem dos jogos de linguagem envolvidos nas atividades dos alunos e que podem variar de acordo com diferentes fatores (natureza da situação-problema, os interesses dos alunos, o objetivo do professor, os conceitos já aprendidos pelos alunos, entre outros), os critérios que utilizamos para inferir sobre a compreensão dos alunos na atividade Financiamento de Automóveis não são universais e fixos, mas estão em concordância com as circunstâncias em que essa atividade foi desenvolvida.

Considerações finais

O processo analítico realizado neste artigo se dirige a uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por alunos em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática visando buscar indicativos de compreensão dos alunos considerando elementos da filosofia de Wittgenstein. Duas categorias da compreensão dos alunos na atividade Financiamento de Automóveis foram detalhadas: a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos matemáticos.

A compreensão da situação-problema emergiu das explicações dos alunos de significados de termos específicos do jogo de linguagem da situação-problema; simplificação e estruturação da situação-problema; análise e interpretação de características e especificidades da situação-problema usando regras da Matemática e da Matemática Financeira; da interpretação de resultados e validação do modelo matemático.

Esta categoria vincula-se a ações dos alunos na inteiração com a situação que conduz à formulação de um problema, na simplificação e formulação de hipóteses bem como na interpretação e validação dos resultados matemáticos, configurando um modo de ver a situação-problema com base em regras da Matemática.

A compreensão de conceitos matemáticos diz respeito às explicações que os alunos são capazes de dar sobre o uso desses conceitos na obtenção de um modelo matemático; o seguir regras da Matemática Financeira e da Matemática em jogos de linguagem associados ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática; uso adequado da matemática na situação; na identificação de conceitos e propriedades da matemática associada à abordagem da situação. As ações dos alunos que forneceram os indicativos dessa categoria estão associadas à matematização da situação e à resolução em que ocorre o uso de conceitos e procedimentos da Matemática Financeira e da Matemática na obtenção de um modelo matemático.

Sob uma perspectiva wittgensteiniana, podemos considerar que a compreensão dos alunos na atividade desenvolvida se deu a partir do seguir regras, do uso e das explicações dos alunos nos diversos jogos de linguagem associados à situação-problema, à Matemática e à Matemática Financeira e à própria modelagem matemática. Esta perspectiva nos possibilita ver a compreensão em atividades de modelagem matemática vinculada às regras, explicações, conceitos, isto é, aos diferentes instrumentos linguísticos, de diferentes jogos de linguagem associados ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Os diferentes modos de uso da palavra ‘compreender’ nos fornecem uma visão panorâmica a respeito da compreensão, que permite ver conexões entre a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos matemáticos. Esta conexão nos permite ver a modelagem matemática como um jogo de linguagem, que dialoga com jogos de linguagem da situação-problema e jogos de linguagem da matemática financeira e da matemática. Tal fato corrobora com Tortola e Almeida (2018) que evidenciaram a modelagem matemática como um modo de ver situações-problema a partir de um ‘óculos’ matemático.

Os critérios que utilizamos para inferir sobre a compreensão dos alunos não possuem a pretensão de ser universais e absolutos, mas são circunstanciais, na medida em que, segundo Blum (2015), Galbraith (2012), Carreira, Baioa e Almeida (2020), Almeida e Carreira (2019) diferentes perspectivas, gêneros de modelagem matemática e diferentes finalidades do professor e dos alunos podem caracterizar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

No que tange as circunstâncias envolvidas no desenvolvimento da atividade a que nos referimos, as ações que caracterizam o fazer modelagem matemática seguem o entendimento de modelagem matemática como alternativa pedagógica (Almeida e Brito, 2005). Além disso, o uso da modelagem matemática na disciplina proporcionou a introdução e o uso de conceitos de Matemática Financeira que constam na ementa curricular da disciplina, de modo que, conforme sugere Galbraith (2012), a modelagem matemática se caracteriza como veículo. Essas características delineiam as circunstâncias em que foram formulados os critérios que deram origem às duas categorias sobre a compreensão dos alunos: compreensão da situação-problema e compreensão de conceitos matemáticos.

Por fim, consideramos que interlocuções entre a filosofia de Wittgenstein e a Modelagem Matemática na Educação Matemática nos possibilitam ver o papel da linguagem na constituição da compreensão dos alunos, não sendo necessário recorrer a uma perspectiva cognitivista para fazer inferências sobre as ações dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Referências

Almeida, L. M. W.; Brito, D. S. (2005). O conceito de função em situações de Modelagem. *Zetetiké*, 13(23), 63-83.

Almeida; L. M. W. (2014) Jogos de linguagem em atividades de modelagem matemática. *VIDYA*, 34(1), 241-256.

Almeida, L. M. W.; Vertuan, R. E. (2014). Modelagem Matemática na Educação Matemática. In L. M. W. Almeida, e K. P. Silva (Orgs), *Modelagem Matemática em foco* (pp. 1-22). Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Almeida; L. M. W. (2018) Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, 50(1-2), 19-30.

Almeida; L. M. W.; Carreira, S. (2019). The configuration of mathematical modelling activities: a reflection on perspective alignment. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-9). Utrecht, Netherlands: Utrecht University.

Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. 3 ed. Lisboa: Edições 70.

Baker, G. P.; Hacker, P. M. S. (2005). *Wittgenstein*: Understanding and meaning, Volume 1 of an analytical commentary on the philosophical investigations, part I: Essays. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*: Intellectual and Attitudinal Changes (pp. 73-96). New York: Springer.

Buhrman, D. (2017). *The Design and Enactment of Modeling Tasks*: A Study on the Development of Modeling Abilities in a Secondary Mathematics Course. Doctoral Dissertation, University of Nebraska, Lincoln, USA. Available at: http://digitalcommons.unl.edu/cehsdiss/282, 2017.

Brown, J. (2017). Context and Understanding: The Case of Linear Models. In G. A. Stillman, W. Blum, e G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modellling and Applications*: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education (pp. 211-221). Cham Switzerland: Springer.

Brown, J.; Edwards, I. (2014). Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding In G. A. Stillman, W. Blum, e R. B. Ferri (Eds). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 187-197). Cham, Switzerland: Springer.

Carreira, S., Baioa, A. M.; Almeida, L. M. W. (2020). Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática,* 17, 67–83

Galbraith, P. L. (2012). Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, 1(5), 3-16.

Glock, H. (1998). *Dicionário Wittgenstein***.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.

Gottschalk, C. M. C. (2008). A transmissão e produção do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Cadernos Cedes*, 28(74), 75-96.

Gottschalk, C. M. C. (2010). O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. *Educação Temática Digital*, 12(1), 64-81.

Gottschalk, C. M. C. (2018). Fundamentos Epistemológicos da Educação de uma Perspectiva Wittgensteiniana. In R. L. Azize (Ed). *Wittgenstein nas Américas*: Legado e Convergências (pp. 53-71). Bahia: Edufba.

Julie, C.; Mudaly, V. (2007). Mathematical Modelling of Social Issues in School Mathematics in South Africa Chapter. In W. Blum, et al. (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 503-510). Boston, MA: Springer US.

Kaiser, G.; Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.

Lesh, R.; Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical thinking and learning*, *5*(2-3), 157-189.

Machado, A. N. (2007). *Lógica e forma de vida*: Wittgenstein e a natureza da necessidade lógica e da filosofia. Porto Alegre: Unisinos.

Moreno, A. R. (2003). Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. *Revista olhar*, 4(7), 93-139.

Perrenet, J.; Zwaneveld, B. (2012). The many faces of mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), pp. 3-21.

Pollak, H. O. (2012). Introduction: what is mathematical modeling? In H. Gould, D. R. Murray, e A. Sanfratello (Eds.). *Mathematical Modeling Handbook* (pp. 8-11). Bedford: Comap.

Pollak, H. O. (2015). The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In G. Stillman, W. Blum, e M. S Biembengut (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*: cultural, social and cognitive influences (pp. 265-276). New York: Springer.

Puccini, E. C. (2007). *Matemática financeira*. Projeto universidade aberta.

Sousa, B. N. P. A.; Almeida, L. M. W. de. (2019). Apropriação Linguística e Significado em Atividades de Modelagem Matemática. *Bolema*, 33(65), 1195-1214.

Souza, E. G.; Barbosa, J. C. (2014). Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. *Zetetiké*, 22(41), 31-58.

Stillman, G.; Blum, W.; Biembengut, M. S. (2015). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer.

Tortola, E. (2016). *Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.

Tortola, E.; Almeida, L. M. W. de. (2018). A Formação Matemática de Alunos do Primeiro Ano do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática: uma Perspectiva Wittgensteiniana. *Perspectivas da Educação Matemática*, 11(25), 142-162.

Wittgenstein, L. (1981). *Fichas (Zettel)***.** Lisboa. Edições 70.

Wittgenstein, L. (2014). *Investigações Filosóficas*. 9 ed. Petrópolis: Vozes.

Autores:

Jeferson Takeo Padoan Seki. Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina (UEL). Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela mesma instituição. Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER). Graduado no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Campus Cornélio Procópio. E-mail: jefersontakeopadoanseki@hotmail.com

Lourdes Maria Werle de Almeida. Possui Pós-Doutorado pela UFSC em que pesquisou a filosofia da linguagem na perspectiva de Wittgenstein, Doutorado pela UFSC, Mestrado pela UEL e Licenciatura em Matemática pela UNIOESTE. É docente da UEL desde 1985 e atua no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática dessa instituição. É coordenadora do grupo de pesquisas GRUPEMMAT cadastrado no CNPq. Além de autoria em inúmeros artigos em periódicos nacionais e internacionais, é autora e organizadora de livros na área de Educação Matemática. É bolsista de produtividade do CNPq. E-mail: lourdes@uel.br