UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
EXPERIMENTAL LIBERTADOR

Centro de Investigaciones Educacionales
PARADIGMA
CIEP

Nº Extra 1; Abril de 2020

Historia en la Enseñanza de las Matemáticas

PARADIGMA, VOLUMEN XLI

Volumen: XLI
Número: Extra 1

Abril, 2020

ISSN: 1011-2251

e-ISSN: 2665-0126

Paradigma

REVISTA SEMESTRAL

UPEL
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA
Depósito Legal pp.80-0213 ISSN Nº 1011-2251

Volumen XLI Nº Extra 1, Abril de 2020

La Revista **PARADIGMA** es una publicación semestral arbitrada, producida en el Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
indizada en el **SCIELO, IRESIE, CREDI-OEI, CEDAL, REDIB, FEUSP, ERICPLUS, BIBLO, DIALNET, CLASE, LATINDEX y REDUC**.
Certificada por la Scientific Electronic Library Online (Scielo Venezuela);
http://www.scielo.org.ve/revistas/pdg/eaboutj.htm
Acreditada por el Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (FONACIT)

Edición y Dirección de Producción
Fredy González

Diseño, Producción Gráfica y Apoyo Técnico
Luis Andrés Castillo B.

Canje, Distribución y Publicidad
Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
Apartado Postal 514, CP 2101, Telf: (+58243) 2417866
e-mail: revistaparadigmaupel@gmail.com, revistaparadigmaupel@yahoo.es,
Maracay, Estado Aragua, Venezuela.

HECHO EN VENEZUELA

PARADIGMA
Revista Semestral
Volumen XLI Nº Extra 1, Abril de 2020

CONTENIDO

Presentación / *Presentation*
Iran Abreu Mendes, Universidade Federal do Pará, UFPA, Brasil ix

Apresentação / *Presentation*
Iran Abreu Mendes, Universidade Federal do Pará, UFPA, Brasil xiii

La historia de las matemáticas en los cursos de educación básica en portugal: una reflexión para la Formación del profesorado / *History of mathematics in portuguese initial basic teacher education programs: a reflection for teacher training / A história da matemática nos cursos de educação básica em portugal: uma reflexão para a formação de professores*
Hélder Pinto, Instituto Piaget, RECI - Research in Education and Community Intervention e CIDMA, Portugal
Cecília Costa, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIDTFF, Portugal 1

El arte de almada negreiros como ejemplo de la conexión entre historia, matemáticas y arte / *A aritmética nas escolas normais espanholas na Segunda República e nos anos anteriores / A arte de almada negreiros como exemplo de conexão entre história, matemática e arte*
Cristina Lúcia Dias Vaz, Universidade Federal do Pará, Brasil
Edilson dos Passos Neri Júnior, Universidade Federal do Pará, Brasil 20

Las medidas en los textos escolares de matemáticas en la Venezuela decimonónica / *Measures in school math texts in decimonica venezuela / As medidas em textos de matemática escolar na decimonica venezuela*
Walter O. Beyer K., Universidad Nacional Abierta, Venezuela 44

El uso del ambiente virtual CREPHIMAT para promover la historia en la enseñanza de la matemática / *The use of the virtual CREPHIMAT environment to promote history in the teaching of mathematics / a utilização do ambiente virtual do CREPHIMAT para promover a história no ensino da matemática*
Luis Andrés Castillo B., Universidade Federal do Pará, Brasil
Iran Abreu Mendes, Universidade Federal do Pará, Brasil 88

Lectura de textos históricos en el aula / *Reading historical texts in the classroom / Lendo textos históricos na sala de aula*
John A. Fossa, Universidade Estadual da Paraíba, Brasil 116

La historia y didáctica de las matemáticas: um encuentro posible / *The history and teaching of mathematics: a possible meeting / A história e a didática da matemática: um encontro possível*
Edilene Simões Costa dos Santos, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil
Cristiano Alberto Muniz, Universidade de Brasília, Brasil
Maria Terezinha Jesus Gaspar, Universidade de Brasília, Brasil 133

Interfaces entre historia de matemáticas y enseñanza a través de antiguos instrumentos matemáticos: una experiencia en la investigación académica / *Interfaces between history of mathematics and teaching through old mathematical instruments: an experience in academic research / Interfaces entre história da matemática e ensino por meio de antigos instrumentos matemáticos: uma experiência em pesquisa acadêmica*
Ana Carolina Costa Pereira, Universidade Estadual do Ceará, Brasil 160

Historia de las matemáticas en la educación matemática: la importancia de explicitar las posiciones teóricas / *History of mathematics in mathematic education: the importance of expliciting theoretical positions / História da matemática na educação matemática: a importância de explicitar as posições teóricas*
Bernadete Barbosa Morey, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Valdenize Lopes do Nascimento, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil 180

Historia y matemáticas integradas a través de un diagrama metodológico / *History and mathematics integrated through a methodological diagram / História e matemática integradas por meio de um diagrama metodológico*
Miguel Chaquiam, Universidade do Estado do Pará, Brasil 197

Historia de las matemáticas en la educación matemática, una ruta de investigación, creatividad y diversidad cultural / *History of mathematics in mathematical education, a route of research, creativity and cultural diversity / História da matemática na educação matemática, uma via de investigação, criatividade e diversidade cultural*
Ligia Arantes Sad, Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória (Ifes-Vitória), Brasil
Claudia A. C. de Araujo Lorenzoni, Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória (Ifes-Vitória), Brasil 212

Obstáculos epistemológicos sobre el concepto de límite de funciones en manuales de historia de matemáticas / *Epistemological obstacles on the function limit concept in mathematics history manuals / Obstáculos epistemológicos sobre o conceito de limite de função em manuais de história da matemática*
Iran Abreu Mendes, Universidade Federal do Pará, Brasil
Mônica Suelen Ferreira de Moraes, Universidade Federal do Tocantins, Brasil 240

Una propuesta para el uso de historia en la enseñanza de las matemáticas: sobre la potencialidad didáctica de los textos históricos y el desarrollo de conceptos / A *proposal for the use of history in teaching mathematics: on the didactic potentiality of historical texts and the development of concepts / Uma proposta para o uso da história no ensino de matemática: sobre a potencialidade didática de textos históricos e o desenvolvimento de conceitos*
João Cláudio Brandemberg, Universidade Federal do Pará, Brasil 266

Duplicación del cuadrado y el volumen de sólidos en el códice atlántico de leonardo da vinci: un estudio de la hoja 100r / Duplication of the square and the volume of solids in leonardo da vinci's atlantic codex: a study of the 100r sheet / A duplicação do quadrado e o volume de sólidos no códice atlântico de leonardo da vinci: um estudo da folha 100r
Jeová Pereira Martins, Universidade Federal do Pará, Brasil 285

La disciplina historia de las matemáticas en la universidad federal del triángulo minero: un breve informe / *The discipline history of mathematics at the federal university of the mining triangle: a brief report / A disciplina história da matemática na universidade federal do triângulo mineiro: um breve relato*
Mônica de Cássia Siqueira Martines, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Brasil 317

Normas para la presentación de artículos 333
Instrucciones para los árbitros 337
Dónde está indexada la Revista Paradigma 339
Planilla de Canje 341
Planilla de Subscripción 342
Árbitros de esta Edición 343
Objetivos de la Revista Paradigma 345

Presentación

HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Iran Abreu Mendes
iamendes1@gmail.com
Universidade Federal do Pará, Brasil
(Editor Convidado)

Históricamente, hemos identificado que desde la segunda mitad del siglo XIX ha habido varios argumentos anunciados por matemáticos, filósofos, historiadores, físicos, antropólogos, sociólogos, pedagogos y profesores de matemáticas, que destacaron las potencialidades y las funciones didácticas de la Historia de las Matemáticas, en el sentido de ser tomado como un instrumento que favoreció la comprensión de los fundamentos y métodos matemáticos y su enseñanza, con el fin de superar las dificultades encontradas por los maestros en la enseñanza de conceptos, y para guiar mejor el alcance del aprendizaje de los estudiantes en cada nivel escolar.

Un ejemplo de este tipo de reflexión se materializa en las palabras de Bell (1985)[1], cuando afirma que las matemáticas son un ejemplo único del hecho de que ningún conocimiento tiene tanta pérdida cualitativa cuando se investiga, estudia o enseña en forma aislada de su historia. Esto se debe a que, como Urbaneja (2004)[2] también advierte, la información histórica constituye una fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente y al revelar la dimensión cultural de las Matemáticas, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de conocimientos. Elementos científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la cultura humana.

Durante el siglo XX, este tema fue parte del foco de las discusiones y debates sobre los fundamentos y métodos de enseñanza de las matemáticas y ya se ha insertado en la agenda del siglo XXI, tanto en el contexto de estudios e investigaciones en Matemáticas y Educación Matemática, como en la formación de maestros que enseñan matemáticas en todos los niveles escolares.

[1] BELL, E.T. (1985). Historia de la matemática. Fondo de Cultura Económica. Mexico.
[2] URBANEJA, P. M. G. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su educación. SUMA Febrero, pp. 17-28.

Es en este espíritu que presentamos este número temático en la Revista Paradigma, con el tema *Historia en la Enseñanza de las Matemáticas*, que fue concebido con la intención de reunir a diferentes autores que desarrollan estudios e investigaciones relacionados con las diferentes formas de tratar las relaciones entre la historia y la enseñanza de las matemáticas. Matemáticas, con el fin de ofrecer a los lectores una visión general de algunos de los tipos de trabajo que han surgido en la comunidad de investigación en este subcampo de la educación matemática.

Abrimos este número especial con el artículo *La historia de las matemáticas en los cursos de educación básica en Portugal: una reflexión para la formación del profesorado*, en el que sus autores sostienen que la Historia de las Matemáticas (HM) puede ser muy útil en un contexto educativo y debería ser enseñó en la formación inicial de docentes en los primeros años de escolaridad, teniendo en cuenta las matemáticas impartidas en los cursos de Educación Básica en Portugal y los resultados de estudios nacionales e internacionales sobre el uso de HM en el aula.

En el segundo *artículo El arte de Almada Negreiros como ejemplo de la conexión entre historia, matemáticas y arte*, sus autores discuten el potencial de las interconexiones entre Historia, Matemáticas y Arte, para integrarse con los lenguajes innovadores que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación para permitir la movilización de este conocimiento, de manera híbrida, para reorientar los enfoques didácticos en la enseñanza de las matemáticas bajo un enfoque interdisciplinario.

Luego, el artículo *Las medidas en los textos escolares de matemáticas en la Venezuela Decimonónica*, busca mostrar las razones sociopolíticas que pueden haber evitado la propagación del Sistema Métrico Decimal (SMD) en Venezuela, así como las posibles influencias que tuvieron un poderoso impacto en Introducción en el país. Luego, bajo un enfoque más técnico de investigación en historia para la enseñanza de las matemáticas, el artículo *El uso del ambiente virtual CREPHIMat para promover la historia en la enseñanza de la matemática* describe la materialización de un entorno virtual interactivo llamado Centro Brasileiro de referencia en investigación sobre la historia de las matemáticas (CREPHIMat) y sus contribuciones a la comunidad académica de educación matemática.

El quinto artículo bajo el título *Lectura de textos históricos en el aula*, argumenta sobre la importancia de leer textos históricos en el aula para el logro de un verdadero conocimiento matemático por parte de los estudiantes. En esta dirección, el artículo titulado *La historia y la* *didáctica de las matemáticas: un posible encuentro*, sus autores presentan una reflexión sobre el valor didáctico de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, basada en conexiones didácticas con otros principios epistemológicos derivados de la didáctica de las Matemáticas, combinada con historia de las Matemáticas, para enseñar el concepto de área como grandeza autónoma y procedimientos para su medición.

El séptimo artículo presenta algunos resultados de una investigación que tuvo como objetivo la construcción de estas interfaces para la elaboración de una propuesta didáctico-pedagógica centrada en la enseñanza de conceptos matemáticos en educación básica. El siguiente artículo *Historia de las matemáticas en la educación matemática: la importancia de explicar las posiciones teóricas* discute las teorías socioculturales del aprendizaje como un proceso lleno de historicidad, y señala el recapitulacionismo como un soporte teórico para apoyar los estudios relacionados con la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática.

El noveno artículo sobre *historia y matemáticas integrado mediante un diagrama metodológico* presenta los resultados de las reflexiones del autor basadas en la enseñanza de la historia de las matemáticas en los cursos de pregrado en matemáticas, cuyos resultados apuntan a la importancia de un modelo que puede tomarse como elemento guía en el composición de textos que relacionan la historia y las matemáticas en función de la elección del tema / contenido.

El siguiente artículo aborda el potencial y las contribuciones de la Historia de las Matemáticas en las prácticas de enseñanza de la Educación Matemática, ilustrada por dos episodios específicos de la práctica pedagógica de los autores, que toman como notas teóricas, estudios de Ferreira, D'Ambrosio, Barbin, Jankivist y Vianna, entre otros argumentos, implicaciones y sugerencias dirigidas al uso didáctico de la historia de las matemáticas.

A continuación, el artículo *Obstáculos epistemológicos sobre el concepto de función límite en los manuales de historia de las matemáticas* presenta los resultados de un estudio sobre los supuestos obstáculos epistemológicos en el desarrollo del concepto de límite a partir de la historia de los manuales de matemáticas, con un vistazo a su superar el proceso de formación de estas ideas, centrándose en los conceptos establecidos por d'Alembert, Cauchy y Weierstrass.

El siguiente artículo, *titulado Una propuesta para el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas: sobre el potencial didáctico de los textos históricos y el desarrollo de conceptos*, argumenta sobre la importancia y la urgencia de una (re)discusión sobre el potencial didáctico de una propuesta para Enseñar contenido matemático que utiliza problemas de los textos históricos de las matemáticas.

En el penúltimo artículo bajo el título *La duplicación del cuadrado y el volumen de sólidos en el Códice Atlántico de Leonardo da Vinci: un estudio de la hoja 100r*, su autor presenta los resultados de una investigación que tomó como base epistemológica estudios sobre fuentes textuales históricas combinadas con elementos desde semiótica, para interpretar imágenes representadas en la hoja 100r, en busca de relaciones geométricas que puedan movilizarse para las clases de matemáticas (enseñanza de geometría) en Educación Básica.

El último artículo proporciona una breve reseña de una experiencia en la historia de la disciplina matemática en la Universidad Federal de Triângulo Mineiro, en la que la autora describe los resultados de su experiencia, que incluyó la enseñanza y la investigación en esa disciplina desde el comienzo de la oferta del curso en Matemáticas en esa institución de educación superior.

Queremos agradecer al editor responsable y a los autores que colaboraron con nosotros en este número especial de Paradigma, y esperamos que las discusiones reveladas en estos escritos contribuyan a expandir el conocimiento de los lectores sobre este tema en su formación.

Apresentação

HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Iran Abreu Mendes
iamendes1@gmail.com
Universidade Federal do Pará, Brasil
(Editor Convidado)

Historicamente identificamos que desde a segunda metade do século XIX já aparecem diversas argumentações anunciadas por matemáticos, filósofos, historiadores, físicos, antropólogos, sociólogos, pedagogos e professores de matemática, que destacavam potencialidades e funções didáticas para a História da Matemática, no sentido de ser tomada como instrumento que favorecesse a compreensão dos fundamentos e métodos matemáticos e de seu ensino, tendo em vista a superação das dificuldades encontradas por professores no ensino de conceitos, e melhor conduzir o alcance da aprendizagem dos estudantes em cada nível escolar.

Um exemplo desse tipo de reflexão é materializado nas palavras de Bell (*1985)*[3], quando assevera que as matemáticas se constituem em um exemplo ímpar do fato de que nenhum conhecimento tem tanta perda qualitativa quando é investigado, estudado ou ensinado de forma isolada de sua história. Isto porque, conforme também adverte Urbaneja (2004)[4], as informações históricas se constituem em fonte de inspiração, autoformação e orientação na atividade docente e ao revelar a dimensão cultural da Matemática, o legado histórico permite enriquecer seu ensino e sua integração no conjunto dos saberes científicos, artísticos e humanísticos que constituem a cultura humana.

Durante o século XX esse tema fez parte do foco de discussões e debates relativos aos fundamentos e métodos de ensino de matemática e já se inseriu na agenda do século XXI, tanto no contexto dos estudos e pesquisas em Matemática e Educação Matemática, quanto na formação de professores que ensinam matemática em todos os níveis escolares.

É com esse espírito que apresentamos este número temático da Revista Paradigma, com o tema *História no Ensino de Matemática*, que foi concebido na intenção de reunir diferentes

[3] BELL, E.T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México.
[4] URBANEJA, P. M. G. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*. Febrero, pp.17-28.

autores que desenvolvem estudos e pesquisas conectados aos diversos modos de tratar sobre as relações entre história e ensino de Matemática, para assim oferecermos ao leitores uma visão de alguns recortes dos tipos de trabalhos que vêm emergindo na comunidade de pesquisadores desse subcampo da Educação Matemática.

Abrimos este número especial com o artigo *A história da matemática nos cursos de educação básica em Portugal: uma reflexão para a formação de professores*, no qual seus autores argumentam que a História da Matemática (HM) poderá ser muito útil em contexto educativo e deve ser ensinada na formação inicial de professores dos primeiros anos de escolaridade, levando em conta as matemáticas lecionadas nos cursos de Educação Básica em Portugal e os resultados de estudos nacionais e internacionais sobre a utilização da HM em contexto de sala de aula.

No segundo artigo *A arte de Almada Negreiros como exemplo da conexão entre história, matemática e arte*, seus autores discutem sobre as potencialidades das interconexões entre História, Matemática e Arte, para se integrar às linguagens inovadoras oferecidas pelas tecnologias de informação e comunicação de modo a possibilitar a mobilização desses saberes, de forma híbrida, para reorientar as abordagens didáticas no ensino de matemática sob um enfoque interdisciplinar.

Em seguida, o artigo *Las medidas en los textos escolares de matemáticas en la Venezuela Decimonónica*, procura mostrar as razões sócio-políticas que possam ter impedido a difusão do Sistema Métrico Decimal (SMD) na Venezuela, bem como as possíveis influências que incidiram poderosamente em sua introdução no país. Na sequência, sob uma abordagem mais técnica a respeito das pesquisas em história para o ensino da matemática, o artigo *El uso del ambiente virtual CREPHIMat para promover la historia en la enseñanza de la matemática*, descreve a materialização de um ambiente virtual interativo denominado Centro Brasileiro de Referência em Pesquisas sobre História da Matemática (CREPHIMat) e suas contribuições para a comunidade acadêmcia de Educação Matemática.

O quinto artigo sob o título *Lendo textos históricos na sala de aula*, argumenta sobre a importância da leitura de textos históricos na sala de aula na consecução de conhecimento matemático genuíno pelos estudantes. Nesse direcionamento o artigo denominado *A história e a didática da matemática: um encontro possível*, seus autores apresentam uma reflexão acerca do valor didático da História da Matemática no ensino, com base em conexões didáticas com outros princípios epistemológicos advindos da didática da Matemática, aliada à história da Matemática, para ensinar conceito de área como grandeza autônoma e procedimentos para sua medida.

O sétimo artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa que objetivou a construção dessas interfaces para a elaboração de uma proposta didático-pedagógica voltada para o ensino de conceitos matemáticos na educação básica. Na sequência o artigo *história da matemática na educação matemática: a importância de explicitar as posições teóricas* discute as teorias socioculturais de aprendizagem como um processo impregnado de historicidade, e aponta o recapitulacionismo como apoio teórico para fundamentar estudos que relacionam História da Matemática e Educação Matemática.

O nono artigo *história e matemática integradas por meio de um diagrama metodológico* apresenta resultados de reflexões do autor com base no ensino de história da Matemática em cursos de licenciatura em Matemática, cujos resultados apontam a importância de um modelo que pode ser tomado como elemento balizador na composição de textos que relacionam história e matemática a partir da eleição de tema/conteúdo.

O artigo seguinte trata das potencialidades e contribuições da História da Matemática em práticas docentes da Educação Matemática, ilustradas por dois episódios específicos da prática pedagógica das autoras, que tomam como apontamentos teóricos, estudos de Ferreira, D'Ambrosio, Barbin, Jankivist e Vianna, dentre outros argumentos, implicações e sugestões direcionadas ao uso didático da história da matemática.

Na sequência o artigo *Obstáculos epistemológicos sobre o conceito de limite de função em manuais de história da matemática* apresenta resultados de um estudo sobre os supostos obstáculos epistemológicos no desenvolvimento do conceito de limite a partir dos manuais de história da matemática, com um olhar para a sua superação no processo de formação dessas ideias, focando nos conceitos estabelecidos por d'Alembert, Cauchy e Weierstrass.

O artigo seguinte, intitulado *Uma Proposta para o Uso da História no Ensino de Matemática: sobre a potencialidade didática de textos históricos e o desenvolvimento de conceitos*, argumenta sobre a importância e urgência de uma (re)discussão acerca das potencialidades didáticas de uma proposta de ensino de conteúdos matemáticos que utilize problemas oriundos dos textos históricos da Matemática.

No penúltimo artigo sob o título *A duplicação do quadrado e o volume de sólidos no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci: um estudo da folha 100r*, seu autor apresenta resultados de uma pesquisa que tomou como base epistemológica os estudos sobre fontes históricas textuais aliado a elementos da semiótica, para interpretar imagens representadas na folha 100r, em busca de relações geométricas que possam ser mobilizadas para as aulas de matemática (ensino de geometria) na Educação Básica.

O último artigo traz um breve relato sobre uma experiência na disciplina história da matemática na Universidade Federal do Triângulo Mineiro, no qual a autora descreve resultados de sua experiência, que envolveu ensino e pesquisa na referida disciplina desde o início da oferta do curso de Licenciatura em Matemática na referida instituição de ensino superior.

Agradecemos ao editor responsável e aos autores que colaboraram conosco neste número especial da Paradigma, e esperamos que as discussões reveladas nesses escritos, contribuam para ampliar os conhecimentos dos leitores acerca dessa temática em sua formação

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p01-19.id830

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS CURSOS DE EDUCACIÓN BÁSICA EN PORTUGAL: UNA REFLEXIÓN PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Hélder Pinto[1]
helder.pinto@gaia.ipiaget.pt

Cecília Costa[2]
mcosta@utad.pt
[1]*Instituto Piaget, RECI - Research in Education and Community Intervention e CIDMA*
[2]*Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIDTFF*

Há tantos pensadores que nunca aprendem
E há quem insista sempre em aprender
Mas não quer pensar
Optimista Céptico (Jorge Palma)

Recibido: 07/10/2019 **Aceptado:** 06/01/2020

Resumen

La Historia de las Matemáticas (HM) es una herramienta que puede ser muy útil en un contexto educativo. Sin embargo, la HM es un cuerpo de saber muy extenso y es necesario reflexionar cual HM debe ser enseñada en la formación inicial de los profesores en los primeros años de escolaridad. En este artículo hacemos esta reflexión tratando de justificar qué contenidos HM son realmente esenciales para los profesores y para sus futuras prácticas profesionales. En nuestra opinión, los contenidos de HM deben centrarse en los temas: sistemas de numeración de diversos pueblos, diferentes algoritmos para realizar operaciones aritméticas y resolver ecuaciones, tópicos de la geometría, así como el conocimiento de varios puntos de HM local/nacional. También damos una breve descripción de lo que son los cursos de Educación Básica en Portugal, prestando especial atención a las matemáticas que se enseñaban en estos cursos. Por otro lado, también presentamos varias referencias a estudios internacionales donde se atestigua la importancia de usar HM en el aula.
Palabras clave: Educación básica Formación del profesorado, historia de las matemáticas, historia de las matemáticas como herramienta en un contexto educativo.

HISTORY OF MATHEMATICS IN PORTUGUESE INITIAL BASIC TEACHER EDUCATION PROGRAMS: A REFLECTION FOR TEACHER TRAINING

Abstract

History of Mathematics (HM) is a tool that can be very useful in an educational context. However, HM is a very broad corpus of knowledge and it is necessary to reflect on what HM should be taught in the initial basic teacher education programs. In this paper, we make this reflection by trying to justify which HM contents are truly essential for teachers and their future professional practices. In our opinion, HM contents should focus on the following topics: diverse ancient peoples numbering systems, different algorithms for performing arithmetic operations and solving equations, geometry topics, as well as knowledge of various local/national HM aspects. We also give a brief description of Portuguese initial basic teacher education programs, giving special focus

on the mathematics syllabus in these programs. And we present several references to international studies that show the importance of using HM in the classroom context.
***Keywords*:** Training of elementary school teachers, history of mathematics, history of mathematics as a tool in educational context.

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS CURSOS DE EDUCAÇÃO BÁSICA EM PORTUGAL: UMA REFLEXÃO PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Resumo
A História da Matemática (HM) é uma ferramenta que poderá ser muito útil em contexto educativo. Contudo, a HM é um corpo de saber muito extenso e é necessário refletir qual a HM que deverá ser ensinada na formação inicial de professores dos primeiros anos de escolaridade. Neste artigo fazemos essa reflexão tentando justificar quais os conteúdos de HM verdadeiramente essenciais para os professores e para as suas práticas profissionais futuras. Na nossa opinião, os conteúdos de HM deverão centrar-se nos temas: sistemas de numeração de diversos povos, diferentes algoritmos para realizar operações aritméticas e resolver equações, tópicos de geometria, bem como o conhecimento de vários pontos de HM local/nacional. Fazemos ainda uma breve descrição do que são os cursos de Educação Básica em Portugal, dando especial enfoque nas matemáticas lecionadas nesses cursos. Por outro lado, apresentamos também várias referências a estudos internacionais onde se atesta a importância da utilização da HM em contexto de sala de aula.
***Palavras- chave*:** Formação de professores do ensino básico, história da matemática, história da matemática como ferramenta em contexto educativo.

Introdução

A ideia de que a História da Matemática (HM) pode contribuir para a formação de professores não é nova e continua a ser defendida atualmente (Arcavi, Bruckheimer, & Ben-Zvi, 1982; Isaacs, Ram, & Richards, 2000; Mosvold, Jakobsen, & Jankvist, 2014; Mendes, 2015; Mendes & Chaquiam, 2016).

Neste artigo de reflexão pretendemos ilustrar e discutir propostas de tópicos de HM que podem contribuir para uma melhor compreensão da matemática que os futuros professores (portugueses) de 1.º e 2.º ciclos do ensino básico terão de ensinar.

Subjacente à reflexão aqui apresentada estão quatro objetivos gerais relativos ao domínio da HM por um professor do ensino básico que consideramos essenciais, a saber:

1. Situar a evolução dos conceitos matemáticos ao longo da História com enfoque nos sistemas de numeração, nas operações aritméticas, na resolução de equações e na geometria.
2. Associar a HM com a História da Humanidade, evidenciando os maiores avanços matemáticos com a história das grandes civilizações da

antiguidade como os babilónios, os antigos egípcios, os gregos, os árabes, etc..

3. Conhecer a importância da matemática ao longo da História em diversas áreas como a astronomia, a navegação, a engenharia, a cobrança de impostos, etc..
4. Perspetivar a HM como uma ferramenta educativa motivacional para a sala de aula, permitindo humanizar a disciplina.

Neste artigo, descrevemos, sinteticamente, como é realizada a formação de professores do ensino básico em Portugal (cap. 1), apresentamos argumentos a favor da utilização da HM nessa formação (cap. 2) e, do extenso corpo de saber que é a HM, selecionamos tópicos e sugerimos algumas propostas dessa utilização, tendo em conta os conteúdos matemáticos que os futuros professores terão de ensinar (cap. 3).

Cap 1. Os cursos de Educação Básica em Portugal

Em Portugal, os 1.º e 2.º ciclos do ensino básico abrangem os seis primeiros anos de escolaridade (respetivamente, quatro anos mais dois) e destinam-se a alunos dos 6 aos 12 anos de idade. Aqueles que pretendem, profissionalmente, ser professores do 1.º ou do 2.º ciclo do ensino básico (em Português, História e Geografia de Portugal ou em Matemática e Ciências da Natureza) têm de ter uma formação inicial de três anos numa licenciatura em Educação Básica, numa universidade ou instituto politécnico e, posteriormente, ter formação especializada através de cursos de mestrado específicos para formação de professores. Dependendo da formação especializada escolhida, poderão ou não lecionar matemática no 2.º ciclo do ensino básico (2.º CEB), mas podem sempre fazê-lo no 1.º ciclo do ensino básico (1.º CEB).

As licenciaturas em Educação Básica têm um cariz generalista, muito abrangente e pouco aprofundado, oferecendo formação na área da docência (português, matemática, ciências, história e geografia de Portugal e expressões), formação educacional geral, didáticas específicas e iniciação à prática profissional. Em (Galvão, Ponte, & Jonis, 2018) encontram-se mais detalhes sobre a formação inicial de professores em Portugal. A formação matemática exigida para a candidatura a estes cursos não é a mais completa e alargada que é oferecida no ensino não superior. Sendo cursos superiores que, habitualmente, têm classificação média de entrada na universidade baixa, atraem muitos alunos que não têm boa formação matemática, nem motivação para serem professores.

Os cursos de mestrado específicos para a formação de professores, dependendo da instituição, podem dar habilitação para a docência na Educação Pré-escolar e/ou no 1º CEB, ou para o 1.º CEB e para o 2.º CEB, variante de Português, História e Geografia de Portugal ou variante Matemática e Ciências de Natureza. Nestes cursos há um reforço da formação na área da docência, nas didáticas específicas e surge a prática de ensino supervisionada que incide sobre os níveis de ensino para que forma o respetivo curso. Em (Galvão & Ponte, 2018) encontra-se uma resenha histórica e reflexão sobre os Mestrados em Ensino no contexto atual da formação de professores em Portugal. Ainda que o foco seja o panorama na Universidade de Lisboa, os contornos legais são os mesmos para as restantes instituições de formação de professores para o ensino básico.

Focando-nos na formação que importa para a reflexão aqui apresentada, no final da formação inicial e especializada, os alunos tiveram contacto com conteúdos de matemática (tradicionalmente de lógica, números e operações, geometria e medida, organização e tratamento de dados), conteúdos de didática da matemática e conteúdos de história da ciência. A abordagem explícita a aspetos de HM, existirá ou não dependendo da vontade do professor e, portanto, a frase de Mosvold, Jakobsen e Jankvist (2013):

> "Despite the evidence provided for this claim by the authors [o facto de os futuros professores poderem beneficiar com a aprendizagem da HM], many mathematics teachers today still go through their training programs without ever becoming acquainted with the history of mathematics"

é aplicável no contexto português que estamos a tratar.

No próximo capítulo apresentamos argumentos a favor da importância de incluir, explicitamente, a HM na formação de professores do ensino básico.

Cap 2. O papel da História da Matemática nos cursos de Educação Básica

Nos primeiros anos do século XXI, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) insistia na ideia de que os programas de formação de professores de matemática deviam incluir HM e as contribuições de diversas culturas, no sentido de preparar os futuros professores para promoverem a proficiência do aluno na HM em sete áreas de conteúdo: (1) números e operações, (2) álgebra, (3) geometria (4) estatística e probabilidade, (5) cálculo, (6) matemática discreta e (7) medida (Galante, 2014). No caso da formação de professores do ensino básico em Portugal, dados os conteúdos que, previsivelmente, irão lecionar, entendemos que as áreas de conteúdo (1), (2) (3) e (7) e, eventualmente a (4), seriam as essenciais.

Porquê esta insistência?

Arcavi e colegas, em 1982, sugeriram que "maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics" (Mosvold, Jakobsen, & Jankvist, 2014). Desde então vários estudos têm vindo a ser feitos procurando mostrar que existem vantagens para os professores em estudar (alguns tópicos relevantes de) HM.

No seguimento das razões apresentadas por Fauvel, em 1991, para se usar a HM no ensino da matemática e, consequentemente, na formação de professores, Lui, em 2003, apresentou cinco razões que passamos a enunciar:

> "A história pode ajudar a aumentar a motivação e desenvolver uma atitude positiva em relação à aprendizagem. Os obstáculos do passado no desenvolvimento da matemática podem ajudar a explicar o que os alunos de hoje acham difícil. Problemas históricos podem ajudar a desenvolver o pensamento matemático dos alunos. A história revela as facetas humanísticas do conhecimento de matemática. A história fornece aos professores um guia para o ensino" (Liu, 2003, p. 416 em Galante, 2014).

Nestas razões, fica claro que não se está a entender a "HM como objetivo" (isto é, conhecer a história real da matemática, incluindo pessoas, lugares e eventos envolvidos), mas sim, a "HM como ferramenta" (para proporcionar interesse, motivação e compreensão dos esforços envolvidos na descoberta matemática). Esta distinção é devida a U. T. Jankvist em estudos do início do séc. XXI (Mosvold, Jakobsen, & Jankvist, 2014).

Que evidências existem da utilidade da HM como ferramenta?

Tendo em conta o modelo de Shulman (1986) para o conhecimento profissional do professor, para além das dimensões base do Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico, este autor estabeleceu uma nova dimensão do conhecimento que resulta da interseção desses dois conhecimentos: Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Em síntese, segundo Shulman (1986) o professor para além dos conhecimentos científicos relativos a um determinado conteúdo, deve também conhecer estratégias pedagógicas e saber adequá-las a esse mesmo conteúdo.

Como afirma Galante (2014), ensinar futuros professores sobre HM é adicionar conhecimento ao conhecimento de conteúdo de matemática e aumentar o conhecimento de conteúdo pedagógico e pode ser uma tarefa que valha a pena. Os resultados deste estudo indicaram que, ao permitir que os futuros professores de matemática investigassem e apresentassem tópicos de HM, estes acreditavam ter fortalecido o seu conhecimento sobre o conteúdo de matemática e consideraram ter encontrado uma nova forma para ensinar matemática aos seus futuros alunos.

Outros estudos (Jankvist, 2019; Mosvold, Jakobsen, & Jankvist, 2014) confirmam estes resultados e referem ainda que os professores podem adquirir conhecimento sobre o conceito matemático a um nível meta e ainda que, em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, a HM fornece um repertório de ideias para o professor de matemática, quanto mais não seja porque fornece exemplos autênticos de problemas matemáticos (que envolvem ideias, conceitos e métodos do passado).

Defendemos que a HM, por um lado, ajuda o (futuro) professor, enquanto aluno, a compreender melhor as ideias, conceitos e métodos matemáticos e, por outro, fornece estratégias para o (futuro) professor, quando professor, os ensinar. No entanto, a HM é um corpo de saber demasiado amplo e extenso, pelo que se torna pertinente refletirmos sobre quais os conteúdos de HM verdadeiramente essenciais para os professores e para as suas práticas profissionais futuras, é o que fazemos no capítulo seguinte.

Cap 3. A História da Matemática para os cursos de Educação Básica - propostas

A maioria dos autores de referência nesta área (por exemplo, Boyer, 1996; Katz, 2004; Eves, 1997; Struik, 1992; Estrada, Sá, Queiró, Silva & Costa, 2000) começam as suas obras com a matemática do antigo Egipto (existem registos desde 3100 a.C.) e da Mesopotâmia (civilização iniciada por volta do quinto milénio a.C.) – note-se que existem registos escritos substanciais destas duas civilizações, em particular, na área da matemática. Embora haja registos de algumas formas rudimentares de matemática anteriores como, por exemplo, contagens de objetos em ossos, o ponto de partida centra-se nestas duas civilizações que construíram um corpo amplo de saber na área da matemática.

Os egípcios, por exemplo, tinham conhecimentos em frações e em geometria e a civilização babilónica (povo que vivia na mesopotâmia) já tinha conhecimentos tão avançados como, por exemplo, equações quadráticas e cúbicas. Depois destas duas civilizações, é possível ainda apontar vários outros povos importantes na HM como, por exemplo, os hindus, os chineses, os árabes e os gregos que também construíram um vasto conjunto de conhecimentos matemáticos e que hoje são centrais na matemática escolar e não só. Neste capítulo vamos focar-nos, de entre toda a extensão da HM, nos conteúdos que entendemos serão verdadeiramente úteis aos futuros professores do ensino básico. No que se segue apresentamos alguns tópicos que, em nossa opinião, nos parecem essenciais, bem como a justificação para serem pertinentes na formação de professores.

3.1 Sistemas de Numeração

O sistema de numeração indo-arábico atual foi criado pelos Hindus e difundido pela civilização árabe. Este sistema é utilizado em quase todo o mundo e a sua «vitória» sobre os antigos sistemas deve-se às suas «boas» propriedades matemáticas. Um processo convincente para se perceber essas «boas» propriedades do nosso sistema atual é compará-lo com os sistemas antigos e perceber as vantagens e as desvantagens de cada um deles.

Só se entende as vantagens do sistema decimal quando se tenta trabalhar com outros sistemas como, por exemplo, o sistema sexagesimal dos babilónios ou o sistema vigesimal dos maias (em rigor, o sistema de numeração maia não é totalmente vigesimal pois pretendia-se que o número 360 – o número de dias de um ano para os maias – tivesse um papel fulcral no seu sistema de numeração).

Só se consegue perceber a «economia» do nosso sistema (conseguir escrever todos os números com apenas dez símbolos) quando se tenta escrever, por exemplo, o número 999 em sistemas repetitivos como era o sistema do antigo Egipto (Fig. 1).

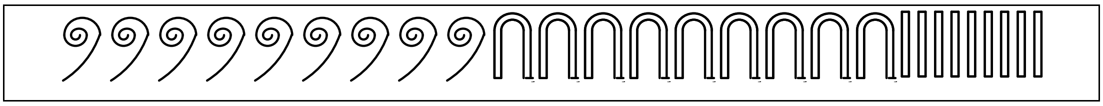
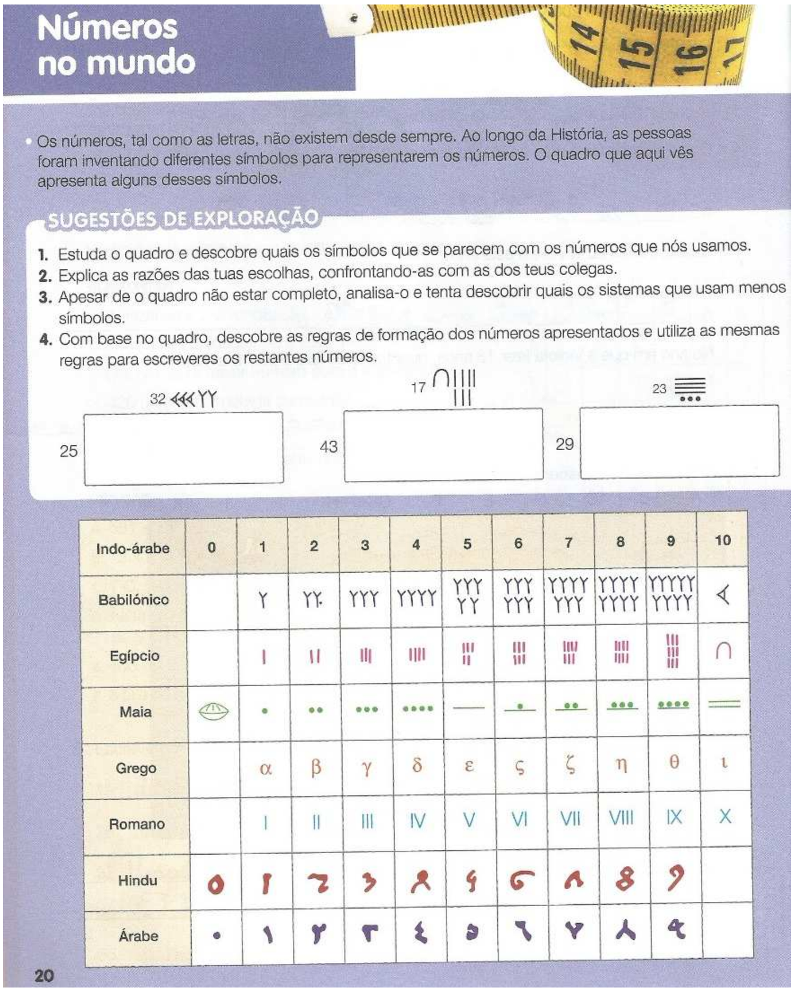


Fig. 1. O número 999 escrito no sistema de numeração do antigo Egipto

Por outro lado, ao longo da HM encontram-se vários sistemas posicionais como o nosso atual e que permitiam escrever todos os números naturais com um número finito de algarismos. Esta característica compreende-se bem, por oposição, no sistema de numeração do antigo Egipto, que era limitado superiormente: o maior número que podia ser escrito nesta numeração era o número 99.999.999 (o símbolo ☼ que representava um Sol, era usado para representar o maior número e tinha o valor de 10.000.000). Nesta questão é ainda de salientar a numeração romana pois era, em parte, posicional (IX era diferente de XI), mas também era do tipo repetitiva e limitada superiormente. Note-se ainda que muitos sistemas antigos ainda não possuíam o zero, o que levava a grandes dificuldades e equívocos nos sistemas posicionais – fazendo analogia com o nosso sistema atual, como distinguir os números 34 e 304 se não tivéssemos o símbolo 0 para colocar no meio das duas posições?

Assim, no nosso entender, é essencial os futuros professores do ensino básico estudarem o sistema de numeração dos antigos egípcios (muito simples e que os alunos, mesmo os mais novos, facilmente compreendem), da civilização babilónica (até porque ainda hoje se utiliza o sistema sexagesimal, por exemplo, nos relógios, temática que faz parte do ensino do primeiro ciclo em Portugal), dos romanos (numeração ainda utilizada em vários contextos), da civilização maia (ligada à astronomia e de base (quase) 20) e da antiga civilização chinesa (por exemplo, o sistema dos *Tsungs* e *Hengs* da dinastia Shang e que pode ser consultado em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Chinese_numerals.html). Na Fig. 2 apresentamos um exemplo de utilização deste assunto num manual escolar do 3º ano do 1.º CEB.


Números no mundo

• Os números, tal como as letras, não existem desde sempre. Ao longo da História, as pessoas foram inventando diferentes símbolos para representarem os números. O quadro que aqui vês apresenta alguns desses símbolos.

SUGESTÕES DE EXPLORAÇÃO

1. Estuda o quadro e descobre quais os símbolos que se parecem com os números que nós usamos.
2. Explica as razões das tuas escolhas, confrontando-as com as dos teus colegas.
3. Apesar de o quadro não estar completo, analisa-o e tenta descobrir quais os sistemas que usam menos símbolos.
4. Com base no quadro, descobre as regras de formação dos números apresentados e utiliza as mesmas regras para escreveres os restantes números.

32 ≪≪≪YY 17 ∩IIII III 23

25 43 29

Indo-árabe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Babilónico		Y	YY	YYY	YYYY	YYY YY	YYY YYY	YYYY YYY	YYYY YYYY	YYYYY YYYY	≺
Egípcio		I	II	III	IIII	III II	III III	IIII III	IIII IIII	III III III	∩
Maia		•	••	•••	••••	—	• —	•• —	••• —	•••• —	=
Grego		α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι
Romano		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Hindu	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	
Árabe	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	

20

Fig. 2. Exemplo da utilização de HM num manual do 1.º CEB (3.º ano) em Portugal (Lima, Pedroso, Barrigão, & Santos, 2019, p. 20)

Para além da questão matemática, estes conhecimentos permitem humanizar a matemática, mostrando-a como uma ciência em constante evolução e como o resultado do trabalho de muitas gerações e diferentes povos. Saber que os "nossos" números foram criados na Índia e que chegaram à Europa através da atuação dos árabes permite uma nova visão da matemática, percebendo que a globalização também existiu noutras eras da História e mostrando que os outros povos também deram e continuam a dar contributos científicos válidos.

3.2 Operações aritméticas

O ensino das quatro operações aritméticas é uma das primeiras tarefas de um professor do 1.ºCEB. Infelizmente, muitas vezes, o ensino centra-se nos algoritmos não deixando margem para que se perceba, de facto, porque é que os algoritmos funcionam e permitem chegar ao resultado pretendido (este problema é particularmente evidente na multiplicação e na divisão).

Uma forma de retomar as operações aritméticas e a sua compreensão é ensinar aos alunos outros métodos de efetuar as operações. Ao longo da HM encontramos vários métodos que podem ser utilizados em sala de aula com facilidade e que podem ser comparados/analisados com os métodos atuais. Um dos mais conhecidos é o método de gelosia; para uma explicação de como funciona este método, consultar, por exemplo, Pinto, 2011, pp. 107-109. O método de gelosia é muito atrativo visualmente e pode ser introduzido/explicado rapidamente em sala de aula (apenas é necessário saber a tabuada para preencher a tabela e, de seguida, somar aos valores de cada diagonal, como se ilustra na Fig. 3).

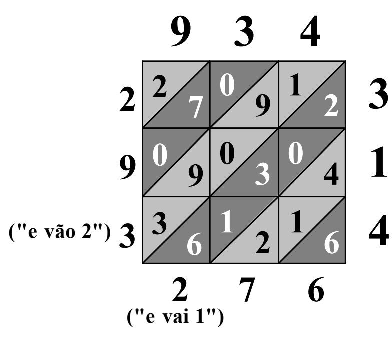


Fig. 3. Exemplo de multiplicação em gelosia: $934 \times 314 = 293276$.

O importante é mostrar aos alunos que o método é perfeitamente análogo ao algoritmo atual embora a apresentação seja substancialmente diferente (o que se soma nas «diagonais» em gelosia, soma-se nas «colunas» do método atual). Observe-se a seguir o algoritmo atual (Fig. 4) onde deixamos a indicação do que «veio de trás» em cada momento.

			9	3	4
		×	3	1	4
		3	6+**1**	2+**1**	6
	0	9+**0**	3+**0**	4	
2	7+**0**	9+**1**	2		
2	**7**	**22**	**12**	**7**	**6**

Fig. 4. Exemplo de multiplicação pelo algoritmo usual: $934 \times 314 = 293276$.

Deste modo, volta-se a rever o método atual, possivelmente sem que os alunos se apercebam que estão novamente a trabalhar as operações aritméticas essenciais.
Outro método que pode ser interessante em sala de aula é o método de multiplicação e divisão do antigo Egipto. Este método é substancialmente diferente do nosso e usa apenas duplicações sucessivas, ou seja, não exige o conhecimento das tabuadas (superiores a 2) que o nosso método exige. De facto, este método utiliza, sem o enunciar, a decomposição do multiplicador em parcelas de potências de 2, o que é sempre possível para qualquer número natural.

De facto, para os antigos egípcios, multiplicar 19 por 11 era o mesmo que multiplicar 19 por (1+2+8) e, portanto, bastava fazer as seguintes multiplicações: 19×1, 19×2 e 19×8 (note-se que também faziam a operação 19×4 como auxílio para determinar 19×8, mas este não era selecionado para a obtenção do resultado final). No final bastava somar todas as multiplicações intermédias selecionadas e obtinham o resultado. A divisão tinha um algoritmo análogo em que se ia duplicando o divisor. Este método é interessante e pode-se, por exemplo, utilizar também para observação de uma aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: 19×11=19×(1+2+8)=19×1+19×2+19×8.

Note-se ainda que o denominado método da multiplicação dos camponeses russos, ainda utilizado em certas regiões, é parecido ao do antigo Egipto e utiliza também duplicações e divisões sucessivas por 2 (sempre que se dividir um número ímpar neste método, deve-se desprezar a parte decimal). Contudo, tem curiosas diferenças que lhe permitem rapidamente escolher os termos a somar (basta considerar os números ímpares da coluna da esquerda e somar os números respetivos da coluna da direita). Veja-se o exemplo a seguir:

19	**11**
9~~,5~~	**22**
4~~,5~~	44
2	88
1	**176**
19×11=	176+22+11=209

A justificação deste método é também muito interessante e permite perceber que a divisão e a multiplicação são funções inversas uma da outra:

$$\mathbf{19} \times \mathbf{11} = \frac{19}{2} \times (11 \times 2) = 9{,}5 \times 22 = 9 \times 22 + 11$$

$$= \frac{9}{2} \times (22 \times 2) + 11 = 4{,}5 \times 44 + 11 = 4 \times 44 + 22 + 11$$

$$= \frac{4}{2} \times (44 \times 2) + 22 + 11 = 2 \times 88 + 22 + 11 = \mathbf{176} + \mathbf{22} + \mathbf{11}$$

De facto, sempre que se dividem números ímpares, está-se a perder a informação relativa ao 0,5 que se despreza e, por isso, no final temos de somar esses valores ao valor final (que, no exemplo apresentado, era 176).

Um outro método muito em voga atualmente é o método das varas chinesas que permite efetuar multiplicações sem o conhecimento de qualquer tabuada (essa informação é obtida por contagem das interseções entre as varas verticais e as varas horizontais). Para compreender este método ver, por exemplo, o vídeo em https://www.youtube.com/watch?v=bbKjXKV9QNA. Contudo, mais uma vez, este sistema é análogo ao algoritmo atual e, além disso, muito similar ao método de gelosia.

Ainda a propósito das operações aritméticas podemos referir os ábacos. Estes instrumentos são muito simples e podem facilmente ser utilizados em sala de aula. Para além do ábaco tradicional que tem 10 contas em cada coluna e que pode ser encontrado em qualquer loja de brinquedos, deve-se também introduzir o ábaco chinês onde cada coluna está dividida em duas partes: a parte de baixo tem 5 contas a valer 1 unidade cada uma, enquanto que a parte de cima tem 2 contas valendo 5 unidades cada (https://sciencing.com/use-chinese-abacus-2290925.html). Similar a este último ábaco, tem-se também o ábaco romano (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Ábaco_banner.pdf) que é igual ao ábaco japonês (ambos têm 1 conta em cima e 4 contas em baixo). Mais uma vez, a comparação de diferentes instrumentos de vários povos poderá ser muito interessante em sala de aula pois permite uma visão mais universal da disciplina.

Ainda nas máquinas de cálculo, gostávamos de referir as varas de Napier (Fig. 5) que permitiam efetuar multiplicações. Estas varas foram criadas pelo matemático Napier (1550-1617) e usavam a noção já referida de multiplicação em gelosia.

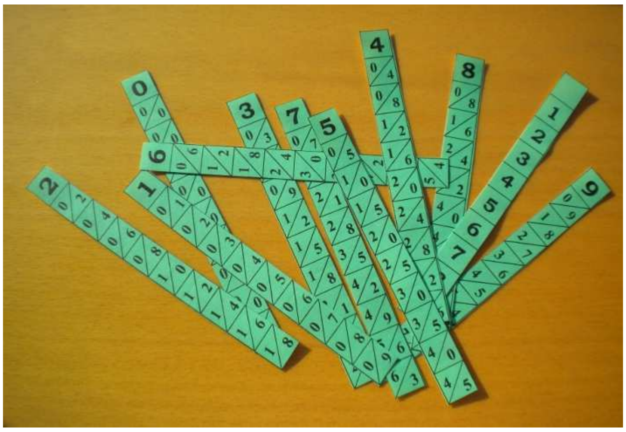


Fig. 5. Exemplo de barras de Napier

Este instrumento substituía o conhecimento das tabuadas pois cada vara continha os quadrados necessários a construir na multiplicação em gelosia. Observe-se o exemplo na Fig. 6.:

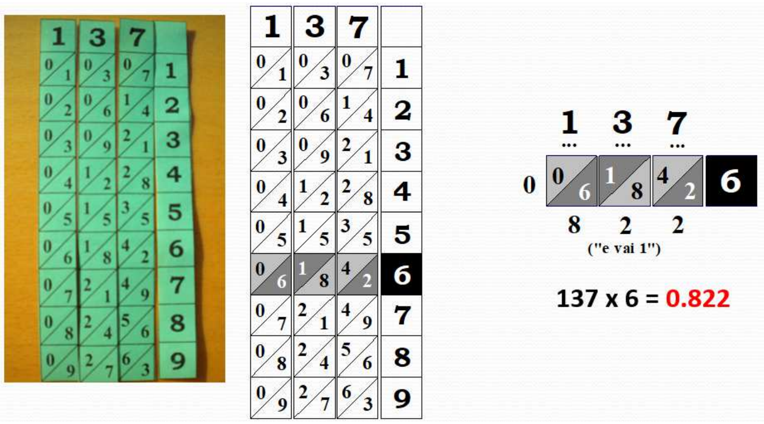


Fig. 6. Exemplo de cálculo com as barras de Napier (137×6)

Posteriormente, já nos finais do século XIX, criaram-se outras varas que eliminavam as principais desvantagens das varas de Napier: ser necessário fazer adições intermédias bem como, em certas situações, transportar valores para a diagonal seguinte. Essas varas designaram-se por Varas de Genaille-Lucas e são uma evolução das anteriores. Note-se que o resultado se obtém apenas e só por observação direta do instrumento, sem haver necessidade de qualquer cálculo por parte do utilizador – na coluna da direita começa-se no primeiro algarismo da linha pretendida da vara e depois deve-se seguir os sucessivos triângulos para as colunas adjacentes (na Fig. 7, como exemplo, encontra-se a seguinte multiplicação: 187 por 4).

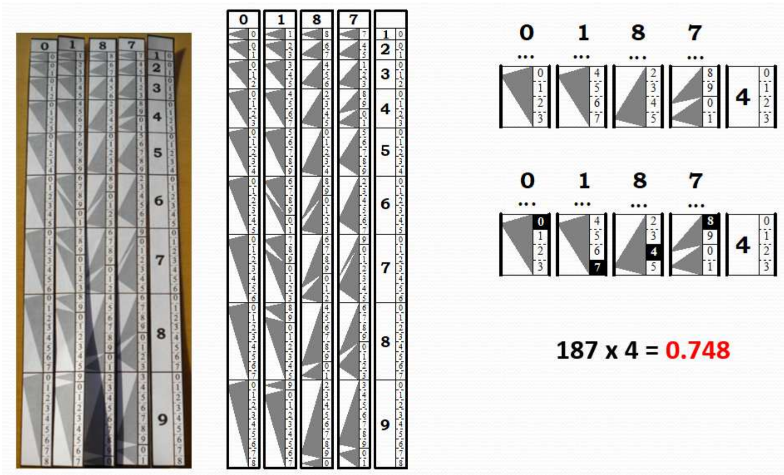


Fig. 7. Exemplo de utilização das barras de Genaille-Lucas para o cálculo de 187×4

Não pretendemos neste ponto ser exaustivos na descrição destes instrumentos. Em (Pinto, 2011, pp. 110-117) é possível obter informações detalhadas sobre estes dois instrumentos. Serve o exposto para mostrar aos alunos que as máquinas de cálculo, tal como outros algoritmos matemáticos, foram alvo de vários séculos de evolução e de melhoramento.

3.3 Equações

As equações são um dos primeiros momentos da matemática escolar onde se encontra um certo grau de abstração. Note-se, contudo, que já no antigo Egito existiam problemas matemáticos que exigiam a resolução de equações. Como exemplo, considere-se o problema 26 do Papiro de Rhind:

Uma quantidade e a sua quarta parte somadas perfazem 15. Qual é a quantidade?

Em linguagem e notação atuais, diríamos que a quantidade pretendida é a solução da equação $x + \frac{x}{4} = 15$ (equação do primeiro grau). O método dos antigos egípcios era substancialmente diferente do nosso, mas bastante engenhoso e designa-se por método da falsa posição (ou da falsa solução). Em primeiro lugar, os egípcios suponham que um determinado número era solução da equação (o número escolhido deveria facilitar os cálculos; no exemplo acima, o escriba escolheu o número 4 para fazer «desaparecer» a fração). Assim, com esta falsa solução, ter-se-ia: $x + \frac{x}{4} = 4 + \frac{4}{4} = 5$. Mas 5 não é 15 como pretendido na equação… e, portanto, é necessário corrigir a falsa solução de que se partiu. Para o conseguir, basta notar que multiplicando 5 por 3 se obtém o pretendido 15 e, portanto, basta fazer o mesmo à falsa solução para se obter a solução correta: $4 \times 3 = \mathbf{12}$. Este método é bastante eficaz na resolução de equações de primeiro grau (os egípcios usavam métodos similares para resolver outro tipo de equações mais complexas) e compará-lo com o atual pode constituir-se uma experiência matemática enriquecedora.

Embora as equações de segundo grau surjam bem mais tarde na matemática escolar, gostaríamos de deixar referência aos métodos de resolução utilizados historicamente pelos árabes. Estes utilizam argumentos geométricos engenhosos onde os valores das equações são representados por comprimentos de segmentos de reta e por áreas de polígonos (por exemplo, x^2 era a área do quadrado de lado x). Além disso, como ainda não existia o conceito de número negativo, os árabes tiveram de considerar diferentes métodos para diferentes tipos de equações do segundo grau.

3.4 Geometria

Na História da Geometria existem dois nomes incontornáveis e que, em nosso entender, devem ser do conhecimento de todos os professores, incluindo os dos primeiros anos: Euclides e Descartes. O primeiro, grego do século III a.C., sistematizou quase toda a geometria que se ensina atualmente nas escolas (a geometria euclidiana). O segundo, francês do século XVII, foi responsável pelo plano cartesiano que é essencial, por exemplo, para os sistemas de coordenadas (ensinados no 3.º ano do 1.º CEB em Portugal) e para as funções.

A grande diferença entre os dois consiste na libertação da geometria cartesiana do princípio da homogeneidade. Para Euclides (assim como para os árabes quando estavam a resolver equações), a multiplicação de dois comprimentos era uma área; para Descartes, a mesma multiplicação era um comprimento de um segmento de reta. Esta diferença é marcante na História da Matemática pois permitiu um forte desenvolvimento da Geometria.

3.5 História da Matemática local/nacional

Em países com pouca «autoestima» como é o caso de Portugal é essencial mostrar aos alunos a produção local/nacional nesta área do saber. Em Portugal, existe muitas vezes a ideia pré-concebida por parte dos alunos que não existiu produção científica e matemática relevante no país. A este respeito podemos, por exemplo, apresentar aos alunos três momentos importantes na HM em Portugal:

- Os aritméticos comerciais de 1500;
- Pedro Nunes e os seus tratados sobre álgebra e a navegação;
- Gomes Teixeira, um matemático internacional.

Os dois primeiros têm a vantagem de estarem relacionados com um dos momentos mais marcantes da História de Portugal – os Descobrimentos – e, além disso, permitirem o contacto com uma matemática que, à época, era verdadeiramente útil ao comércio e à navegação, duas atividades fulcrais naquele tempo. Por exemplo, os aritméticos de 1500 publicaram diversas obras matemáticas onde se abordavam vários problemas relativos à cobrança de impostos decorrentes do comércio marítimo com os «novos» mundos (para informações pormenorizadas sobre esta temática, consultar Clain, 2015). Por outro lado, a navegação portuguesa beneficiou de vários melhoramentos no problema da localização em alto-mar e que só foram possíveis com conhecimentos avançados, por exemplo, em astronomia e, em particular, em geometria esférica (observe-se, por exemplo, a curiosa questão das linhas de rumo em http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e6.html).

Gomes Teixeira, por outro lado, é um caso que permite mostrar um exemplo de uma personalidade portuguesa que se conseguiu integrar na comunidade científica internacional, surgindo o seu nome ao lado de matemáticos famosos até aos dias de hoje. Por exemplo, na Fig. 8 a seguir podemos observar o primeiro *Comité de Patronage* da importante revista *L'Enseignement Mathématique* (Furinghetti, 2003, p. 27), onde o nome de Gomes Teixeira aparece ligado a nomes tão relevantes como Poincaré, Cantor e Klein.

one of the editors of the journal and held that office until his death [9]). Until 1914 the journal had a *Comité de patronage*. The international nature of the journal can be gauged from the names of the members of the first *Comité* (1899):

Paul Appell, Paris
Nicolas Bougaiev (Bougajeff), Moscow (until 1903)
Moritz Benedikt Cantor, Heidelberg
Luigi Cremona, Rome (until 1903)
Emanuel Czuber, Vienna
Zoel García de Galdeano y Yanguas, Zaragoza
Alfred George Greenhill, Woolwich, England
Felix Klein, Göttingen
Valerian Nikolajwitsch Liguine (Ligin), Warsaw (until 1900)
Paul Mansion, Gent
Gösta Magnus Mittag-Leffler, Stockholm
Gabriel Oltramare, Geneva (until 1906)
Julius Peter Christian Petersen, Copenhagen (until 1910)
Émile Charles Picard, Paris
Henri Jules Poincaré, Paris (until 1912)
Pieter Hendrik Schoute, Groningen (until 1913)
Kyparissos Stephanos, Athens
Francisco Gomes Teixeira, Porto
Alexandr Wassiljewitsch Vassilief (Wassilief), Kazan
Alexander Ziwet, Ann Arbor, Michigan

Fig. 7. O primeiro *Comité de patronage* da revista *L'Enseignement Mathématique*

De facto, Gomes Teixeira conseguiu aproveitar o movimento de internacionalização da matemática do fim do século XIX e início do século XX para criar uma vasta rede de contactos matemáticos. Assim, o nome de Gomes Teixeira, tal como outros que se seguiram (por exemplo, Mira Fernandes, Vicente Gonçalves, e Sebastião e Silva), deve ser referenciado nas escolas, bem como na formação de professores, para que se perceba que a ciência é o produto de uma globalização, na qual Portugal também participa. O estudo da HM local é um ótimo modo de engajar os alunos com a disciplina e, para além disso, para dar a perceber que, mesmo estando num país periférico, é possível atingir-se o topo do conhecimento científico e matemático.

Conclusão

O sistema de numeração decimal atual, tal como as operações, as equações e a geometria, foi o resultado de uma longa evolução histórica. A sua escolha deve-se a diversas qualidades que só podem ser cabalmente compreendidas quando este sistema é comparado com outros sistemas antigos atualmente em desuso. Para diversos povos antigos a matemática foi essencial para o desenvolvimento de áreas relacionadas como a astronomia, a navegação, a engenharia, a cobrança de impostos, etc., tendo o mesmo ocorrido na História de Portugal onde se destacam os conhecimentos marítimos e os aritméticos ligados ao comércio. O conhecimento destes factos permite uma humanização da matemática que não seria possível de outro modo. Assim, somos da opinião que a HM deve ser uma das ferramentas educativas que todo o professor da Educação Básica deve possuir no seu arsenal de conhecimentos. Note-se, contudo, que esta ferramenta não deve ser exclusiva, mas sim complementar a outras ferramentas como, por exemplo, o uso da tecnologia e da matemática recreativa em sala de aula. Cada professor deve possuir várias e diferenciadas estratégias de que se possa socorrer e utilizar em diferentes contextos e situações. Alargando e aprofundando deste modo o seu conhecimento de conteúdo sobre tópicos de HM, em particular os que apresentamos, bem como adquirindo ferramentas uteis ao desenvolvimento do seu conhecimento pedagógico de conteúdo.

Com a utilização da HM em sala de aula mostra-se que a matemática é um corpo de saber proveniente de várias latitudes começando por quebrar a ideia pré-concebida que a matemática (tal como todo o restante conhecimento científico) é um produto exclusivo da atual civilização ocidental. Numa época em que os radicalismos aumentam, este conhecimento de HM pode contribuir para um maior respeito e uma maior tolerância para com a cultura e o saber de outros povos diferentes dos ocidentais. Note-se, por fim, que a utilização da HM como ferramenta pedagógica é uma área científica bem estabelecida, tendo o seu expoente máximo no grupo internacional «HPM- *International Study Group On the History And Pedagogy of Mathematics*». O grupo HPM, criado em 1976, é um afiliado do ICMI, a mais importante organização internacional dedicada à educação matemática. Para uma primeira abordagem aos trabalhos científicos deste grupo, bem como a uma lista de eventos passados e futuros consultar o website http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/about%20HPM.htm.

Bibliografia

Arcavi, A., Bruckheimer, B., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *3*(1), 30–37.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blucher.

Clain, T. C. (2015). *A matemática e o comércio em Portugal através das obras de aritméticos do século XVI: Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes* (Tese de Doutoramento). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, H. (1997). *Introdução à História da Matemática (2.º ed.)*. Campinas: Editora da UNICAMP.

Furinghetti, F. (2003). Mathematical instruction in an international perspective: the contribution of the journal *L'Enseignement Mathématique*. In Coray, D., Furinghetti, F., Gispert, H., Hodgson, B. R. & Schubring, G. (Ed.), *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique*. Geneve: L'Enseignement Mathématique.

Galante, D. (2014). The Use of the History of Mathematics in the Teaching Pre-service Mathematics Teachers. *REDIMAT*, *3*(2), 110-120. doi: 10.4471/redimat.2014.45

Galvão, C., & Ponte, J.P. (2018). Os Mestrados em Ensino no Contexto Atual da Formação de Professores em Portugal. In C. Galvão & J. P. Ponte (Org.), *Práticas de Formação Inicial de Professores: Participantes e Dinâmicas* (pp. 13-24). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Galvão, C., Ponte, J.P., & Jonis, M. (2018). Os Professores e a sua Formação Inicial. In C. Galvão & J. P. Ponte (Org.), *Práticas de Formação Inicial de Professores: Participantes e Dinâmicas* (pp. 25-46). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Isaacs, I., Ram, V. M., & Richards, A. (2000). A historical approach to developing the cultural significance of mathematics among first year preservice primary school teachers. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics - An international perspective*. MAA Notes (No. 51, pp. 123-128). Washington: The Mathematical Association of America.

Jankvist, U.T., Clark, K.M., & Mosvold, R. (2019). Developing mathematical knowledge for teaching teachers: potentials of history of mathematics in teacher educator training. *J. Math Teacher Educ*. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09424-x

Katz, V. (2004). *The History of Mathematics. Brief Edition*. Boston: Person Education Inc.

Lima, E., Pedroso, N., Barrigão, N., & Santos, S. (2019). *Alfa Matemática 3*. Porto: Porto Editora.

Mendes, I. A. (2015). *História da Matemática no Ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Mendes, I. & Chaquiam, M. (2016). *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*. Belém: SBHMat.

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U.T. (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Sci & Educ*, *23*, 47–60. DOI 10.1007/s11191-013-9612-7

National Council for the Accreditation of Teacher Education. (2003). *NCATE/NCTM Program standards for programs for initial preparation of mathematics teachers*. Washington, DC: Author.

Pinto, H. (2011). *História da Matemática na sala de Aula*. Lisboa: Ludus.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Struik, D. (1992). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no âmbito do projeto UID/CED/00194/2019 e do projeto UID/MAT/04106/2019 e ainda pelo CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações.

Autores

Hélder Pinto

Instituto Piaget, RECI - Research in Education and Community Intervention e CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2226-0685. E-mail**:** helder.pinto@gaia.ipiaget.pt

Cecília Costa

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CIDTFF - Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (Lab-DC&T na UTAD). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9962-562X. E-mail: mcosta@utad.pt

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p20-43.id831

EL ARTE DE ALMADA NEGREIROS COMO EJEMPLO DE LA CONEXIÓN ENTRE HISTORIA, MATEMÁTICAS Y ARTE

Cristina Lúcia Dias Vaz[1]
cvaz@ufpa.br

Edilson dos Passos Neri Júnior[1]
neri@ufpa.br
[1]*Universidade Federal do Pará, Brasil*

Recibido: 15/10/2019 **Aceptado:** 08/01/2020

Resumen

Este artículo es un extracto de la tesis de maestría Actos y lugares de aprendizaje creativo en matemáticas. Nuestro objetivo es presentar las potencialidades de las interconexiones entre Historia, Matemáticas y Arte, como conocimiento que puede integrarse con los lenguajes innovadores que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación para permitir la movilización de este conocimiento de manera híbrida, para reorientar los enfoques didácticos en la enseñanza de las Matemáticas desde un enfoque interdisciplinario. Para lograr este objetivo, adoptamos el método de cartografía como un método de investigación anclado en la propuesta de cartografía de los filósofos Gilles Deleuze y Félix Guattari; El concepto de aprendizaje creativo inspirado en las ideas del educador Paulo Freire y el psicoanalista Donald Winnicott y el concepto de interdisciplinariedad propuesto por Ivani Fazenda. Los resultados de esta investigación apuntan a la historia de las matemáticas como un elemento que impregna la búsqueda de un proceso de aprendizaje creativo de manera transversal, estableciendo un diálogo entre las matemáticas y el arte.
Palabras clave*:* Aprendizaje Creativo, Matemáticas, Arte, Historia de las Matemáticas, Almada Negreiros.

THE ART OF ALMADA NEGREIROS AS AN EXAMPLE OF THE CONNECTION BETWEEN HISTORY, MATHEMATICS AND ART

Abstract

This article is an excerpt from the master's thesis *Acts and Places for Creative Learning in Mathematics.* The main objective is to present potentialities of the interconnections between History, Mathematics and Art, as knowledge that can be integrated with the innovative languages offered by information and communication technologies in order to enable the mobilization of this knowledge in a hybrid way, to reorient didactic approaches in teaching mathematics from an interdisciplinary approach. To achieve this goal, we adopted the cartography method as a research method anchored in the proposal of cartography by the philosophers Gilles Deleuze and Félix Guattari; in the concept of creative learning inspired by the ideas of educator Paulo Freire and psychoanalyst Donald Winnicott; and in the concept of interdisciplinarity proposed by Ivani Fazenda. The results of this research pointed to the

history of mathematics as an element that permeated the search for a creative learning process in a transversal way, as so to establish a dialogue between Mathematics and Art.
***Keywords**:* Creative Learning, Math, Art, History of Mathematics, Almada Negreiros.

A ARTE DE ALMADA NEGREIROS COMO EXEMPLO DE CONEXÃO ENTRE HISTÓRIA, MATEMÁTICA E ARTE

Resumo

Este artigo é um recorte da dissertação de mestrado *Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática.* O principal objetivo é apresentar potencialidades das interconexões entre História, Matemática e Arte, como saberes que podem se integrar às linguagens inovadoras oferecidas pelas tecnologias de informação e comunicação no sentido de possibilitar a mobilização desses saberes de forma híbrida, para reorientar as abordagens didáticas no ensino de matemática sob um enfoque interdisciplinar. Para alcançar este objetivo, adotamos método da cartografia como método de pesquisa ancorado na proposta de cartografia dos filósofos Gilles Deleuze e Félix Guattari; no conceito de aprendizagem criativa inspirado nas ideias do educador Paulo Freire e do psicanalista Donald Winnicott; e no conceito de interdisciplinaridade proposto por Ivani Fazenda. Os resultados desta pesquisa apontaram para a história da matemática como elemento que perpassou a busca de um processo de aprendizagem criativa de forma transversal, de modo a estabelecer um diálogo entre a Matemática e Arte.
***Palavras-chave*:** Aprendizagem Criativa, Matemática, Arte, História da Matemática, Almada Negreiros.

Introdução

Este artigo surge a partir de um encontro, ou melhor, de um lugar. Um lugar com múltiplas e infinitas entradas e saídas, compreendido como centro de significados construídos pela experiência (Tuan, 2018), que nos proporcionou encontros com a criatividade e a interdisciplinaridade, através da Arte e da Matemática. Nosso objetivo é apresentar potencialidades das interconexões entre História, Matemática e Arte, como saberes que podem se integrar às linguagens inovadoras oferecidas pelas tecnologias de informação e comunicação no sentido de possibilitar a mobilização desses saberes de forma híbrida, para reorientar as abordagens didáticas no ensino de matemática sob um enfoque interdisciplinar.

Para melhor situar o leitor, consideramos importante situar que este artigo se originou de uma pesquisa que teve como finalidade principal obter informações para a elaboração de uma dissertação de mestrado intitulada *Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática* (Neri Júnior, 2019), na qual investigamos como algumas ações interdisciplinares podem promover uma aprendizagem criativa em matemática. Esta investigação transcorreu apoiada sob o pilar da cartografia como método de pesquisa, ancorado na proposta de cartografia dos filósofos Gilles Deleuze e Félix Guattari (1995); o conceito de aprendizagem criativa inspirado nas ideias de Paulo Freire (2011) e do psicanalista Donald Winnicott (2011) e o conceito de interdisciplinaridade proposto por Ivani Fazenda. Enquanto pesquisadores-cartógrafos, buscamos experiências interdisciplinares em *lugares* – a *Garagem*, o *Atelier* e a *Casa Gardner* – não necessariamente reais, tendo em vista a aprendizagem criativa. Em específico, neste artigo, queremos apresentar as experiências vivenciadas no *Atelier*, um espaço estimulante e inspirador para promover uma aprendizagem criativa em Matemática em constante diálogo com a Arte.

O *Atelier,* enquanto este lugar de múltiplas entradas e saídas, nos permite transitar pelos caminhos da aprendizagem, da criatividade e/ou da interdisciplinaridade, contudo, queremos neste artigo seguir por um caminho diferente, que agora se revelara para nós: a história da matemática. Nosso objetivo é apresentar algumas aproximações entre a história da matemática e a arte, que identificamos em neste caminhar.

Para o desenvolvimento desta investigação, buscamos um método que valorizasse as múltiplas direções de uma pesquisa, que fosse aberto à experimentações e que não representasse apenas um objeto, mas também que nos permitisse compreender todo o processo, não como expectadores na plateia, mas como atores em cena. Encontramos no método da cartografia esta possibilidade, que advém do conceito de rizoma, apresentado pelos filósofos Deleuze e Guattari na Introdução de Mil Platôs (1995). Para fundamentar sua teoria, os filósofos apropriam-se do conceito biológico de rizoma[1] e o transpõem para filosofia propondo, dessa forma, um processo de investigação que possui múltiplas direções. Um rizoma, para Deleuze e Guattari (1995), não é feito de unidades, mas de dimensões, ou antes de direções movediças. Ele não tem começo nem fim, mas sempre um meio pelo qual ele cresce e transborda. Ele constitui multiplicidades lineares a *n* dimensões, sem sujeito nem objeto, exibíveis num plano de consistência e do qual o Uno é sempre subtraído *(n-1).*

Para uma melhor compreensão da ideia de rizoma, Deleuze e Guattari (1995) elencaram os seguintes princípios:

[1] O rizoma consiste numa estrutura presente em algumas plantas cujos brotos podem ramificar-se em qualquer ponto e transformar-se em um bulbo ou um tubérculo.

> a) Princípio de conexão e de heterogeneidade: qualquer ponto do rizoma pode ser conectado a qualquer outro e deve sê-lo, diferenciando-o de uma árvore, por exemplo, em que há um ponto fixo. No rizoma, não há começo ou fim e, os pontos do rizoma conectam-se sem uma ordem anteriormente estabelecida.
> b) Princípio da multiplicidade: num rizoma, inexiste a unidade, no sentido que tanto o objeto, quanto o sujeito não são únicos.
> c) Princípio de ruptura a-significante: um rizoma pode ser segmentado ou quebrado em qualquer lugar. Pode ser também reconstituído em suas linhas, em qualquer lugar. Mesmo quando um rizoma é segmentado, as linhas onde ocorreram tal segmentação também fazem parte do rizoma e nestas linhas podem encontrar elementos que reconstituem o rizoma.
> d) Princípio da cartografia e da decalcomania: o rizoma não segue um modelo de estrutura ou gerativo. Ele é diferente de um decalque, que segue um padrão de reprodução. O rizoma é como um mapa: é aberto, é conectável em todas as suas dimensões, desmontável, reversível, suscetível de receber modificações constantemente.

Desta forma, é neste quarto princípio que encontramos a possibilidade de entender o funcionamento do modelo rizomático como método de análise de um processo, de modo a orientar o pesquisador-cartógrafo no campo de pesquisa.

No Brasil, o método da cartografia é utilizado em pesquisas no campo da arte, da saúde, das ciências humanas e sociais, sempre na direção de acompanhar processos e produzir subjetividade. Os estudos mais sistemáticos da cartografia, no campo da pesquisa qualitativa, ocorrem a partir de 2005 quando um grupo de professores se debruçou para elaborar um conjunto de pistas para nortear este método e, em 2009, publicaram a obra *Pistas do método da cartografia: Pesquisa-intervenção e produção de subjetividade*, sistematizada por Eduardo Passos, Virgínia Kastrup, Liliana da Escóssia e Silvia Tedesco e outros pesquisadores. Assim, esta publicação será referência na construção desta pesquisa.

Como método de pesquisa, a cartografia parte do pressuposto que não há regras e objetivos previamente estabelecidos ou que o trabalho do pesquisador se faz a partir de um algoritmo. Passos e Barros (2015, p. 17) apontam “a diretriz cartográfica se faz por pistas que orientam o percurso da pesquisa sempre considerando os efeitos do processo do pesquisar sobre o objeto da pesquisa, o pesquisador e seus resultados".

Com esta perspectiva, o caminhar desta pesquisa seguiu em busca de um processo de aprendizagem criativa em matemática, que valorizasse a autonomia do aprendiz e suas potencialidades para imprimir uma marca própria neste processo. Para compreender o sentido de aprendizagem criativa, recorremos às concepções de criatividade e aprendizagem, segundo Donald Winnicott (2011) e Paulo Freire (2011), respectivamente.

Para o psicanalista inglês Donald Winnicott, a criatividade relaciona-se com a própria existência do indivíduo, em uma experiência saudável de estar/sentir-se vivo e não está associada ao ter ou não um talento especial. Winnicott (1975 *apud* SAKAMOTO, 2012), postula que a criatividade é influenciada pelas experiências vivenciadas pelo ser humano no início da vida quando ainda é um bebê. Ele compreende que um "ambiente suficientemente bom" promove o desenvolvimento do potencial criativo no indivíduo e que o "brincar" é um dos fatores principais relacionado com a criatividade, pois o brincar é uma comunicação e uma experiência criativa, que o indivíduo (criança ou adulto), pode utilizar sua personalidade integral. Ao escrever sobre o pensamento winnicottiano, Pires (2010, p. 59) afirma que nas fases posteriores do amadurecimento, este brincar assume outras formas. Por exemplo, a arte é uma forma de brincar do adulto, pois ao realizar uma produção artística, o adulto pode encontrar nisto o prazer do viver criativamente.

Winnicott (2011, p. 22) entende que, independente de qual definição de criatividade a que se chegue, "ela deve incluir a ideia de que a vida vale a pena – ou não – ser vivida, a ponto de a criatividade ser – ou não – uma parte da experiência de vida de cada um". Assim, para que um indivíduo seja criativo, basta que ele exista e tenha consigo o sentimento de existência, na perspectiva de ser capaz de criar o mundo e de interceptar a realidade com o seu toque pessoal, através da imaginação. Viver criativamente é, portanto, recriar com um toque próprio aquilo que já existe.

Neste contexto do viver criativamente, entendemos que o ambiente escolar pode ser, em específico, um local para que o indivíduo seja criativo e desfrute desta experiência de sentir-se vivo e de modificar a realidade com seu toque pessoal. Paulo Freire (2011) considera a educação como processo permanente, que tem sua origem quando nos percebemos como seres inacabados e em constante formação. Este estado de "inacabamento" do indivíduo é próprio da experiência de ser/estar vivo, que desencadeia um processo contínuo de aprendizagem.

Ao afirmar que aprender não se dá a partir da transferência de conhecimento entre quem ensina e quem aprende, mas sim através de um processo de construção do conhecimento, que começa no próprio aprendiz, Paulo Freire nos leva a refletir que o processo de criação é mais rico e eficaz que o processo de repetição. Para Freire (2011, p.48) aprender "é construir, reconstruir, constatar para mudar, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito", ou seja, a liberdade e autonomia são características fundamentais no processo de aprendizagem.

Quando compreendemos que a criatividade está associada ao a capacidade de a "tudo olhar com se fosse a primeira vez", é possível estabelecer aproximações entre a teoria de Winnicott (2011) e as concepções pedagógicas de Paulo Freire (2011), observando que esse olhar de descoberta é essencial para despertar o encantamento do aprendiz, que o ambiente escolar é fundamental para estimular a criatividade e potencializar um aprendizado original e autônomo que possibilite ao aprendiz criar ou recriar o mundo ao seu redor, transformando-o e transformando a si mesmo. Portanto, entendemos aqui que a aprendizagem criativa, inspirados em Donald Winnicott (2011) e Paulo Freire (2011), acontece quando o aprendiz desfruta da experiência de estar vivo, desfruta do prazer da descoberta e, consciente da sua incompletude, vai em busca de um aprendizado que o possibilite criar ou recriar conhecimento de forma autônoma, imprimindo a sua marca pessoal no processo.

Diante disto, ao longo da caminhada em busca de um processo de aprendizagem criativa em matemática, nos deparamos com várias possibilidades de trajetórias, tais como o movimento "faça você mesmo"[2], o lúdico pelo simples prazer de resolver problemas e o interdisciplinar entre a matemática e a arte, sendo este último o que escolhemos para trilhar. Neste caso, ao adentrar por este caminho nos encontramos com o artista modernista português Almada Negreiros, suas obras e sua íntima relação com a matemática. A seguir, faremos um relato sobre este encontro.

[2] Também conhecido como *Movimento Maker.*

Um encontro de pesquisas sobre Almada Negreiros

Nosso primeiro *encontro* com a arte de Almada deu-se a partir da obra *Livro de Problemas de Almada Negreiros*, em que Pedro J. Freitas e Simão Palmeirim Costa (2015), em que os autores analisam alguns elementos matemáticos presentes em uma série de desenhos do artista que, "apesar de o autor ter como intenção primeira produzir obras de arte, muito do seu trabalho pode ser apreciado matematicamente" (FREITAS; COSTA, 2014, p. 1). Neste livro, Freitas e Costa (2015) destacam que no espólio do artista há uma coleção de desenhos com conteúdo exclusivamente geométrico, com construções envolvendo o número de ouro, a divisão da circunferência em nove partes, a $\sqrt{5}$, entre outros.

Em um estudo sobre os trabalhos de Almada Negreiros, Mendes (2017) discorre sobre o trabalho de Freitas e Costa (2015), enfatizando que esses autores se dedicaram à análise sistemática dos esboços geométricos de Almada Negreiros, tendo como aliadas a Matemática e a Arte, um estudo moroso e minucioso, para depois poderem reconstituir e identificar os vários elementos presentes, as suas construções geométricas com apoio no Geogebra.

Igualmente, Mendes (2017) destaca, ainda, que o trabalho de Freitas e Costa (2015) permite aos leitores perceberem que existem, na obra de Almada Negreiros, dois tipos de construções: as exatas, as quais foram demonstradas matematicamente pelos dois autores do estudo e que se poderiam denominar "Teoremas de Almada", e as aproximadas, para as quais calcularam o erro, muito vezes na ordem de um milésimo, portanto surpreendente boas – a espessura do lápis seria maior do que o erro cometido no traço.

É importante ressaltar que o trabalho de Mendes (2017) se localiza na confluência epistemológica entre um triângulo epistêmico formado pela relação integrativa entre Arte, História, Matemática em busca de conexões com as abordagens didáticas para o ensino de Matemática, o que se aproxima de nossas intenções neste artigo, com o acréscimo da inclusão das tecnologias de informação e comunicação, conforme já mencionamos anteriormente.

Nesse sentido, Mendes (2017) destaca que o tema principal das obras de Almada Negreiros foi o número, a geometria (Sagrada) e os seus significados. Neste sentido o artista revela-se como um neopitagórico, e talvez esse tenha sido o princípio filosófico que lhe forneceu a fonte mais profunda da sua inspiração, da sua criatividade e da sua "loucura" central refletida na sua arte geonumerática ou aritmogeométrica[3]. Nesta perspectiva de trabalho, Mendes (2017) destaca como exemplos os trabalhos de Lucília Barata (2005) em sua obra EspaçoNumerática ou nos trabalhos de Paulus Gerdes (2010) em suas representações das artes etnomatemática como arte-design e matrizes cíclicas.

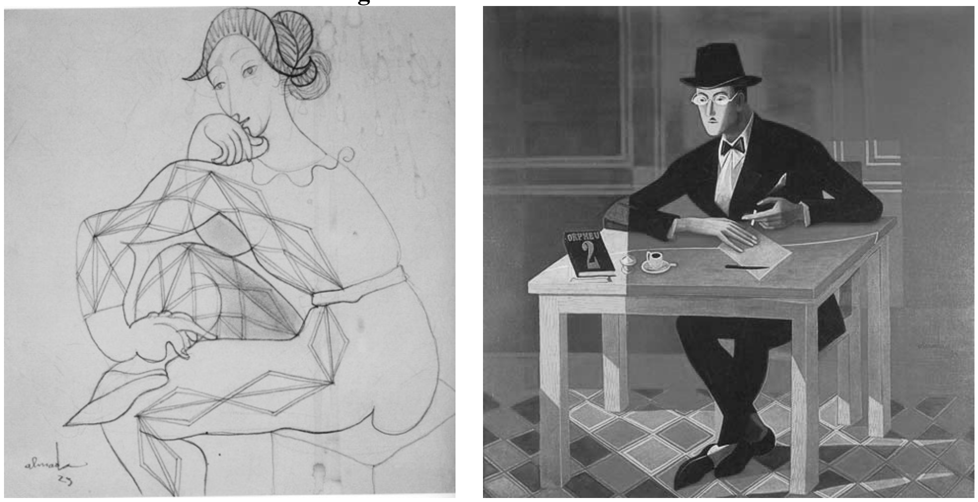
Almada Negreiros: a pessoa, o artista e sua arte matemática

José Sobral de Almada Negreiros nasceu em São Tomé (África), em 1893, viveu em Portugal e revelou-se como um artista e um escritor polifacetado. Artista plástico, poeta, ensaísta, romancista e dramaturgo, associou-se em 1913 ao grupo modernista tendo vindo a formar, com Fernando Pessoa e Sá-Carneiro, o grupo da revista *Orpheu*. Faleceu em 1970, em Lisboa. O que nos chama atenção em Almada Negreiros é a sua própria história de vida. Filho do tenente de cavalaria António Lobo de Almada Negreiros e de Elvira Sobral de Almada Negreiros, destacou-se no universo artístico do século XX através da sua dedicação à literatura e participou de forma ativa no grupo ligado à Revista Orpheu, responsável pela introdução do Modernismo nas Artes e Letras em Portugal e enquanto artista, destacou-se por sua atuação multidisciplinar, tendo suas perpassando vários campos da arte, tais como a poesia, dramaturgia, pintura, desenho, entre outros. Além disso, foi um artista essencialmente autodidata, pois não frequentou qualquer escola de ensino artístico.

Em 1911, com apenas 14 anos de idade, Almada Negreiros apresenta o desenho intitulado *A Sátira*, que utiliza traçados simples na composição da obra, porém em 1925, os trabalhos de Almada começam a apresentar elementos matemáticos de modo muito particular e original. Almada introduz na obra um tipo de pavimentação geométrica, como ilustra a obra *Desenho à Lápis de Arlequim* (figura 1a). Este tipo de composição aparecerá em várias obras que retratam diferentes contextos, como ilustra a famosa obra *Retrato de Fernando Pessoa* (figura 1b).

[3] Para Mendes (2017) a arte geonumerática ou aritmogeométrica refere-se às artes visuais encarnadas pelas relações concebidas noa integração da criatividade extraída das representações geométricas em números e das representações numéricas em formas para produzir expressão estética em Matemática.

Figura 1. Retrato de Fernando Pessoa

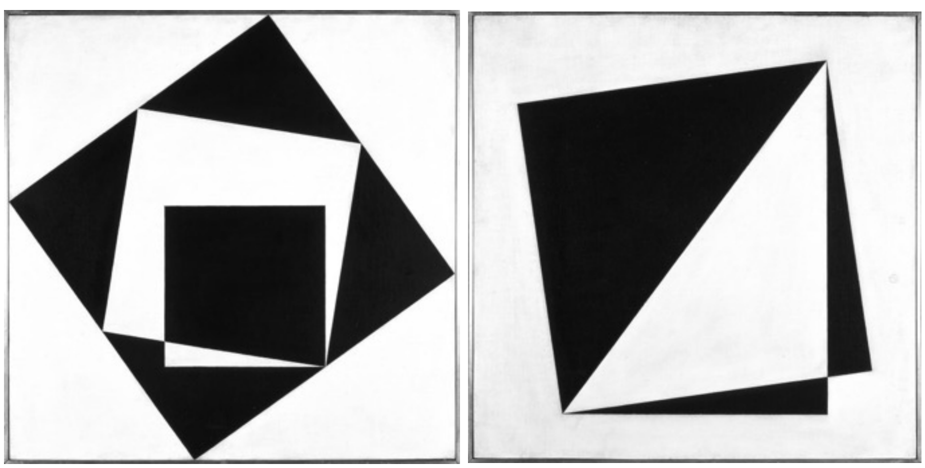


(a) (b)

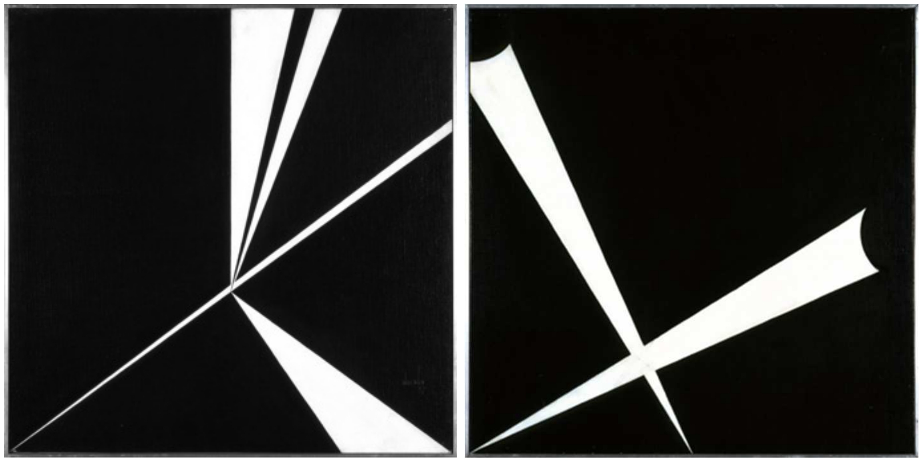
Fonte: https://bit.ly/2TO9IFq

A partir de 1957, alguns trabalhos de Almada apresentam uma tendência mais abstrata. Ele produziu quatro pinturas abstratas, sem moldura, pintadas em preto e branco, intituladas *A porta da Harmonia* (figura 2a), *O ponto da Bauhütte* (figura 2b), *Quadrante I* (figura 2c) e Relação 9/10 (figura 3d).

Figura 2.



(a) (b)



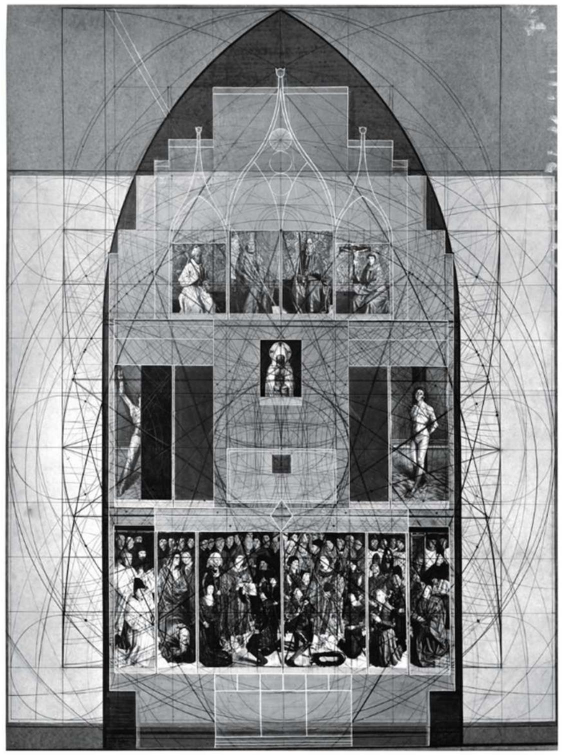
(c) (d)

Fonte: Fundação Calouste Gulbenkian.

É possível perceber a forte presença geométrica nestas obras de Almada Negreiros, que surge por influência dos painéis de Nuno Gonçalves[4], expostos nos Museu Nacional de Arte Antiga, em Portugal. Freitas (2016, p.136), afirma que Almada teria visitado esta exposição e ficado fascinado não só com os painéis, mas também com o *Ecce Homo*, uma obra também renascentista, que naquele tempo era atribuído a Nuno Gonçalves. Com este fascínio e sua dedicação em estudar o *Ecce Homo* e as várias relações matemáticas, de modo a compreender relações de proporção na pintura e relacioná-la a outros elementos geométricos, tais como o quadrado e a circunferência, Almada produz uma série obras várias referências matemáticas, como por exemplo, o Estudo de Almada para um altar do mosteiro da Batalha (figura 3) e a tapeçaria intitulada *O Número* (figura 4), produzida em 1958 e exposta no Tribunal de Contas de Lisboa.

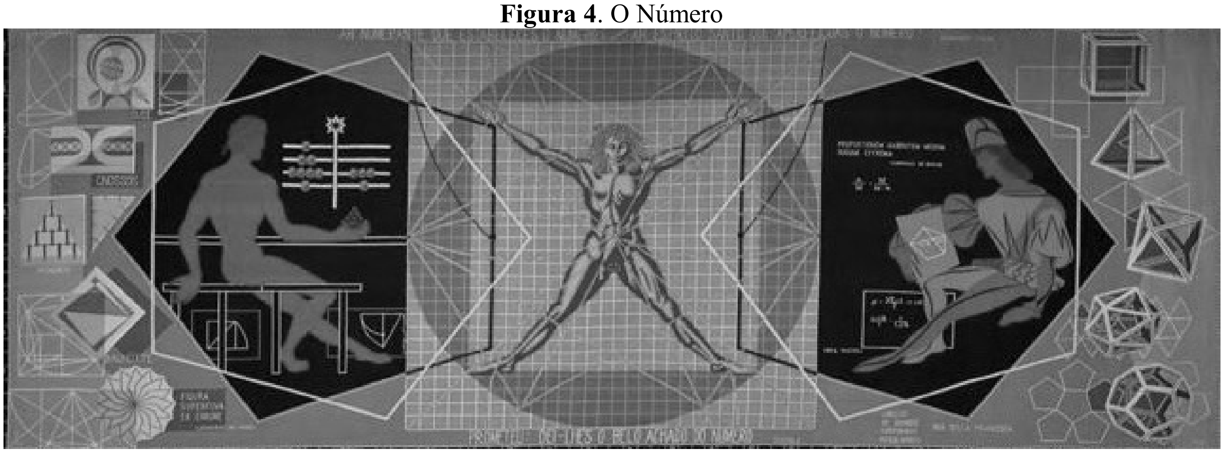
[4] Nuno Gonçalves foi um pintor português do século XV.

Figura 3. Estudo de Almada para um altar do mosteiro da Batalha



Fonte: https://bit.ly/2FRm3VY

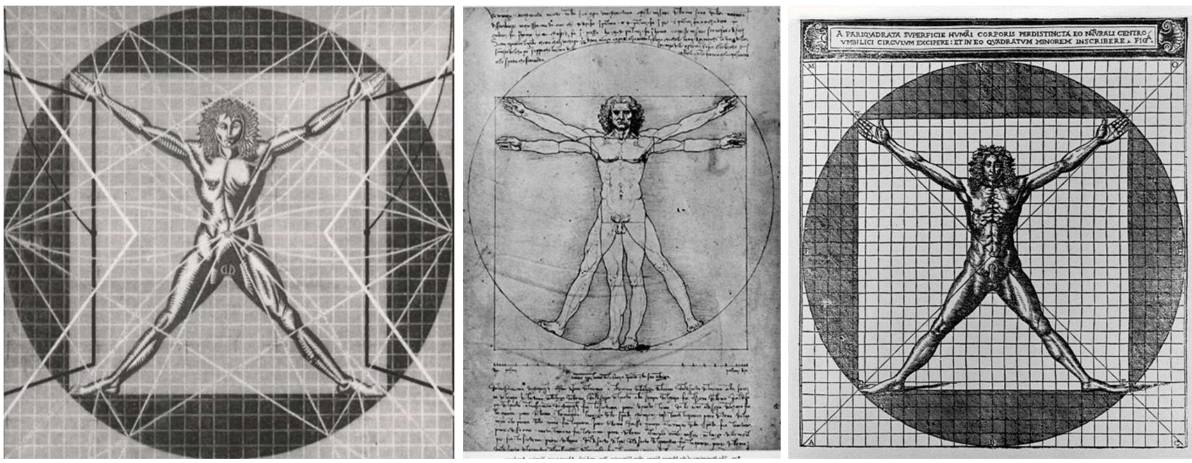
Figura 4. O Número



Fonte: https://www.pinterest.pt/bhimab/art-portuguese-artists/

A riqueza de detalhes desta, em específico, nos instigou a buscar interseções e conexões entre a matemática e arte. Na área central da tapeçaria (figura 5a), há um homem de braços e pernas abertos em X, enquadrado e inscrito num círculo sobre uma tela quadriculada, em referência não ao *Homem Vitruviano* (figura 5b), de Leonardo da Vinci, mas em referência ao *Homo ad circulum* (figura 5c), de Cesare Cesariano. De acordo com Aniello (2007, p. 338), "o desenho central da tapeçaria de Almada é uma exata cópia do desenho de Cesariano", porém com uma marca pessoal do artista ao desenho de Cesariano: dois retângulos oblíquos e cujo centro encontra-se no umbigo do homem. Ainda na área central da tapeçaria, há também duas inscrições, uma no topo e outra na base.

Figura 5. Comparação entre a obra de Almada, Da Vinci e Cesare.



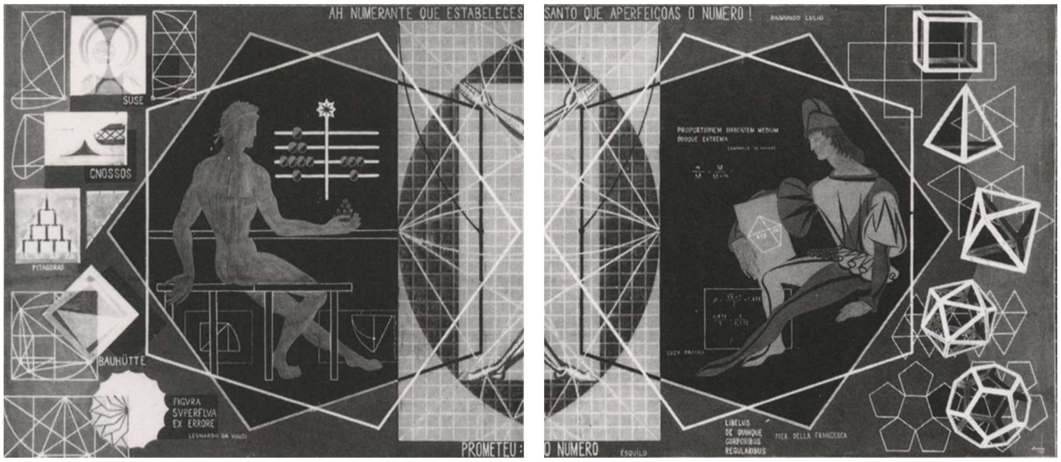
(a) (b) (c)

Fonte: https://bit.ly/2uEmVGQ

No topo, tem-se a frase *Ah! Numerante que estabeleces o Número!/ Ah! Espírito Santo que aperfeiçoas o Número!*, do escritor, filósofo, poeta renascentista e missionário catalão Raimundo Lúlio. Na base, tem-se a frase "Prometeu: dei-lhes o belo achado do número", um pensamento do dramaturgo grego Ésquilo.

Ao lado do homem central na tapeçaria, existem duas figuras humanas: à esquerda um homem grego (figura 6a) e à direita um homem renascentista (figura 6b), ambos emoldurados por dois pentágonos. Ao lado do homem grego, há cinco elementos: o Vaso de Susa, um friso do Palácio de Cnossos, a Tetraktis Pitagórica, o Ponto de Bauhütte e a Figura Supérflua Ex-Errone. O Vaso de Susa é uma peça produzida entre os anos 4.000 e 3.500 antes de Cristo na Babilônia, que encontra-se no Museu do Louvre, em Paris. Os frisos do Palácio de Cnossos, representa época grega da idade do Bronze. A tetraktis ilustra representação dos números através de uma figura geométrica muito estudada pela escola pitagórica. O ponto de Bauhütte ilustra um problema, proposto em versos medievais, no livro *Le Nombre d'Or*, de Matila Ghyka, por construtores de catedrais que formavam uma associação chamada Bauhütte e, finalmente, a Supérflua Ex-Errone reproduz um desenho de Leonardo da Vinci, que aparece no livro *De divina proportione* de Luca Pacioli.

Figura 6. Figuras humanas na tapeçaria.



(a) (b)

Fonte: adaptação dos autores.

Ainda, ao redor do homem grego, Aniello (2007, p. 340), aponta a possível representação de Homero, Euclides e Pitágoras, a partir dos teoremas desenhados nos pés do homem grego e do ábaco na direção de uma das suas mãos. Freitas (2016, p. 139) acrescenta a esta análise, que estas referências seguem uma certa ordem cronológica.

Já o homem à direita, encontra-se a representação do homem renascentista, que possui à sua volta os cinco sólidos de Platão com suas respectivas planificações, que se contrapõem aos cinco elementos ao redor do homem grego. Almada também refere-se aos matemáticos Campanus de Novara, que traduziu do árabe e publicou uma versão dos Elementos de Euclides, Luca Pacioli, conhecido por sua obra *De Divina Proportioni* e Piero della Francesca, que também era pintor, ficou conhecido pelos seus trabalhos com a técnica da perspectiva. Ao lado deste último, aparece a frase *"De quinque corporibus regularibus"*, que significa "os cinco corpos regulares". Por último, o homem renascentista segura uma placa que representa o número de ouro através da interseção de duas diagonais de um pentágono regular.

Freitas (2016, p. 139) aponta que as escolhas dos elementos e desenhos na obra, "são reflexo daquilo que Almada chamava o cânone", que possui algumas constantes e que permeiam não somente a Idade Média, mas todas as épocas. Com relação ao conteúdo deste cânone, a partir da análise das entrevistas de Almada, Freitas (2016, p. 141) explica que

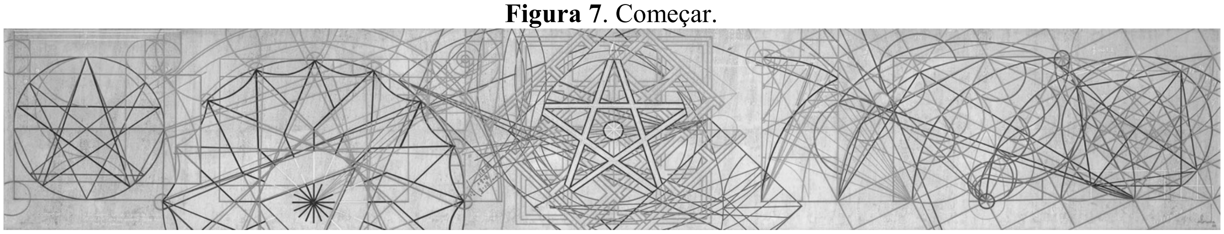
> o cânone que Almada vai revelar nas suas obras conterá divisões da circunferência em partes iguais, quadrados e circunferências em

> relação (em geral, uma circunferência inscrita no quadrado), a razão de ouro (média e extrema razão) e a famosa relação nove/dez, que se refere ora às divisões da circunferência em nove e dez partes, ora à razão 9/10.

Assim, Almada expressa na obra *O Número* a evolução temporal de alguns elementos deste cânone, através das construções geométricas que acompanham os desenhos ao redor do homem grego e do renascentista.

Há também no rol de obras de Almada, a criação de um grande painel, datado do final da década de 60, que decora a parede da Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa. Esta obra, denominada de *Começar* (figura 7), reúne uma série de estudos geométricos e alguns elementos do cânone.

Figura 7. Começar.



Fonte: Fundação Calouste Gulbenkian.

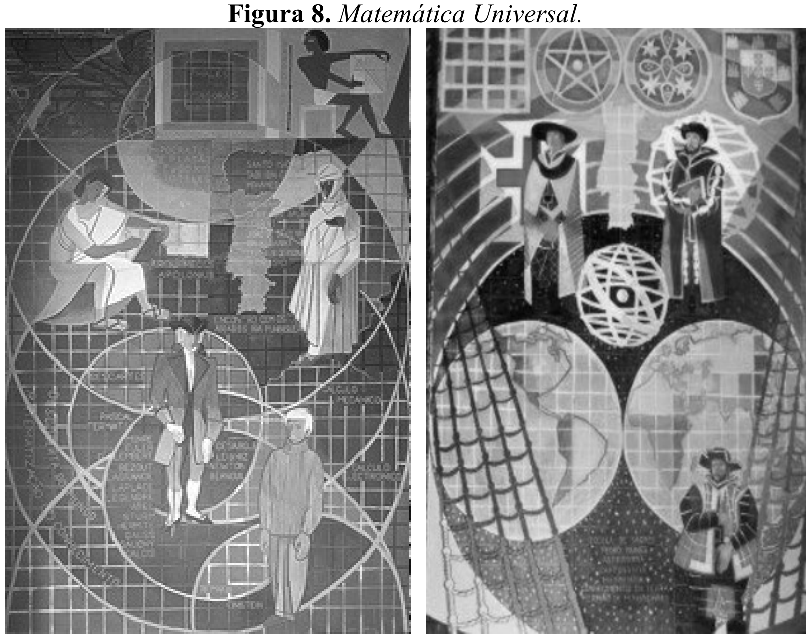
Começar é uma obra emblemática de Almada e sua grandiosidade se traduz na complexidade geométrica desta obra. Se dividirmos este painel em cinco partes, da esquerda para direita, encontraremos os seguintes elementos:

1) Estrelas pentagonais: observa-se três pentagramas de cores diferentes, inscritos numa circunferência;
2) Figura superflua Ex-errore: A grande estrela de 16 pontas, chamada *Figura Superflua Ex-Errore*, é inspirada numa ilustração de Leonardo da Vinci para o livro *De divina Proportione* de Luca Pacioli;
3) Grande estrela central: uma estrela de cinco pontas, numa moeda dos tempos de D. Afonso Henriques;
4) Divisões da circunferência: geometrização de uma figura simbólica da cultura grega, um machado duplo, que é a base para propostas da divisão da circunferência em partes iguais;

5) Ponto de Bauhütte: uma construção da autoria de Almada que pretende determinar geometricamente o ponto comum a uma circunferência, um quadrado e um triângulo.

Embora *Começar* seja umas das obras mais conhecidas de Almada e com forte presença geométrica, o artista também produziu muitas outras obras com teor matemático, tais como dois afrescos que estão na Universidade de Coimbra, intitulados *Matemática Universal* (figura 8), em que o artista revela seu conhecimento sobre a história da Matemática, representando ali quatro períodos distintos: Antiguidade, a Idade Média, a Idade Moderna e a Época Contemporânea.

Figura 8. *Matemática Universal.*



(a) (b)

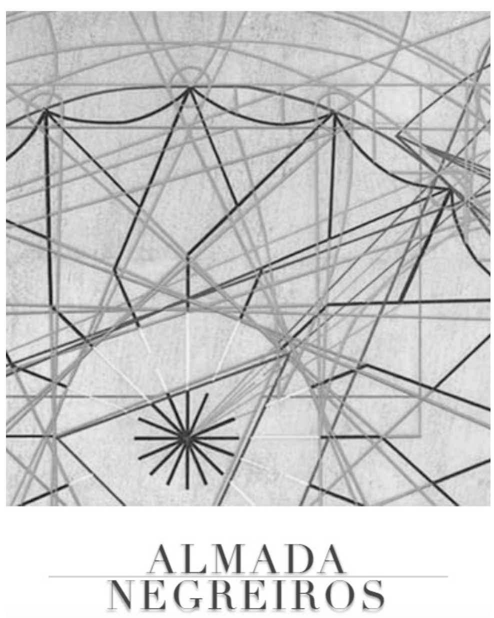
Fonte: Vaz (2008).

Sobre estes afrescos, Vaz (2013, p. 76) destaca:

> Almada optou por prescindir de algarismos ou fórmulas, recorreu essencialmente ao desenho figurativo, ao signo linguístico (a avaliar pela quantidade de texto presente no painel da esquerda) e também à figuração geométrica. Ainda se podem observar elementos comuns aos dois frescos, sendo a circunferência o elemento mais utilizado, como centro definidor de ambas as composições, mais evidente na da esquerda. Sobressai também, em ambos, o fundo quadriculado. (VAZ, 2013, p. 76)

Após este estudo mais aprofundado sobre Almada Negreiros, percebemos o caráter interdisciplinar de sua arte, mas compreender isto não é suficiente. Como isto se traduziu em uma aprendizagem criativa? Nesta pesquisa, o produto de estudo aprofundado, que aqui chamaremos de *curar* se traduziu em uma produção autoral, denominada de *fazer*. Sobre o *Curar e Fazer,* recorremos a Vaz e Rocha (2018), que definem o *curar* como uma curadoria de conteúdo, através de uma imersão interdisciplinar, em que haja descobertas, seleção, categorização, e organização de conteúdos capazes de contribuir para o entendimento dos principais conteúdos abordados no contexto artístico e matemático. Por sua vez, o *fazer* consiste em interpretar as curadorias realizadas, conectando a Matemática e a Arte. Estas interpretações podem ser materializadas em produtos criativos, de diferentes formatos, tais como poemas, jogos, atividades lúdicas, produções digitais, animações, peças 3D, Guias, e-books ou releituras interdisciplinares de imagens, entre outros. Neste caso, o *fazer* atrelado à curadoria sobre Almada Negreiros se traduziu em um livro digital[5], para apresentar o artista e sua arte, de modo que fosse possível identificar como a Matemática e a Arte se entrelaçam (figura 9). Este livro digital consta dos seguintes capítulos: Uma breve biografia de Almada Negreiros, As principais obras do artista e A matemática na arte de Almada.

Figura 9. Livro digital sobre Almada Negreiros.



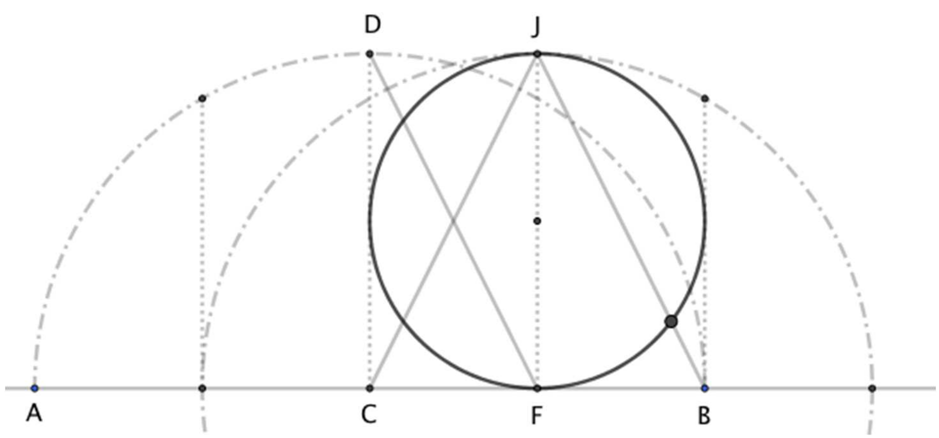
Fonte: Os autores.

[5] Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/12172/2/Produto_AlmadaNegreiros.pdf

Durante a elaboração deste livro digital, um novo produto atrelado ao *fazer* criativo a partir das obras de Almada Negreiros foi elaborado, uma animação elaborada no Geogebra sobre a obra *O ponto da Bauhütte* (figura 2b)[6], uma animação com base em uma construção do atribuída a Lima de Freitas, em Vaz (2013), o qual descreveremos a seguir.

Sobre uma reta, marcamos os pontos A e B e construímos uma semicircunferência que passe pelos pontos. Sobre a reta, marcamos ponto C, ponto médio de AB. Com extremos em C e na semicircunferência, traçamos a perpendicular ao segmento AB. Determinamos os pontos médios dos raios da circunferência com extremos A e B, respectivamente. Em seguida, traçamos uma semicircunferência de centro no ponto médio de CB ao qual pertence o ponto médio de AC. Traçamos três segmentos de reta perpendiculares à reta AB aos quais pertencem os pontos médios de AC, de CB e B, respectivamente, em que o extremo oposto intersecta a semicircunferência e encontramos o ponto médio do segmento de reta FJ. Traçamos a circunferência de centro no ponto médio de JF e que passa pelos pontos J e F. Desenhamos o segmento de reta DF, BJ e CJ.

Figura 10. Construção geométrica do Ponto de Bauhütte.



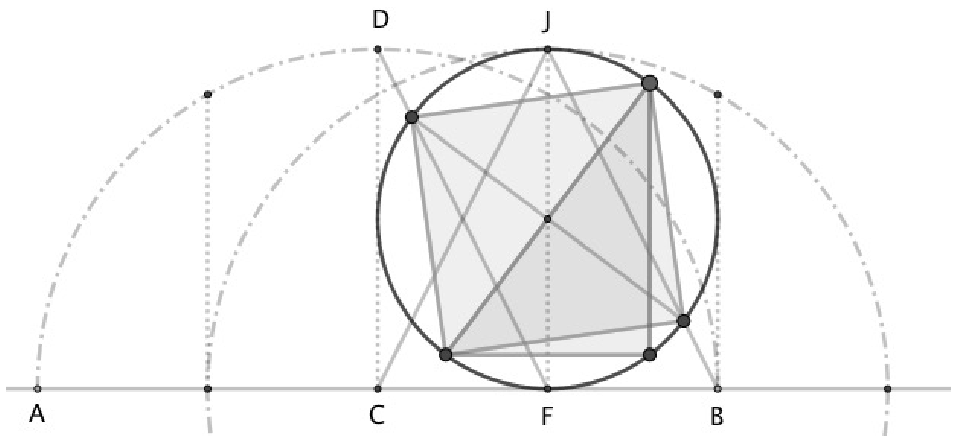
Fonte: Os autores.

Encontrar os pontos N de interseção do segmento BJ com a circunferência e P de interseção do segmento DF com a circunferência. Desenhamos o segmento PN que passa no centro da circunferência e o segmento QR, que é perpendicular a PN e passa pelo centro da circunferência, L. Desenhamos o quadrado de vértices PQRN, inscrito na circunferência.

[6] Disponível em https://www.geogebra.org/m/bexyDnjy.

Traçamos o segmento RT, que é perpendicular a AB e cujos extremos pertencem à circunferência. Finalmente, desenhamos o segmento TQ, obtendo assim o triângulo retângulo QTR. Obtemos assim o traçado de Almada da construção do Ponto da Bauhütte.

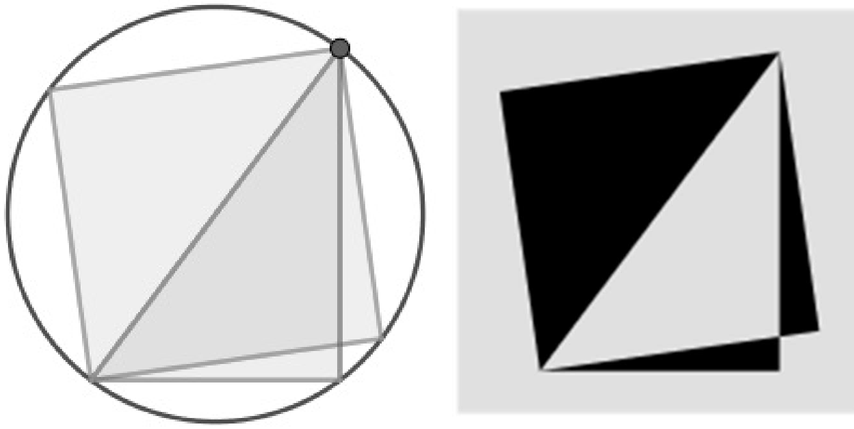
Figura 11. Construção do Ponto de Bauhütte.



Fonte: Os autores.

A partir dessa construção, identificamos como Almada Negreiro usou a construção do ponto de Bauhütte para compor a sua obra. O artista manteve o quadrado vermelho e o triângulo azul da figura 12, estes são os elementos principais da construção do ponto de Bauhütte: um ponto que é o vértice comum de um quadrado e um triângulo inscritos em uma circunferência. Além disso, o artista pintou estes elementos de modo muito especial: a interseção do triângulo com o quadrado pintou de branco; a parte do triângulo que não intercepta o quadrado, ele pintou de preto; a parte triangular formada pela diagonal, onde não encontra-se o triângulo azul, pintou de preto e o que restou do quadrado também pintou de preto.

Figura 12. O Ponto de Bauhütte - Reconstrução no software Geogebra.



(a) (b)

Fonte: Os autores.

Sobre este processo de *Curar & Fazer*, salientamos todo seu caráter interdisciplinar, envolvendo a matemática e arte e que nos permitiu refletir sobre ele, já que em uma pesquisa cartográfica, é fundamental que o pesquisador cartografe os processos em curso, com a máxima atenção sobre eles, em vistas de estabelecer um diálogo entre eles, traduzindo não apenas o produto final, mas também o processo como um todo. Com isto, nossa reflexão sobre todo esse processo nos levou a uma nova possibilidade, ou melhor, enxergamos um novo caminho, que trilharemos a seguir.

A guisa de reflexões finais acerca da conexão entre História, Matemática e Arte

Ao iniciar este artigo, afirmamos que partiríamos de um lugar construído pela experiência, com múltiplas entradas e saídas e que nos proporcionou encontros com a aprendizagem criativa através da Matemática e da Arte. Entretanto, novos caminhos surgiram, instigando-nos a trilhar e vivenciar um novo encontro, neste caso, um encontro com a História da Matemática. A respeito dessa afirmação, argumentamos ao longo do artigo, sobre a potencialidade da Arte de Almada Negreiros como conexão entre *História, Matemática e Arte*.

Para tanto, o método da cartografia, enquanto opção metodológica para esta pesquisa, nos proporcionou estabelecer conexões entre processos em curso e/ou entre novos processos que emergem diante do pesquisador-cartógrafo em seu caminhar. Desta forma, a atenção do cartógrafo diante de tudo que lhe cerca é o cerne da pesquisa cartográfica, como afirma Souza e Francisco (2016, p. 816), pontuando que o coração da pesquisa está na qualidade do funcionamento da atenção do pesquisador, no sentido que o pesquisador não está em campo para coletar dados que já estão prontos, mas estar atento aos dados que são produzidos ao longo da pesquisa. É diante desta possibilidade, de voltar-se aos novos processos que surgem, nossa atenção se voltará para um encontro com a História da Matemática, que surgiu como corolário de nossa busca pela aprendizagem criativa em matemática, através de um processo interdisciplinar com a arte.

Ao acompanharmos o processo de aprendizagem criativa em matemática a partir das obras de Almada Negreiros, buscávamos responder a seguinte questão: *como a integração de saberes e/ou abordagens da Matemática e da Arte pode promover uma aprendizagem criativa?* A resposta para esta questão perpassou, dentre outras coisas, pela interdisciplinaridade, compreendida aqui como um processo para vencer a fragmentação dos processos de produção e socialização do conhecimento, de forma a recuperar o caráter de unidade, síntese, totalidade e integração dos saberes (Thiesen, 2007). Com este entendimento, a consolidação da interdisciplinaridade surgiu como uma atitude, ou melhor, como uma postura interdisciplinar, em que prevalece o diálogo entre a matemática e a arte, na compreensão que, isoladamente, ambas as ciências são limitadas.

É a partir desta compreensão de incompletude diante do isolamento é que buscamos neste processo todo, aproximar a matemática e a arte e transitar entre suas fronteiras ou zonas mistas[7]. Esta aproximação interdisciplinar ocorreu tendo a História da Matemática como plano de fundo, pois sem ela, como seria possível entender a arte de Almada Negreiros sem adentrar nas profundezas de suas inspirações? Como estabelecer conexões entre a geometria pitagórica e arte geométrica explicita em *Começar*? Como trazer à tona a evolução da matemática nitidamente expressa por Almada em *O Número*?

A respeito desta aproximação entre a matemática e a arte, pontuamos que ao longo da história, cada povo elaborou e vivenciou sua arte sob diversas influências, sejam elas ordem social, cultura, econômica, entre outras. Flores e Zago (2009), aprofundam esta discussão ao afirmarem que uma obra arte é a representação de uma forma de pensar em uma dada época:

> Entender como cada povo pensou e pensa a elaboração de sua arte, ou como cada artista imerso em sua cultura cria arte, significa

[7] Entendemos aqui as zonas mistas como uma região de trânsito comum entre as duas áreas, no qual não é possível identificar explicitamente uma fronteira entre as duas áreas.

> compreender que a obra de arte não é a representação de algo em si, imanente e transcendental, mas de um campo de ideias e de conhecimentos possíveis àquela época, ou, pode-se dizer, de formas de pensamento. Além disso, significa ver que fomos criados, educados numa estética de beleza, rigor, harmonia onde a matemática funciona como o aparato técnico da representação artística. (FLORES; ZAGO, 2009, p. 339).

De fato, quando observamos o processo que percorremos com Almada Negreiros, percebemos que o artista representou em suas obras, as múltiplas forças que lhe influenciara, como fica explícito, por exemplo, na obra *Retrato de Fernando Pessoa* (figura 1b), que de um lado o artista apresenta o próprio movimento modernista ao retratar o poeta em sua mesa e sobre ela uma revista *Orpheu*, e de outro, a própria representação do desenho em perspectiva e a pavimentação geométrica do plano, o que evidencia o seu forte laço com a matemática. Ora, é natural estabelecer tais conexões entre a matemática e arte, tendo em vista que aquela está diretamente vinculada à atividade humana, como afirma D'Ambrosio (1999):

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, 1999, p. 97).

Ainda sobre esta investigação interdisciplinar, foi possível perceber que Almada trouxe para sua arte todo o conhecimento matemático que construíra ao longo de sua vida, culminando na obra *Começar*, em que o artista conecta uma série de construções geométricas e as suas várias referências culturais. Isto aproxima-se ao que Mendes (2008) indica sobre a manifestação da matemática na arte:

> Ao longo de sua existência, a sociedade humana construiu uma variedade cultural que se manifesta por meio de atividades relacionadas à arte e que podem ser interpretadas como uma aplicação de conceitos e técnicas geométricas, principalmente aquelas cujos princípios geométricos são centrais na construção de um desenho ou projeto artístico. A partir desse ponto de vista é possível percebermos o quanto a matemática é útil, tanto para a arte como para a ciência e a tecnologia (MENDES, 2008, p.38).

Destacamos também que o caminho que trilhamos sobre a aprendizagem criativa através da matemática e arte, fez-nos perceber que ao longo deste processo todo, a História da Matemática se fez presente e foi importante para a construção do conhecimento. Isto levou-nos às reflexões de Mendes (2017) acerca da história para o ensino da matemática, em que a partir de sua experiência, constatou que usar a investigação no ensino da matemática oportuniza os alunos, dentre outras coisas, o exercício de debater ideias matemáticas e estabelecer relações com outras áreas do conhecimento, sendo assim, “uma das formas produtivas para se concretizar um ensino de matemática que oportunize uma educação autônoma, criativa e ampliadora da cognição humana”.

Ao relatar esta experiência em que buscamos a aprendizagem criativa a partir da matemática e arte, nos deparamos com uma possibilidade metodológica que até então não se apresentava a nós, a história da matemática. Entendemos que a história da matemática é fundamental para compreender como a arte e a matemática se relacionam e como esta influencia os artistas e os movimentos de todas as épocas.

Apontamos aqui nossas primeiras impressões sobre este novo caminho que começamos a desbravar, porém acreditamos que estas ações interdisciplinares, permeadas pela história da matemática nos possibilita adotar uma mudança de atitude, rompendo com os muros da socialização do conhecimento e nos permite vivenciar novas experiências enriquecedoras, com vistas na construção do conhecimento de forma criativa, autônoma e aberta ao diálogo e aos novos desafios. Com isto, uma nova possibilidade de caminho se apresenta a nós: como o professor de matemática pode transpor esta experiência para a sala de aula, integrando a história da matemática, a tecnologia e arte? Não há uma resposta *padrão* para este questionamento, tendo em vista que a busca por esta resposta nos possibilitaria habitar em um novo e vasto campo de pesquisa. Entretanto podemos elencar algumas possibilidades para que o professor possa experimentar das ações interdisciplinares aqui apresentadas. Assim, propomos que o professor de matemática promova em sala de aula ações de investigação em matemática e arte, a partir de outros artistas, tais como Escher, Crockett Johnson, Kandinsky, Mondrian, Beatriz Milhazes, Athos Bulcão, Antônio Peticov, entre outros, integrando neste processo as tecnologias da informação e comunicação. Ao estabelecer estas conexões, o professor poderá mediar discussões subjacentes, em que seja possível refletir sobre como a história da matemática se faz presente em práticas sociais, culturais, artísticas, científicas, entre outras. Defendemos, portanto, que ao estabelecer este diálogo, o professor proporcionará aos alunos um ambiente favorável a uma aprendizagem criativa, reflexiva e significativa.

Referências

Aniello, B. (Dezembro de 2007). José de Almada Negreiros, do caos à estrela dançante. *Artis*.

D'Ambrozio, U. (1999). A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. Em M. A. Bicudo, *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas* (pp. 97-115). São Paulo: UNESP.

Freire, P. (2011). *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa.* São Paulo: Paz e Terra.

Freitas, P. J., & Costa, S. P. (2014). Os problemas de matemática de Almada Negreiros. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, pp. 01-04.

Freitas, P. J., & Costa, S. P. (2015). *Livro de Problemas de Almada Negreiros.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Freitas, P. J., & Costa, S. P. (2016). Geometria, entre suporte e tema da obra de arte, em Almada Negreiros. *Revista Convocarte*, pp. 136-145.

G. Deuleze, F. G. (1995). *Mil Platôs: Capitalismo e Esquizofrenia* (Vol. 1). Rio de Janeiro: Editora 34.

Gerdes, P. (2010). *Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Júnior, E. d. (2019). *Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-graduação Criatividade e Inovação em Metodologias do Ensino Superior, Belém.

Mendes, I. A. (2008). Ensino de Conceitos Geométricos, Medidas e Simetria: Por uma Educação (Etno)Matemática com Arte. *Revista Cocar, 2*, pp. 35-47.

Mendes, I. A. (2017). Das Artes Geométricas e MatematiColagens em Almada Negreiros. *1º Encontro Luso-Brasileiro do TEAR - Territórios Artísticos com a Matemática.* Óbidos/Portugal: Universidade Aberta de Lisboa.

Mendes, I. A. (janeiro de 2017). História para o ensino da matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula. *Revista Cocar, 1*, pp. 145-166.

Passos, E., & Barros, R. B. (2015). A cartografia como método de pesquisa-intervenção. Em E. Passos, L. D. Escossia, & V. Kastrup, *Pistas do método da cartografia: Pesquisa-intervenção e produção de subjetividade* (Vol. 1, pp. 17-31). Porto Alegre: Sulina.

Pires, F. A. (2010). *Criatividade no Processo de Amadurecimento em Winnicott.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Sakamoto, C. K. (2012). Criatividade e a construção da realidade contemporânea. *Trama Interdisciplinar, 3*, pp. 86-96.

simbólica, E. u. (2005). *Lucília Barata.* Viana do Casteli: Centro Internacional Holístico.

Souza, S. R., & Francisco, A. L. (2016). O método da cartografia em pesquisa qualitativa: Estabelecendo princípios... desenhando caminhos... *Atas CIAIQ, 2*, pp. 811-820.

Thiesen, J. d. (julho de 2007). A interdisciplinaridade como um movimento de articulação no processo ensino-aprendizagem. *Percursos, 8*, pp. 87-102.

Tuan, Y. F. (2018). Uma perspectiva experencial. *Geograficidade, 8*, pp. 04-15.

Vaz, C. L., & Rocha, H. (2018). *Matemática e Arte em trilhas, olhares e diálogos.* Belém: Editaedi.

Vaz, R. M. (2013). *COMEÇAR de Almada Negreiros Arte e o Poder Formatador da Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Winnicott, D. W. (1975). O Brincar: a atividade creiativa e a busca do eu (self). Em D. W. Winnicott, *O brincar e a realidade* (pp. 79-93). Imago.

Winnicott, D. W. (2011). Vivendo de modo criativo. Em D. W. Winnicott, *Tudo começa em casa* (pp. 23-39). WMF Martins Fontes.

Zago, H. d., & Flores, C. R. (novembro de 2010). Uma Proposta para Relacionar Arte e Educação Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, pp. 337-354.

Autores

Cristina Lúcia Dias Vaz

Doutora em Matemática Aplicada (Universidade de Campinas - Brasil). Professora e Pesquisadora do Programa de Pós-Graduação Criatividade e Inovação em Metodologias de Ensino Superior da Universidade Federal do Pará (PPGCIMES/UFPA/Brasil). Tem experiência na área de Matemática. Na área de ensino de Matemática atua principalmente nosd seguintes temas: tecnologias inovadoras no ensino superior, metodologia ativas, ambientes virtuais de aprendizagem e aprendizagem criativa em Matemática e Arte. Mais informações no Currículo Lattes: http://Lattes.cnpq.br/5829728118120411. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1583-6129. E-mail: cvaz@ufpa.br

Edilson dos Passos Neri Júnior

Mestrado em Ensino pelo Programa de Pós-Graduação Criatividade e Inovação em Metodologias de Ensino Superior da Universidade Federal do Pará (PPGCIMES/UFPA/Brasil). Doutorando do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM/UFPA/Brasil), na Área de Concentração Educação Matemática. Professor da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará. Tem experiência na área de Ensino com ênfase em Matemática, Tecnologia Inovadoras no Ensino Superior e Aprendizagem Criativa em Matemática e Arte. Para mais informações visitar o Currículo Lattes: http://Lattes.cnpq.br/5917661277687347. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4422-7330. E-mail: neri@ufpa.br

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p44-87.id832

LAS MEDIDAS EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS EN LA VENEZUELA DECIMONÓNICA

Walter O. Beyer K.
nowarawb@gmail.com
Universidad Nacional Abierta

Recibido: 18/10/2019 **Aceptado:** 13/01/2020

Resumen

Este trabajo consiste en historiar la introducción y difusión del Sistema Metrico Decimal (SMD) en la Venezuela decimonónica. Se centró en el análisis de los libros escolares usados en la época, complementada con la consulta de diversos documentos (legales, curriculares, etc.). Se consideraron los contextos económico, socio-político y educativo del momento, para interpretar los hechos. El estudio se ubica en el área de la Historia de la Educación Matemática. Es una investigación de corte histórico-crítico, de base documental. La metodología empleada es de tipo cualitativo, siguiendo el método histórico. Los documentos base fueron sometidos a la crítica interna y externa. Las fuentes base privilegiadas fueron las primarias. Se partió de una síntesis histórica de la evolución de las medidas a nivel mundial, bajo una óptica *antropomatemática*; así como se consideró su evolución en Venezuela. Se emplearon como herramientas diversos constructos teóricos (Transposición Didáctica, disciplina escolar, etc.) tomados del mundo educativo. Se muestran relaciones entre los contextos y la evolución de los sistemas de medidas y, nexos entre la Transposición Didáctica y estos. Se muestran razones socio-políticas que impidieron la difusión del SMD una vez aprobado legalmente; se señalan personas e instituciones, así como influencias foráneas, que incidieron poderosamente en su introducción.
Palabras clave: Historia de la educación matemática, libros de texto de matemáticas, Sistema Métrico Decimal

MEASURES IN SCHOOL MATH TEXTS IN DECIMONICA VENEZUELA

Abstract

This work consists in analyze the introduction and dissemination of the Decimal Metric System (DMS) in the Venezuelan nineteenth-century. It´s focused on the analysis of school books used at that time, and complemented by consulting other documents (legal, curricular, etc.). The economic, socio-political and educational contexts of the moment were considered to interpret the historical facts. The study is located in the area of the History of Mathematics Education. It´s a historical-critical research, documentary based. It was used a qualitative methodology, following the historical method. Base documents were submitted to internal and external criticism. The privileged base sources were the primary ones. It was based on a historical synthesis of the evolution of the measures worldwide, under an *anthropomathematical* perspective; as well as its evolution in Venezuela was considered. Various theoretical constructs (Didactic Transposition, school discipline, etc.) taken from the educational world, and others, were used as tools. A relationship between the contexts and the

evolution of the measurement systems are shown, and links between the Didactic Transposition and these. Socio-political reasons are shown that prevented the dissemination of the DMS once legally approved; people and institutions are pointed out, as well as foreign influences, which strongly influenced their introduction.
Keywords: History of Mathematics Education, Mathematics textbooks, Decimal Metric System

AS MEDIDAS EM TEXTOS DE MATEMÁTICA ESCOLAR NA DECIMONICA VENEZUELA

Resumo

Este trabalho consiste em registrar a introdução e disseminação do Sistema Métrico Decimal (SMD) na Venezuela do século XIX. Centrou-se na análise dos livros escolares utilizados na época, complementada pela consulta de vários documentos (legais, curriculares, etc.). Os contextos econômico, sócio-político e educacional do momento foram considerados para interpretar os fatos. O estudo está localizado na área da História da Educação Matemática. É uma pesquisa documental, histórica e crítica. A metodologia utilizada é de tipo qualitativo, seguindo o método histórico. Os documentos de base foram submetidos a críticas internas e externas. As fontes de base privilegiadas foram as principais. O ponto de partida foi uma síntese histórica da evolução das medições em todo o mundo, de uma perspectiva antropomatemática; bem como sua evolução na Venezuela. Vários construtos teóricos (Transposição Didática, disciplina escolar, etc.) retirados do mundo educacional foram utilizados como ferramentas. São mostradas relações entre os contextos e a evolução dos sistemas de medição, bem como os vínculos entre a Transposição Didática e estes. Mostram-se razões sócio-políticas que impediram a divulgação do SMD, uma vez que este foi legalmente aprovado; pessoas e instituições são indicadas, bem como influências estrangeiras, que influenciaram fortemente sua introdução.
Palavras-chave: História da Educação Matemática, Livros Didáticos de Matemática, Sistema Métrico Decimal.

Introducción

Los estudios antropológicos y arquelógicos han determinado claramente que los seres humanos, desde tiempos inmemoriales, han sentido la necesidad de medir, y es por ello que nuestra especie, el *Homo sapiens* –y posiblemente otras como algunos antecesores del hombre actual-, hayan creado mecanismos para ello, muchos de los cuales se han perdido en la bruma del tiempo; es decir, **la actividad de medir es consubstancial al hombre**, aunque también se ha podido establecer que otras especies del reino animal, aunque de manera limitada, tienen ciertas capacidades para emplear algún tipo de medición. Esta última particularidad se encuentra presente, por ejemplo, en las abejas. Ésta y otras habilidades de estos insectos fueron estudiadas, ya en las primeras décadas del siglo XX, por el etólogo y Premio Nobel

Karl von Frish a través de lo que se conoce como la *danza de las abejas*. La actualización de éstos y otros estudios, referidos a sociedades de insectos como las hormigas y las abejas, pueden encontrarse en Hölldobler y Wilson (2014).

Sin embargo, se debe ser sumamente cuidadoso con respecto a las afirmaciones acerca de las capacidades de algunas especies animales de hacer ciertos procesamientos que se consideran “matemáticos”, no sobredimensionando dichas capacidades.

Buena parte de la diferenciación entre la capacidad de los seres humanos y la de otras especies a efectos de la actividad de medición (y de otras como contar, localizar, etc.) deriva del hecho de que el *Homo sapiens* fue capaz de pasar de lo perceptual a lo conceptual, por medio de procesos de abstracción.

En este sentido, es bueno recordar lo planteado por Mosterin (1981), quien hace una importante distinción entre *perceptos* y *conceptos*. Señala éste que “los *preconceptos perceptuales* o *perceptos* son los patrones o plantillas de nuestro sistema neurosensorial, que nos permiten identificar formas perceptuales cada vez que se presentan en el continuo de nuestras sensaciones” (p. 13). En otro nivel están los conceptos que este autor clasifica en: ordinarios, científicos y teóricos.

> [Los *conceptos ordinarios*] son las unidades de representación simbólica del mundo de que disponemos en nuestro habla y en nuestro pensamiento articulado. [… Mientras, los *conceptos científicos* son] o bien precisiones extraordinarias de conceptos ordinarios o bien unidades simbólicas de nueva creación, establecidas por convención de la comunidad científica pertinente” (ídem).

Pasa luego a considerar, en grado mayor de generalidad y abstracción, los *conceptores* o *conceptos teóricos* los cuales son una síntesis producto de los conceptos científicos y son los que estructuran las teorías. En matemáticas tenemos p.e. que función y grupo cumplen con tal papel.

Por su lado, expresa Engels (1978) que “primero el trabajo, luego y con él la palabra articulada, fueron los dos estímulos principales bajo cuya influencia el cerebro del mono se fue transformando gradualmente en cerebro humano” (p. 10); a lo cual agrega que “el desarrollo del cerebro y de los sentidos a su servicio, la creciente claridad de conciencia, **la capacidad de abstracción y de discurso**, cada vez mayores, reaccionaron a su vez sobre el trabajo y la palabra, estimulando más y más su desarrollo [negrillas añadidas]” (op. cit., p. 11). Asimismo, afirma que

> gracias a la cooperación de la mano, de los órganos del lenguaje y del cerebro, no sólo cada individuo, sino también en la sociedad, **los hombres fueron aprendiendo a ejecutar operaciones cada vez más complicadas, a plantearse y a alcanzar objetivos cada vez más elevados** [negrillas añadidas] (op. cit., p. 15).

Estas "operaciones cada vez más complicadas" ameritaban un nivel de mayor de abstracción y condujeron paulatinamente a un proceso de *matematización*, el cual involucraba necesariamente el progresivo paso de los perceptos a los conceptos.

Struik (1960) expresa que

> nuestras concepciones matemáticas se formaron como resultado de un prolongado proceso social e intelectual, cuyas raíces se esconden en el remoto pasado. Sus orígenes pueden buscarse en el neolítico, cuando los hombres, en lugar de limitarse a buscar y conservar alimentos, se convirtieron en productores de los mismos, sentándose los cimientos de la agricultura, la domesticación de ganado y, eventualmente, el trabajo de los metales. Los vestigios de algunas actividades de la Edad de Piedra –productos de carpintería, cestería y alfarería- prueban que esas actividades pudieron estimular el desarrollo de concepciones geométricas (p. 9).

Asimismo, "la medición está profundamente sumergida en la vida económica y comercial" (Bishop, 1999, p.58).

Lo planteado por Mosterin (1981), Engels (1978) y Struik (1960) es crucial para rebatir un sinnúmero de afirmaciones especulativas, pseudocientíficas, que circulan –y han circulado- a través de diversos medios acerca de las capacidades matemáticas de ciertas especies animales, de los niños muy pequeños o de culturas con un muy incipiente o bajo nivel tecnológico. Las capacidades matemáticas que allí podemos localizar mayormente se deben ubicar en el nivel perceptual: son perceptos y nunca se pasa a otro nivel (en los animales y en niños) y poco se desarrolla lo conceptual en los adultos de dichas culturas.

Por otra parte, nos acogemos a lo expuesto por Bishop (1999), quien expone que "las matemáticas son un fenómeno pancultural: es decir, existen en todas las culturas" (p. 37) y ubica la medición como una de las seis actividades (contar, medir, localizar, diseñar, explicar y jugar) que él considera como "universales", que "ayudan a desarrollar la *tecnología simbólica* que llamamos «matemáticas»" (op. cit., p. 43); vale decir, son aquellas cuyo desarrollo permite pasar de unas *protomatemáticas* a las matemáticas; de lo perceptual a lo conceptual.

Nos ubicamos dentro de una corriente de pensamiento que considera que el origen del conocimiento matemático, y las medidas no son una excepción, está indisolublemente asociado al propio origen del hombre, al proceso de hominización. Es justamente eso lo que está en la base de lo que Beyer (2016b) denomina *antropomatemática*.

La evolución de las diversas culturas y civilizaciones, con el consiguiente desarrollo de sus formas económicas y de las tecnologías aplicadas a los procesos productivos, ameritó un perfeccionamiento y la unificación de las medidas de un tipo determinado, una mejora en su precisión y la sistematización de los procesos de medición, todo lo cual a la postre condujo a la creación del Sistema Métrico Decimal, el cual se impuso en buena parte del globo aparejado con el desarrollo del modo de producción capitalista.

Como bien establece Kula (1980), y coinciden en ello los estudios e investigaciones,

> El primer período evolutivo de las nociones metrológicas del hombre es el antropométrico, en el que las unidades básicas de las medidas son partes del cuerpo humano. El período siguiente busca sus unidades de medición en las condiciones, objetos y resultados de la labor humana.
> El desarrollo del sistema metrológico y de cada una de sus partes componentes estuvo dictado, evidentemente, por las condiciones de vida y de trabajo (p. 5).

Este vínculo de las medidas con los procesos económicos y socio-políticos, con las condiciones de vida y trabajo, puede observarse desde tiempos remotos, así ya en la Biblia aparecen asuntos vinculados con la medición. Así, en diversos versículos hallamos referencias a medidas, como por ejemplo: “Ni se enciende una luz y se pone debajo de un **almud**, sino sobre el candelero, y alumbra a todos los que estén en casa [negrillas añadidas]” (Nuevo Testamento, Mt. 5, 15); refiriendo González Raposo (1990) que “el fraude, en el pesar y el medir, se remonta a los orígenes de la humanidad. El mecader usaba una `balanza´ para comprar: cumplida y amplia; y otra para vender: reducida y con rasero” (p. 23). Las autoridades de cada nación trataban de evitar, mediante leyes y funcionarios, los fraudes y en ello también intervenían los líderes religiosos y así se asentó en los respectivos libros sagrados: “Porque con el juicio con que juzguéis, seréis juzgados y **con la medida con que medís, os será medido** [negrillas añadidas]” (Mt. 7, 2).

Para afianzar algunas de las ideas antes expuestas veamos qué nos dice Kula (1980): “Desde la Alta Edad Media hasta la introducción del sistema métrico, se utilizan en Europa dos clases de medidas para las superficies agrarias: medición por el tiempo de trabajo y medición por la cantidad de granos sembrados” (p. 36). Vemos aquí una estrecha ligazón entre las medidas y la producción.

Pero además las medidas tenían un vínculo indisoluble con los asuntos de estado como son los impositivos. Sobre esto es muy conocido el hecho de que “hace ya 6,000 años que los egipcios se veían obligados a *medir las tierras* del Valle del Nilo, cada vez que con sus inundaciones periódicas, al par que fertilizaban la tierra, borraba los límites de las propiedades” (Viedma, s/f., p. 5). A este efecto existían unos funcionarios, los *harpedonaptas* (o estiradores de cuerdas), una especie de antiguos agrimensores comisionados por el Estado para dicha labor, cuyo fin último era determinar las rentas y/o los impuestos que el propietario debía pagar. En este sentido Herodoto (citado por adurán, 2003, p. 417) expresaba:

> **Sesostris** (el Rey), ellos dijeron, repartía las tierras de Egipto entre sus habitantes, asignándole a cada uno de ellos un terreno cuadrado del mismo tamaño obteniendo de esta manera ingresos para la renta que cada propietario debía pagarle anulmente. Si el río se llevaba parte del terreno, el propietario debía acuduír al Rey y relatarle lo que había pasado. Así, el Rey enviaría personas para examinar y determinar exactamente la dimensión de los daños causados. Luego, el propietario tenía que pagar la renta sobre el terreno que le quedaba.

El desarrollo de las fuerzas productivas y aparejado a ello la evolución de las ciencias y el aumento de los intercambios comerciales, producto de la expansión del comercio y de la mejora de los medios de comunicación, obligaron a que en las sociedades que tenían un mayor nivel de avance se planteara la necesidad de ir modificando los sistemas de medición y a la vez se hizo necesario el uso de un sistema de medidas común para todos . En este sentido, y como bien indica Talancón Escobedo (2006) “el sistema métrico decimal fue una invención del impulso ilustrado cuya difusión y generalización por el mundo en el siglo XIX, se convirtió en un mecanismo que facilitó los intercambios del capitalismo en expansión” (p. 24). A su vez, la ausencia de una definición clara permitía que las medidas se convirtiesen en un instrumento de dominación. Entre las ventajas que tiene dicho sistema, las cuales coadyuvaron a su difusión, están: es un sistema neutro y universal, práctico, con las unidades base reproducibles, poseedor de una nomenclatura sistemática, es decimalizado, todo lo cual lo hacía totalmente distinto y mejor a los sistemas de medición precedentes, resolviendo los inconvenientes que éstos presentaban.

La evolución de las medidas en Venezuela por supuesto no escapó a esta relación con lo económico y lo socio-político, elementos que tangencialmente irán surgiendo a lo largo de este escrito y que en parte mencionaremos en el apartado *Algunos aspectos contextuales*.

A su vez, en determinado momento histórico, diferente en distintas latitudes, el asunto de las medidas entró a formar parte del conocimiento científico, y vía la Transposición Didáctica, pasó a ser uno de los contenidos del saber escolar. En consecuencia, fue incorporado a los conocimientos presentados en los textos escolares de matemáticas. Sobre éstos centraremos nuestra atención.

La Venezuela decimonónica tampoco escapó a esto último y tanto en las obras didácticas foráneas como en las nacionales podemos encontrar este tópico como parte de ellas.

En lo que sigue se explicará la evolución de las medidas en Venezuela y el tratamiento de éstas en las obras escolares de matemáticas empleadas en el país en el siglo XIX. Se mostrará el estudio y los hallazgos producidos, al hacer una revisión de un conjunto de libros elementales de matemáticas escolares (nacionales y foráneos) empleados en la Venezuela decimonónica, referidos a la evolución de la enseñanza de las medidas en el país, complementada con la información presentada en otras obras que aluden al uso de éstas, así como algunos aspectos de la legislación que rigió dicho tema en ese contexto espacio-temporal.

El estudio

El presente trabajo tiene su centro en el estudio de los textos escolares de matemáticas como fuente importante para entender la introducción y difusión del SMD en la Venezuela del siglo XIX.

Se ubica este escrito dentro de una corriente de pensamiento centrada en la historia de la educación matemática (HEM), área escasamente abordada por los inevestigadores venezolanos, y menos aún cuando se enfoca dentro del el contexto venezolano. En particular se escogió la temática del Sistema Métrico Decimal dada su importancia intrínseca y por cuanto es un tema vírgen, ya que no se han podido encontrar estudios previos al efecto desde la óptica de la HEM y sólo existen antecedes elaborados por los organismos metrológicos del país.

El estudio guarda cierta analogía con los realizados sobre la temática del SMD en otras latitudes: España (Picado Alfaro, 2012); Colombia (Arboleda, 2014); Brasil (Barreto de Brito, 2017), por sólo mencionar algunos.

Es de hacer notar que se trata de un trabajo preliminar mediante el cual se pretende sentar las bases para un abordaje del tema con mayor profundidad, en consecuencia dejaron de abordarse ciertos aspectos resaltantes como el enfoque realizado por Arboleda (2015) aplicándolo al caso venezolano, el de la introducción del SMD asociada al proceso de la formación de la nación, en términos de sus consecuencias sociales y políticas en lo concerniente su organización y del uso de la ciencia como un instrumento de dominación por parte de una élite local, ideas que podrían asociarse con ciertos planteamientos formulados por Talancón Escobedo (2008), así como también se omitió en este estudio la consideración de obras didácticas de otras disciplinas como la teneduría de libros.

Algunos elementos teóricos a considerar

Esta investigación se encuadra dentro del campo de la **historia de la educación matemática** (HEM) y el objeto de estudio, el SMD dentro de los textos escolares del siglo XIX en Venezuela, es considerado en su vinculación con otros ámbitos del quehacer de la sociedad venezolana del siglo XIX.

La HEM es un campo de estudio relativamenre reciente el cual se centra en una aproximación histórica a problemas considerados dentro de la educación matemática. El interés que ha suscitado este campo puede palparse en el cúmulo de publicaciones y congresos dedicados a esta temática (Picado y Rico, 2012) y es un área de trabajo en pleno desarrollo. Dicho campo puede representarse diagramáticamente así:

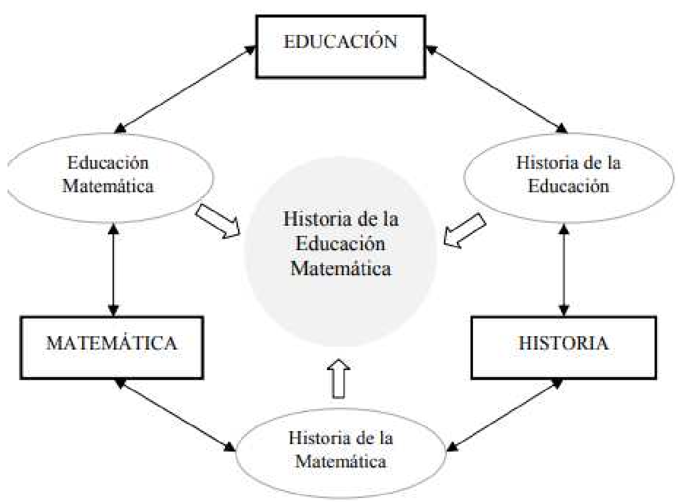


Figura 1: Relaciones de la HEM con otras áreas de conocimiento
Fuente: Picado, Rico y Gómez, 2013, p. 41

El diagrama de la Figura 1 es claro en mostrar que la HEM se encuentra en la confluencia de diversos campos disciplinares, siendo por ende un área de estudio multidisciplinario, que en buena parte se funda en aspectos teóricos tomados de esas disciplinas, así como también se nutre metodológicamente de éstas.

Dentro del campo de la HEM ha adquirido particular relevancia el estudio de textos históricos de matemáticas (Schubring, 1987; Picado y Rico, 2012).

Los textos históricos de matemáticas, como bien apunta Schubring (1987) "la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos ministeriales y por los programas de estudio oficiales como por los libros de texto usadas para ella" (p. 41).

Además, como expresan Picado y Rico (2012) "estos libros proporcionan uno de los vehículos más relevantes en los procesos de difusión y transmisión del conocimiento matemático a lo largo de la historia" (p. 11). Y justamente eso, la difusión y transmisión del conocimiento del SMD a traves de dichas fuentes escritas, es el interés central de la presente comunicación.

Sin embargo, todo esto acontece dentro de la realidad histórica en un lugar y momento específicos, en virtud de lo cual es indispensable tomar en cuenta los contextos socio-político, económico, educativo y de desarrollo de la ciencia y la tecnología, dentro de la sociedad en consideración, en ese lugar y tiempo.

Para fundamentar este trabajo, y dado que el núcleo de esta investigación se centra en los textos escolares, hemos de partir dando una conceptualización de estos objetos. En este sentido Carlós (2002) los define como

> El material escrito, editado por empresas públicas o privadas y producido para ser empleado tanto por los alumnos, como docentes en las instituciones educativas sean públicas o privadas que que vuelca en su interior contenidos, ilustraciones e informaciones recogidas y seleccionadas intencionalmente, e incorpora propuestas metodológicas para el aprendizaje de acuerdo al nivel, a las políticas educativas y a los diseños curriculares vigentes (2., ¶ 1).

A esto agrega Beyer (2012) que los textos escolares

> Son un producto histórico; son un producto cultural; son un componente del currículum; son un producto de la Transposición Didáctica; son un mediador entre el docente y el discente, entre la enseñanza y el aprendizaje; pero, son también una mercancía (p. 122).

Es importante señalar aquí que los textos escolares muestran un saber matemático transformado vía la Transposición Didáctica (TD): es el *saber a enseñar* como lo refiere

Chevallard (2000). Ese saber el cual ciertos autores denominan matemáticas escolares difiere del saber sabio, de la matemática que hacen los matemáticos profesionales, en diferentas asprctos. Así, por ejemplo Beyer (2012) hace una comparación entre ambos saberes, caracterizándolos y diferenciándolos. Por su lado, Chervel (1991) nos habla de *disciplinas escolares*, especificando con el término disciplinas que

> Los contenidos de la enseñanza se conciben como entidades «sui generis», propias de la clase, independientes hasta cierto punto de cualquier realidad cultural ajena a la escuela, **dotadas de una organización, una economía propia y una eficacia que sólo parecen deber a sí mismas, es decir su propia historia** [negrillas añadidas] (p. 63).

A lo anterior Chervel (1991) agrega: "**los contenidos de la enseñanza vienen impuestos como tales a la escuela por la sociedad que la rodea y por la cultura en la que está inserta** [negrillas añadidas]" (p. 64).

Lo antes citado merece algunos comentarios. La afirmación de que estos contenidos son "independientes hasta cierto punto de cualquier realidad cultural ajena a la escuela" hay que mirarla con cuidado, no sobrevaluando la supuesta independencia de tales saberes. Creemos que justamente el autor está consciente de que la afirmación puede ser mal interpretada y por ello dice que esto es "hasta cierto punto" y, además, posteriormente aclara que dichos saberes vienen en realidad impuestos a la escuela por la sociedad y cultura en la cual ésta está inserta.

Por otra parte, el primer resaltado enfatiza las características propias de dicho saber.

Adicionalmente, hay que remarcar que en nuestro caso ese proceso de TD no es autóctono sino foráneo y allí es importante la acotación realizada por Chervel (1991), la cual también hemos resaltado, en el sentido de que esos saberes los impone la sociedad. En el caso venezolano, la sociedad del siglo XIX estaba en sus inicios caracterizada por la dominación española y su cultura; luego, el país, signado por el pensamiento de los fundadores de la República, estuvo notablemente influenciado por el pensamiento ilustrado europeo; así los primeros textos matemáticos provenían del continente europeo (obras de Vallejo, Lacroix, Legendre, etc.) y luego los autóctonos se hicieron generalmente siguiendo el modelo de los importados. Las influencias más notorias fueron la hispánica y la gala, y en menor cuantía la de otra procedencia.

Es de recalcar pues que factores "ajenos" a la realidad nacional, muchas veces, influenciaron los cambios educativos, y de otra índole, realizados en el período histórico que nos ocupa. El connotado pensador mexicano Bonfil Batalla (1991) hace un estudio detallado sobre la contraposición entre "lo propio" y "lo ajeno", refiriéndose a los objetos culturales y al control sobre los mismos.

Metódica

El ámbito de este trabajo se ubica en el contexto espacio-temporal de la Venezuela del siglo XIX.

La metodología empleada fue de tipo cualitativo, siguiendo el método histórico. Específicamente se trata de una investigación de corte histórico, de base documental y de carácter crítico-interpretativo.

Es histórica por cuanto como expresan Cohen y Manion (1990) "se ha definido la investigación histórica como la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados" (p. 76), estando conscientes de que no resulta un estudio acabado en el sentido de que "la información es siempre fragmentaria y la reconstrucción proporciona un esquicio, más bien que un retrato terminado. Diferentes personas que estudian la historia de un caso pueden llegar a diferentes reconstrucciones a partir del mismo material" (Travers, 1986, p. 460).

El estudio es de base documental por cuanto se apoya en un amplio conjunto de fuentes escritas, documentos entre los que cabe destacar: textos escolares de matemáticas (nacionales y foráneos); instrumentos legales como leyes y decretos; documentos curriculares; investigaciones bibliográficas, catálogos y otras, relevantes para el tema que nos ocupa.

La investigación es de carácter crítico-interpretativo por cuanto ella no se limitó a la mera recolección, agrupamiento y ordenación de los datos; ni aún a la simple hilvanación de los estos ya agrupados y ordenados. Se fue mucho más allá, se trató de explicar los hechos o fenómenos objeto de estudio y de obtener nuevo conocimiento histórico.

Se privilegió el uso de fuentes primarias, especialmente cuando de obras didácticas y de textos jurídicos se trataba.

El origen de las fuentes fue la biblioteca personal del investigador, bibliotecas públicas como la Nacional de Venezuela y la de la Universidad Central de Venezuela, la Intenet.

Los textos escolares considerados para el estudio son lo que Schubring (1987) denomina *libros de texto históricos*. Para su obtención se procedió a la revisión de catálogos de bibliotecas, como la Biblioteca Nacional de Venezuela y la Biblioteca Central de la Universidad Central de Venezuela entre otras, así como la consulta de catálogos de casas editoras del siglo XIX, en conjunto con diversos estudios bibliográficos, investigaciones sobre textos escolares y la búsqueda por Internet, permitió detectar un conjunto de obras de interés. Realizado el arqueo se procedió a extraer una lista de obras para el estudio, de la cual se extrajo una muestra intencional, muestreo en el cual, "es la persona que selecciona la muestra la que procura que esta sea representativa; por consiguiente, la representatividad depende de su intención u opinión, y la representatividad es subjetiva" (Azorín, 1972, p. 4)

La selección de las obras se hizo sobre la base de un conjunto de criterios, a saber:

1. Existencia de la obra, en papel o en versión digital
2. Presencia del tema medidas en el texto
3. Relevancia del autor
4. Permanencia en el tiempo
5. Número de ediciones
6. Referencias a su permanencia en el mercado librero
7. Indicación de algún tipo de evaluación
8. Aprobación de su uso por algún organismo oficial
9. Haber sido empleada efectivamente como texto
10. Cobertura del período en estudio

No necesariamente una obra debía satisfacer todos los criterios. Obviamente los N^{os} 1 y 2 eran obligantes, mientras que el N° 10 es un criterio que debía satisfacer la muestra como un todo.

Los documentos base fueron sometidos a la crítica interna y externa para garantizar la autenticidad del documento y la veracidad de su contenido. A los fines de afianzar la crítica se llevó a cabo la constrastación de diversas fuentes, cuidando que éstas –en lo posible- fuesen independientes.

Se llevó a cabo una reconstrucción histórica de la introducción del sistema métrico en el país y se consideraron elementos contextuales de diversa índole. Dentro de este marco se realizó un análisis de la información extraida de las fuentes, interpretándola, y como consecuencia se arribó a un conjunto de conclusiones.

Un aspecto a resaltar es que en las citas textuales se respeta la grafía, reglas de acentuación, etc. originales de cada autor citado.

Finalmente, queremos indicar un aspecto limitante para trabajos de esta índole: la dificultad para la obtención de buena parte del material trascendente, esencialmente fuentes primarias. Esto es particularmente notorio cuando de textos escolares se trata, y si son antiguos más aún, resultando la mayoría de las veces imposible encontrar varias ediciones de una misma obra a fin poder determinar con certeza si entre unas y otras el autor y/o los editores realizaron cambios y de qué trataban éstos en el caso de existir. La limitación referida a los manuales escolares la explica Choppin (2000) en virtud de la poca atención que en general bibliógrafos e historiadores han puesto en ellos y en consecuencia muchas veces no son censados ni catalogados, por el tipo de uso el cual hace que su soporte físico se deteriore, a la falta de conservación de muchos catálogos de los editores, etc.

Algunos aspectos contextuales

Este estudio se ubica en la realidad política, histórica y económico-social de la Venezuela decimonónica. Constituye dicho siglo un período en el cual se produjeron diversos acontecimientos que influyeron decisivamente en el ámbito educativo y, particularmente, en la producción y difusión de las obras didácticas.

Sobre este último asunto, el de la producción y difusión de los textos escolares en el siglo XIX venezolano, existe un acucioso trabajo de investigación realizado por Beyer (2012), en el cual se resalta la influencia de los aspectos de orden contextual sobre la literatura didáctica en dicho período.

Aquí, *grosso modo*, expondremos sólo algunos acontecimientos y circunstancias: **las más resaltantes** e influyentes en el tema que nos ocupa.

El territorio de lo que hoy es Venezuela en los inicios del siglo XIX aún no era una nación, por cuanto era una colonia española y en consecuencia en la Capitanía General de Venezuela, que tal era su nombre, las medidas empleadas eran las implantadas por los colonizadores. Éstas eran hasta cierto punto suficientes para ese entonces, aunado la dependencia de la metrópoli, para el desenvolvimiento económico de la colonia.

Al pasar a ser una nueva nación, en los primeros tiempos, la marcada devastación en que sumió este territorio, como consecuencia de la cruenta guerra independentista, relegaron la necesidad de cambiar el sistema de medidas vigente; asimismo, los sucesivos enfrentamientos entre diversas facciones nacionales desviaron la atención hacia otros asuntos distintos al educativo y al de los aspectos de innovación técno-científica, siendo estos de los menos atendidos por los sucesivos gobiernos. Expresaba Uslar Pietri (citado por Vilda, 1997) que “pasamos el siglo XIX en puras guerras civiles, en una dispersión del poder entre jefes y jefecillos de todas clases. Páez intentó crear un Estado nacional y no pudo. Tampoco Guzmán Blanco” (p. 4). Uno de tales acontecimientos fue el desmembramiento de la “Gran Colombia”, y otro, muy cruento fue la Guerra Federal (1858-1863). Buena parte de la centuria vivió el permanente enfrentamiento entre conservadores y liberales.

La economía de la época se caracterizó por “uno de los cambios económicos más significativos impulsados por la guerra nacional de Independencia [que] fue abrir el territorio venezolano al tráfico comercial internacional, de modo libre y sin las trabas vigentes en el período colonial” (Brito Figueroa, 2005, p. 225). Era una economía de base agro-pecuaria exportadora cuyo principal rubro de exportación fue el café. Además, “el predominio de Inglaterra como mercado de los productos venezolanos y como abastecedor de mercancías para satisfacer las necesidades del mercado interno, fue decisivo en este período y como tal se prolongó a todo lo largo del siglo XIX” (op. cit., p. 227).

Brito Figueroa (2005), asimismo, asevera que la estabilización económica del país, luego de la Independencia, era relativa por cuanto no hubo cambios estructurales de la economía con respecto al período anterior; tan sólo existió una apertura hacia los mercados internacionales y la dependencia de éstos, así como la necesidad de importar mercancías procesadas e incluso el numerario circulante, todo lo cual hizo que dicha economía dependiese de los avatares del capitalismo mundial, especialmente de las crisis de sobreproducción.

Esa relación que se creó con los mercados internacionales promovió la creación en el país de un cúmulo de empresas, mayormente en manos extranjeras, dedicadas a la exportación/importación de productos, y que desarrollaban una febril actividad económica en los puertos, la cual repercutía en sus respectivos *hinterlands*. Expone en este sentido Cardozo Galué (s/f) que

> Los comerciantes extranjeros establecidos en Maracaibo, ademas de conducir el tráfico exterior y hacerse fuertes en el manejo de la plaza, acaparan para fines de la década de 1830 el comercio con las áreas productivas de Los Andes venezolanos y valles de Cúcuta (p. 16).

Este fuerte movimiento económico generaba una serie de necesidades de modernización, siendo una de ellas la actualización del sistema de pesos y medidas.

En lo que respecta a la educación hay que decir que pocas eran las escuelas públicas existentes en el país y era un sector bastante abandonado, con falta permanente de recursos económicos y marcada escasez de maestros. En las grandes ciudades, como Caracas, hubo un marcado predominio de los planteles privados. El nivel secundario lo atendían los colegios, instituciones que vivían vicisitudes similares a las de las escuelas de primeras letras. En las universidades predominaba el escolasticismo y el uso del latín. Sin embargo, a través de ciertos personajes se colaron ciertas ideas de la Ilustración. En la de Caracas ésta dejó de ser real y pontificia gracias a su reforma, en 1827, impulsada por José María Vargas y Simón Bolívar, creándose la primera cátedra de matemáticas a nivel universitario.

En sus inicios, la educación trató de seguir el método de enseñanza mutua, siendo que incluso Lancaster estuvo un tiempo en el país.

Es de descacar que en la tercera década de la centuria fueron creadas dos instituciones importantes en el rubro educativo: La Academia de Matemáticas de Caracas, decretada en 1830 y que entró en funcionamiento en 1831, con Cagigal a la cabeza; y la Dirección General de Instrucción Pública (DGIP), en 1838, presidida por Vargas secundado por Cagigal. Ambas jugaron un importante papel en la introducción y difusión del SMD.

Se decretaron, en 1842 y 1843, los primeros instrumentos legales propios, que rigieron la educación. Posteriormente, adquirió principal relevancia para la educación primaria el Decreto de 1870, promulgado por Guzmán Blanco. Asimismo, fue creado en 1881 el Ministerio de Instrucción Pública. En esta época también la secundaria recibió renovado impulso.

Expresan Abad y otros (1984), refiriéndose que “la realidad política y educativa reflejaba que dentro de la escasa prioridad asignada a la educación, se favorecía a una educación destinada a servir a las élites en detrimento de una educación orientada al servicio del pueblo” (p. 13). Esto trató de ser revertido con el Decreto de 1870, referido a la instrucción primaria. Se caracteriza este momento por ser un intento de modernización y popularización de la educación. También data de esta época la creación de las primeras escuelas normales.

En lo referente al desarrollo de las matemáticas éste fue espasmódico. Ya en 1760 se creó la Academia de Geometría y Fortificación, institución de corta vida. Luego, en ese mismo siglo, ciertos esfuerzos desde el mundo civil, que promovían la enseñanza de las matemáticas superiores no llegaron a fructificar. Posteriormente, en el siglo XIX fueron creadas varias academias para la formación de ingenieros militares, de efímera existencia. No es sino hasta la creación de la Academia Matemática de Caracas que estos esfuerzos toman cuerpo.

Por otra parte, en el último cuarto del siglo XIX hubo una notoria influencia de las ideas positivistas (Spencer, Sarmiento, etc.), las cuales continuaron influyendo en la siguiente centuria, lo cual trajo como consecuencia la modernización de la ciencia y su enseñanza en el país. Ingresaron al país ideas pedagógicas como las de Pestalozzi, la enseñanza objetiva, las cuales le dieron cierto renacer a la actividad educativa.

Las medidas en Venezuela: Una visión retrospectiva

Como ya se dijo anteriormente, las matematicas constituyen un fenómeno pancultural y por ende los pueblos ancestrales que poblaban estas tierras, al momento de la llegada de los colonizadores, poseían dentro de sus respectivas culturas ciertos conocimientos matemáticos, cuyas huellas en muchos casos se han perdido, especialmente en las ágrafas. Sin embargo, algunos rastros (a veces deformados) aún se conservan y podemos extraer del vocabulario de los idiomas indígenas términos con connotaciones matemáticas. Así, por ejemplo, Mosonyi (2008) refiriéndose a la etnia Warao (o Guarao) establece lo siguiente:

> Ahora bien, lo que sucede realmente es que el guarao sí maneja un buen número de abstracciones, algunas de ellas muy interesantes, pero de índole totalmente distinta a las que seencuentran en las lenguas occidentales. Como veremos en seguida, se trata de conceptualizaciones enteramente originales, cuya existencia puede pasarnos desapercibida, a menos que nos propongamos la tarea de buscarlas en forma deliberada. En vez de abundar en comentarios de orden general, será preferible suministrar algunos ejemplos característicos: Sinaria y Sinarianaka: sinaria, (pronunciado sinaría), en su acepción más conocida e inmediata significa medida y sinarianaka, en una primera aproximación, sería sin medida, lo no medido o no medible (inconmensurable) (p. 154).

Este investigador acentúa el carácter polisémico del vocablo *sinaria*, expresando que “confrontando otros usos de ambos vocablos según resaltan de una diversidad de contextos, obtenemos para sinaria traducciones tales como `límite´, `señal´, `molde´, `modelo´, `unidad de medida´, `hora del día (o de la noche)´, `testimonio´ y otras´” (ídem).

Este carácter polisémico de este término puede corroborarse consultando a Barral (1979):

> MEDIDA. **Sinaría.**// 2. Medida, instrumento para medir. **Sinarikoima.** // 3. Medida del perímetro o contorno de la isla. **Burojo a kojo a sinaría.**// 4. Medida tipo, unidad de longitud, (metro, vara). **Sinaría.**// 5. Medida tipo de tiempo. Hora. **Ya asinaría./** (SIC) **Ya a kobe sinaria.**//7. Tomar la medida. **Kayuka (tá-).** (p. 141-641).

Por su lado, Urdaneta (1997) indica que *membús* era el término empleado por la etnia Cuica para significar *altura* y *palito* era una "medida de capacidad, equivalente a la mitad de un almud" (op. cit., p. 115); así como también poseían vocablos para la medición del tiempo (tshabú, tsyishbu = día, toshíta = semana, timbeu = mes). Se nota aquí ya un proceso de transculturización (o de asimilación cultural) al aceptar divisiones del tiempo como la semana y el mes o una relación con el almud, típicamente provenientes de la cultura del conquistador.

Este proceso transculturizador muchas veces viene aparejado con, o impulsado por, otros factores determinantes introducidos por una cultura dominante dentro de otra cultura. En buena medida la introducción de nuevas formas de explotación económica, así como de herramientas y artefactos producidos por una cultura de mayor desarrollo tecnológico, inducen al trasvase de instrumental matemático (*mentefactos*, en el sentido de D´Ambrosio (1986)) de la una a la otra. Así, por ejemplo, una

> consecuencia de la mercantilización de la sarrapia en el Orinoco fue la notoria relevancia que tomó el manejo de unidades de medida, cálculos y expresiones numéricas entre las poblaciones locales. Durante la época de las estaciones sarrapieras, los mapoyo adquirieron grandes habilidades en el manejo de medidas de peso traídas por los colonos criollos (Torrealba y Scaramelli,2018, **Modo de extracción y organización social**, ¶ 6).

Obsérvase aquí cómo factores de índole económica guardan una estrecha vinculación con el conocimiento del proceso de medición. Manifestación clara de ello lo constituye la adscripción de los asuntos metrológicos al Ministerio de Fomento, en 1950, órgano "cuya misión básica la constituye el desarrollo y fomento de la Industria y Comercio en el país" (Colubi, 1978, p. 53).

El comercio, las instituciones educativas que fueron creándose con el paso del tiempo y, en gran medida, las obras didácticas que circularon por estos predios fueron los mecanismos que promovieron el empleo de las medidas en uso en España, las cuales perduraron, y tal es así que hasta bien entrado el siglo XX era usual que el campesino venezolano hablase en términos de arrobas, leguas, quintales y fanegas. Aún hoy en día se habla de quintales de café.

En lo que se refiere a las medidas no métricas que han sido usadas en el país, en distintos momentos históricos, se ha podido consultar el acucioso estudio realizado por Rodríguez Castillo (2000), quien entre otras cosas realiza una interesante clasificación de las mismas, basándose en criterios de carácter esencialmente económico (comercio, productos, etc.) y considerando la labor humana, siguiendo muy de cerca los planteamientos de Kula

(1980). Así, por ejemplo, se tiene "Sistema de pesos en territorio limitado y de comercio al por menor", "Sistema de pesas de producción geográficamente diseminadas y de comercio al por mayor" o "Sistema de medidas de acuerdo al tiempo de trabajo".

Por su parte, señala Landaeta Rosales (2006) que

> Desde la época de la conquista hasta el año de 1800, rigió en Venezuela el antiguo confusísimo sistema de pesas y medidas español. Este sistema fue sin embargo modificado por Real Orden de 26 de enero de 1801 y con esta modificación siguió rigiendo en Venezuela hasta el 11 de octubre de 1821 (p. 255).

La reforma española de 1801 pretendía la unificación de las medidas en el reino por cuanto en distintas regiones, bajo un mismo nombre, las respectivas medidas no coincidían. Así, por ejemplo, Dalmau Carlés (1969) reproduce las equivalencias entre las medidas antiguas que se usaban en España y las métricas, publicadas por la *Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico* de ese país, y allí se observa que la vara castellana equivalía a 0,835905 metros, mientras que la vara alicantina equivalía a 0,912 metros, la de Canarias 0,842 metros, la de Almería 0,833 metros, y así sucesivamente; así, **la *vara* variaba su valor de una región a otra** de España, cuestión ésta que heredaron sus colonias.

Sin embargo, esta reforma no logró su objetivo. "Deseando el Congreso de Colombia simplificar en lo posible tan complicado sistema, dictó en 11 de octubre de 1821 una ley sobre la materia" (Landaeta Rosales, 2006, p. 259), la cual rigió en Venezuela hasta la promulgación de una ley propia en 1857. Pero, "esta ley no llenó tampoco el objeto con que fue dictada, porque se incurrió en el error de adoptar los mismos nombres españoles para medidas muy diversas" (ídem).

Cagigal (1839a) analiza la Ley colombiana de pesas y medidas de 1821, exponiendo los defectos allí presentes, así como los existentes en la reforma de ésta efectuada en la Nueva Granada en 1836. Ambas, amén de la falta uniformidad carencían de patrones de referencia para las unidades adoptadas.

En razón de lo anterior el Secretario de lo Interior le señaló a la Legislatura, en 1831, la confusión reinante en la materia a lo largo y ancho del país, lo cual entre otras cosas, trastocaba el comercio interior. Asimismo, la Diputación Provincial de Caracas realizó en 1834 una petición a favor del SMD, alegando los grandes inconvenientes que traen aparejadas las medidas en uso para la práctica de los oficios, las operaciones mercantiles y las relaciones de los agricultores. En este mismo sentido se pronunció la autorizada voz del ingeniero Juan Manuel Cagigal en 1839.

Esta confusión en buena parte era heredada por cuanto, como indica Kula (1980), "en incontables casos, la unidad básica por la que se mide una extensión cultivada y la unidad básica del volumen de los áridos poseen una denominación igual o muy parecida" (p. 41). Él ejemplifica éste la situación con el caso colombiano en donde la *fanega* era una unidad de volumen y la *fanegada* lo era de superficie. Ese mismo uso de fanega y fanegada existió en Venezuela (Echeandía, 1896, 1926). Más aún, la *fanega* puede ser considerada tanto como una medida de superficie para tierras (medida agraria), así como una medida de capacidad o volumétrica para granos y frutos secos (medida para áridos), de acuerdo con la Ley colombiana de 1821 (Congreso General de Colombia, 1821). Mayor ambigüedad aún revistió la unidad de capacidad para líquidos llamada *botella* (Alvarado, 1923), la cual le trajo enormes complicaciones a Chitty para hacer sus tablas de conversión al SMD en 1868 (Landaeta Rosales, 2006).

A pesar de los intentos fallidos antes indicados para implantar el nuevo sistema de medidas, es de resaltar que Venezuela se vinculó relativamente muy temprano al Sistema Métrico Decimal. Así, el 13 de febrero de 1857 fue aprobada por el Congreso de la República la primera Ley de Pesos y Medidas de la República que derogaba el instrumento colombiano de 1821, el cual había regido hasta ese entonces, estableciendo oficialmente el uso del Sistema Métrico Decimal (SMD) en el país. Esta ley tuvo vigencia hasta 1939.

Además, es de destacar que –de acuerdo con el Portal del *Sistema Autónomo Nacional de Normalización , Calidad, Metrología y Reglamentos Técnicos (SENCAMER)*- Venezuela estuvo entre los primeros 10 países en adoptar el SMD; así después de Francia (1795), siguieron: Bélgica, Luxemburgo y Países Bajos, en 1816; Chile, en 1848; España, en 1849; Portugal, en 1852; Colombia, en 1853; Venezuela (13 de febrero) y México (15 de marzo), en 1857; y Venezuela fue además uno de los diecisiete países signatarios de la Convención del Metro (1875).

Asimismo, mediante el instrumento jurídico promulgado en 1857, el SMD fue introducido oficialmente en el medio educativo. En su Artículo 10° establecía que "en todas las Escuelas Públicas o particulares, donde se enseña o deba enseñarse la aritmética o cualquiera otra parte de las matemáticas, **es obligatoria la del sistema legal de pesas y**

medidas y su nomenclatura científica [negrillas añadidas]" (Congreso de la República, 1857a, p. 134; Congreso de la República, 1857b, p. 538). Se preveía allí que desde el 1° de enero de 1858 era obligatorio su uso a nivel de los entes oficiales y a partie del 1° de enero de 1859 lo sería para el resto del país.

No obstante todo lo anterior, ello fue más un desiderátum que una realidad en virtud de los acontecimientos políticos acaecidos a poco de la aprobación de la ley, particularmente la Guerra Federal (1858-1863), los cuales fueron obstáculos de peso para la aplicación de la ley, así como "su utilización y difusión fue muy lenta, por la resistencia que opusieron los distintos estratos de la sociedad venezolana" (Colubi, 1978, p. 51).

Sobre este último particular, Cagigal (1839a), un ferviente defensor de la introducción del SMD en el país, reflexionaba:

> El Senado de 1837 aprobó por unanimidad un proyecto de ley, estableciendo en la República el sistema de pesas y medidas conocido con el nombre de sistema métrico; y si bien **fue vivamente combatido en la Legislatura de 1838, por algunos honorables representantes**, también otros lo sostuvieron, interesando tan justas y sólidas razones, que si no llego a aprobarse, logróse al menos dejar la cuestión en pie y en disposición de poder ser discutido más adelante con pulso y detenimiento [megrillas añadidas] (p. 133).

Nótase allí las resistencias al uso del SMD en el país, en este caso presentes a nivel del órgano legislativo, aunado al hábito de usar las viejas medidas por parte de la ciudadanía, resistencias que no declinaron totalmente aún después de que fuese aprobado por ley el uso de dicho sistema.

Vencer estas resistencias fue un objetivo de diversas personalidades de la época entre las que se cuentan José Ángel Freire, Juan Manuel Cagigal y Feliciano Montenegro y Colón. En tal sentido el primero publicó un opúsculo titulado *Nueva metrología*, el cual estaba incorporado al 4° tomo de la *Geografía* de Montenegro y Colón (volúmenes 3 y 4 publicados entre 1834-37), y que también se vendía por separado en la importante casa editora y librería caraqueña de Damirón y Dupouy; mientras, el segundo publicaba dos artículos acerca de la materia Cagigal (1839a, 1839b).

Una vez pasada la tempestad política de la Guerra Federal (1858-1863), se llevaron a cabo nuevas acciones para promover el uso del SMD. En el ámbito educativo es de destacar una Circular emitida en 1862, por el Ministerio de Relaciones Exteriores, a todos los gobernadores ordenándoles a que instruyeran a todos Concejos Municipales para que éstos dispusiesen la enseñanza del SMD en las escuelas primarias, públicas y privadas. Se decía que "al efecto los Concejos Municipales harán publicar tablas comparativas de los pesos, medidas y monedas actuales con las del sistema métrico decimal y harán que se publiquen textos elementales con ejemplos prácticos de este" (Ministerio de Relaciones Esteriores, 1862, p. 114). Entre otras acciones estuvo la adquisición por parte del Ministerio de Fomento, en 1868, de 100 ejemplares de una obra sobre SMD (Castellanos, 2017b), la cual además había sido recomendada como texto escolar. Sin duda, debió ser el escrito de Chitty (1868). También el gobierno promovió el uso del SMD, publicando ese mismo año el *Arancel de derechos de importación arreglado al Sistema Métrico Decimal* (Castellanos, 2017a, p. 424) y, en 1869, el folleto *Ley sobre Sistema Métrici Decimal y resoluciones del Ejecutivo Provisional de la República sobre su ejecución* (Castellanos, 2017b, p. 20). Asimismo, está el posterior *Decreto de Instrucción Pública, Gratuita y Obligatoria* promulgado por Guzmán Blanco (1870), en el cual se establece, en su Artículo 2°, el sistema métrico como una asignatura diferenciada, adicional a la aritmética.

A la par de la promulgación de instrumentos legales que introducían el SMD en la sociedad venezolana, diversas obras matemáticas (autóctonas y foráneas) que circularon por la geografía nacional promovieron la comprensión y uso de este sistema de pesos y medidas.

Ya entrado el siglo XX, para reimpulsar la introducción del SMD en el país, fueron emitidos un Decreto Ejecutivo en 1912 (Gómez, 1912) reiterando la obligatoriedad del empleo de las medidas métricas y una Resolución (Zumeta, 1914) reglamentando el uso del SMD, so pena de sanciones para los infractores a las normas establecidas en ambos documentos. Asimismo, se promovió la publicación y difusión de tablas de equivalencias entre las viejas y las nuevas medidas. Por otra parte, en 1939 fue sancionada una nueva Ley de Pesas y Medidas que derogaba la de 1857; como puede apreciarse la Ley de 1857 tuvo una larga vigencia: 82 años. Adicionalmente, en lo que se refiere al ámbito educativo, en 1912 comenzaron a aplicarse los primeros programas oficiales de estudio para la educación primaria (de carácter nacional y obligante) los cuales habían sido aprobados en 1911 y en los que estaba presente el estudio del SMD en los seis años de estudio (Ministerio de Instrucción Pública, 1911; Consejo de Instrucción del Distrito Federal, 1911).

Avanzando en el tiempo, en el transcurso del siglo XX y de lo que va del XXI han sido dictadas nuevas leyes sobre esta materia. Se escapa del objetivo del presente trabajo el análisis de estos instrumentos legales.

Las medidas y el papel de los libros de matemáticas en su estudio y difusión

Como ya se ha dejado entrever, los textos de matemáticas –especialmente los escolares- jugaron un importante papel en lo referente al conocimiento de los aspectos metrológicos en Venezuela y fueron asimismo una fuente importante para la difusión e implantación del SMD en el país. Adicionalmente, concordando con Schubring (1987), los textos escolares son unos determinantes indiscutibles de la enseñanza y en consecuencia proporcionan pistas seguras para la reconstrucción del pasado escolar.

Ya hemos mencionado una obra pionera, la escrita por José Ángel Freire que por separado o adjuntada a la monumental obra de *Geografía* de Montenegro y Colón (así se vendía, según Cagigal, 1839b) jugó un rol de primera línea a los fines de explicar el SMD. Ambos autores estaban amparados por un bien merecido prestigio y además jugaron un importante papel en el ámbito educativo: el primero como secretario de la Dirección General de Instrucción Pública y el segundo como Director y fundador del *Colegio de la Independencia* (1836-1845), afamado plantel caraqueño (el segundo privado del país) que formó a un buen número de destacados venezolanos y que contaba con excelentes profesores, en cuyo plan de estudios estaba la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. Indudablemente, la Geografía de Montenegro y Colón era texto de estudios en su colegio, y muy seguramente en buena parte de los restantes colegios privados de ese entonces. Así, este colegio y la obra de Freire fueron polos de expansión para el conocimiento del SMD. Ha de considerarse el opúsculo de Freire entre las primeras (tal vez la primera) obras dedicadas íntegramente a la explicación del SMD en el país.

No obstante ya las nociones acerca del SMD habían aparecido impresas como parte de otras obras. Una de éstas es la *Aritmética* de Romero y Serrano, en sus ediciones venezolanas de 1836, 1840 y 1842. Este libro es en realidad una reimpresión de la obra publicada por este autor en España en 1797 y cuya edición venezolana de 1826 constituye la primera publicación de un texto de matemáticas en Venezuela (Brito, 2002; Beyer, 2013). Un estudio pormenorizado de las distintas ediciones venezolanas de la obra se encuentra en Beyer (2013).

Al respecto, Landaeta Rosales (2006) señala:

> Entendemos que **las primeras tablas de conversión del "Sistema Métrico" al sistema común, que circularon en Venezuela, fueron las contenidas en un trabajo de aritmética reimpreso en Caracas, el año de 1836 por el señor Tomás Antero**, y que había sido publicado en España en años anteriores por el señor Lucas M. Romero y Serrano.

> […].
> A éstas siguieron las publicadas por el señor Feliciano Montenegro y Colón el año de 1837, al final del tomo 4° de su *Geografía general*, las cuales, o son copias de las anteriores, o sus datos son tomados de la misma fuente, […].
> […].
> Después circularon las que trae el *Tratado elemental de aritmética* del señor Lacroix en su sexta edición, y que son obra del señor Rebollo y Morales. Esta edición se publicónen 1844 y la conversión de las medidas métricas es a las españolas, pues fue hecha en Madrid.
> Estas tablas son iguales a las citadas anteriormente, […].
> En 1852 publicó en Valencia el señor Juan B. Montenegro un tratado de Aritmética que tiene la exposición del Sistema Métrico; pero no tablas de conversión [negrillas añadidas]. (op. cit., pp. 262-263).

Esta larga cita amerita varios comentarios. Por una parte el autor atribuye el escrito sobre SMD aparecido en la *Geografía* de Montenegro y Colón a éste y no a Freire, quien realmente lo elaboró; por otra parte, establece una filiación entre este escrito y la *Aritmética* de Romero y Serrano. Beyer (2013) asevera que la única mención a una edición de 1836 de la obra de Romero y Serrano es la que hace Landaeta Rosales. Se colige de lo expuesto por Landaeta Rosales que un problema crucial era el de la existencia de buenas tablas de conversión entre el sistema antiguo de medidas y el SMD, y viceversa. Además, hay que acotar que Rebollo Morales era un español que tradujo a Lacroix. En este breve recuento histórico se manifiesta claramente el rol de primerísima importancia que adquirieron los libros como difusores del SMD.

Con respecto al texto de Romero y Serrano (1842) éste tiene varios agregados con respecto a la edición caraqueña de 1826, indicándose en la cubierta que se trata de una edición aumentada "con las reglas de sumar, restar, multiplicar y partir fracciones decimales, y un apéndice del nuevo sistema frances en las medidas de superficie, capacidad, peso &., con la correspondencia de las medidas y pesas inglesas con las españolas" (Romero y Serrano, 1842, Cubierta). Aparentemente esto fue realizado por el editor o por alguna persona encomendada por éste para dicha labor, y no por el autor de la obra y dicha coletilla aparece en las ediciones venezolanas (que se han podido consultar) posteriores a la de 1826.

Lo anterior indica que había un interés expreso de los editores para difundir el SMD.

Adicionalmente esta obra, de acuerdo con el estudio de Beyer (2013), fue declarada texto en varias Provincias del país. Por lo tanto, se convirtió en un importante portador del conocimiento en torno al SMD.

Por otra parte, un conjunto de obras foráneas, algunas con ediciones venezolanas jugaron un importante papel en el tema que nos ocupa. Cabe destacar aquí, además de la ya mencionada de Romero y Serrano, la *Aritmética* de Lacroix. Este libro jugó un importante papel en lo que a la introducción y difusión del SMD se refiere. Circuló en ediciones extranjeras (en francés y traducidas al castellano) y tuvo al igual que la obra de Romero y Serrano ediciones venezolanas, sirviendo además de modelo para muchos de los textos de autores autóctonos. La primera edición nacional se hizo en 1839. Un detallado estudio de la influencia de Lacroix en Venezuela aparece en Beyer (2016a), mostrando la difusión de la obra y la influencia de este autor galo en la nación suramericana.

Otros textos foráneos que influyeron notoriamente en el ámbito venezolano fueron los de Vallejo. Su *Aritmética de niños* era vendida en Caracas (p. e. en 1841 en el Almacén de Damirón y Dupouy, y en 1880 por la Librería Española de L. Puig Ros); mientras, su cartilla *Explicación del Sistema Decimal o Métrico, aplicado a las pesas, medidas y monedas*, opúsculo que complementaba a su *Aritmética*, cuya primera edición (1840) es anterior a la aprobación del uso de dicho sistema en España (1849), y la segunda corregida y aumentada la cual salió a la luz póstumamente en Madrid en 1852, también en alguna(s) de sus ediciones circuló por estas tierras. Esta temática la introdujo Vallejo en su *Tratado elemental de Matemáticas*. A su vez, el SMD aparece incorporado como un apéndice en la 5ª edición del *Compendio de matemáticas puras y mixtas*, publicada por sus herederos en 1855, obra que era vendida ese mismo año por la Imprenta y Librería de Carreño Hermanos y, en 1880, por la Librería Española de L. Puig Ros.

Asimismo, lugar relevante ocupa el libro de Sarmiento sobre sistema métrico publicado en 1860 el cual influyó notoriamente sobre el autor venezolano Gualterio Chitty, aspecto que será tratado en el siguiente apartado.

Sobre la obra de Juan Butista Montenegro cabe citar lo expuesto sobre ella en el Catálogo realizado por Villegas (1974):

> Elementos de Aritmética Teórica y Práctica por Juan Bautista Montenegro. Deseoso el autor de que sus “elementos” fueran efectivamente provechosos á los niños que concurren á las escuelas, los extractó con mucha habilidad de Lacroix y otros autores, y los cuadros de _veruter y Lamotte. Fueron publicados en Valencia, en 1844, se han hecho diez ediciones de ellos, y sirven de texto en varios planteles (p. 60).

Así, la presencia del tema de las medidas en las obras de matemáticas, principalmente en las de aritmética y la aparición de libros dedicados específicamente al tratamiento del SMD, fue un hecho de trascendental importancia y contribuyó decididamente a la implantación del SMD en Venezuela. Esto será tratado con más detalle en el siguiente apartado.

Las medidas en los libros escolares de aritmética

La revisión de diversos textos de matemáticas que circularon por Venezuela, durante el siglo XIX, permite afirmar que en las dedicadas a la aritmética el estudio de las medidas era un tema obligatorio. A ello contribuía el hecho de que dichos libros contenían muchos contenidos y ejemplos referidos a la aritmética comercial o mercantil, en donde de manera natural era necesario el empleo de medidas. Esto ha podido constatarse desde las primeras obras nacionales de su tipo como la de Chiquito (1842) y la de Echeandía (1843).

En el libro de Chiquito (1842) el tratamiento de las medidas forma parte del Capítulo IV denominado *De las aplicaciones usuales de la aritmética*. Dicho tema se presenta vía un conjunto de tablas, comenzando con las medidas monetarias y las temporales. Posteriormente, se pasa a considerar las de longitud y las de capacidad (diferenciando las usadas para líquidos de las empleadas para áridos), cerrando con las ponderales. A los fines explicativos expone el modo de empleo o funcionamiento de la última tabla. El autor ni siquiera asoma el SMD, el cual debió serle conocido a través de la *Aritmética* de Lacroix que evidentemente consultó.

En lo que concierne a Echeandía, para el año 1874 ya habían salido de la imprenta nueve ediciones de su texto.

Hay que destacar que la obra de Echeandía siguió editándose hasta entrado el siglo XX; pero, sus editores quienes siguieron publicando el libro muchos años después de la muerte del autor, no se decidieron por incorporar plenamente el SMD y dejaron que éste coexistiera con el sistema antiguo. Mediante el método catequístico se exponen allí nociones acerca del SMD; se presentan reducciones del sistema antiguo al métrico y viceversa, existiendo en la obra una tabla de equivalencias entre ambos sistemas, así como de las métricas a las medidas de otros países; finalmente se pasa a considerar lo que él denomina "medidas corrientes en Venezuela" (Echeandía, 1896, 1926).

El prolongado tiempo que estuvo en uso este libro habla a las claras de la influencia que pudo haber tenido, básicamente en el medio educativo.

Otra obra de ese tiempo lo constituye la de Juan Bautista Montenegro, cuya primera edición data de 1844, a la cual ya hicimos referencia con anterioridad. Notoria también por sus reediciones y por incorporar el SMD, por lo menos desde la de 1852, según indica Landaeta Rosales (2006), aunque sin tablas de conversión.

Diversos libros salieron a la luz alrededor de mediados del siglo XIX. Así, por ejemplo, tenemos la obra *Tratado de aritmética elemental* de Manuel Piñero Olivero, la cual de acuerdo con Villegas (1974) fue publicado inicialmente en Valencia en 1850. La quinta salió a la luz en 1884 y la sexta en 1896 ó 1897 (el ejemplar revisado tenía dos portadas, una con un año y la otra con otro). En 1852 también Eduardo Ochoa publica en Caracas una obra que, de acuerdo con Landaeta Rosales (2006) contenía tablas del SMD, aunque él manifiesta no haber consultado el libro, sino sólo haber tenido noticias del mismo. Este texto es reseñado por Villegas (1974), pero éste no hace mención alguna a los contenidos. Por su lado, Alejandro Ibarra publica su *Compendio de Aritmética Teórica y Práctica*, obra publicada en dos partes:una, la teórica en 1855 y la otra, la práctica, en 1860. Se tiene la obra de Ramón Isidro Montes que data de 1856.

Diversas obras de aritmética publicadas mediado el siglo XIX siguieron reeditánse, algunas con cambios y adiciones y otras sin ello.

La obra del Presbítero Piñero Olivero (¿1896?/¿1897?) corresponde a la 6ª edición de una de las que fue reeditándose. Como antes se indicó, apareció inicialmente justo a la mitad de la centuria: en 1850. Villegas (1974) comenta sobre el texto que éste "contiene todo lo concerniente a la aritmética comercial" (p. 60). La obra incluye un escrito denominado *Juicio de la obra*, firmado por cuatro connotados personajes, y en el cual se asientan expresiones laudatorias acerca del texto, en particular acerca de la exposición del tema referido al SMD. Este tópico ocupa un capítulo completo del impreso, así como dedica también uno a los tópicos de aritmética comercial.

El *Compendio de aritmética práctica para las escuelas primarias* de Ramón Isidro Montes (Montes, 1896) es un libro cuya larga permanencia en el mercado de textos escolares, aunada a la notoriedad de su autor, se convirtieron en las razones que produjeron su gran influencia en el ámbito educativo. El *Privilegio* de la obra fue otorgado en Caracas y está fechado en 1856, año en el cual –según Villegas (1974)- salió la 1ª edición, publicada en Ciudad Bolívar.

La edición consultada fue la de 1873 (la 6ª), la cual se señala como aumentada y corregida. Asimismo, allí se hace mención a una 2ª edición (1862) y a una 3ª (1866); mientras que Sánchez (1946) cataloga una edición de 1896, siendo pues tanto el número de ediciones y la perdurabilidad del libro, así como la proximidad temporal entre las ediciones indicios claros de la demanda y éxito del texto. Seguramente incidió también en ello notablemente el prestigio de la *Academia de Matemáticas de Caracas*, de la cual era egresado el autor con el título de ingeniero, así como el hecho de que la obra fue evaluada por esta corporación, teniendo un informe laudatorio que se incorporó dentro del libro y adicionalmente hubo un *Resuelto* de 1856 mediante el cual **se le declara texto recomendado para la enseñanza en las escuelas primarias del país**. Ya en la *Portada* se indicaba: "Texto adoptado para las escuelas del antiguo colejio de Santo Tomás, hoy en el Colejio de Santa María, en el colejio de instrucción elemental y mercantil, y en varios otros colejios y escuelas públicas y particulares de esta capital" (Montes, 1873, *Portada*).

Es de anotar aquí que la denominación colegio, para la época, se refería a una institución de educación secundaria, que podía también ofrecer adicionalmente enseñanza primaria. Además, Santo Tomás y Santa María hacen referencia a instituciones privadas.

El tema de las medidas lo inicia con el sistema antiguo, empezando por las monedas y luego pasa a longitudes, capacidades y pesos, proporcionando unidades mayores y menores contenidas en las primeras, estableciendo las correspondientes relaciones numéricas entre las de mayor orden y las de menor orden de una misma especie. Posteriormente entra a considerar el SMD, del cual es buen conocedor por su formación profesional. En los ejercicios/problemas el autor sigue empleando el sistema antiguo de medidas, aunque en el texto presenta el SMD, lo cual es explicable ya que la primera edición (1856) es previa a la Ley que acoge al SMD (1857).

Ibarra (1860) toca el tema de las medidas al inicio de la segunda parte de su libro. Lo aborda iniciando con las medidas antiguas en uso, haciendo alusión a la Real Orden de 1801 que unificaba las medidas en España y a la Ley colombiana de 1821. Sigue mostrando algunos cuadros que permiten ver la relación entre unidades y subunidades de una especie, para finalizar exponiendo el SMD. El autor no muestra conversiones entre uno y otro sistema.

En muchos libros publicados hacia finales de la centuria (esencialmente los de aritmética), así como en reediciones de los existentes, se mantiene la mayoría de ellos a dos aguas: dejan coexistir al sistema de medidas antiguo con el SMD.

En Coronado Millán (1882) se da el caso de coexistencia de ambos sistemas, pero aún mantiene allí mucho peso el sistema antiguo de medidas, pensamos que ello se deba un poco para rendirle tributo a la tradición y además por razones de orden práctico por cuanto el SMD aún no estaba instalado en el día a día de los venezolanos y ello –entre otras cosas- podía disminuir el número de los potenciales compradores de la obra. El autor, a medida que expone, proporciona equivalencias entre los dos sistemas.

Este entrecruzamiente es a veces confuso. Así, por emplo, expone

> De líquidos
> La carga que tiene 80 ó 100 botellas.
> La botella que tiene 70 centilitros justos (p. 25).

Ni la carga ni la botella son medidas métricas, pertenecen al sistema antiguo; mientras que el centilitro sí se corresponde con el SMD. Más aún, la botella era justamente una de las medidas más ambiguas que tenía el sistema antiguo, dificultad con la que tropezó Chitty en su trabajo de 1868 y logró resolver obteniendo justamente el resultado mostrado por Coronado Millán, quien seguramente lo tomo de esa fuente.

El autor está muy consciente de lo no idóneo de las medidas antiguas por cuanto, al inicio de su exposición sobre este tópico, expresa: “Inmensa y por demas confusa es la variedad de las medidas que se usaban antiguamente; pero por fortuna van desapareciendo á la influencia del sistema decimal” (ídem).

En la obra de fines de siglo de Crespo (1893) aún se insiste mucho en explicar las medidas antiguas, presentando tablas de éstas con indicación de submúltiplos de ellas. No obstante el autor presenta el SMD y muestra la relación de las principales unidades de las medidas y pesas antiguas de Venezuela con respecto a las métricas. También coloca una nota en la cual asienta: “El maestro procurará que los alumnos se ejerciten mucho en la reducción de pesas y medidas métricas á antiguas venezolanas” (op. cit., p.116). Posteriormente, en otra nota propone: “Debe procurar el maestro que sus discípulos se ejerciten en la conversión de pesas y medidas antiguas venezolanas á kas métricas” (op. cit., p. 117).

El ejemplar consultado corresponde a la 4ª edición. Sin embargo, el *Privilegio* dado en Maracaibo esta fechado en 1855. El autor dedica la obra a José Ignacio Paz Castillo, fundador del *Colegio La Paz*. Además, se manifiesta que “esta obra fue adoptada como Texto de enseñanza en las provincias de Maracaibo, Coro, Mérida, Trujillo y Táchira. La primera es hoy el Estado ZULIA; la segunda el Estado FALCÓN, y las tres últimas forman el Estado Los

Andes" (p. s/n). Esto muestra la cobertura del libro, sumado a que del mismo se hicieron diversas ediciones Villegas (1974) indica que la 3ª se hizo en San Cristóbal en 1867.

En las postrimerías del siglo XIX, específicamente en 1895, se publicó la primera edición del *Tratado de Aritmética esencialmente práctica y nociones sobre el sistema métrico decimal*, cuyo autor es el agrimensor e ingeniero Marcos Landáez.

Es importante la mención expresa del SMD en el título de la obra y el hecho de que la misma indica en su carátula que es un "texto adoptado por la «Escuela La Verdad» y para las escuelas primarias de la República". Asimismo, contiene una Resolución fechada en 1894 y firmada por Luis Ezpelosin, a la sazón Ministro de Instrucción Pública, en la cual se asienta que el libro ha sido **declarado como uno de los textos para la enseñanza primaria en el país**. En la *Advertencia*, el autor justifa la introducción del SMD. A este respecto escribe:

> Al final de la parte de este libro dedicada á la Aritmética, damos un compendio lo más explicado posible, del Sistema Métrico Decimal. Materia esta cuyo aprendizaje es de grandísima importancia, ya por ser el sistema adoptado oficialmente en Venezuela, ya por la facilidad que ofrece para los cálculos, ya en fin, por estar tan generalizado que aun los países más refractarios á su adopción, ó lo han aceptado ya ó están en vía de aceptarlo (Landáez, 1895, p. 8).

En la 2ª edición de 1910 se repite el mismo pensamiento.

No obstante lo antes expuesto, el autor no elude la presentación de las antiguas medidas las cuales estaban aún en uso por buena parte de la población, incluidos los pequeños comerciantes interioranos. Así, encontramos todavía en la 2ª edición ejercicios (éste está expuesto bajo la denominación de "Problema") como el que sigue, en donde se usan unidades (monetarias y de longitud) antiguas:

> 1° Compré 1538 varas de cinta, á 18 centavos la vara: ¿cuántos reales debo pagar? (Landáez, 1910, p. 38).

Es interesante observar la aparición de unidades de medida asociadas a un bien específico. Un ejemplo de ello es el de la *carga de papelón* la cual, en una nota al pie (Landáez, 1895, p. 30; Landáez, 1910, p. 38), se especifica que "tiene 64 papelones".

En la 1ª edición encontramos que hace uso abundante de las medidas antiguas. Así, por ejemplo en la sección *Problemas de división* (Landáez, 1895, p. 50) las unidades empleadas son las del viejo sistema metrológico. Igual sucede con la sección subsiguiente (*Problemas misceláneos*).

En la segunda edición (Landáez, 1910), el tópico SMD es cubierto mediante los siguientes contenidos: Descripción del SMD; tipos de medidas; medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso; definición de cuadrado, de ángulo recto, de cubo; múltiplos y submúltiplos de las medidas; y, sistema monetario venezolano. Esto diferencia a esta edición de la anterior. En la primera él proporciona tablas de equivalencias entre ambos sistemas y entre distintos tipos de monedas (Landáez, 1895, pp. 62-65), las cuales quedan intercaladas entre los contenidos de las secciones referidas a *División de decimales* (pp. 59-61) y *Quebrados* (pp. 65-72). Luego el tema de las medidas es retomado en la sección *Denominados* referida a números denominados o complejos y por supuesto allí en los ejemplos aparecen nuevamente las medidas antiguas. Obsérvase pues que los contenidos de SMD parecen entreverados con otros En la 2ª edición es más plena la incorporación del SMD, a diferencia de lo que acontece con la 1ª edición, en donde sólo hay atisbos del mismo.

La declaratoria del Ministro aunada a la formación y prestigio del autor hacen presuponer que dicho texto tuvo que ejercer una notable influencia para difundir el SMD en el país. En la 2ª edición (la de 1910) se advierte que es una edición aumentada y corregida y de la revisión y comparación efectuada a ambas, quedó claro que la exposición del SMD cambió con respecto a la edición de 1895, ampliándose notablemente.

Para la conclusión del siglo puede decirse que el SMD ya está bastante instaurado en las obras didácticas, aunque no por ello dejen de presentarse eventualmente actividades que involucren medidas antiguas, lo cual es explicable en vista de que en la vidacotidiana aún prevalecía el uso del antiguo sistema metrológico.

Tomemos por caso la *Aritmética Práctica* de Miguel Páez Pumar, editada en 1900. Este autor le dedica un capítulo completo al tema, el cuarto.

El enunciado del Ejercicio 104 de la obra es: "Un mercader ha comprado 138 quintales de café á $17 quintal; vendió 79 á $23, y ganó en el resto $148: ¿Cuánto ha ganado por todo?" (Páez Pumar, 1900, pp. 41-42). Vemos que aquí usa medidas antiguas, incluso la monetaria (pesos); sin embargo, es de acotar que aún hoy en día el quintal sigue vigente en el comercio cafetero. Otros enunciados los sitúa en la realidad del momento, involucrando trenes y empleando medidas modernas (Km, Km/h, etc.).

El autor ostentaba el título de Dr. en Ciencias (equivalente a Ingeniero), lo que indica que era un conocedor profundo de la temática. Asimismo, fundó el Colegio Agustín Aveledo y la Librería Moderna.

Al igual que otros textos ya comentados, éste fue empleado en diversos colegios lo cual se indica en la *Portada*: Santa María, Agustín Aveledo, San Agustín, San Vicente de Paúl, San José de Tarbes, todos ellos planteles privados sitos en Caracas; además estaban el Cajigal ubicado en Valencia y fuera de las fronteras patrias el Baralt, en Curaçao. Lo anterior permite considerar la influencia que tal libro tuvo en su momento.

Otras obras a ser mencionadas son los textos escritos expresamente para la enseñanza de la aritmética comercial o mercantil, rama dentro de la cual se emplean profusamente las medidas. En este sentido cabe destacar dos obras en particular: *Aritmética para el uso de las escuelas de Venezuela* (Malo, 1847) y *Aritmética comercial de reglas breves para todos los cálculos que se efectúan con los números* (Iradi, 1874). Evidentemente, por la época de su publicación, la primera de las obras usa exclusivamente medidas antiguas y las tablas mostradas se refieren solamente a conversiones que las involucren. Por su parte, en la segunda es apenas en la página 19 cuando se menciona una unidad métrica y luego en las páginas 20 y 45. La obra emplea esencialmente medidas monetarias y en los pocos casos en que requiere otro tipo de medidas emplea las antiguas. Como estas obras tienen una orientación hacia el uso práctico, el de la actividad comercial, es de observar que para 1874 estaba muy instalado en la sociedad venezolana el viejo sistema de medidas. Un estudio comparativo entre ambas obras lo realizó Beyer (2017).

Vale la pena acotar aquí un punto importante referido a la enseñanza de los sistemas de medidas. La exposición del sistema de medidas antiguo imponía necesariamente el tratamiento de los *números complejos o denominados*. A diferencia de ello, la exposición del SMD amerita sólo el estudio de las fracciones decimales. Así, en muchas de las obras se encuentra el estudio de ambos (denominados y decimales). El estudio de los números denominados implicaba una enorme inversión de tiempo y el aprendizaje de un buen número de equivalencias entre unidades de distinto orden: p. e. conocer que en el peso para especies, mercancías y metales (salvo el oro y la plata), 36 granos hacen 1 adarme; 16 adarmes 1 onza; 16 onzas 1 libra; 25 libras 1 arroba; 4 arrobas 1 quintal (Malo, 1847). Pero, en las medidas para áridos se tiene que 4 ochavillos hacen 1 ochavo; 4 ochavos 1 cuartillo; 4 cuartillos 1 celemín o almud; 12 almudes 1 fanega; 12 fanegas 1 cahiz (ídem). Puede apreciarse que no existe ninguna regla o sistematicidad en las subdivisiones y, en consecuencia, la única forma de aprendizaje consistiría en la memorización. Toda esta complejidad se evita dentro del SMD donde siempre nos movemos de 10 en 10. Debía pues, enseñarse las cuatro operaciones básicas para tales números. Adicionalmente el asunto se complicaba por el hecho de que había medidas de capacidad para líquidos y unas diferentes para áridos; así como no existía un valor uniforme para una misma medida. Sobre esto último es ilustrativo el siguiente ejemplo: Expone Alvarado (1923) que la carga de papelón varía en extremo, siendo en Barcelona 80 piezas (200 libras), en Coro 40 piezas (140 libras), en Guanare 160 piezas (240 libras), es decir que varía tanto el número de piezas como el peso de cada una.

Las medidas en los libros que tratan exclusivamente el SMD

Las obras que dan un vuelco a la situación son aquellas dedicadas única y exclusivamente a la exposición del SMD. Éstas empezaron a surgir relativamente temprano, como la ya mencionada de Freire (1837).

Existen referencias a diversas obras didácticas sobre el tema. Así, el destacado educador tachirense Juan de Dios Bustamante Rosales publicó en San Cristóbal, en 1873, sus *Lecciones de Sistema Métrico Decimal*. Otra de tales obras es *Lecciones de Sistema Métrico*, publicado en 1883, en Valencia, por el Dr. Gonzalo Fajardo quien era profesor del Colegio Ramírez de dicha ciudad.

El timón del asunto fue tomado por varios egresados de la *Academia de Matemáticas*, titulados como ingenieros por dicha corporación: Francisco de Paula Acosta y Florencio Oviedo; Gualterio Chitty; Jesús Muñoz Tébar.

Trataron estos autores de llenar el vacío denunciado por Landaeta Rosales (2006): "Uno de los inconvenientes que se presentaban para poner en ejecución la ley de 1857, era la falta de unas tablas de conversión que tuviesen toda la precisión y claridad que se requería" (p. 266).

Este tema, el de las tablas de conversión, fue abordado por Francisco de Paula Acosta y Florencio Oviedo. Estos ingenieros eran egresados de la *Academia de Matemáticas* y el primero incluso fue docente en dicho plantel. Ellos elaboraron una de las primeras obras dedicadas a la metrología: *Explicación del Sistema Métrico Decimal. Acompañada de tablas para la correspondencia entre las nuevas y las viejas medidas*, libro que fue impreso en Caracas en 1862.

No se ha podido acceder a la importante obra escrita por estos destacados ingenieros.

Informa Landaeta Rosales (2006) que

> En los números 3 y 4 de la *Revista Científica del Colegio de Ingenieros de Venezuela*, correspondientes al 5 y 20 de febrero de 1862, publicó el mismo doctor Francisco de Paula Acosta, dos artículos sobre metrología en uno de los cuales establece las bases para unas tablas de conversión del Sistema Métrico al coún (pp. 265-266).

Sin embargo, las tablas elaboradas por estos autores contienen ciertas imprecisiones, según expone Landaeta Rosales (2006).

Una mención muy especial merece la obra de Gualterio Chitty. Se trata de impreso que lleva por título *Sistema métrico. Exposición completa, teórica i sobre todo práctica de este sistema, con tablas para las reducciones de las antiguas pesas i medidas a las nuevas y viceversa. Destinado especialmente al comercio i a las escuelas de los Estados Unidos de Venezuela* (Chitty, 1868). Como puede apreciarse desde el mismo título de la obra el escrito tenía por destinatarios dos ámbitos disímiles: el del comercio y el escolar. Puede notarse aquí claramente el estrecho nexo del tema con la realidad económica y socio-política del momento: el desarrollo de la economía había alcanzado un nivel que requería el empleo de un sistema de medidas más preciso, uniforme, sin las inconsistencias que presentaba el sistema antiguo de medidas y ello ameritaba poder aplicarlo en la práctica diaria, lo cual hacía indispensable la construcción de unas buenas tablas que relacionaran el viejo y el nuevo sistema.

La guía de Chitty para la ejecución de esta tarea fue sin duda, y así lo manifiesta él mismo, la obra de Domingo Faustino Sarmiento. Incluso, aclara el autor seguir la ortografía que emplea el argentino. La deuda intelectual con Sarmiento la expone señalando que

> Entre las muchas obras que tratan de la materia no podríamos acertar mejor que escojiendo para la base de nuestros trabajos la publicada por órden del señor Domingo F. Sarmiento, Ministro de Gobierno de Buenos Aires, i sobre la cual está calcada, por decirlo así, esta noticia (Chitty, 1868, *Advertencia*, p. s/n).

Con respecto a la obra argentina es de anotar, como acotación al margen, que en realidad ésta es de la autoría de Sarmiento, de acuerdo con una investigación que hemos realizado, la cual aún no está publicada, aseveración para la cual tenemos sólidos argumentos a pesar de que en comunicaciones sostenidas con diversos entes y estudiosos de la nación austral éstos no aceptan esta posibilidad, amparándose en que dicho escrito no aparece en las Obras Completas (que en realidad no son tales) de Sarmiento. Sin embargo, no es éste el lugar para ahondar sobre el tema el cual se escapa a los objetivos del presente trabajo.

El escrito de Chitty está estructurado en cuatro capítulos, a saber:

I. Noticia sobre el sistema métrico
II. Pesos y medidas de Venezuela, con los correspondientes pesos y medidas métricos.
III. Ventajas del sistema métrico
IV. Conversión de las antiguas pesas y medidas a las nuevas y recíprocamente.

Sobre esta obra Landaeta Rosales (2006) expresa que "fue examinada por varias comisiones nombradas al efecto, y no habiéndosele encontrado ningúnerror, el Gobierno dispuso se enseñase por ella en todas las escuelas, y que sus cálculos se tuviesen como oficiales en las oficinas de Hacienda y contabilidad" (p. 268). Es decir, Chitty llenó el vacío existente referido a las tablas de conversión y ese fue su gran aporte. Parte de la obra, lo referido a las noticias acerca del SMD y sus ventajas las calcó de Sarmiento.

Uno de los aspectos más difíciles del asunto, al cual se enfrentó Chitty, era determinar el equivalente métrico de la *botella*; sin embargo, logró superar este escollo.

Una obra posterior se debe a Jesús Muñoz Tébar (1847-1909) quien publicó en 1873, en Caracas, su *Catecismo del Sistema Métrico Decimal para uso de las escuelas de la República*. De acuerdo con Sánchez (1946), en 1889, en Puerto Cabello, salía la 5ª edición y en 1910 (póstumamente) la 6ª en Caracas. Sin embargo, tenemos a la mano una 5ª edición fechada 1897. Posiblemente ésta se trate de una reimpresión de la de 1889. Beyer (2012) menciona la edición 11ª de 1832.

En su catálogo de 1905 la Librería Española, refiriéndose a este texto, resalta que "este libro está adoptado como texto de enseñanza en los principales colegios de Venezuela" (Librería Española, 1905, p. 39). Asimismo, la obra ya la ofrecía esta empresa en su catálogo de 1884 y en el de Rojas Hermanos de ese mismo año aparecía a la venta, especificando en éste que se trataba de la 4ª edición. Esta última casa editorial lo anunciaba como edición propia en su catálogo de 1874 (evidentemente se trataba de la 1ª edición). En la edición consultada (Muñoz Tébar, 1897) hay una "Advertencia de los editores en la segunda edición" fechada en 1875 y firmada por Rojas Hermanos.

En la *Advertencia* antes mencionada se asienta que

> En menos de dos años se ha agotado la primera edición […, y aceptado desde su aparición como texto de enseñanza en todos los colegios y escuelas de la República […], su autor ha querido ensancharlo en una segunda edición, modificando el método expositivo y aclarando todo aquello que contribuya á la comprensibilidad de la doctrina y á los resultados de la práctica (Rojas Hermanos, 1875, p. 5).

El texto lleva la denominación de *catecismo*, y como su nombre lo indica, esa ha debido ser la presentación del mismo en su primera edición. La que tenemos a la mano (la de 1897) ya no es un catecismo: ha sido modificado el método de presentación de los contenidos. Ha eso seguamente se refieren los editores cuando expresan que el autor modificó el método expositivo. La presencia de un cuestionario asociado directamente con la exposición hace que Beyer (2012) la clasifique como un *cuasi-catecismo*.

Como puede apreciarse, la obra sufrió cambios a lo largo del tiempo, en principio realizados por su autor. Eventualmente pudiera haber habido modificaciones posteriores, aunque en este caso serían atribuibles a los editores, por cuanto el autor falleció en 1909 y la obra siguió editándose póstumamente.

El autor fue un personaje muy importante para la época, ostentando el cargo de ministro en varios despachos del ejecutivo, fue rector de la Universidad Central de Venezuela, ingeniero activo, docente, director de una escuela pública experimental, Director de Instrucción Primaria, entre otras cosas. Su libro propagó enormemente el SMD en virtud de la extensión temporal de su uso, del peso intelectual del autor y de la influencia ejercida por Muñoz Tébar en distintos ámbitos de la sociedad.

La estructura de la obra es

I. Nociones Preliminares
II. Medidas delongitud
III. Medidas de superficie
IV. Medidas de volumen y de capacidad
V. Medidas de peso
VI. Sistema monetario
VII. Forma y dimensiones de algunas medidas
VIII. Errores tolerables en las pesas y medidas
IX. Operaciones aritméticas
Repaso
Tablas
Ejercicios
Problemas
Conversión de monedas
Apéndice

El cuerpo del texto lo conforman los nueve capítulos o apartados numerados, el resto son una especie de anexos o complementos.

Puede aseverarse que, amén del sentido evidente propagandístico de los primeros editores –Rojas Hermanos-, su afirmación del extenso uso del texto es cierta, pues esto se corrobora por su aceptación durante un largo período de tiempo, lo cual ameritó la multiplicidad de ediciones que tuvo, algunas agotadas rápidamente.

Ya con anterioridad se había venido advirtiendo que uno de los principales escolloes para la aplicación práctica del SMD consistíe en la necesidad de poseer adecuadas tablas de converción entre las viejas medidas y las modernas. En ese sentido diversas personas se dedicaron a subsanar esta carencia. Uno de los trabajos realizados en pro de esto fue el de Alfredo Pacheco, quien publicó en 1894 un folleto denominado *Guía práctica de reducciones de monedas y otras medidas al alcance de los niños* (Pacheco, 1894).

Como su nombre lo indica, el énfasis está puesto en la conversión entre distintos tipos de moneda y, en segundo plano, se dedica a realizar conversiones entre el sistema antiguo de medidas y el SMD, considerando las medidas lineales, las de capacidad, las de peso; así como también aborda la conversión entre diferentes medidas del sistema antiguo (unidades superiores a inferiores y viceversa) y además estudia las medidas de tiempo.

La exposición que realiza el autor es un claro indicativo que para ese entonces el sistema antiguo de medidas tenía aún plena vigencia en la práctica, en la vida cotidiana. Asimismo, a pesar de que el folleto en su título señala a los niños como destinatarios de la obra se hace evidente su utilidad para los comerciantes.

Algunas conclusiones relevantes

De seguidas se indican las princcipales conclusiones a las que codujo la indagación:

- La necesidad de introducir el SMD en el país surgió como una consecuencia del desarrollo alcanzado por las necesidades locales del comercio y el papel del país dentro del ámbito de la expansión en el orbe del modo de producción capitalista.
- La introducción del SMD en Venezuela estuvo expuesta a muchas resistencias por distintos sectores de la sociedad. Asimismo, los avatares políticos fueron un factor retardatario en la aplicación del sistema una vez aprobado legalmente su uso en 1857.
- Un papel de primerísima importancia en el proceso de incorporación del SMD, a la sociedad en general y al ámbito escolar en particular, lo tuvieron dos instituciones: la *Dirección General de Instrucción Pública*

(creada en 1838) y la *Academia de Matemáticas de Caracas* (creada en 1830); la primera mandando a evaluar ciertas obras (proceso generalmente realizado por la Academia) y decretando el uso en las escuelas y colegios de aquellas aprobadas. La segunda evaluando obras mediante comisiones nombradas en su seno y por medio de la redacción de obras de aritmética y sistema métrico por parte de varios de sus ilustres egresados, así como la participación de varios de sus docentes y egresados (comenzando por Cagigal), en diversas instancias (incluída la legislatura), en las discusiones que conllevaron a la aprobación por ley del uso del SMD en el país.

- La Ley de 1857, Decretos como el de Guzmán Blanco en 1870 y otros instrumentos legales obligaban al uso del SMD dentro del ámbito escolar.
- El estudio del SMD fue incorporado al currículo, en buena parte mediante el uso de las obras escolares. En el plan de estudios el SMD a veces formaba parte de los contenidos de aritmética y en otras oportunidades era un tema relativamente independiente.
- Los textos escolares, escritos por autores nacionales, fueron un factor determinante en la implantación del SMD en el país. Los textos iniciales eran obras de aritmética que incluían el SMD, pero luego surgieron libros específicos sobre el tema. Entre éstos últimos destacaron los escritos de Chitty (1868) y Muñoz Tébar (1897).
- Un conjunto de obras extranjeras, algunas editadas en el país, cumplieron un notorio papel en la implantación y difusión del SMD en Venezuela. Entre éstas resaltan las de Romero y Serrano, Lacroix, Vallejo y Sarmiento.
- Los textos escolares son un producto de la TD, pero en los seleccionados ésta se realizó básicamente en otras latitudes, siendo poco el aporte autóctono a este proceso, deviniendo en consecuencia –por la servidumbre a ideas foráneas- a ser un **producto cultural ajeno**. Incluso ello es notorio en los textos realizados por autores nacionales ya que el conocimiento matemático vertido allí, en particular lo relativo a medidas

y SMD, era extractado y/o seguía muy de cerca el saber expuesto en ciertas obras extranjeras, de autores de renombre, que circularon en el país.

- Muchas de las obras didácticas que sirvieron para la introducción y difusión del SMD fueron escritas en la modalidad de catecismos (preguntas/respuestas); el tratamiento del tema era esencialmente de tipo calculístico, enfatizando en lo práctico, con abundantes ejercicios de cálculo destinados a la realización de reducciones más o menos prolijas entre las antiguas medidas y las nuevas, así como en las relaciones existentes entre una unidad, sus múltiplos y submúltiplos; el enfoque obligaba a un aprendizaje de tipo memorístico; asimismo, existía una notoria ausencia de ilustraciones así como de la explicación y uso de los instrumentos de medida.
- La introducción del SMD en la escuela, y en las obras didácticas, involucró cambios en la enseñanza de la aritmética, siendo el más notorio la preponderancia del estudio de las fracciones decimales y la pérdida de importancia de los números complejos o denominados, originando con ello una mayor destreza en los alumnos en lo relativo a las operaciones con las fracciones decimales.
- Una temática no discutida en este escrito es el papel de otras obras, como las que tratan de teneduría de libros, en este proceso de implantación del SMD. Tampoco fue abordado el interesante tema de la relación de la introducción del SMD con la conformación de la República.
- La dificultad de encontrar, para su respectiva consulta, buena parte del material original, es una dificultad intrínseca a este tipo de investigaciones.

Referencias

Abad, L. y otros. (1984). *Organización y consolidación del sistema educativo (1830-1935). La educación en Venezuela 2*. Caracas Centro de Reflexión y Planificación Educativa (CERPE).

Alvarado, L. (1023). Pesas y medidas usados en Venezuela. Revista del Colegio de Ingenieros de Venezuela, 1(2), 26-30.

Arboleda, L. C. (2014). Introducción del Sistema Métrico Decimal en Colombia a mediados del siglo XIX. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *9*(12), 73-86.

Arboleda, L. C. (2015). Élites, medidas y Estado en Colombia en la primera mitad del siglo XIX. Orden republicano y sistema métrico decimal.En: H. Quinceno Castrillón (Comp.). *La nación imaginada. Ensayos sobre los proyectos de nación en Colombia y América Latina en el siglo XIX*. Cap. 5 (pp. 177-230). Cali: Universidad del Valle. Disponible en: http://www.digitaliapublishing.com/a/44052/.

Azorin, F. (1972). *Curso de muestreo y aplicaciones*. Madrid: Aguilar.

Barral, B. de (1979). *Diccionario castellano-warao*. Caracas: El Autor.

Barreto de Brito, J. F. (2017). A gestação do sistema métrico decimal no mundo e no Brasil. *Anais do Encontro Nacional de História Política*, Universidade Estadual do Ceará. Disponible en: http://uece.br/eventos/gthpanpuh/anais/edicao_2017.html.

Beyer K., W. O. (2012). *Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969*. La Paz, Bolivia: Instituto Internacional de Integración Convenio "Andrés Bello"-Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM).

Beyer K., W. O. (2013). La Aritmética de Romero y Serrano: Primer libro de matemáticas impreso en Venezuela. *Paradigma*, *34*(2), 109-122.

Beyer K., W. O. (2016a). La influencia de Sylvestre-François Lacroix en la matemática venezolana decimonónica. *HISTEMAT- Revista de História da Educação Matemática*, *2*(3), 229-255.

Beyer K., W. O. (2016b). *Una excursión antropomatemática o la cuadratura de la rueda*. Caracas: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM).

Beyer K., W. O. (2017). Análisis y comparación de dos obras de aritmética comercial en la venezuela decimonónica. En: Tulio Ramírez (Compilador). *El Texto Escolar Diferentes Miradas*, Cap. 1, (pp. 17-33). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas. Escuela de Educación, UCV.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.

Bonfil Batalla, G. (1991). Lo propio y lo ajeno: Una aproximación al problema del control cultural. En G. Bonfil Batalla (1991). *Pensar Nuestra Cultura* (pp. 49-57). México D.F.: Editorial Patria.

Brito, O. (2002). *Los libros de matemáticas en la Venezuela del siglo XIX*. Trabajo de Grado de Licenciatura (no publicado), Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Brito Figueroa, F. (2005). *Historia económica y social de Venezuela. Tomo I*. Caracas: Ediciones de la Biblioteca, Universidad Central de Venezuela.

Cagigal, J. M. (1839a). Pesas y medidas. Primer artículo. En: L. Correa (Comp.). (1956). *Juan Manuel Cagigal. Escritos literarios y científicos* (pp. 133-141). Caracas: Imprenta Nacional.

Cagigal, J. M. (1839b). Pesas y medidas. Segundo artículo. En: L. Correa (Comp.). (1956). *Juan Manuel Cagigal. Escritos literarios y científicos* (pp. 143-147). Caracas: Imprent Nacional.

Cardozo Galué, G. (s/f). *Maracaibo en el siglo XIX. Historia para todos 2*. Caracas: Historiadores SC.

Carlós, L. (2002). *Algunas consideraciones en torno al análisis de textos escolares*. Centro de Estudios en Investigación y Documentación Educativa (CEIDE). Disponible en: http://www.fhumyar.unr.edu.ar/ceide/a1.htm.

Castellanos, R. R. (2017a). *Historia de las librerías en Venezuela (1607-1900). Tomo I*. Caracas: Instituto Autónomo Centro Nacional del Libro.

Castellanos, R. R. (2017b). *Historia de las librerías en Venezuela (1607-1900). Tomo II*. Caracas: Instituto Autónomo Centro Nacional del Libro.

Chervel, A. (1991). Historia de las disciplinas escolares. *Revista de Educación*, *295*, 59-111.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chiquito, M. (1842). *Compendio de aritmética razonada según Lacroix y otros autores*. Caracas: Imprenta de "El Venezolano".

Chitty, G. (1868). *Sistema métrico. Exposición completa, teórica i sobre todo práctica de este sistema, con tablas para las reducciones de las antiguas pesas i medidas a las nuevas y viceversa. Destinado especialmente al comercio i a las escuelas de los Estados Unidos de Venezuela*. Caracas: Establecimiento Tipográfico de Melquíades Soriano.

Choppin, A. (2000). Pasado y presente de los manuales escolares. En: Julio Ruiz Berrío (Ed). (2000). *La cultura escolar en Europa. Tendencias históricas emergentes* (pp. 107-165). Madrid: Editorial Biblioteca Nueva.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

Colubi, R. de (1978). *Metrología*. Caracas: Fondo de Desarrollo Metrológico, Servicio Nacional de Metrología Legal.

Congreso General de Colombia. (1821). Ley de 11 de octubre sobre uniformidad de pesos y medidas. En: *Cuerpo de Leyes de la República de Colombia (1961)* (pp. 95-96). Caracas: Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico.

Congreso de la República de Venezuela. (1857a). Ley del 13 de febrero de 1857. En: R. de Colubi. (1978). *Metrología* (pp. 133-134). Caracas: Fondo de Desarrollo Metrológico, Servicio Nacional de Metrología Legal.

Congreso de la República de Venezuela. (1857b). Ley del 13 de febrero de 1857. En: Academia de Ciencias Políticas y Sociales (1982). *Leyes y Decretos de Venezuela 1851-1860. Tomo 3* (pp. 537-538). Caracas: Biblioteca de la Academia de Ciencias Políticas y Sociales.

Consejo de Instrucción del Distrito Federal. (1911). Programas provisionales de enseñanza primaria para las escuelas federales de la República. En: Ministerio de Instrucción

Pública. (1912). *Memoria de 1911. Tomo I* (pp. 74 y sigs.). Caracas: Imprenta Nacional.

Coronado Millán, B. (1882). *Aritmética práctica*. Caracas: Imprenta Bolívar.

Crespo, J. M. (1803). *Aritmética razonada. Escrito rara (SIC) niños*. Cúcuta: Imprenta Liberty.

Dalmau Carlés, J. Mª. (1969). *Aritmética razonada y nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado*. Gerona: Dalmau Carlés, Pla. S. A. Editores.

D´Ambrosio, U. (1986). *Da realidade a ação. Reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo, Summus-Campinas: Editorial da Universidade Estadual de Campinas.

Durán, D. (2003). *La geometría euclidiana*. Maracaibo: Ediciones Astro Data S. A.

Echeandía, M. Mª. (1896). *Compendio de aritmética razonada. Extractada de los mejores autores para el uso de los jóvenes que asisten a los colegios y a las escuelas de primeras letras*. Caracas: Librería Española.

Echeandía, M. Mª. (1926). *Compendio de aritmética razonada. Extractada de los mejores autores para el uso de los jóvenes que asisten a los colegios y a las escuelas de primeras letras*. Caracas: Librería Española.

Engels, F. (1978). *El papel del trabajo en la transformación del mono en hombre*. Medellín: Ediciones Hombre Nuevo.

Gómez, J. V. (1912). Decreto de 18 de mayo de 1912 por el cual se declara obligatoria en la República la práctica del sistema métrico decimal y su nomenclatura. En: Academia de Ciencias Políticas y Sociales (1993). *Leyes y Decretos de Venezuela 1912. Serie República de Venezuela 35* (pp. 39-40). Caracas: Biblioteca de la Academia de Ciencias Políticas y Sociales.

González Raposo, Mª. del S. (1990). *Orígenes de la medida*. Mérida: Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico y Consejo Editorial de la Universidad de Los Andes.

Guzmán Blanco, A. (1870). Decreto de instrucción pública gratuita y obligatoria. En: R. J. Velásquez (Dir.). (1989). *Documentos que hicieron historia 1810-1989. Vida republicana de Venezuela. Tomo II De la Revolución Azul a nuestros días (1868-1961)* (pp. 22-35). Caracas: Ediciones de la Presidencia de la República.

Hölldobler, B. y Wilson, E. O. (2014). *El superorganismo. Belleza y elegancia de las asombrosas sociedades de insectos*. Buenos Aires/Madrid: Katz Editores/Clave Intelectual, S. L.

Ibarra, A. (1860). *Compendio de aritmética. Teórica y práctica* [Parte práctica]. Caracas: Imprenta de Jesús María Soriano.

Iradi, R. (1874). *Aritmética comercial de reglas breves para todos los cálculos que se efectúan con los números*. Caracas: Rojas Hermanos, Libreros-Editores.

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres*. México: Siglo Veintiuno Editores.

Landaeta Rosales, M. (2006). *Riqueza circulante en Venezuela*. Caracas: Fundación La Casa de Bello.

Landáez, M. V. (1895). *Tratado de Aritmética esencialmente práctica y nociones de sistema métrico decimal*. Caracas: Tipografía Guttenberg.

Landáez, M. V. (1910). *Tratado de Aritmética esencialmente práctica y nociones de sistema métrico decimal (Segunda edición aumentada y corregida)*. Caracas: Tipografía "La Religión".

Librería Española. (1905). *Catálogo de obras de fono y algunas de surtido de la Librería Española*. Caracas: Tipografía de J. M. Herrera Irigoyen y CA.

Malo, R. (1847). *Aritmética comercial para el uso de las escuelas de Venezuela*. Caracas: Imprenta Boliviana.

Ministerio de Instrucción Pública. (1911). Resolución aprobando los Programas provisionales de enseñanza primaria para las escuelas federales de la República. *Gaceta Oficial N° 11.483, del 9 de diciembre de 1911*.

Ministerio de Relaciones Esteriores. (1862). Circular á los Gobernadores, ordenándoles que todos los Concejos Municipales dispongan la enseñanza del sistema métrico decimal de monedas, pesos y medidas, en las escuelas primarias, públicas y privadas. *Registro Oficial*, *Año 1*, N° 15, 113-120. Disponible en: https://archive.org/details/gacetaoficialdel1861vene/page/114.

Montes, R. I. (1873). *Compendio de aritmética práctica para las escuelas primarias*. Caracas: Rojas Hermanos, Libreros-Editores.

Mosonyi, E. E. (2008). *El indígena venezolano en pos de su liberación definitiva*. Caracas: Fundación editorial el perro y la rana. Disponible en: http://www.elperroylarana.gob.ve/wp-content/uploads/2017/08/el_indigena_venezolano_en_pos_de_su_liberacion_definitiva.pdf.

Mosterin, J. (1981). *Grandes temas de la filosofía actual. Colección Temas Clave, N° 56*. España: Salvat Editores.

Muñoz Tébar, J. (1897). *Catecismo del sistema métrico decimal para el uso de las escuelas de la República*. Caracas: Librería Española, L. Puig Ros y Hermano Libreros-editores.

Nuevo Testamento. Nashville, Tennessee: The Gideons International.

Pacheco, A. (1894). *Guía práctica de reducciones de monedas y otras medidas al alcance de los niños*. Caracas: Imprenta de "La Religión".

Páez Pumar, M. (1900). *Aritmética práctica*. Caracas: Tipografía Guttenberg/ Librería Moderna.

Picado Alfaro, M. E. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España. Disponible en: https://hera.ugr.es/tesisugr/21610903.pdf.

Picado, M. y Rico, L. (2012). La introducción del sistema métrico decimal y los libros de texto en España. *Suma*, *71*, 9-18.

Picado, M.; Rico, L. y Gómez, B. (2013). El Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas para la instrucción primaria en las Islas Canarias en el siglo XIX. *Números*, *82*, 37-53.

Piñero Olivero, M. (1897). *Tratado de aritmética elemental*. Curaçao: Imprenta de la Librería de A. Bethencourt e Hijos.

Rodríguez Castillo, L. (2000). *Pesas y medidas antiguas en Venezuela*. Caracas: Fondo Editorial Tropykos.

Rojas Hermanos. (1875). Advertencia de los editores en la segunda edición. En: J. *Muñoz Tébar (1897). Catecismo del Sistema Métrico Decimal para el uso de las escuelas de la República* (pp. 5-6). Caracas: Librería Española, L. Puig Ros y Hermano Libreros-Editores.

Romero y Serrano, L. Mª. (1842). *Lecciones de aritmética, puestas en forma de diálogo*. Caracas: Valentín Espinal.

Sánchez, M. S. (1946). *Bibliografía de obras didácticas publicadas en Venezuela o por autores venezolanos en el extranjero*. Caracas: Tipografía Americana.

Santa Biblia. (1960). Colombia: Sociedades Bíblicas Unidas.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 4151.

Sistema Autónomo Nacional de Normalización , Calidad, Metrología y Reglamentos Técnicos (SENCAMER). *Portal*. Disponible en: http://www.sencamer.gob.ve/sencamer/documents/historia.htm.

Struik, D. (1960). *La matemática. Sus orígenes y desarrollo*. Buenos Aires: Siglo Veinte.

Talancón Escobedo, J. L. (2006). El Sistema Métrico Decimal y la lucha por la hegemonía mundial. *Este País*, N° 185, 24-28. Disponible en: http://132.248.130.124/ejerciciost/sist.html.

Talancón Escobedo, J. L. (2008). *Historia y sociología de la ciencia*. Introducción. Universidad Nacional Autónoma de México, Secretaría de Desarrollo Institucional. Disponible en: http://132.248.130.124/ejerciciost/intro.html.

Torrealba, G. (2018). Las estaciones sarrapieras: los Mapoyo y las economías extractivas del Orinoco Medio, Venezuela. *Boletim do Museu Paraense Emilio Goeldi. Ciências Humanas*, *13*(2). Documento en línea. Disponible en: https://www.redalyc.org/jatsRepo/3940/394056633003/html/index.html.

Travers, Robert. (1986). *Introducción a la investigación educacional*. Barcelona, España: Ediciones Paidós.

Urdaneta, R. (1997). *Diccionario general de los indios Cuicas*. Trujillo-Caracas: Sociedad de Amigos de la Biblioteca Pública "Mario Briceño Iragorry".

Vallejo, J. M. (1840). *Explicación del sistema decimal, ó métrico francés*. Madrid: Imprenta de Garrasallaza-Librería de la Publicidad. Disponible en: http://www.adurcal.com/enlaces/mancomunidad/guia/persohisto/vallejo/index.htm.

Viedma C., J. A. (s/f). *Lecciones de geometría intuitiva*. Colombia: Editorial Norma-McGraw-Hill.

Vilda, C. (1997). Proceso a la cultura en Venezuela III. Siglo XX. *Curso de Formación Sociopolítica, 31*. Caracas: Fundación Centro Gumilla.

Villegas, G. T. (1974). Instrucción popular. En: R. F. Seijas (Comp.) (1974). *Primer libro venezolano de literatura, ciencias y bellas artes* (pp. 55-63). Caracas: Concejo Municipal del Distrito Federal.

Zumeta, C. (1914). Resolución de 13 de febrero de 1914 por la cual se reglamenta el uso y práctica del sistema métrico decimal. En: Academia de Ciencias Políticas y Sociales (1994). *Leyes y Decretos de Venezuela 1914. Serie República de Venezuela 37* (pp. 41-45). Caracas: Biblioteca de la Academia de Ciencias Políticas y Sociales.

Autor
Walter O. Beyer K.
Doctorado en Educación, con énfasis en Educación Matemática. Magister en Enseñanza de la Matemática, Licenciado en Matemáticas. Ex Presidente de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. Área principal de investigación: Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática en Venezuela. Universidad Nacional Abierta, Caracas, Venezuela.
ORCID: 0000-0003-1726-7994. E-mail: nowarawb@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p88-115.id833

EL USO DEL AMBIENTE VIRTUAL CREPHIMAT PARA PROMOVER LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Luis Andrés Castillo B.[1]
luiscastleb@gmail.com

Iran Abreu Mendes[1]
iamendes@gmail.com
[1]*Universidade Federal do Pará*

Recibido: 29/10/2019 **Aceptado:** 15/01/2020

Resumen
Este artículo describe la experiencia de materialización del ambiente virtual interactivo denominado Centro Brasileño de Referencia en Pesquisas sobre Historia de las Matemáticas – CREPHIMat. Experiencia que se origina a resultados parciales de un trabajo de maestría, vinculado al cumplimiento de objetivos específicos de dos macro proyectos, el primero intitulado: História para o Ensino da Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2018), el segundo llamado: Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática. Dichos proyectos son financiados por el Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) y sobre la coordinación del Prof. Dr. Iran Abreu Mendes. Algunos de los resultados obtenidos se refieren a la constitución de un gran acervo de producciones académico-científicas originadas en Brasil que traten sobre la historia de la matemática para el periodo de 1990-2018, unos 2000 archivos, entre Tesis, Disertaciones, artículos de revistas, memorias de congresos, libros de minicursos, productos educativos, materiales didácticos y demás producciones dirigidos a estudiantes, profesores y pesquisadores interesados en la historia de las matemáticas. Ademas se destacas algunas métricas y evaluaciones parciales del impacto que ha tenido el CREPHIMat desde su lanzamiento en agosto del 2019.
Palabras clave: CREPHIMat, ambientes virtuales, Historia de las Matematicas, repositorio.

THE USE OF THE VIRTUAL CREPHIMAT ENVIRONMENT TO PROMOTE HISTORY IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract
This article describes the experience of materialization of the interactive virtual environment called Brazilian Reference Center for Research on the History of Mathematics - CREPHIMat. Experience that originates from partial results of a master's work, linked to the fulfillment of specific objectives of two macro projects, the first titled: Historia para o Ensino da Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2018), the second called: Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática. These projects are financed by the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) and on the coordination of Prof. Dr. Iran Abreu Mendes. Some of the results obtained refer to the constitution of a great collection of academic-scientific productions originated in

Brazil that deal with the history of mathematics for the period 1990-2018, about 2000 archives, including Theses, Dissertations, magazine articles, congress reports, books of mini-courses, educational products, didactic materials and other productions addressed to students, teachers and researchers interested in the history of mathematics. It also highlights some metrics and partial evaluations of the impact that CREPHIMat has had since its launch in August 2019.
Keywords: CREPHIMat, virtual environments, History of Mathematics, repository.

A UTILIZAÇÃO DO AMBIENTE VIRTUAL DO CREPHIMAT PARA PROMOVER A HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Resumo

Este artigo descreve a experiência de materialização do ambiente virtual interativo denominado Centro Brasileiro de Referência para Pesquisa em História da Matemática - CREPHIMat. Experiência oriunda de resultados parciais de um trabalho de mestrado, vinculada ao cumprimento de objetivos específicos de dois projetos macro, o primeiro intitulado: Historia para o Ensino da Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2018), o segundo intitulado: Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática. Esses projetos são financiados pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e sob a coordenação do Prof. Dr. Iran Abreu Mendes. Alguns dos resultados obtidos referem-se à constituição de uma grande coleção de produções acadêmico-científicas originárias do Brasil que tratam da história da matemática para o período 1990-2018, cerca de 2000 arquivos, incluindo teses, dissertações, artigos de revistas, relatórios de congressos, livros de mini-cursos, produtos educacionais, materiais didáticos e outras produções dirigidas a estudantes, professores e pesquisadores interessados em história da matemática. Também destaca algumas métricas e avaliações parciais do impacto que a CREPHIMat tem tido desde o seu lançamento em agosto de 2019.
Palavras chave: CREPHIMat, Ambientes virtuais, História da Matemática, repositorio.

CONSIDERACIONES INICIALES

En este artículo se describen los resultados parciales de la pesquisa en fase de desarrollo del trabajo de maestría del primero autor. Tal trabajo se inscribe en dos macro proyectos[1] de investigación producidos y coordinados por el Prof. Dr. Iran Abreu Mendes y tutor académico del primer autor. Para posicionar los resultados obtenidos describiremos de manera sintetizada ambos proyectos. El primero se intitula: *História para o Ensino da Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2018)*, con este se pretende investigar las formas, significados y modalidades de abordar las producciones académicas que tratan de Historia de las Matemáticas y sus propuestas para su uso didáctico en

[1] Proyectos certificados y financiados por el *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq), Brasil.

las clases de Matemáticas. El propósito central de este primer proyecto es responder a las siguientes cuestiones ¿Cómo las de tesis y disertaciones en Historia para la enseñanza de las Matemáticas son utilizadas por los profesores de Matemáticas en las escuelas públicas de Educación Básica? ¿Cómo reciben los profesores las producciones resultantes de estos estudios? ¿Las propuestas metodológicas para la enseñanza de las matemáticas basadas en información histórica, están incluidas en los libros de texto adoptados en las escuelas de Brasil?

En cuanto al segundo proyecto, fue intitulado: *Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática*, en este se pretende describir y analizar cómo se configura el escenario histórico, epistemológico, pedagógico y patrimonial de la Historia de las Matemáticas en Brasil de 1990 a 2018. El análisis de la producción generada en la investigación en esta área de conocimiento permitirá señalar sus posibilidades de uso en la enseñanza, formación y acción de los profesores.

Estos proyectos surgen en respuesta al hecho de que hay una cantidad de producción académico-científica de historia de las matemáticas que no está llegando a las manos de los profesores de matemáticas de Educación Básica, o incluso de Educación Superior. Esta situación fue develada a partir de una investigación con una continuidad de tres décadas realizada por Mendes (Mendes, 2008, 2010, 2012, 2015, 2018a, 2018b) con el apoyo financiero del CNPq. Esta situación que evidencia un gran abismo que separa a los profesores de las producciones y de más materiales académicos es muy preocupante, ya que en las últimas décadas del siglo XX y las primeras del siglo XXI, la investigación en la historia de las matemáticas ha generado importantes contribuciones a la enseñanza de las matemáticas, destacando su potencial didáctico para apoyar la acción pedagógica de los profesores en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Para atender a las cuestiones anteriores Mendes (Mendes, 2018a, 2018b) planteo en estos proyectos los siguientes objetivos: (i) Planificar y organizar un inventario de la producción de tesis, disertaciones, libros, artículos, memorias de congresos, materiales didácticos y otras producciones didácticas para la enseñanza de las Matemáticas basadas y caracterizadas por el uso de informaciones sobre la históricas para apoyar la labor docente en las clases de Matemáticas, (ii) Clasificar y agrupar todos los materiales recolectados para componer un inventario temático organizado, de acuerdo con las tendencias enfatizadas en el material producido, (iii) Analizar las producciones sobre historia para la enseñanza de las Matemáticas, generadas en los grupos de investigación en Brasil que se ocupan de este tema de investigación, (iv) Describir los modelos teóricos surgidos de la investigación en historia para la enseñanza de las matemáticas que se centran directamente en la formación didáctica del profesor de matemáticas, y (v) Organizar el material digital a partir de las investigaciones realizadas y ponerlo a disposición de la comunidad académica en un espacio virtual de investigación e interacción.

Con los dos primeros objetivos se pretende recopilar un inventario de producciones académico-científicas de Historia de las Matemáticas en Brasil en el periodo de 1990-2018, con los siguientes dos se analizará y discutirá las producciones sobre historia para la enseñanza de las Matemáticas de modo que se puedan describir los modelos teóricos surgidos de la investigación que ofrezcan contribuciones para la enseñanza de la matemática y, finalmente, con el último objetivo se pretende material un local virtual en internet en forma de página web con el fin de difundir y diseminar el inventario temático de todas las producciones, de modo que los profesores de los diferentes niveles educativo puedan tener una vía que les permita conocer y explorar las contribuciones que estos diversos materiales tienen para apoyar su acción pedagógica en las clases de matemática.

Este espacio virtual fue concebido por Mendes (2018a) como el *Centro Brasileño de Referencia en Pesquisas en Historia de las Matemáticas* (CREPHIMat), un ambiente que además de tener la función de un repositorio digital de preservar, difundir y diseminar el inventario temático, también fue pensado para orientar y guiar a profesores en formación y en ejercicio, que el uso de informaciones histórica en las clases de Matemáticas, pueden en gran medida contribuir al logro de una enseñanza y aprendizaje significativo de las matemáticas. Además de lo anterior, se prevé que el CREPHIMat se constituya como un lugar de encuentro entre profesores e investigadores interesados en la historia de las matemáticas, que pueda ofrecer un espacio de formación para profesores de matemáticas de enseñanza primaria, secundaria y superior; y un espacio de apoyo para estudiantes de pregrado y posgrado en las áreas de matemática y enseñanza de la misma.

Con el objetivo de contribuir a una exploración didáctica y conceptual de las contribuciones de aproximadamente tres décadas de pesquisas en historia de las matemáticas, se materializo el CREPHIMat[2]. En este artículo se relata parte de la experiencia del primer autor

[2] Para acceder al ambiente virtual puede hacer clic aquí www.crephimat.com

en la materialización del centro virtual, como parte de su trabajo de maestría desenvuelto en el Programa de Posgrado en Educación en Ciencias y Matemáticas de la Universidad Federal de Pará, Brasil.

En síntesis, se pretende informar sobre esta experiencia, seguido de la descripción del proceso y organización del entorno virtual, también discutir las potencialidades del CREPHIMat y finalmente, presentar algunas métricas que permiten inferir la aceptación en la comunidad que lo circunda. En la siguiente sección se presenta el ambiente virtual, constitución del mismo y el inventario temático.

CENTRO BRASILEÑO DE REFERENCIA EN PESQUISAS EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS (CREPHIMat)

El diseño, funcionalidades y constitución del Centro Brasileño de Referencia en Pesquisas en Historia de las Matemáticas, fue inspirado en dos ambientes virtuales oriundos de Brasil, el primero de éstos es el Centro de Referencia de Modelización Matemática en la Enseñanza (CREMM), un centro de Estudio e Investigación fundado por la Profa. Dra. Maria Salett Biembengut, en este centro el equipo del CREMM coloca a disposición un Sistema de Documentación (ver Figura 1) referente a investigaciones y a prácticas pedagógicas de Modelización Matemática en la Enseñanza de los más diversos países que puedan subsidiar alumnos, profesores e investigadores (CREMM, 2006).

Figura 1. *Página inicial del sistema de documentación del CREMM*
Fuente: http://www.furb.br/cremm/espanhol/index.php

En el repositorio que el CREMM pone a disposición se encuentran los resúmenes y respectivos autores de libros, trabajos académicos (Monografía, Disertación, Tesis), artículos en memorias de congreso y de revistas y experiencias pedagógicas, como también, tienen una atención por medio de la página en Internet, para orientar a alumnos, profesores e investigadores sea para la enseñanza como para la investigación.

De la influencia del CREMM, se decidió que la materialización del CREPHIMat fuese e formato de página web, que se localizara en los servidores de la Universidad Federal de Pará, del mismo modo como el CREMM está enlazado con la universidad que arropa a este centro. Sin embargo, por cuestiones de agilizar el proceso de elaboración y puesta en marcha del ambiente se decidió optar contratar un hospedaje y dominio privado. En cuestión a la navegación y organización de las secciones del CREPHIMat, homologamos el menú lateral del CREMM, adaptándolo a los contenidos e inventario temático propio del CREPHIMat como se puede ver en la Figura 2.

Figura 2. *Página inicial del CREPHIMat*
Fuente: http://www.crephimat.com/

El diseño del CREPHIMat fue basado en las tendencias visuales y estéticas del momento que son similares al patrón que siguen los aplicativos móviles de modo que fuera atractivo y fácil de navegación para tanto los usuarios nativos de esta humanidad digital como los que son más contemporáneas a las ultimas décadas del siglo XX. Una ventaja de este diseño tecnológico digital en el CREPHIMat, que lo diferencia del CREMM, es que tiene el ambiente virtual tiene el potencial de modificar dinámicamente los elementos contemplados en su diseño, de tal modo que se ajuste a las dimensiones de la pantalla del dispositivo por el cual es accesado. Un ejemplo de esto se puede observar en la Figura 3, en la cual el CREPHIMat visualizado desde un celular inteligente (o Smartphone, por su nombre en inglés), otro ejemplo se presenta en la Figura 4, en la cual se observa la forma como un usuario visualiza el ambiente virtual desde una Tablet, estas funcionalidades del CREPHIMat hacen posible brindar a nuestra comunidad una interacción con el ambiente virtual y con el inventario temático desde cualquier dispositivo y en cualquier localidad con acceso a internet.

Figura 3. *Página inicial del CREPHIMat desde Smartphone*
Fuente: Elaboración propia de los autores

Figura 4. *Página inicial del CREPHIMat desde una Tablet*
Fuente: Elaboración propia de los autores

A pesar de que el CREMM su propio inventario temático, las informaciones disponibles de estas producciones eran especie de fichas con los datos de los autores, resumen, año de publicación, entre otras. Sin embargo, con el CREPHIMat se pretendía que además de disponibilidad estas informaciones de las producciones académicas también se colocasen a disposición el trabajo mismo. Entonces en nuestra búsqueda de un ambiente que nos diera un norte de cómo proceder en la fase de la constitución del CREPHIMat también como un repositorio digital, fuimos inspirados por el repositorio de contenido digital de la Universidad Federal de Santa Catarina (UFSC), repositorio desarrollado bajo el software libre DSpace[3].

Llegamos a este ambiente por medio de una sub-comunidad en tal repositorio denominada *História da Educação Matemática (l'Histoire de l'éducation mathématique)* (ver Figura 5) administrada del Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT) y que contempla un inventario temático para pesquisadores con interés en la Historia de la Educación Matemática (Costa & Valente, 2015). En las próximas secciones se comentarán las funcionalidades de este repositorio que fueron adoptadas para organizar y disponibilidad el inventario temático en el CREPHIMat.

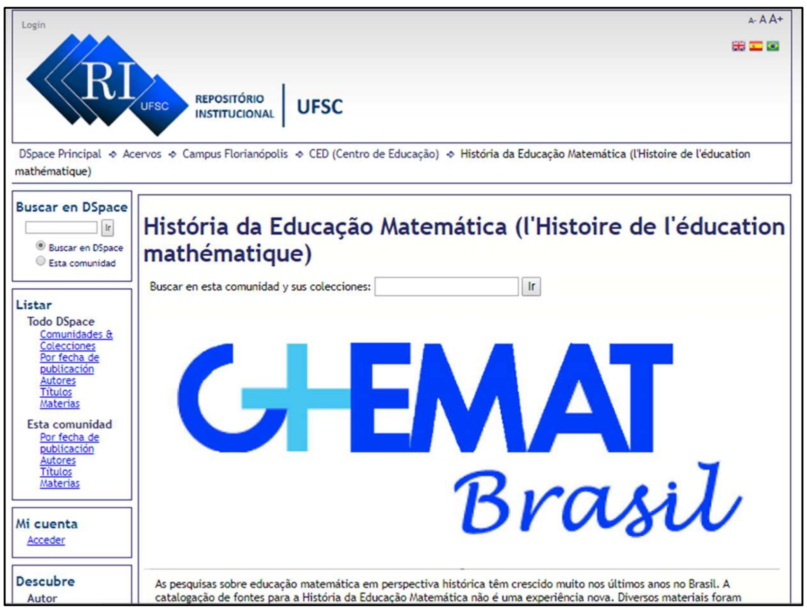


Figura 5. *Página inicial del repositorio del GHEMAT*
Fuente: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769

Para este momento en la Figura[4] 6 presentamos la estructura de las secciones que componente al CREPHIMat, nos referimos de esta manera porque el CREPHIMat está pensado para ser un ambiente virtual dinámico en constante actualización y mejoramiento del mismo día a día por medio del equipo de trabajo y por sugerencias externas de la comunidad que lo

[3] Este software libre fue desarrollado para la administración y gestión de repositorios digitales, creando en cooperación entre el Instituto Tecnológico de Massachusetts – MIT y la Hewlett Packard Corporation. Para información más detalladas ver Costa & Arruda (Costa & Arruda, 2012)

[4] El idioma usado para representar las secciones del CREPHIMat en la figura 6 es portugués, el cual es el idioma original en el cual se presentan todas las informaciones en dicho centro virtual.

frecuenta. Las primeras tres secciones llamadas: *Home*, *O Centro* y *Equipe* describen en líneas generales la constitución de centro, sus objetivos, contenidos, y quienes laboran en el ambiente para que esté disponible al mundo por medio de la internet.

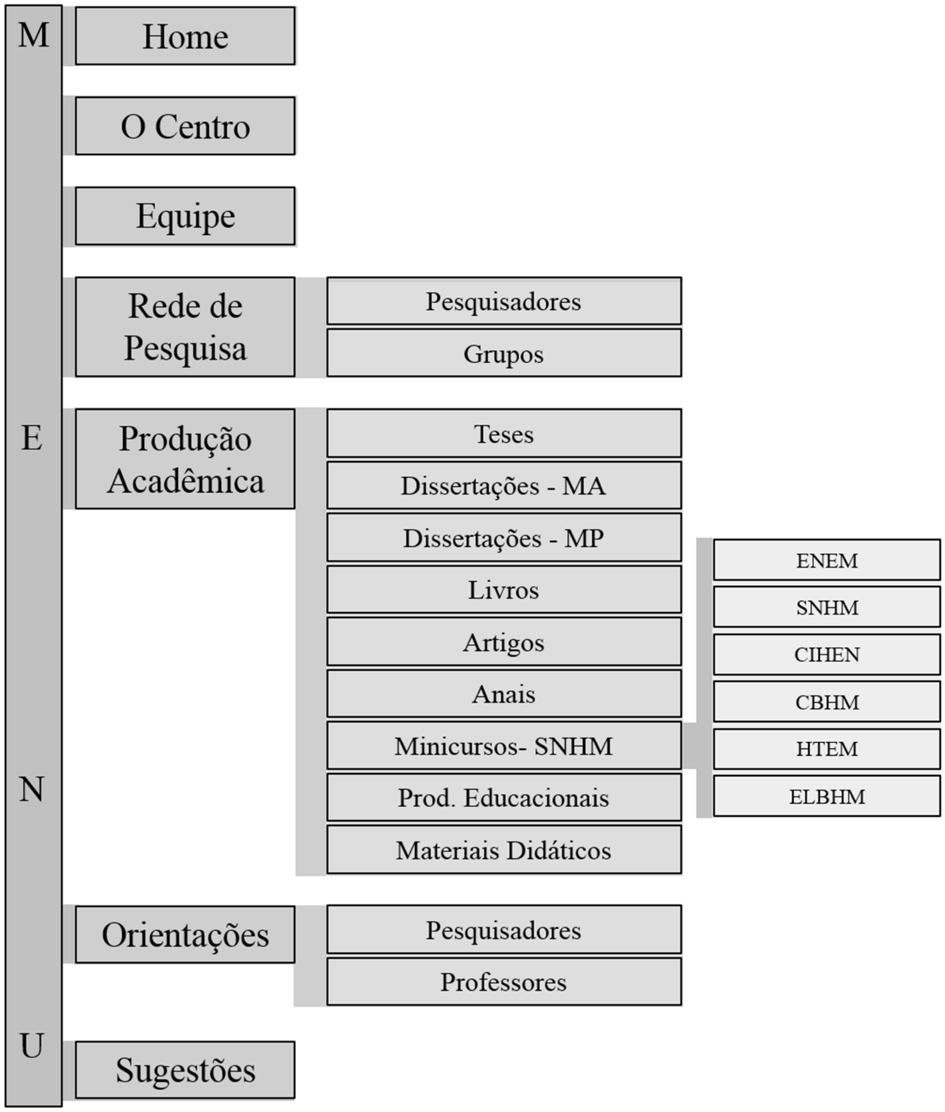


Figura 6. *Estructura de las secciones del CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores

La sección *Rede de pesquisa* presenta dos inventario temático; el primero de estos de profesores e investigadores del área de historia de la matemática y/o con alguna relación a esta, el segundo presenta un inventario de grupos de pesquisas dividíos en dos categorías: la primera contempla a todos los grupos cuyo foco es la historia de la matemática y/o educación matemática, la segunda se constituyó por todos aquellos grupos donde la historia de la matemática y/o educación matemática figura como una de sus líneas de investigación.

La siguiente sección *Produção Acadêmica* es el, anatómicamente hablando, corazón del CREPHIMat. Dado que en esta parte del centro se encuentra organizado y disponible un gran inventario temático de (por lo menos) 2000 producciones académicas que contemplan Artículos de revistas, memorias de congresos, materiales didácticos, libros de Minicursos, tesis, disertaciones y productos educacionales que se derivan disertaciones de maestrías profesionales, vale destacar que estos últimos tres se encuentran organizados según las tendencias emergentes de la investigación en Historia de las Matemáticas identificadas en los resultados obtenidos en 10 años de investigación en esta área, según Mendes (2010, 2015) estas son:

Historia y Epistemología de las Matemáticas - HEpM, se refiere a las producciones científico-académicas que se relacionan tanto con la vida como con el trabajo de los matemáticos, así como con el desarrollo de sus ideas matemáticas y el desarrollo de conceptos matemáticos en el tiempo. **Historia de la Educación Matemática - HEdM**, cuyas producciones abordan estudios relacionados con la historia de las instituciones, (auto)biografías de profesores de matemáticas, además de las contribuciones realizadas por ellos para la formación de profesores de matemáticas y para la mejora de la enseñanza, así como lo que contribuyen a la colección de documentos, memorias y el patrimonio de la Educación Matemática. **Historia para la Enseñanza de las Matemáticas - HEnM**, cuyas producciones se caracterizan por propuestas y acciones centradas en los usos de la información histórica con fines pedagógicos, como estrategia para la enseñanza de las matemáticas, así como el desarrollo de materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas, basados en fuentes históricas.

Al respecto de la sección de *Orientações*, en esta se pretender ofrecer, por un lado, sugerencias prácticas sobre las producciones del inventario temáticos en el CREPHIMat y del modo de cómo usar el mismo para que los profesores trasciendan sus dificultades conceptuales y didácticas. Por el otro lado, sugerencias a Pesquisadores sobre las cuestiones en abierto que las tesis y disertaciones tienen para iniciar o continuar pesquisas inéditas sobre la historia de las matemáticas y/o Educación Matemática. Por el momento esta sección se encuentra en construcción. Por ultimo en nuestro orden, se encuentra la sección, *Sugestões* en la cual es una primera vía de comunicación disponible entre la comunidad que accede al CREPHIMat y su equipo de trabajo. En el siguiente apartado, se presenta y describe que ofrece el CREPHIMat para los profesores con interés de usar la historia de la matemática en su acción docente.

PRODUCCIONES ACADÉMICAS EN EL CREPHIMAT

Antes de comenzar a describir el inventario[5] temático de las producciones que el CREPHIMat ofrece a los profesores para apoyar su acción pedagógica en las aulas de matemática, queremos destacar a pesar que se cuentan con producciones que están encajadas en la tendencia de Historia para la Enseñanza de las Matemáticas, se tienen investigaciones que destacan las potencialidades didácticas y conceptuales que las producciones en las otras tendencias de HEpM y HEdM poseen para la movilización de contenidos matemáticos en las aulas (Barros & Mendes, 2017, 2019; Gonçalves & Mendes, 2015).

Las primeras producciones en el entorno virtual disponibles para ser consultadas por los profesores, investigadores y profesores en formación inicial, es la colección de Tesis y Disertaciones las cuales fueron recopiladas desde su primera búsqueda realizada por medio del proyecto intitulado: *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010*, coordinado por el Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, tal acervo fue ampliado con la ejecución de los proyectos antes mencionados hasta abarcar un periodo de tres décadas, es decir, desde 1990 hasta 2018. Con este levantamiento de producciones so obtuvo un total setecientas y cincuenta y siete (757) entre tesis y disertaciones (tanto de maestrías académicas como profesionales), en el siguiente cuadro 1 pueden observarse la distribución de estos trabajos según su nivel y tendencia de pesquisa:

Cuadro 1. Tesis y Disertaciones de Historia de la Matemática en Brasil: Niveles y Tendencias

Nivel	HEpM	HEdM	HEnM	Total
Doctorado	78	143	19	240
Maestría Académica	57	273	57	387
Maestría Profesional	10	47	73	130
Total	145	467	149	757

Fuente: Mendes (2019)

[5] Este gran acervo de producciones ha sido constituido por un trabajo en cooperación entre el grupo de orientados y becarios de iniciación científica dirigidos por el coordinador de los proyectos antes mencionados, para más detalles de los involucrados y de los proyectos vinculados puede visitar el currículo lattes Prof. Iran Abreu Mendes: http://lattes.cnpq.br/4490674057492872

En el CREPHIMat se disponibilizan estas producciones separadas por secciones según su el tipo de documento: Tesis, Disertaciones de Maestrías Academias (MA) y Disertaciones de Maestrías Profesionales (MP), y a su vez cada una de estas se subdivide según las tendencias de pesquisa: HEpM, HEdM, HenM (ver Figura 7).

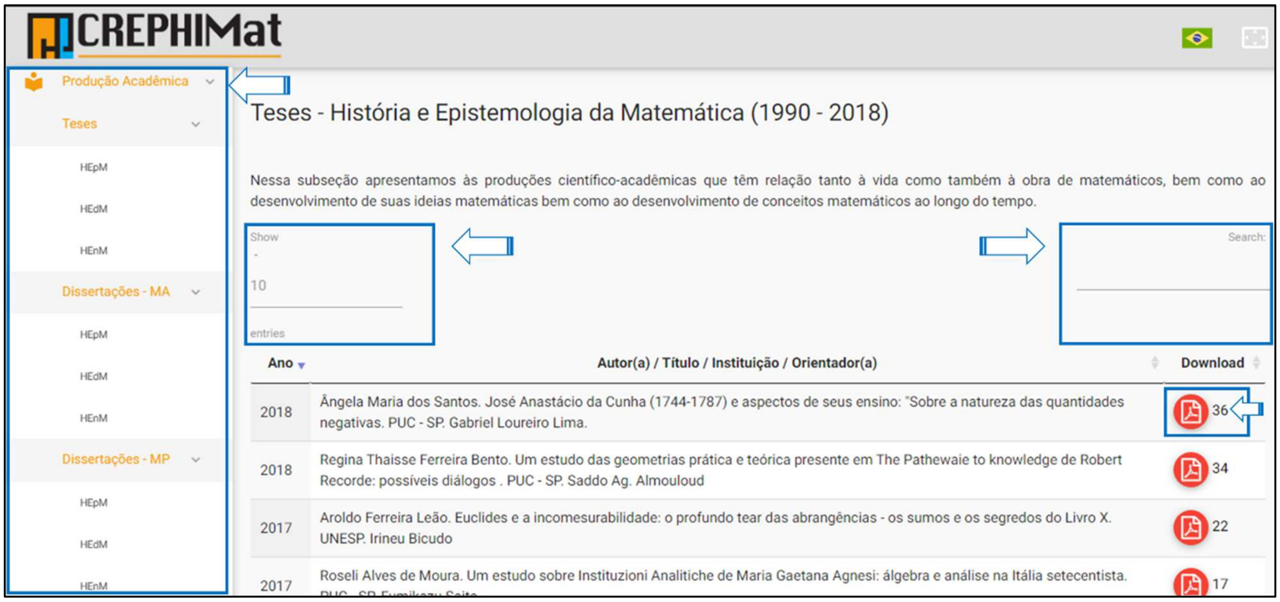


Figura 7. *Organización de Tesis y Disertaciones en el CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores

En la Figura 7 podemos observar la subsección dedicada a las tesis catalogadas en la tendencia de HEpM, la cual se constituye por un título, una breve descripción de las características generales de las producciones en esta parte del CREPHIMat y seguidamente se presentan las producciones dispuesta en una tabla dinámica. Tabla realizada en el entorno DataTables[6] lo cual permite agregar controles de interacción avanzados y filtros que permite una búsqueda más dinámica con resultados instantáneos si tener que actualizar el contenido de la página.

Estos controles se pueden apreciar encima de la tabla, al lado izquierdo se encuentra el *Show Entries*, con el cual se pueden modificar el número de registro que se muestran en la tabla; el *Search* otro controlador que se localiza al lado contrario del primero, se utiliza para filtrar la búsqueda en las producciones según palabras claves que se inserten en este controlador, otro controlador es que este plugin crea una paginación en la parte inferior de la tabla para facilitar

[6] DataTables está disponible bajo la licencia MIT. Esto quiere decir, que es libre para ser utilizado DataTables como se desee, incluyendo la modificación y redistribución del código, siempre y cuando se conserve el aviso de copyright original. Para mayor información: https://datatables.net/manual/index

la visualización de los registro. Destacamos que este diseño fue decidido como patrón para organizar y disponibilizar los otros tipos de producciones en el CREPHIMat.

Otra producción para ser consultada en el centro virtual son los artículos de revistas que tratan temas relacionados con la historia de las matemáticas y/o educación matemática. Esta sección se componen de artículos buscados y catalogados de las siguientes revistas Brasilera: Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, Revista Brasileira de História da Ciência – RBHC, Zetetiké, Revista Brasileira de História da Matemática – RBHM, Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC, Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, COCAR, Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Revista História da Matemática para Professores – RHMP, Revista de História da Educação Matemática – HISTEMAT, HIPÁTIA: Revista Brasileira de História, Educação e Matemática.

Destacamos que la elección de estas revistas se justifica por su relación directa con la historia de las matemáticas y/o la Educación Matemática en su corpus, así como por la clasificación de las mismas en el Qualis *Ensino* en la plataforma Sucupira[7]. En el siguiente cuadro 2 presentamos la distribución de los artículos de cada revista según su periodo de origen hasta el 2018 y la cantidad de artículos que tratan temas relaciones con la historia de la matemática.

[7] Para mayor detalles de la plataforma sucupira: https://www.capes.gov.br/avaliacao/plataforma-sucupira

Cuadro 2: Artículos de revistas Brasileiras de historia de la matemática (1985-2018)

Revista	Número de artículos	Historia de la Matemática (HM)	Porcentaje
BOLEMA (1985 – 2018)	772	74	10%
RBHC (1985 – 2018)	500	06	1%
Zetetiké (1993 – 2018)	397	24	6%
RBHM (2001 – 2017)	216	152	70%
REMATEC (2006 – 2018)	218	62	28%
REVEMAT (2006 – 2018)	291	09	3%
COCAR (2007 – 2018)	352	05	1%
Alexandria (2008 – 2018)	322	04	1%
RHMP (2013 – 2016)	28	19	68%
HISTEMAT (2015 – 2018)	128	114	89%
HIPATIA (2016 – 2018)	27	06	22%
TOTAL	3251	475	15%

Fuente: Castillo & Mendes (2019)

En cuanto a las Memorias de Congreso, durante la pesquisa se han captado las producciones de seis (06) eventos científicos, el primero de éstos son las publicadas por el *Encontro Nacional de Educação Matemática* - ENEM (1987 - 2016), es el más importante evento a nivel nacional, porque reúne el universo de las tendencias en Educación Matemática y un diverso público de profesores de Educación Básica, profesores y alumnos de Licenciatura y Pedagogía Matemática, estudiantes de Postgrado e investigadores. En la celebración de cada encuentro se destaca el interés en las discusiones sobre la Educación Matemática, sus múltiples y complejas acciones, las tendencias metodológicas y la investigación que constituyen el área, entre estas la historia de las matemáticas. Actualmente se cuentan con las 10 ediciones pasada de las memorias del evento (Figura 8), en espera de su más reciente edición después de la conmoración del XIII ENEM en julio de este año.

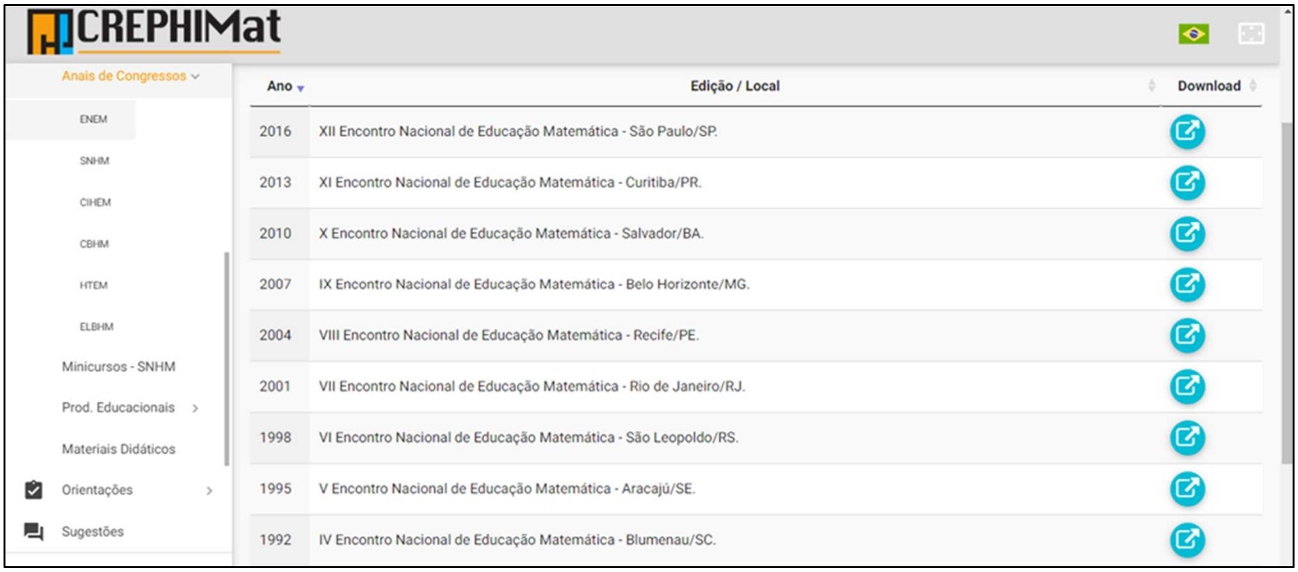


Figura 8. *Memorias del ENEM en el CREPHIMat*
Fuente: Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/enem

En esta sección están disponibles las memorias del *Seminário Nacional de História da Matemática* – SNHM celebrados desde 1995, que se celebran cada dos años, siempre en los días previos a la Semana Santa. Los seminarios nacionales son una de las formas explícitas de alcanzar los objetivos estatutarios del SBHMat, caracterizados por un amplio programa de carácter científico y pedagógico en el que se presentan las nuevas producciones de conocimiento del área. Se debaten grandes temas, se exponen problemas en busca de soluciones, se difunden experiencias, bibliografías y materiales didácticos, con el objetivo de promover el desarrollo y la difusión de experiencias, estudios y reflexiones en el área de Historia de las Matemáticas.

Están disponibles las memorias de las trece (13) ediciones del evento (Figura 9) desde el I SNHM realizado en 1995 en Recife (PE), del II SNHM en Águas de São Pedro (SP) en 1997, del III SNHM en 1999 en Vitória en el estado de Espírito Santo, del IV SNHM en Natal (RN) ocurrido en 2001, del V SNHM en 2003 en Río Claro (SP), del VI SNHM en 2005 realizado en Brasilia (DF), del VII SNHM en Guarapuava (PR) en 2007, el VIII en Belém (PA) en 2009, el IX SNHM en 2011 en Aracaju (SE), el X SNHM en 2013 en Campinas (SP), el XI SNHM en 2015 en Natal (RN), el XII SNHM en 2017 en Itajubá (MG) y el más reciente, el XIII SNHM en Fortaleza (CE) en 2019.

Figura 8. *Memorias del SNHM en el CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/snhm

Las siguientes memorias disponibles en el CREPHIMat son del Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática – CIHEM, el cual es un evento académico bianual, de carácter científico y tecnológico, que ha continuado la idea de consolidar una comunidad muy amplia y con diversidad de intereses. Es así como allí han convergido Historiadores, Educadores, Matemáticos, o una integración total o parcial de los anteriores, con la finalidad de divulgar resultados de investigación de alto impacto obtenidos por iniciativas institucionales o individuales de distintas universidades.

Los anteriores congresos fueron realizados en 2011 en Covilhã (Portugal); en 2013, en Cancún (México); en 2015, en Belém do Pará (Brasil); y el último en el 2017, Murcia (España), la ralización del evento en estos años se ha constituido en un escenario importante de divulgación y discusión de actividades y proyectos en este nuevo campo de estudios. Actualmente se incorporan en el CREPHIMat las cuatro memorias del evento (Figura 9).

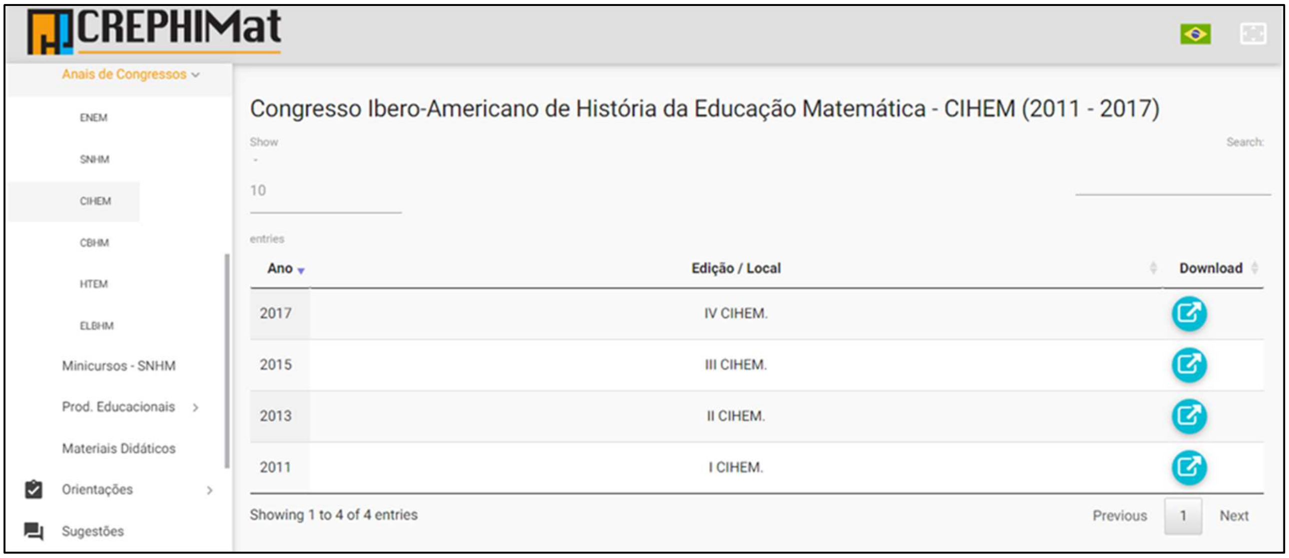


Figura 9. *Memorias del CIHEM en el CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/cihem

Las siguientes memorias presentes en el CREPHIMat son del *Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática* – HTEM, fue lanzado en 2002, con el objetivo de crear un espacio de discusión sobre las contribuciones y el impacto de la investigación en la historia de las matemáticas y sobre el papel de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Varios eventos tratan a veces de las Tecnologías en la Educación Matemática, a veces de la Historia de las Matemáticas, pero en general, hay pocas conexiones entre estos temas. La convicción del grupo de investigadores que encabezó la realización del HTEM es que el tratamiento articulado de los componentes Historia, Tecnología, Enseñanza y Matemáticas permite una lectura original y fructífera de los fenómenos relacionados con la adquisición y transmisión del conocimiento matemático.

El HTEM no está vinculado a una entidad específica, pero ha recibido apoyo institucional de varias asociaciones, tales como: Sociedad Brasileña de Educación Matemática (SBEM), Sociedad Brasileña de Matemáticas Aplicadas y Computacionales (SBMAC), Sociedad Brasileña de Matemáticas (SBM) y Sociedad Brasileña de Historia Matemática (SBHMat).

El I HTEM se celebró en febrero de 2002, en la UERJ, el II HTEM se celebró de nuevo en la UERJ, en marzo de 2004, el III HTEM se celebró en la PUC-SP en mayo de 2006, el IV HTEM se celebró en mayo de 2008, en la UFRJ fue promovido por el Programa de Postgrado en Enseñanza de Matemáticas de la UFRJ y por el Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias (LIMC) de la UFRJ, Del 25 al 30 de julio de 2010 se realizó en Recife, Brasil, el V HTEM, promovido por el Programa de Postgrado en Educación Matemática y Tecnológica (EDUMATEC) de la UFPE y organizado por el Grupo de Estudio sobre Nuevas Tecnologías y Educación. Finalmente, el VI HTEM se celebró en São Carlos, en 2013. Como se puede apreciar en la Figura 10, se disponen por el momento de las memorias del III y V HTEM.

Figura 10. *Memorias del HTEM en el CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/htem

Las siguientes memorias disponibles en el CREPHIMat son del *Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática* es un evento internacional que reúne a investigadores e interesados en la Historia de las Matemáticas de Brasil y Portugal. La responsabilidad de su organización es una acción conjunta entre la Sociedade Brasileira de História da Matemática (Brasil) y el Seminário Nacional de História da Matemática (Portugal). Comenzando en Coimbra, Portugal, en 1993, su objetivo es fortalecer las relaciones científicas en esta área entre los investigadores de los dos países donde tienen lugar los eventos. Inicialmente, el evento fue pensado para ser organizado en reuniones cada 4 años. Hoy el algoritmo muda un poco, en el sentido de que cada Encuentro en Brasil tiene lugar 4 años después del anterior en Portugal, y que cada Encuentro en Portugal tiene lugar 3 años después del anterior en Brasil.

El 1º ELBHM fue celebrado en la Universidad de Coimbra, Portugal, del 31 de agosto al 3 de septiembre de 1993, luego el 2º ELBHM en Águas de São Pedro, São Paulo, Brasil, del 23 al 26 de marzo de 1997, después el 3º ELBHM nuevamente en la Universidad de Coimbra, Portugal, del 7 al 12 de febrero de 2000. El 4º ELBHM dirigido por la Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil, 24-27 de octubre de 2004, el 5º ELBHM organizado por el

Cine-Teatro Avenida e Biblioteca Municipal, Castelo Branco, Portugal, del 3 al 7 de octubre de 2007, el 6º ELBHM en la Universidade Federal de São João Del-Rei, Minas Gerais, Brasil, del 28 al 31 de agosto de 2011, el 7º ELBHM se celebró en las locaciones del Auditorio Municipal, Museo Abilio de Mattos e Silva y Museo Municipal, Óbidos, Portugal, del 15 al 19 de octubre de 2014 y finalmente su más reciente edición el 8º ELBHM fue organizado por el Centro de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Universidad Estatal del Oeste del Paraná, Parque Tecnológico Itaipú, Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil, del 13 al 16 de agosto de 2018. De estas ediciones se cuentan con las memorias de sus últimas tres ediciones como se puede apreciar en la Figura 11.

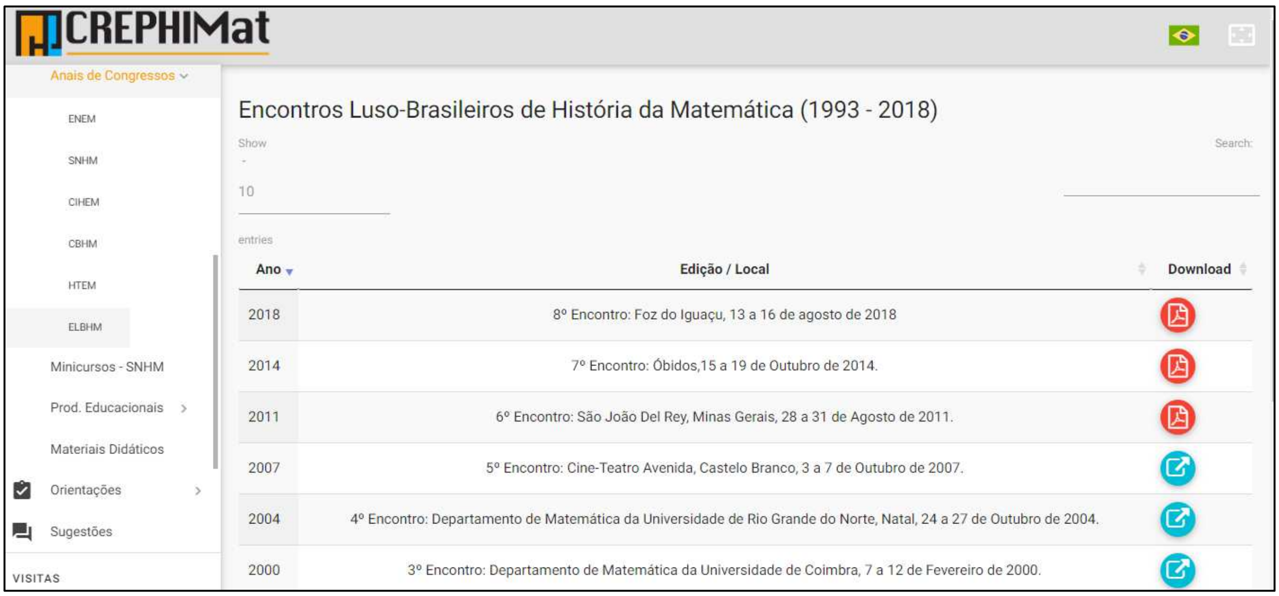


Figura 11. *Memorias del ELBHM en el CREPHIMat*
Fuente: Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/elbhm

La siguiente producción que se contempla en el CREPHIMat son los libros sobre la historia de las matemáticas para uso didáctico de los profesores de matemáticas que se originó en el IV *Seminário Nacional de História da Matematica* (IV SNHM), realizado en Natal (Rio Grande do Norte), en 2001. En ese año se publicaron nueve títulos referidos a diversos temas. La receptividad de los textos, por parte de los alumnos de pregrado en matemáticas y de los profesores de los tres niveles de enseñanza (primaria, secundaria y superior), hizo que SBHMat llevara a cabo el proyecto, con el fin de contribuir a la difusión y utilización de esta producción en las clases de matemáticas de los distintos niveles de enseñanza. Desde el SNHM de 2001 al 2017, a lo largo de estas 12 ediciones del Evento, la Sociedad Brasileña de Historia de las Matemáticas (SBHMat) ha publicado un total de 101 libros de Minicursos.

En el siguiente cuadro 3 se presenta la distribución los libros de Minicurso publicados desde su prime edición en 2001 hasta el 2017, estos clasificados según la tendencia de pesquisa de historia de la matemática y el porcentaje de cada total de libros por evento.

Cuadro 3: Libros de Minicursos del SNHM: Tendencias

SNHM (2001 - 2017)	Libros	HEpM	%	HEdM	%	HEnM	%
IV	9	6	67%	1	11%	2	22%
V	11	6	54%	2	18%	3	28%
VI	11	3	27%	1	9%	7	64%
VII	12	3	25%	5	42%	4	33%
VIII	19	9	47%	3	16%	7	37%
IX	12	7	58%	-	-	5	42%
X	7	4	57%	3	43%	-	-
XI	10	1	10%	3	30%	6	60%
XII	10	3	30%	1	10%	6	60%
Total	101	42	41%	19	19%	40	40%

Fuente*:* Adaptado de Silva, Silva-Neto & Castillo (2019)

Para presentar a los profesores un panorama de los temas matemáticos inherentes a los Minicursos que tratan las referidas dimensiones del cuadro 3, el siguiente cuadro 4 muestra en términos cuantitativos las producciones referidas a cada tópico matemático abordado por cada libro de los minicursos ofrecidos en los SNHM.

Cuadro 4: Libros de Minicursos del SNHM: Tópicos Matemáticos

SNHM (2001 - 2017)	Aritmética	Álgebra	Geometría	Trigonometría	Otros	Total
IV	2	-	5	1	1	9
V	4	2	3	-	2	11
VI	6	-	3	2	-	11
VII	1	4	1	-	6	12
VIII	2	4	7	2	4	19
IX	2	3	6	-	1	12
X	1	4	1	-	1	7
XI	1	2	3	-	4	10
XII	2	4	2	-	2	10
Total	21	23	31	5	21	101

Fuente*:* Adaptado de Pires, Marques & Castillo (2019)

Se puede observar en el cuadro 4 la distribución de los libros de minicursos por temas de matemáticas de las distribuidos en las tendencias de pesquisas en Historia de las Matemáticas. Del ciento y un (101) libros de minicursos, veintiún (21de éstos tratan asuntos de aritmética, más un porcentaje pequeños de estos, tratan tímida e implícitamente el tema de la geometría y el álgebra. Sin embargo, se caracterizaron como propios de la aritmética, ya que este tema es predominantemente explícito, y el objetivo del libro es tratar el tema de la aritmética.

Además, se determinó que veintitrés (23) libros de minicursos abordan temas relacionados con el álgebra. Es perceptible que hay una diferencia entre la cantidad de libros para aritmética y el álgebra más es relativamente pequeña. Las producciones que representan un número relativamente mayor en relación a los otros tópicos, son las que abordan temas propios de la geometría con un total de treinta y un (31) libros de Minicurso. Finalmente tenemos por un lado que le tópico menos abordado en las producciones es la trigonometría, con apenas cinco (05) libros y un restante de veinte (20) los cuales abordan temas que no se encajan con las primeras. Destacamos que recientemente fueron añadidos a esta colección los libros de Minicurso del XIII SNHM celebrado en Fortaleza (CE), Brasil, con lo cual se cuantifican en el CREPHIMat un total de 111 libros de minicursos (ver Figura 12) en el uso didáctico de la historia de la matemática por parte de los profesores en sus aulas de matemática.

Figura 12. *Libros de Minicurso del SNHM en el CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/livrosdeminicursos

El CREPHIMat también ofrece los Productos Educativos de Disertaciones de historia de la matemática oriundas de maestrías profesionales, tales producciones representan objetos de aprendizajes en forma de, por ejemplo, un pequeño libro, un manual, actividades, secuencia didáctica, software, juego educativo. Estos objetos de aprendizajes son desarrollados sobre la base de trabajos de investigación científica destinados a aportar contribuciones a la práctica profesional de profesores de Educación Básica, futuros profesores, profesores de Educación

Superior y Formadores de profesores. En general, el producto presenta una propuesta para la enseñanza o para la formación del profesorado desarrollada por el maestrando y su tutor. En el siguiente cuadro 5 se presentan la cantidad de productos educativos catalogados y clasificados según las tres tendencias de pesquisas de la Historia de la matemática.

Cuadro 5: Productos Educativos según las tendencias de pesquisas

	HEpM	%	HEdM	%	HEnM	%	Total
Productos Educativos	1	1	32	46%	36	53%	69

Fuente: Elaboración propia de los autores

Del cuadro 5 podemos observar que las dos tendencias de pesquisas en estos productos que más destacan son HEnM con el 53% de la cantidad total de los objetos de aprendizajes, seguida de la HEdM con un 46% de los productos y finalmente, la HEpM con apenas el 1% restante. Estos productos en el CREPHIMat se presentan a la comunidad de la misma manera que las tesis y disertaciones, es decir, separadas en secciones según cada tendencia (ver Figura 13).

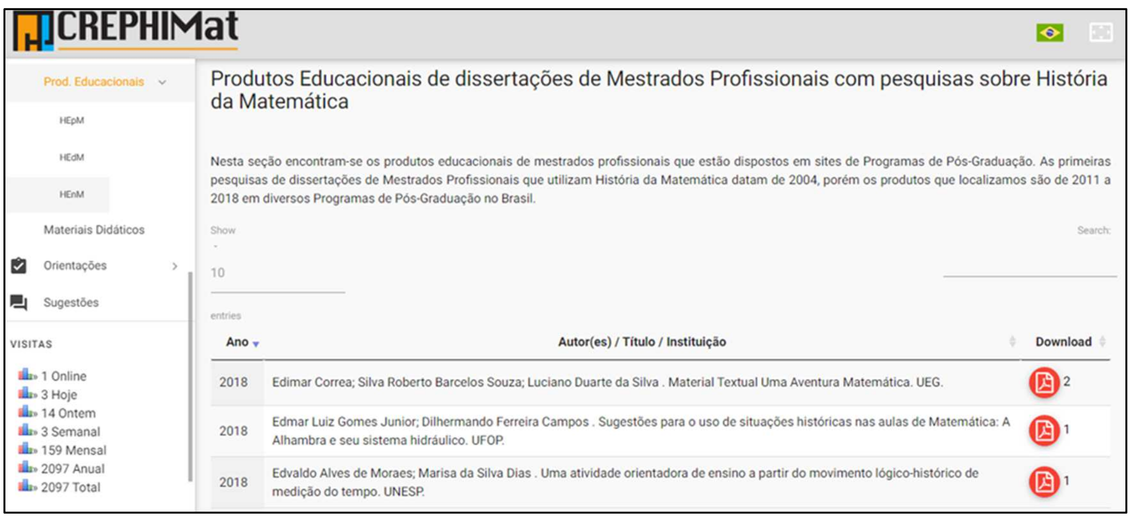


Figura 13. *Productos educativos en el CREPHIMat*
Fuente: Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/pe3

Para terminar esta sección de producciones en el CREPHIMat disponibles principalmente para que los profesores, por un lado, realicen exploraciones didácticas e conceptuales de modo que puedan superar algunas dificultades teóricas y por el otro lado que puedan usar estos materiales diseñado en base de informaciones históricas, para apoyar sus acciones pedagógicas en sus aulas de matemática. La última sección, pero no menos importante fue denominada *Materiais Didáticos*, en el cual se depositan todas aquellas producciones que no se encajan en las anteriores categorías (Figura 14).

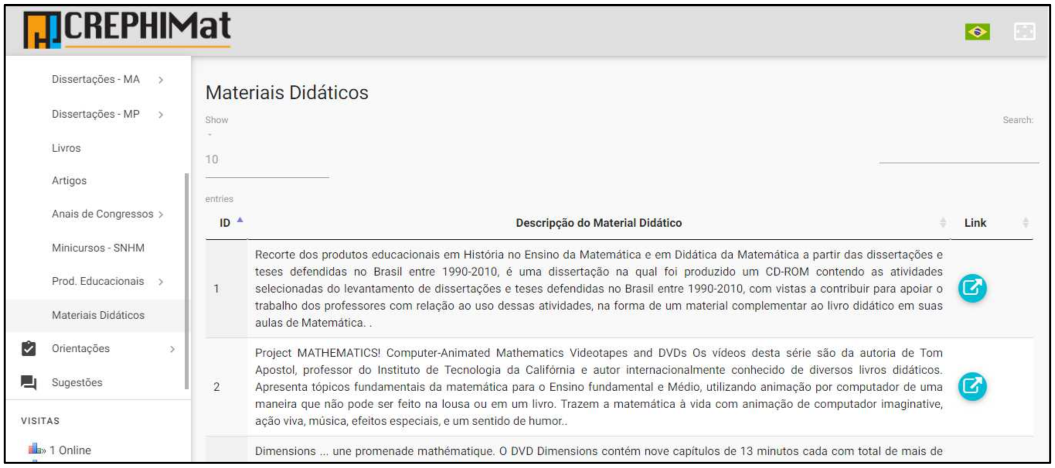


Figura 14. *Materiales didácticos en el CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores a partir de http://www.crephimat.com/materiais

METRICAS Y AVALIACIÓN PARCIL DEL CREPHIMat

El sábado 3 de agosto de 2019, fue cunado de manera oficial el Prof. Dr. Dr. Iran Abreu Mendes en un paso más de sus investigaciones financiadas por el CNPq, pone a disposición del público del área de Historia de las Matemáticas el Centro Brasileño de Referencia en Investigación en Historia de las Matemáticas (CREPHIMat), un Centro virtual que está poniendo a disposición toda la producción y otras informaciones sobre los estudios e investigaciones en el área. Desde ese punto de partida en conocimiento de nuestra comunidad el CREPHIMat ha recibido hasta el momento más de dos mil (2000) visitas (Figura 15) de estudiantes para profesor, profesores en ejercicios e investigadores del área.

Figura 15. *Métricas de visitas del CREPHIMat*
Fuente*:* Elaboración propia de los autores

Además de los cuantitativo de las visitas, en el CREPHIMat fue diseñado para cuantificar las visualizaciones/Download de algunas de sus producciones como Tesis, Disertaciones y Libros de minicursos. Con este cuantificador pudimos percibir por lo menos toda la colección de tesis contemplada en el centro ha tenido una media de 10 visualizaciones/Download, en cuanto a las disertaciones de maestrías académicas, ha conseguido una media de 7 visualizaciones/Download. Con respecto a las disertaciones de maestrías profesionales ha logrado una media de 5 visualizaciones/Download. En cuestión de los libros de minicursos de los SNHM, la media de toda la colección desde 2001- 2019 es de 12 visualizaciones/Download.

Además de estos cuantificadores que nos indican que el entorno virtual está siendo cada vez más accesado por nuestra comunidad académica con interés en la historia de la matemática. Además de esto, hemos recibido algunas evaluaciones por medio de un formulario online http://bit.ly/2qJ7fmU, con el tuvimos los siguientes contactos:

Un primer contacto lo realiza un estudiante de pregrado el cual nos comenta, primeramente: *El CREPHIMat, fue decisivo para la realización de mis investigaciones para la construcción de un artículo y del trabajo de conclusión de grado TCC, ya que sólo en el CREPHIMat encontré todas las memorias del SNHM*. Además, nos indica que la navegación por las secciones de CREPHIMat es Excelente, calificativa que también nos presenta para la organización de los contenidos en el centro virtual.

El siguiente contacto fue con un profesor el cual nos alertó con su mensaje: *No puedo descargar los libros de los minicursos de la SNHM. ¿Puedes ver este problema?* Co esto nos percatamos de algunos errores con los links de algunos libros de minicursos y pudimos ajustar para que el profesor pudiera tener acceso a estos materiales. Aunado a esto, el profesor nos indica que la navegación por las secciones de CREPHIMat es Excelente, y que la organización de los contenidos en el centro virtual en buena.

Un tercer contacto fue también por un profesor, que nos deja el siguiente mensaje en el área de *Sugestões*: *¡Felicito a los idealizados de este centro virtual por esta gran iniciativa, ya que es una idea innovadora y facilitadora para aquellos que desean encontrar producciones brasileñas en Historia de las Matemáticas!*

El cuarto contacto fue por un pesquisador en el área de la matemática, el cual por la misma vía del formulario de *Sugestões* envía el siguiente mensaje: *Me encantó el portal, siendo* *un investigador en Matemáticas y en fase de preparación de la tesis final para la maestría en educación, en Angola, las contribuciones registradas aquí me ayudarán mucho para mí el desarrollo de mi trabajo de grado y para mi desempeño profesional en el campo educativo.*

Estos contactos nos dan evidencia de que el CREPHIMat podemos inferir que ha tenido un impacto positivo tanto para estudiante, profesores y pesquisadores interesados en el área de historia, tanto en Brasil como fuera del país, dado a que los primeros contactos fueron registrados desde Brasil, mientras que el último contacto fue desde Angola.

CONSIDERACIONES FINALES

Este articulo presentan resultados parciales de proyectos de pesquisas coordinados por el Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, el primero intitulado: *História para o Ensino da Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2018)* y el segundo intitulado: *Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática*.

Estos resultados, por un lado, muestran la constitución de un gran acervo de producciones académico-científicas Brasil que traten sobre la historia de la matemática para el periodo de 1990-2018. Por el otro lado la materialización del *Centro Brasileño de Referencia en Pesquisas sobre Historia de las Matemáticas* – CREPHIMat. Destacando que este, cumpliendo una función como repositorio de contenidos digitales, actualmente posee por lo menos unos 2000 archivos, entre Tesis, Disertaciones, artículos de revistas, memorias de congresos, libros de minicursos, productos educativos, materiales didácticos y demás producciones dirigidos a estudiantes, profesores y pesquisadores interesados en la historia de las matemáticas.

Este trabajo caracteriza al CREPHIMat como un entorno virtual que permite centralizar la mayor cantidad de documentos digitales y/o digitalizados sobre la historia de las matemáticas, para ser preservados, difundíos y diseminados virtualmente al mayor número posible de personas interesadas en el debate y la producción sobre la historia de la matemática. De esta manera, con el CREPHIMat buscamos tanto contribuir con la comunidad de educadores matemáticos en general como de investigadores en Historia de la Matemática y Educación Matemática. En este sentido se disponibilizan estas producciones para apoyar las practicas pedagógicas en la aulas de matemáticas como de servir de un ambiente que permita a los pesquisador tener en cuenta que se ha producido en el área de historia de la matemática en sus tres tendencias y que falta es lo que estas investigaciones han dejado como cuestiones abiertas para fomentar otras investigaciones inéditas.

Agradecimientos

El presente artículo fue realizado con el apoyo tanto de la *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* - Brasil (CAPES) - Código de Financiamiento 001, como del *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* - Brasil (CNPq).

Referencias

Barros, R. J., & Mendes, I. A. (2017). Dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática: contribuições para a abordagem da Geometria Espacial no Ensino Médio. *Principia*, (37), 139–150.

Barros, R. J., & Mendes, I. A. (2019). Descrição dos conteúdos de ensino superior presentes nas teses em história e epistemologia da matemática (1990-2010). *COCAR*, *13*(25), 399–420.

Castillo, L. A., & Mendes, I. A. (2019). Mapeamento dos artigos sobre história da matemática nas revista brasileiras (1985-2018). *I Simpósio nacional sobre o ensino e pesquisa da matemática no contexto da educação, ciência e tecnologia*. Belém: SBEM-PA.

Costa, D. A., & Arruda, J. P. (2012). Repositório institucional de fontes para a história da educação matemática na universidade federal de santa catarina. *I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática - I ENAPHEM*, 1–10. Vitória da Conquista: UESB.

Costa, D. A., & Valente, W. R. (2015). *História da Educação Matemática e o uso de um repositório de conteúdo digital*. São Paulo: Livraria da Física.

CREMM. (2006). Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino. Recuperado de http://www.furb.br/cremm/portugues/index.php

Gonçalves, F. D., & Mendes, I. A. (2015). História da Educação Matemática no Brasil: abordagens que emergem das dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010. *XI Seminário Nacional de História da Matemática*, 1–14. Natal: SBHMat.

Mendes, I. A. (2008). Uma radiografia dos textos publicados nos Anais dos SNHM. *11 Seminário Nacional de História da Ciência e Tecnologia*, 1–11. Niterói: SBHC.

Mendes, I. A. (2010). *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010*. Poyecto de Pesquisa. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Mendes, I. A. (2012). Pesquisas em história da Educação Matemática no Brasil em três dimensões. *Quipu*, *14*(1), 69–92.

Mendes, I. A. (2015). *História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais epistemológicas e pesquisas* (1a ed.). São Paulo: Livraria da Fisica/SBHMat.

Mendes, I. A. (2018a). *História para o Ensino de Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2017)*. Poyecto de Pesquisa. Universidade Federal do Pará, Belém.

Mendes, I. A. (2018b). *Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à Formação de Professores de Matemática*. Poyecto de Pesquisa. Universidade Federal do Pará.

Mendes, I. A. (2019). Flashes e Imagens das Produções nas Pesquisas em História da Matemática no Brasil: um cenário tecido em três décadas. *XII Ecnontro Paraense de Educaçõ Matemática*. Belém: SBEM-PA.

Pires, L. S., Marques, R., & Castillo, L. A. (2019). Classificação dos livros de minicursos dos SNHM entre 2001-2017. En M. Chaquiam & A. C. C. Pereira (Eds.), *XIII Seminário Nacional de História da Matemática* (pp. 1356–1369). Fortaleza: SBHMat.

Silva, L. P., Silva-Neto, B. C., & Castillo, L. A. (2019). História para o ensino da matemática nos livros de minicursos do SNHM (2001 a 2017) para os anos iniciais do ensino fundamental. En M. Chaquiam & A. C. C. Pereira (Eds.), *XIII Seminário Nacional de História da Matemática* (pp. 1437–1449). Fortaleza: SBHMat.

Autores:

Luis Andrés Castillo Bracho

Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas (Educação Matemática), pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA/Brasil). Graduação em Licenciatura em Educação menção Matemática e Física pela Universidade do Zulia/Venezuela (2016). Pesquisador nível A-1 no Programa de Estímulo à Pesquisa e Inovação da Venezuela (2015 - Atual). Integrante da Associaçao "Aprender en Red" e do Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM/UFPA). Atua em temas de pesquisa como: uso de tecnologias digitais no ensino da Matemática e da Física. Mais informações no Curriculo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4358821746569093. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5174-9148. E-mail: luiscastleb@gmail.com

Iran Abreu Mendes

Bolsista Produtividade em Pesquisa Nível 1C do CNPq. Pós-doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro (2008). Doutorado em Educação pela Universidade

Federal do Rio Grande do Norte (2001) e Mestrado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (1997). Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1983). Atualmente é professor Titular do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (IEMCI), e pesquisador do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Tem experiência no ensino de Cálculo, Geometria Analítica e Euclidiana, História da Matemática, História da Educação Matemática, Didática da Matemática e Fundamentos Epistemológicos da Matemática. Desenvolve pesquisas sobre: Epistemologia da Matemática, História da Matemática, História da Educação Matemática, História para o Ensino de Matemática, Práticas Socioculturais e Educação Matemática, Diversidade Cultural e Educação Matemática. Líder do Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM/UFPA). Mais informacões no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4490674057492872. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7910-1602. URL: http://www.iranmendes.com. E-mail: iamendes1@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p116-132.id834

LECTURA DE TEXTOS HISTÓRICOS EN EL AULA

John A. Fossa
jfossa03@gmail.com
Universidade Estadual da Paraíba

Recibido: 05/11/2019 **Aceptado:** 20/01/2020

Resumen

Después de aclarar algunas ambigüedades terminológicas, aquí hay dos argumentos relacionados con la lectura de textos históricos en el aula. El primer argumento parte de la premisa de que las matemáticas son una parte importante de la cultura general de la humanidad en el sentido de que impregna casi cualquier otra parte de esa cultura. Sin embargo, uno de los principales objetivos de la educación es la apropiación de esa cultura para que el estudiante pueda lograr una vida rica y satisfactoria. Como resultado, el estudiante debe tener contactos directos e intensos con textos históricos que son grandes expresiones de esta cultura. El segundo argumento parte de una caracterización del conocimiento como una relación dialéctica tripartita entre el individuo, el otro y el mundo. Por lo tanto, enfrentamos el conocimiento como una actividad constructiva realizada por el individuo, pero desarrollada dentro de una comunidad social, antes que un objeto. Luego muestra cómo la lectura de textos históricos en el aula contribuye a cada uno de estos aspectos del conocimiento para ayudar a lograr un verdadero conocimiento matemático.

***Palabras clave*:** Historia y Educación Matemática; fuentes historicas; apropriación de conocimiento matemático.

READING HISTORICAL TEXTS IN THE CLASSROOM

Abstract

After clarifying some ambiguous terminology, two arguments related to the reading of historical texts in the mathematics classroom are herein presented. The first argument starts from the premise that mathematics is a very important part of human culture in general, in that it permeates almost all of the other parts of this culture. But one of the principle objectives of education is the appropriation of this very culture, so that the student may be enabled to lead a full and satisfying life. In consequence, the student should have intense direct contacts with historical texts that are prominent expressions of this culture. The second argument starts from a characterization of knowledge as a tripartite dialectical relation among the individual, the other and the world. Thus, we are confronted with knowledge as being a constructive activity performed by an individual, but developed within a social context, in face of an object. It is then shown how the reading of historical texts in the mathematics classroom contributes, with regard to each of these aspects of knowledge, to the building up of genuine mathematical knowledge.

Keywords**:** History in Mathematics Education; historical texts; appropriation of mathematical knowledge.

LENDO TEXTOS HISTÓRICOS NA SALA DE AULA

Resumo

Depois de esclarecer algumas ambiguidades de terminologia, apresenta-se aqui dois argumentos relacionados à leitura de textos históricos na sala de aula. O primeiro argumento parte da premissa de que a matemática é uma parte importante da cultura geral da humanidade no sentido de que ela permeia quase todas as outras partes dessa cultura. Mas, um dos principais objetivos da educação é a apropriação da referida cultura para que o educando possa alcançar uma vida rica e satisfatória. Em consequência, o aluno deveria ter contatos diretos e intensos com textos históricos que são grandes expressões dessa cultura. O segundo argumento parte de uma caracterização do conhecimento como sendo um relacionamento dialético tripartido entre o indivíduo, o outro e o mundo. Assim, deparamos com o conhecimento como uma atividade construtiva feita pelo indivíduo, mas desenvolvida dentro de uma comunidade social, perante um objeto. Mostra-se, então, como a leitura de textos históricos na sala de aula contribui com cada um desses aspectos do conhecimento para ajudar na consecução de conhecimento matemático genuíno.

Palavras-chave**:** História e Educação Matemática; fontes históricas; apropriação de conhecimento matemático.

Nos últimos anos, a história da matemática vem conquistando um lugar importante como um agente de cognição na Educação Matemática. A conquista é, de fato, bastante merecida, pois a história é um instrumento muito versátil para o ensino da referida matéria. Antes, em contraste, a história da matemática foi limitada a ações motivadoras e essa limitação foi muito criticada por quem almejava um papel mais arrojada para a história. Embora compartilhamos com estes a aspiração para um uso mais dinâmico da história da matemática no ensino da matemática, devemos registrar aqui o fato de que avaliamos o potencial da história como fonte de motivação como sendo altamente importante. Essa nossa avaliação parte do princípio construtivista de que o aluno deve construir por si mesmo (o que, aliás, não significa por si só!) seu conhecimento e que isso não será feito na ausência de motivação adequada. Isto dito, porém, voltaremos a nossa atenção agora para usos da história que participam na construção do conhecimento.

Entre os vários papeis que a história desempenha para favorecer a construção do conhecimento matemático, dois, ao nosso ver, são preeminentes. O primeiro é a utilização da história da matemática para informar atividades construtivistas. O presente autor, junto com vários dos seus alunos de pós-graduação, tem desenvolvido pesquisas nessa área desde os meados da década dos 90s (veja Fossa, 1998). Um exemplo de como proceder usando o referido enfoque pode ser achado em Fossa (2006). O segundo dos referidos papeis é o uso de textos históricos na sala de aula, que passaremos a investigar a seguir.

Textos Históricos

Visto que há algumas pequenas confusões na literatura sobre o presente assunto, faremos aqui uns breves esclarecimentos. Em primeiro lugar, por 'texto', ou alternativamente, 'fonte', queremos dizer, pelos propósitos do presente trabalho, qualquer documento preservado em alguma média. Na grande maioria dos casos do nosso interesse, tratar-se-á de documentos impressos ou digitalizados.

Dado a caracterização contida no parágrafo anterior, a palavra 'texto' não equivale à expressão 'livro texto', ou seja, um documento elaborado expressamente para fins didáticos, pois este é apenas uma parte daquele. Mesmo assim, o conceito de 'livro texto' não é tão nítido quanto possa aparecer. O *Papiro de Rhind*[1] (*Papiro de Ahmes*), por exemplo, poderá ser considerado um livro texto, ou pelo menos algo análogo aos nossos livros textos na cultura do Egito Antigo, visto que foi elaborado para a instrução dos escribas. Em contraste, os três artigos de Leonhard Euler, todos com o mesmo título, *De numeris amicabilibus*[2], são claramente relatos de pesquisa em matemática. Mas, como devemos categorizar o *Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt*[3], do mesmo Euler, que inicia com explicações das mais básicas e posteriormente acaba apresentando resultados da sua pesquisa? Visto que o próprio Euler não nos disse (é um texto póstumo, inacabado e sem prefácio), não sabemos com certeza. Pior ainda, *Os Elementos*[4] de Euclides provavelmente foi escrito como um tratado matemático, mas eventualmente se tornou um livro texto, às vezes, porém, apenas parcialmente – por muito tempo o aluno era esperado dominar *Os Elementos* só até o *pons asinorum* (Propsição 5 do Livro I)!

Felizmente, podemos abstrair dessas questões historiográficas, pois qualquer documento, seja ele um livro texto, um relato de pesquisa, ou um híbrido, poderá ser

[1] Ver *The Rhind Mathematical Papyrus* (1927).
[2] Ver Euler (1774, 1750 e 1849) e, em português, Euler (2017a).
[3] Ver Euler (1849), em português, Euler (2017), e, em inglês, Euler (2019).
[4] Ver, em inglês, Euclid (1956), e, em português, Euclides (2009).

contemplado como um recurso pedagógico e usado na sala de aula. Logo, usaremos a palavra ‘texto’, ou como já indicamos ‘fonte’, no sentido generalizado, apontado acima.

Por ‘texto original’, ou alternativamente ‘fonte original’, queremos dizer qualquer documento, ou cópia de documento, que não tem passado por modificações significativas. Quando o documento é oriundo do passado, seja ela original, seja modificado, usaremos o termo ‘texto histórico’, ou alternativamente, ‘fonte histórica’.

Na caracterização de ‘texto histórico’, há duas imprecisões que não, aliás, requerem delineações exatas, mas merecem ser elaboradas um pouco mais. A primeira é a questão da sua localização no tempo, pois ontem, por exemplo, é no passado, mas não parece razoável (na maioria dos casos) chamar um livro publicado ontem um texto histórico. Consideremos, por exemplo os *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral* de William Anthony Granville e Percey F. Smith, publicado originalmente em 1904, mas reeditados várias vezes e traduzidos para o português em 1954.[5] Embora esse texto foi usado até bem recentemente, o fato de que foi descontinuado, porque é considerado “ultrapassado”, é o suficiente para considera-lo um texto histórico.[6] A segunda imprecisão se diz referente aos tipos de modificações que podem ser feitas numa fonte original que nos levam a passar a considera-lo um texto histórico, não-original. Basicamente, pensamos aqui em modificações no próprio texto, como simplificações de linguagem, modificação da ordem de apresentação dos tópicos do texto e traduções.

É a questão da tradução que é mais polêmica. De um ponto de vista prática, porém, traduções são necessários para fazer a maioria dos textos acessíveis ao aluno. Ainda mais, embora seja imprescindível que um pesquisador consulta o texto original, uma boa tradução é suficiente para os propósitos pedagógicos e insistir no contrário seria pura pedantismo. Mesmo assim, em alguns casos, textos em línguas estrangeiras – com destaque aos textos em inglês ou francês – podem estar ao alcance do aluno, especialmente se trata de pequenos trechos abordados conjuntamente com o professor de línguas.

Finalmente, entendemos a frase ‘na sala de aula’ a ser aplicável a qualquer situação didática, mesmo se não ocorre no espaço físico da sala de aula da escola. Assim, incluímos tais coisas como projetos a serem feitos pelo aluno, ou individualmente ou em grupos, em casa, com relatórios entregados ao professor.

---

[5] Ver Granville e Smith (1904) e, em português, Granville, Smith e Longley (1961).

[6] Por uma análise desse texto e seu valor pedagógico, ver Almeida (a aparecer).

Aqui consideraremos apenas dois argumentos para o uso de textos históricos na sala de aula, pois, do ponto de vista do presente autor, são não somente os dois principais argumentos, mas também são os dois que são geralmente esquecidos. O primeiro é centrado no fato de que a matemática faz parte da herança cultural do homem e, assim, fontes históricas deveriam ter um lugar de destaque no currículo escolar. O segundo depende de uma análise da natureza do conhecimento como uma dialética tripartida entre o indivíduo, o outro e o mundo e mostra como a leitura de textos históricas na sala de aula promova a construção do conhecimento.

Matemática como Herança Cultural

A matemática não é uma entidade que pode ser achada no mundo natural, nem um atributo inerente a tais entidades. Muito pelo contrário, é um produto cultural inventado pelo espírito humano. Nesse sentido, não é diferente das ciências ou das artes. Assim, da mesma forma em que é necessário ter, para assegurar uma educação que promove uma vida plena para o educando, certa convivência com as ciências e as artes, é necessário ter certa convivência com a matemática e seu desenvolvimento perante a história. Isto é, a apropriação da herança cultural do homem é a forma em que o homem realiza suas potencialidades humanas como um ser humano, alcança uma vida feliz e contribui para o desenvolvimento continuado da própria cultura em que ele está inserido. Mas, desde que a matemática é uma parte importante dessa cultura, é imprescindível que o homem apropria a matemática para que possa realizar suas potencialidades humanas.[7]

É inegável que parte do que queremos dizer por apropriação da matemática é a habilidade de pensar matematicamente e desenvolver vários procedimentos matemáticos com certa desenvoltura. Nesse sentido, a comparação com as habilidades linguísticas será instrutiva, pois parte do que queremos dizer pela apropriação da língua é a habilidade de produzir comunicações eficazes orais e escritas, bem como entender as comunicações de outros. A palavra, no entanto, contempla não somente o verdadeiro, mas também o belo. Assim, não ficamos satisfeitos apenas com a mera aquisição das habilidades linguísticas, mas insistimos em ter contato com grandes produções linguísticas da nossa herança cultural. O mesmo

[7] A matemática é uma atividade humana e, assim, uma invenção humana. Como veremos mais adiante na discussão do conhecimento, porém, o objeto matemático não é uma pura invenção humana. Também traçaremos, no mencionado lugar, considerações mais precisas sobre o conceito de ‘apropriação’.

acontece com a matemática: o aluno deveria ter contato direto com grandes produções matemáticas que fazem parte da nossa evolução cultural.

Devemos elaborar esse ponto mais um pouquinho. Não é de muito serventia, exceto para fins de alimentar a rapacidade da indústria de testagens escolares (pois hesito dizer, nesse contexto, “avaliação”), que o aluno saiba, por exemplo, que José de Alencar era uma das nossas maiores expressões do indianismo do século XIX, sem nunca ter lido, por exemplo, *O Guarani*. É necessário que o aluno tenha contato com o próprio livro, indagando-o heuristicamente, dialogando com as ideias nele contidas e apreciando-o como uma obra literária. Da mesma forma, não é o suficiente que o aluno conhece alguns fatos sobre a história da matemática sem ter qualquer contato com obras provenientes daquela história. Precisa-se indagar heuristicamente o texto histórico, dialogar com as ideias nele contidas e apreciá-lo como um texto matemático. Isto foi explicitamente reconhecido pelos criadores do currículo liberal das Grandes Obras da Civilização Ocidental[8], um currículo que se baseia inteiramente na leitura de fontes históricas de vários campos de estudo. Entre os textos dos 74 autores incluídos no programa, há textos matemáticos de Euclides, Arquimedes, Apolônio de Perga, Nicômaco de Gerasa, René Descartes, Blaise Pascal e Isaac Newton. Claramente, textos destes autores, bem com várias obras de outros matemáticos, são textos clássicos que merecem ser conhecidos pelo público geral.

A Ubiquidade da Matemática

Evidentemente, o argumento exposto na seção anterior se aplica a virtualmente todos os campos de investigação que tem sido desenvolvido pelo homem. Em consequência, o educador teria de enfrentar um grande problema referente à sobrecarga de um currículo escolar que já tem uma abundância descomedida de informação com que assola o aluno. Destarte, precisamos reconhecer a necessidade de incluir leituras de fontes históricas de muitas áreas diferentes e, ao mesmo tempo, reconciliar isto com as limitações inevitáveis do currículo escolar. Uma maneira de conseguir a referida reconciliação é fazer com que as leituras de textos históricos sejam incorporadas como uma parte integral do ensino das várias disciplinas. Voltaremos a isto, em relação ao ensino da matemática, mais adiante. Mas, mesmo

[8] Ver Adler (1961).

lançando mão e esse expediente, permanecerá o imperativo de fazer uma hierarquização de escolhas referente à estruturação do currículo.

Parece, de fato, inegável que a base de toda a educação é a apropriação da linguagem. Isso se fundamenta no simples fato de que toda a comunicação, ou pelo menos a comunicação raciocinativa, inclusive a da matemática, depende da linguagem. É notável, porém, que a ubiquidade da linguagem dentro da cultura humana é quase alcançada pela ubiquidade da matemática, pois procedimentos matemáticos e/ou pensamentos matemáticos permeiam as realizações culturais do homem de forma ímpar, frequentemente, até, em maneiras não geralmente reconhecidas. Sendo isso o caso, temos fortes razões para privilegiar a apropriação de textos históricos matemáticos. Assim, passaremos em revista, de forma breve, algumas das principais maneiras em que a matemática está presente em outras partes da cultura humana.

Em primeiro lugar, é notório o papel da matemática nas ciências e na tecnologia. Na verdade, a matematização das ciências tem raízes históricas bastante compridas, mas o processo se intensificou com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e, em especial, com o uso de equações diferenciais para modelar situações do mundo físico. Os sucessos iniciais levaram a um relacionamento sempre mais estreito entre a matemática e as ciências, resultando, por exemplo, no fato de que a física teórica e partes da matemática aplicada são, hoje em dia, virtualmente indistinguíveis. Mas, não foi apenas as ciências físicas que foram afetadas pela matemática, pois as ciências biológicas, bem como as ciências sociais, também foram transformadas por vários ramos da matemática, da matemática discreta ao mesmo cálculo que foi tão transformativo nas ciências físicas. Nas ciências sociais e nas ciências relacionadas à saúde e à medicina, porém, a influência mais forte talvez tenha sido a da estatística, pois foi a possibilidade proferida por essa teoria matemática de detectar possíveis relações de causa e efeito e/ou correlações importantes que permitiu o enorme crescimento dessas ciências.

Ao voltar a nossa atenção para a influência da matemática sobre a arte, pensamos quase imediatamente no desenvolvimento, no Renascimento, das técnicas da perspectiva e sua ligação com a geometria projetiva. A referida influência, porém, não tem sido tão limitada, nem no espaço, nem no tempo, como foi documentada, por exemplo, em Gamwell (2016) e Hofstadter (1980). De fato, essas publicações não somente documentam a influência da matemática nas esferas artísticas, mas atestam como a matemática está presente de forma preeminente na intricada melodia de ideias que constitui a criação artística. Mas, nem precisamos nos limitar ao mundo dos "grandes artistas" para ver a presença da matemática na arte, pois investigações etnomatemáticas, a exemplo das de Joseph (1991), tem mostrado essa presença nas expressões culturais mais "populares". Ainda no campo artística, visto que o ritmo, por exemplo, depende da contagem, a presença da matemática na música não deve ser surpreendente. Não obstante, a influência da matemática sobre esse ramo da arte é consideravelmente mais ampla, como mostra Abdounur (2002). Ainda outra expressão artística frequentemente informada pela matemática é a da literatura. Muitas vezes, essa influência, especialmente dentro da vasta tradição pitagórica, é aliada com a astronomia (considerada como parte da matemática na época) como Fossa e Erickson (2014) ilustra com o conceito de alegoria matemática como um elemento estrutural de obras literárias.

Grugnetti e Rogers (2000) apontam para as supostas propriedades místicas e religiosas de várias formas geométricas, bem como tais conceitos como a infinidade, como manifestações da influência da matemática na filosofia. Quando lembramos, porém, que um número expressivo de filósofos era também matemáticos, ou receberam treinamento na matemática, podemos desconfiar de que a avaliação de Grugnetti e Rogers seja um tanto tímida. De fato, Erickson e Fossa (2006) mostra que a matemática estruturou a filosofia platônica e ainda que ela foi determinante no pensamento de vários outros filosóficos. Parsons (1983) aborda a matemática no pensamento de Immanuel Kant (1724-1804) e nos filósofos analíticos contemporâneos, enquanto Hill (2002) faz o mesmo em relação à fenomenologia de Edmund Husserl (1859-1938). Mais ainda, é notório que novas descobertas na matemática têm sempre ocasionado novas teorias filosóficas e Fossa (2019) mostrou como as duas disciplinas têm se desenvolvido de forma paralela. Enquanto isto, Koetsier e Bergmans (2005) reuni 35 artigos sobre a influência da matemática sobre o desenvolvimento da teologia e da religião.

A importância e ubiquidade da matemática para os multifacetados aspectos da cultura humana é, então, um forte motivo para que o aluno tenha contatos diretos com grandes obras matemáticas. Uma maneira de fazer isto seria através de disciplinas sobre a história da matemática centradas na leitura e análise de fontes históricas. Uma outra forma de alcançar o referido desiderato seria a incorporação de textos históricos no ensino da matemática. Abordaremos essa opção no que segue, mas antes mencionaremos outro aspecto do ensino da matemática relacionado a cultura.

Diversidade Cultural e Equidade

O reconhecimento do aspecto cultural da matemática nos leva a considerar mais alguns objetivos pedagógicas do sistema escolar, a saber, a apreciação da diversidade cultural e a equidade de pessoas de diversas culturas. É de convir que qualquer sociedade grande é composta de grupos distintos com interesses parcialmente conflitantes que podem ameaçar a sua unidade e pôr em risco os direitos básicos das pessoas de um ou mais desses grupos vis-à-vis os outros componentes da coletividade social. As tenções podem ser até exacerbadas em sociedades multiculturais como a brasileira. A história da matemática poderá ajudar a combater essas tenções por mostrar que a matemática representa uma herança cultural de todos nós, à qual todos têm contribuído. De fato, uma das motivações do surgimento da etnomatemática, um ramo da história da matemática, foi exatamente a preocupação com a inclusão social no meio escolar.

Nesse sentido, a leitura de textos históricos poderá ser um recurso poderoso na consecução de objetivos relacionados à diversidade e à equidade porque implica que haja um diálogo virtual entre o leitor e o autor da obra. Deve ser claro, porém, que queremos dizer por 'leitura' não simplesmente uma leitura superficial, mas uma leitura crítica, utilizando todas as técnicas hermenêuticas que usaríamos para analisar qualquer outro texto de qualquer outro domínio do saber, incluindo uma apreciação do *milieu* histórico-social da sua criação. Ao fazer isto, criamos laços sociais de nível pessoal com o autor e, ao fazer isto com autores de culturas diversos da nossa, diminuímos as tenções oriundas da diversidade.

As considerações aqui apresentadas em relação à diversidade cultural são obviamente aplicáveis, *mutatis mutandis*, a questões de gênero.

Conhecimento

Como vimos, então, a leitura de textos históricos na sala de aula é um mandato imperioso para os que querem ter um conhecimento da cultura humana e, assim, julgamos que as referidas leituras devem fazer parte do currículo escolar. Também vimos que podemos efetuar tais leituras em duas maneiras principais, a saber, em disciplinas dedicadas à história da matemática ou embutidas nas próprias disciplinas de conteúdo matemático. Voltaremos a nossa atenção agora sobre a segunda das mencionadas alternativas, pois a incorporação de fontes históricas na sala de aula de matemática poderá ser de muito serventia ao aluno nas suas tentativas de construir o conhecimento matemático.

Para ver como isso procede, precisamos nos delongar um pouco sobre a natureza do conhecimento. O problema do conhecimento é um problema complexo e sutil, envolvendo relacionamentos dialéticos entre o indivíduo, o outro e o objeto. Não será procedente entrar nos detalhes de tudo isto agora, mas pelo menos podemos afirmar, de forma simplificada, que os três aspectos que destacamos implicam que, em todo ato de conhecimento, haja alguém que ativamente produz o conhecimento, que o mesmo é feito como produto social e que é feito perante dum mundo que se revela ao conhecedor. No que segue, tentaremos explanar o que está envolvido em cada um desses três aspectos da construção do conhecimento e o papel facilitador que a leitura de textos históricos pode fazer em cada um deles.

O Aluno Ativo

Antigamente se considerava, em geral, o conhecimento como algo que acontecia ao sujeito. Neste sentido, o aluno era suposto análogo a um vaso, que iria ser preenchido com conhecimento pelo professor. Foi talvez a "revolução copernicana"[9] de Immanuel Kant (1724-1804) que reverteu esse conceito de forma sustentável pela primeira vez. Para Kant, a mente tem uma determinada estrutura que ela usa para formar e ordenar o material amorfo que recebe dos sentidos. A ideia foi desenvolvida em termos psicológicos por Jean Piaget[10] (1896-1980). Para ele, o conhecimento consiste na assimilação (incorporação) de novos itens a uma estrutura mental já existente e na acomodação da estrutura a novos itens por mudanças na dita estrutura. As consequências epistemológicas e pedagógicas, especialmente no contexto da Educação Matemática, da teoria construtivista foram avançadas ainda mais no construtivismo radical[11] de Ernst von Glasersfeld e os pesquisadores associados a ele. Nessa teoria a necessidade da construção ativa do conhecimento pelo conhecedor (o aluno) é enfatizado.

Segundo o construtivismo, então, todo conhecimento é construído e isso acontecerá sempre que houver conhecimento, independentemente da metodologia de ensino adotada. Não obstante, o ensino será mais eficaz, ou menos eficaz, dependendo da sua consonância com a natureza do conhecimento. Assim, o ensino assentado sobre explicações verbais do professor

[9] Ver Kant (1968); em português, Kant (2004).
[10] Ver Piaget (1970a); original em inglês, Piaget (1970).
[11] Ver Fossa (2014), em português, ou Fossa (2019a), em inglês.

não proporciona ao aluno muito incentivo de se investir no processo construtivo necessário para a obtenção de um bom nível[12] de conhecimento. Nesse modo de ensino, o livro texto tende a ser apenas um repositório fossilificado do discurso do professor, de que o aluno apanha modelos estáticos para a resolução rotineira dos exercícios e de que obtém pouco preparo para enfrentar problemas novos. Uma aprendizagem mais profunda fica, assim, inteiramente condicionada à casualidade de um interesse maior da parte do próprio aluno.

Tudo muda, porém, quando se usa fontes históricas na sala de aula. Isto sucede porque, tipicamente, o professor não explica o texto ao aluno, mas exige que o aluno o explora e tenta decifrar o conteúdo dele. Para tanto, o aluno é automaticamente colocado numa situação em que sucesso –até sucesso parcial – é somente alcançado com um aumento de esforço pessoal que ele desempenha no deciframento de um texto escrito segundo padrões diferentes dos de textos contemporâneos. Nesse sentido, tanto o próprio texto histórico, quanto a metodologia de ensino associada ao seu uso na sala de aula, proporcionam ao aluno oportunidades de construir seu conhecimento de forma ativa e consciente, visto que o processo hermenêutico de interpretação de textos históricos implica no engajamento com o texto e envolve naturalmente o desenvolvimento de habilidades metacognitivas.

Disto, deve ser claro que a fonte histórica a ser usada na sala de aula precisa ser escolhida criteriosamente para atender aos objetivos pedagógicos do contexto do seu uso. Em especial, é necessário selecionar textos que coadunam com a base cognitiva do aluno e utilizar metodologias que levam o aluno a desenvolver as suas habilidades hermenêuticas, sobretudo quando as suas competências de leitura estão pouco evoluídas.

Construção Social

Visto que o construtivismo é pautado sobre a construção de estruturas mentais e centra muita da sua atenção na atividade do indivíduo, seus partidários têm uma tendência muito grande a esquecer que a aprendizagem – isto é, a própria construção do conhecimento – é um projeto social[13]. Enquanto o indivíduo precisa construir suas próprias estruturas mentais, ele só pode fazer isto em conjunção com o outro, pois o outro é necessário para que o indivíduo

[12] Ver, por exemplo, Skemp (1976).

[13] O construtivismo social, embora esteja presente na obra de Piaget, obteve reconhecimento geral através da obra do psicólogo russo Lev Vygotsky (1896-1934). Atualmente se constitui, em várias formas, um elemento importante de várias teorias educacionais.

possa apropriar a ciência (no sentido mais lato) já desenvolvida pelo homem. De fato, o indivíduo nunca é um solitário, mas sempre se acha inserido dentro de uma cultura e, em qualquer determinado momento da sua vida, sua base cognitiva é dependente das relações dialéticas que ele se mantém com seu ambiente social. As referidas relações são dialéticas porque o homem não somente apropria a cultura da sociedade ambiente, mas também contribui à continuidade da mesma e às maneiras em que ela se modifica no tempo.

Nesse sentido, a leitura e análise de textos históricos é uma maneira de dialogar com grandes inovadores da cultura matemática. Destaca-se a origem e propósito dos conceitos abordados, a argumentação usada pelo autor e o desenvolvimento dos métodos adotados. Leituras mais sofisticadas podem incluir oportunidades perdidas e comparações diacrônicas. Mas, em qualquer caso, a análise do texto levará o aluno a uma compreensão mais profunda da matemática por enriquecer seu conhecimento de abordagens alternativas, aprofundar seu entendimento de conceitos matemáticos e proporcionar uma apreciação maior das interconexões entre as várias partes da matemática, bem como da matemática com outras partes da nossa cultura. Ao proceder dessa maneira, o aluno constrói suas próprias estruturas mentais enquanto apropria, de forma intensa e consciente, a cultura matemática.

Dependendo da metodologia de ensino usado, o diálogo que o aluno mantém com o outro ao ler textos históricos não se limita ao diálogo com o(s) autor(es) do texto e outros atores históricos, mas também inclui seus pares contemporâneos, pois a própria análise é um ato social. Isto pode ser enfatizado por fazer a análise cooperativamente, em pequenos grupos por exemplo, e por colocá-la a prova diante do grupo maior. Os resultados podem ser muito enriquecedores para o aluno.

Ilustro isto com dois exemplos que aconteceram em aulas por mim ministrados. Ao ler *Os Elementos* de Euclides, os alunos estranharam a frase "um número mede outro" para se referir à divisão de um número por outro. Isto levou a uma consideração do papel da geometria face à aritmética, bem como o papel da demonstração racional na sociedade grega antiga e a sua incorporação na matemática. Noutra aula, os alunos leram partes do já mencionado Euler (2017), onde se encontra dois juízos distintos sobre números primos, no primeiro dos quais a unidade é incluída e no segundo excluída. Isto gerou uma discussão sobre o conceito de número primo e seu lugar na teoria da aritmética. Pesquisaram em livros modernos de álgebra, mas não ficaram satisfeitos com a razão ali apresentada para a exclusão da unidade dos primos (que 1 é o elemento neutro da multiplicação). Era só quando atinaram com o fato de que incluir a unidade entre os primos implicaria na perda da unicidade da Teorema Fundamental da Aritmética (decomposição em números primos) que entenderam o problema – e apreciaram que o desenvolvimento de uma teoria matemática envolve, às vezes, escolhas entre desideratos excludentes. Tais experiências de aprendizagem não somente ajudam o aluno a entender mais profundamente os conceitos matemáticos em jogo, mas também promovem uma apreciação maior da matemática como um produto cultural do homem.

O Mundo Matemático

É notável que o homem não somente se acha numa cultura, mas também se acha num mundo. Temos uma forte tendência de conceitualizar o mundo como algo externo e independente de nós e, consequentemente, pensamos no relacionamento nosso com o mundo como consistindo de relações externas entre seres individualizados independentes uns dos outros, cada um dos quais pode afetar outros através de forças físicas. Tanto a filosofia, quanto a ciência (especialmente a física quântica), porém, tem desmentido a referida tendência por postular a importância das relações internas entre todas as coisas de tal forma que nós e o mundo não somos independentes, mas mutuamente constituídos. Aqui, faremos apenas algumas breves considerações, partindo da fenomenologia de Martin Heidegger (1889-1976).

Segundo a fenomenologia, os seres do mundo se revelam ao homem. Mas, só podem fazer isto através da nossa apropriação deles pela linguagem. Nesse sentido, os referidos objetos do mundo são constituídos pelo homem e para o próprio homem. Dessa forma, o mundo é, ao mesmo tempo, maleável e recalcitrante às ações humanas. O mesmo acontece com os objetos matemáticos, que são objetos abstratos e não-físicos. Por um lado, os matemáticos inventam os objetos matemáticos, pois eles resultam da atividade matemática como um produto humano; por outro lado, todo matemático tem a sensação de que está descobrindo fatos matemáticos. Essa dialética entre a invenção e a descoberta é tão essencial ao conhecimento matemático quanto o é a dialética entre a independência e a dependência ao conhecimento de objetos físicos. Nos dois casos, o ato de apropriação é caraterizado pela teorização [14] e, portanto, é somente através da teorização que conhecimento genuíno é

[14] Para mais detalhes ver Fossa (2012).

construído. Em termos pedagógicos, a posição fenomenológica implica que o conhecimento genuíno não se limita à simples incorporação de estruturas mentais do outro aos seus esquemas mentais, pois isto condena o aluno a viver num mundo alienado. É só com a teorização sobre o mundo, seja ele o mundo físico ou o mundo matemático, que o aluno consegue fazer suas próprias construções e apropriar o mundo a si, fazendo-o o seu.

Uma maneira eficaz de ajudar o aluno a obter o conhecimento genuíno é através da leitura de fontes históricas na sala de aula. O texto histórico contém um relato de um ato original de apropriação e, ao fazer uma exegese hermenêutica do texto, o aluno poderá recapturar e reviver o referido ato original de apropriação, fazendo-o o seu. A re-vivência do ato criativo original coloca, de fato, o aluno às fronteiras da pesquisa matemática num ponto do passado e faz com que ele participa no processo de criação. Sua participação, contudo, é privilegiada, pois ele é consciente do fato de que sua experiência é uma re-vivência e assim não somente recria, junto com o autor original, uma parcela da matemática, mas também teoriza sobre o mesmo à luz de conhecimentos mais modernos.[15] Foi exatamente isto o que aconteceu com os já mencionados alunos que precisavam, primeiro, decidir junto com Euler, se a unidade fosse, ou não, um número primo e, depois, decidir se o juízo de Euler era acertado, ou não, à luz de outras considerações.

Considerações Finais

Com o desenvolvimento da história da matemática como uma importante tendência da Educação Matemática, a história passou a desempenhar vários papéis pedagógicos interessantes na sala de aula. Alguns deles, como o uso da história para aguçar a motivação do aluno, foram usados há muito tempo, embora de forma mais tímida do que é feito atualmente, enquanto outros, como o uso da história para aprimorar as habilidades de leitura e de escrita do aluno, são de data mais recente. Igualmente a qualquer outra estratégia pedagógica, esses usos da história da matemática não resolvem todos os problemas do ensino da matemática, nem funcionam da mesma forma para todos os alunos. Não obstante, têm se mostrado instrumentos muito valiosos na busca de um ensino eficaz de qualidade. Nesse sentido, devem fazer parte do repertório pedagógico de todos os professores de matemática.

[15] Para mais detalhes, ver Fossa (2016).

O presente trabalho, no entanto, não tem adentrado na utilização desses importantes instrumentos para o ensino de matemática com a história da matemática. Antes, temos procurado mostrar a posição privilegiada da leitura de textos históricos na sala de aula. Para tanto, expusemos dois argumentos que ressaltem a importância desse procedimento para o ensino da matemática, sendo que o primeiro se assenta sobre a conceitualização da matemática como parte da herança cultural do homem e o segundo sobre a natureza do conhecimento.

Podemos resumir o primeiro argumento da seguinte maneira: a matemática é uma das mais importantes partes da cultura humana no sentido de que permeia quase todas as outras partes dessa cultura; assim, na medida em que a educação deve levar o aluno a apropriar a cultura humana para que alcançasse uma vida rica e plena, o aluno deve ter contato direto e intenso como os produtos (isto é, as fontes históricas) da cultura matemática. A conclusão aqui é diferenciada daquela que é feita para outros usos da história da matemática como um instrumento pedagógico da Educação Matemática, pois os referidos argumentos mostram a eficácia das várias modalidades e proponham a sua adoção pelo professor quando apropriado. O presente argumento, em contraste, conclui que, da mesma forma em que é necessário que o aluno tenha a experiência de confrontar diretamente grandes obras de literatura, é necessário que ele também tenha a experiência do confronto direto com grandes obras de matemática.

O segundo argumento que abordamos aqui se estrutura sobre a natureza tripartida do conhecimento, mostrando como a leitura de fontes históricos se adequa (*i*) à atividade construtiva do conhecimento, (*ii*) à natureza social do conhecimento e (*iii*) à dialética da apropriação do objeto matemático. Desta forma, a leitura de textos históricos leva o aluno a fazer teorizações sobre a matemática o que implica na construção de matemática genuína.

Os dois argumentos são razões cogentes para a inclusão de leituras de textos históricos na sala de aula.

Referências

Abdounur, Oscar João. (2002). *Matemática e música: O pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras Editora.

Adler, Mortimer. (1961). *Great Ideas from the Great Books*. New York: Washington Square Press.

Almeida, Manoel de Campos. (A aparecer). Elementos de cálculo diferencial e integral: o "Granville". Volume 3 da *Coleção Cacoá*. Campina Grande: Editora da UEPB.

Erickson, Glenn W., e Fossa, John A. (2006). *A linha dividida: Uma abordagem matemática à filosofia platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumará.

Euclid. (1956). *The elements*. Trad. de T. L. Heath. New York: Dover.

Euclides. (2009). *Os elementos*. Trad. de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP.

Euler, Leonhard. (2017). *Tratado sobre a teoria dos números em XVI capítulos*. Trad. de John A. Fossa. Natal: Editora da UFRN. Ebook disponível em: www.repositorio.ufrn.br. Consulta em 04/10/2019.

Euler, Leonhard. (2017a). *Sobre números amigáveis*. Trad. de John A Fossa, Sarah Mara Silva Leôncio e Fabricio Possebon. Natal: Editora da UFRN. Ebook disponível em: www.repositorio.ufrn.br. Consulta em 04/10/2019.

Euler, Leonhard. (1849). De numeris amicabilibus. *Commentationes arithmeticae* 2, p. 627-636.

Euler, Leonhard.(1750). De numeris amicabilibus. *Opuscula varii argumenti* 2, p. 23-107.

Euler, Leonhard. (1774). De numeris amicabilibus. *Nova acta eruditorum*, p. 267-269.

Fossa, John A. (2019). O status epistemológico do conhecimento matemático. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/335682130_O_Status_Epistemologico_do_Conhecimento_Matematico. Consulta em 04/10/2019.

Fossa, John A. (2019a). *Intuitionist theory of Mathematics Education*. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/331438081_Intuitionist_Theory_of_Mathematics_Education. Consulta em 04/10/2019.

Fossa, John A. (2016). Conhecimento como apropriação e a história da matemática como agente de cognição. In Emmanuel Ribeiro Cunha, Marta Genú Soares e Pedro Franco de Sá (Orgs.). *Formação de Professor: Teorias e Práticas Cotidianas*. Belém: Editora da UEPA, p. 15-32.

Fossa, John A. (2014). *Teoria intuicionista da Educação Matemática*. 2ª. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Fossa, John A. (2012). Heidegger, Hebel e Educação Matemática. *Revista Educação Matemática em Foco*. Vol. 1, n. 1 (janeiro/junho), p. 41-51.

Fossa, John A. (2006). Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da antigüidade. *In*: Iran Abreu Mendes, John A. Fossa e Juan E. Nápoles Valdés (orgs.). *A história como um agente de cognição na Educação Matemática*. P. 137-182. Porto Alegre: Sulina.

Fossa, John A. (1998). Historical ways of teaching mathematics. In: *Proceedings of the first ICMI East Asain Conference on Mathematics Education*. V. 3. p. 423-428. Chungju (Korea).

Fossa, John A., e Erickson, Glenn W. (2014). The Oedipus myth as mathematical allegory. *Revista brasileira de história da matemática*, v. 14, n. 29, p. 31-58.

Gamwell, Lynn. (2016). *Mathematics and art: A cultural history*. Princeton: Princeton University Press.

Granville, William Anthony, e Smith, Percey F. (1904). *Elements of the differential and integral calculus*. Boston: Ginn & Company.

Granville, W.A., Smith, P. F., e Longley, W. R. (1961). *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Trad. De J. Abdelhay. Rio de Janeiro: Editora Científica.

Grugnetti, Lucia, e Rogers, Leo. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In: John Fauvel e Jan van Maanen, (Eds.). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Hill, C. O. (2002). On Husserl´s mathematical apprenticeship and philosophy of mathematics. In: Anna-Teresa Tymieniecka (Ed.). *Phenomenology world-wide. Analecta husserliana* (The Yearbook of Phenomenological Research), vol. 80. Doddrecht: Springer.

Hofstadter, Douglas R. (1980). *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid*. New York: Vintage Books.

Kant, Immanuel. (2004). *Crítica da razão pura*. Tradução de Afonso Bertagnoli. Disponível em <http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/razaopratica.html>. Consulta em 19/09/2019.

Kant, Immanuel. (1968). *Kritik der reinen Vernunft*. In: *Kants Werke* (Vol. III). Berlin: Walter de Gruyter & Co. [Original 1788.]

Joseph, George Gheverghese. (1991). *The crest of the peacock*. Princeton: Princeton University Press.

Koetsier, T., e Bergmans, L. (2005). (Eds.) *Mathematics and the divine: A historical study*. Amsterdam: Elsevier.

Parsons, Charles. (1983). *Mathematics in philosophy*. Ithaca (NY): Cornell University Press.

Piaget, Jean. (1970). *Genetic epistemology*. New York: Columbia University Press.

Piaget, Jean. (1970a). *Epistemologia genética*. Petrópolis: Vozes.

Skemp, Richard R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77, p. 20-26.

The Rhind mathematical papyrus. (1927). Trad. de A. B. Chace e H. P. Manning. Oberlin: The Mathematical Association of America.

Autor

John A. Fossa, Ph.D.

Doutorado em Educação Matemática pela Texas A&M University System(1994). Mestrado em Filosofia pela Fordham University(1974). Graduação em Filosofia pela College Of The Holy Cross(1972). Docente aposentado da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Atualmente é Professor pesquisador Visitante da Universidade Estadual de Campina Grande (PB). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em História da Matemática. Atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Intuicionismo, Construtivismo Radical. Mais informacões no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/2466525106349625. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7957-6656. E-mail: jfossa03@gmail.com.

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p133-159.id835

LA HISTORIA Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: UM ENCUENTRO POSIBLE

Edilene Simões Costa dos Santos[1]
edilenesc@gmail.com

Cristiano Alberto Muniz[2]
cristianoamuniz@gmail.com

Maria Terezinha Jesus Gaspar[2]
mtjg.gaspar@gmail.com
[1]*Universidade Federal de Mato Grosso do Sul*
[2]*Universidade de Brasília*

Recibido: 11/11/2019 **Aceptado:** 22/01/2020

Resumen

Este estudio aborda el valor didáctico de la historia de las matemáticas en la educación matemática, buscando resaltar una posible relación entre la historia y la didáctica de las matemáticas. La investigación analizó la enseñanza-aprendizaje utilizando la historia de las matemáticas en la concepción de producir y sistematizar circunstancias del concepto de área como cantidad autónoma y procedimientos para su medición. La realización de la propuesta de trabajo se realizó a través de la organización, aplicación y análisis de la secuencia didáctica realizada en dos clases de quinto grado, en dos escuelas públicas del Distrito Federal-Brasil. Las conclusiones de esta investigación se centran en el análisis de los procedimientos, dificultades, representaciones, movilización de teoremas y conceptos en acción presentados por los estudiantes que participan en el estudio. A través de los análisis, encontramos el crecimiento gradual del estudiante en la construcción y el significado del concepto del área y su medición, y en la comprensión del conocimiento no está listo y se construye en un proceso que involucra tiempo, conocimiento, contextos y personas. Además, a través del análisis basado en la teoría de los campos conceptuales, fue posible afirmar que los estudiantes demostraron identificar el área como magnitud, en las decisiones de resolución no confundieron superficie con su área ni área con numero
Palabras clave: Área, Historia de las matemáticas, Teoría de los Campos Conceptuales

THE HISTORY AND TEACHING OF MATHEMATICS: A POSSIBLE MEETING

Abstract

This study approaches the didactic value of the history of mathematics in mathematics education, seeking to highlight a possible relationship between history and didactics of mathematics. The research analyzed teaching-learning using history of mathematics in the conception of circumstances that produce and systematize area concept as autonomous quantity and procedures for its measurement. The realization of the work proposal occurred through organization, application and analysis of a didactic sequence conducted in two fifth grade classes in two public schools in Federal District - Brazil. The conclusions of this investigation focus on the analysis of procedures, difficulties, representations, and mobilization of theorems and concepts in action presented by the students participating in the study. Through the analyzes we found the student's gradual growth in construction and

signification of area concept and its measure and in understanding that knowledge is not ready, but it's built in a process that involves time, knowledge, contexts and people. It was also possible, through analysis based on the theory of conceptual fields, to state that students demonstrated to identify area as magnitude, and in decisions for resolution they did not confuse surface with its area nor area with number.
Keywords: Area, History of Mathematics, Theory of conceptual fields

A HISTÓRIA E A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: UM ENCONTRO POSSÍVEL

Resumo

O presente estudo aborda o valor didático da História da Matemática na educação matemática, analisando o ensino-aprendizagem ao se utilizar a história da matemática na concepção de circunstâncias produtoras e sistematizadoras do conceito de área como grandeza autônoma e procedimentos para sua medida. A efetivação da proposta do trabalho ocorreu por meio da organização, aplicação e análise de sequência didática realizada em duas turmas de quinto ano do Ensino Fundamental, em duas escolas da rede de ensino público do Distrito Federal-Brasil. As conclusões desta investigação centram-se na análise acerca dos procedimentos, dificuldades, representações, mobilização de teoremas e conceitos em ação apresentados pelos alunos participantes do estudo. Por meio dessa análise, constatamos o crescimento gradativo dos alunos na construção e significação do conceito de área e sua medida, além da compreensão de que os conhecimentos não estão prontos, sendo construídos em processo que envolve tempo, conhecimentos, contextos e pessoas. Assim, tendo por base a teoria dos campos conceituais, foi possível afirmar que os alunos demonstraram identificar área como grandeza nas decisões para resolução, não confundindo superfície com sua área e nem área com número.
Palavras-chave: Área, História da matemática, Teoria dos Campos Conceituais,

Introdução

Nas últimas décadas foi desenvolvida uma grande quantidade de estudos e discussões em torno de questões que envolvem o como ensinar matemática para crianças e jovens. Entre as muitas reflexões didático-metodológicas, está a História da Matemática. No entanto, a mesma não tem sido muito usada pelo professor em sala de aula como um instrumento para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Quando muito, ela é um elemento para introduzir um conteúdo, sem muitas implicações pedagógicas.

Ao se pensar mais especificamente nos anos iniciais, a situação torna-se mais complexa, talvez por insegurança metodológica ou epistemológica, mas, reconhecendo o valor histórico do conhecimento matemático e fundamentando-se no valor da narrativa no aprendizado da criança, professores dos anos iniciais tentam inserir a história em suas aulas por meio do que os autores chamam de anedotas ou como elemento motivador que assume a função de apenas introduzir um assunto desconectado com as demais etapas da organização para o desenvolvimento de tal conteúdo.

Outra questão emergente é que o ensino, mesmo dentro da perspectiva histórica, não deve ser pautado na linearidade e na hierarquização dos conteúdos, pois o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem escolar são socioculturalmente influenciados pelas representações hegemônicas das ideias, e não necessariamente por todas as representações históricas da mesma. Por exemplo, Vergnaud (1996) pondera que a conceitualização do sujeito pode estabelecer desvios que fazem com que o desenvolvimento não seja na mesma linha lógica da história da civilização, a criança que aprende sendo um sujeito ativo com vivência em um mundo tecnológico e globalizado. Isso nos leva a considerar a importância do ensino e da aprendizagem de conhecimentos matemáticos por meio da História da Matemática como instrumento didático, tendo a compreensão de que o raciocínio do jovem aprendiz pode não acompanhar a linearidade da solução da construção da história do Homem.

Nesse sentido, realizamos uma pesquisa para verificar se alunos dos anos iniciais constroem conhecimentos quando utilizamos a História da Matemática como agente de cognição. O resultado da pesquisa apontou que alunos do Ensino Fundamental podem construir conceitos matemáticos quando inseridos em contextos históricos matemáticos, de forma implícita ou não para eles. Para tal, optamos por trabalhar com o conceito de área e os procedimentos para sua medida e, então, foi elaborada e aplicada, em duas turmas de quinto ano da rede pública de ensino do Distrito Federal, uma sequência de atividades fundamentadas em contextos históricos da matemática e, para verificar se realmente os alunos estavam construindo o conceito de área, utilizadas a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria dos Registros de Representações Semiótica.

Contribuições de Vergnaud e Duval

A construção do conceito pelo aluno requer a criação de um espaço de ensino e aprendizagem impregnado pela atividade, exploração, investigação, mobilizando-o para a ação. Então, aprender torna-se significativo, onde errar é levado em conta como parte do processo cognitivo. De acordo com Vergnaud (1996, p. 190), esse espaço que ativa o realizar procedimentos de aprendizagem são as situações-problema: “um conceito não assume a sua significação em uma única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito”, ou seja, são as situações que dão sentido ao conceito, sendo elas as referências no processo de conceitualização. As atividades constituíram-se nesse espaço onde os alunos resolviam as situações-problemas.

Uma vez elaboradas as atividades questionamos: como verificar se o aluno construiu o conceito? Como analisar seus procedimentos para ao final afirmarmos que por meio da história ele constrói conhecimentos?

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 1996, 2003) nos auxiliou nas análises a fim de responder nossa questão quanto à construção do conhecimento, à apropriação do saber do tema em estudo por meio da História da Matemática.

Nessa perspectiva, as atividades desenvolvidas pelos alunos, bem como as observações feitas em sala de aula, as entrevistas com os estudantes, os encontros de estudo e planejamento com as professoras foram analisados com base na Teoria dos Campos Conceituais. Além disso, apoiamo-nos em Duval (1994, 2003), acerca do desenvolvimento do pensamento matemático, quando considera que as representações semióticas produzidas pelos sujeitos, além de exteriorizar as suas representações mentais são igualmente fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento.

Vergnaud (1996) define que os invariantes operatórios são teoremas em ação e conceitos em ação constituem a base conceitual implícita que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes. Assim, é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito – os teoremas em ação e os conceitos em ação. É nas situações que ocorre a operacionalidade dos conceitos. O esquema é um referente do sujeito e a situação é a circunstância e o contexto em que o objeto a ele se apresenta e repousa sobre uma conceitualização implícita.

Os conceitos em ação são relacionados a objetos, predicados, classes, condições. Dentro de uma vasta quantidade de conceitos que podem estar disponíveis no repertório dos sujeitos, é selecionada uma pequena parte para cada ação. Os teoremas em ação são proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas. Os conceitos em ação se articulam por meio dos teoremas em ação. Portanto, os conceitos em ação e os teoremas em ação podem ser adequados ou não para uma dada classe de situações e permanecem implícitos na ação do sujeito, podendo tornar-se explícitos. (Vergnaud, 1998).

Então, é importante propor situações de desestabilização, no caso, fundamentadas na concepção histórica da matemática. Tais situações tinham como função provocar ações de atividade no sujeito nas quais ele organizava o pensamento para a resolução e, a partir de um esquema, construía novos esquemas. O sujeito só constrói novos esquemas, se os mobilizados por ele não dão conta de obter uma resposta desejável, o que o desestabiliza, levando-o a novos investimentos. Assim, a situação é para o sujeito e o conceito é aquilo de que ele se apropria e o qual reelabora, para dar conta de novas situações, realizando uma síntese de conceitos anteriores de forma racional e criativa.

Vergnaud (1996) esclarece que o sentido de um conceito está fortemente associado à ação de resolução de problemas. Para Duval (1993), a compreensão da aprendizagem da matemática pelo sujeito deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, observando suas produções e buscando um modelo que seja pertinente para analisar e interpretar tais produções. A teoria de Vergnaud nos orientou nas análises das relações advindas e ocasionadas pelo conceito, enquanto a de Duval norteou as análises das representações dos objetos matemáticos. Nessa perspectiva, consideramos a construção do conceito de área pelo aluno, ou seja, não o conceito pronto expresso em uma definição explicitada no livro didático ou pela professora, mas uma ação experenciada e reelaborada pelo aluno.

Ainda, segundo Duval (2003), um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções: a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. Assim sendo, as representações semióticas não cumprem somente o papel de comunicar, elas são igualmente fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento. Para esse autor, o objeto matemático em estudo não deve ser confundido com suas representações, e sim reconhecido em cada uma delas. Logo, reconhecemos os registros de representação semiótica como um modelo pertinente para interpretarmos e analisarmos as relações entre as ideias e a produção do conceito de área pelos alunos inseridos em situações elaboradas diante da concepção histórica de tal conhecimento.

As produções externas dos educandos podem nos explicitar as condições de aquisição do conhecimento matemático em questão, isto é, as condições específicas de acesso ou não a tais objetos matemáticos. Ao desenvolver situações diversas, que trazem informações em diferentes linguagens, o aluno procura traduzi-las naquelas que consegue utilizar como uma ferramenta de tratamento da situação. Como cada linguagem traduz algumas propriedades do objeto, mas não todas, uma linguagem pode ser mais adequada que outra para lidar com esse objeto, em uma situação específica. Dessa forma, o conhecimento dos alunos sobre os objetos e suas propriedades é ampliado por meio do trânsito entre representações expressas em diferentes linguagens, as quais se tornam ferramentas para o pensamento no desenvolvimento de situações nas quais esses alunos podem ser inseridos.

Temos, em Duval (2003), que o acesso aos objetos matemáticos ocorre por meio das representações semióticas, pois nem toda operação cognitiva é perceptível ou observável por meio de objetos concretos, ou seja, os conceitos e conteúdos são abstrações desencadeadas por processos de generalização, que necessitam das representações semióticas para que ocorra uma verdadeira apreensão e evolução do pensamento matemático. As representações semióticas das pessoas são externas e conscientes, desempenhando o papel de comunicar, exteriorizar as representações mentais, a fim de torná-las acessíveis às outras pessoas, bem como possibilitar o acesso e a comunicação do objeto matemático.

Nas representações semióticas, segundo Duval (2003), dois aspectos devem ser tomados em consideração: a forma, que é o representante, e o conteúdo, o representado. Como existem diferentes registros de representação para o mesmo objeto matemático, a forma pode ser alterada de acordo com os diferentes tipos de tratamento. Assim: "A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão" (Duval, 1993, p. 51). A coordenação entre dois registros quaisquer se dá por meio de duas operações: conversão e tratamento; então, a formação de uma representação significa uma operação cognitiva.

Nesse sentido, as representações semióticas cumprem várias funções primordiais, tais como a comunicação – para tornar visíveis e acessíveis as representações mentais que dependem da interiorização das representações semióticas – na realização de diferentes funções cognitivas, como objetivação (expressão interna, que se presta ao entendimento particular), tratamento e convenção. (Duval, 1993).

Em algumas das atividades trabalhamos com interpretações autônomas de figuras. Para essas interpretações, Duval (1994) considera quatro tipos de apreensões:

a) sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
b) perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
c) discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados;
d) operatória: é uma apreensão centrada sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e a reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Nas atividades os alunos trabalharam com todas as apreensões. A tomada de consciência da distinção das formas de apreensão depende da exigência de resolução da situação na qual o aluno foi inserido.

Ainda de acordo com Duval (1994), a apreensão operatória das figuras depende das modificações pelas quais elas passam. Esse autor classifica essas modificações em:

a) modificação mereológica: a figura pode separar-se em partes que são subfiguras, obtidas a partir da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo;

b) modificação ótica: a figura pode ser aumentada, diminuída ou deformada – esta modificação transforma uma figura em outra chamada de sua imagem;

c) modificação posicional: é o deslocamento em relação a um referencial – a figura pode ser deslocada ou rotacionada em relação ao referencial.

Tais modificações são realizadas psiquicamente, mentalmente e graficamente. Em nosso trabalho, essas modificações, em sua maioria, ocorreram nas atividades de recorte e de colagem das figuras e também por meio de desenhos. Queremos enfatizar a modificação mereológica por possibilitar o uso da operação de reconfiguração que consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura. Essa operação permitiu a articulação entre tratamentos, tais como as medidas de áreas por soma de partes elementares, ou evidenciar a equivalência entre as áreas das figuras.

Dessa forma, a História da Matemática tem papel de problematização na perspectiva epistemológica do conhecimento matemático. Nesse contexto, assumimos que o aluno, primeiramente, necessita construir área como grandeza autônoma, distinguindo área e superfície, assim como área e medida da área. Então, para estruturamos a ordem de aplicação das atividades, tomou-se como referência o trabalho desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), que distingue três pontos na aprendizagem de área:

1) Construir a noção de área como grandeza autônoma pela comparação direta de duas superfícies por inclusão ou indireta por recorte e colagem:
    a) por comparação direta de superfícies, por meio da inclusão, ou indiretamente, por recorte e colagem, ou seja, cortando uma superfície S, em um número finito de peças, que, depois, são coladas juntas, sem sobreposição. Uma nova superfície S que substitui a S para comparação.
    b) por meio da atribuição de uma série de medidas de área (da mesma superfície) usando pedras de pavimentação (figuras) de várias formas.

    Isso nos leva a:
    i) diferenciar a forma da área de superfície: duas superfícies de formas diferentes podem ter áreas iguais;
    ii) distinguir a área de número, enquanto controla a correspondência entre a medida da área de superfícies e números: a área de uma mesma superfície pode corresponder a números diferentes, dependendo da unidade escolhida, mas a área em si não muda.

2) Estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de medida de área unitária, ou seja, por quadrados de lado iguais a uma unidade.
3) Apontar as diferenças entre comprimentos e área.

A seguir exibimos uma relação das atividades que compõem a sequência:

Quadro 1 - Sequência de atividades

Atividade	Eixo	Objetivo
1	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Perceber que, se uma figura (*) está contida na outra por isometria, então a área da primeira é menor do que a área da segunda.
2	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Perceber que, se uma figura é obtida de outra, retirando parte da primeira, a segunda está contida na primeira e a área da segunda é menor do que a área da primeira.
3	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Comparar as áreas de um conjunto de figuras e colocá-las em ordem crescente da área.
4	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Perceber que: - dados dois quadrados, o que tem a maior área é aquele que tem o maior lado. - dados dois polígonos regulares de mesmo número de lados, tem a maior área aquele que tem o maior lado.
5.1	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Instrumentalizar os alunos para resolverem o problema de transformar um quadrado em um retângulo de mesma área. Levar o aluno a perceber que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e essa área é igual à soma das áreas das partes
5.2	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Levar os alunos a perceberem que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e essa área é igual à soma das áreas das partes. Transformar um retângulo em quadrado de mesma área. Transformar o quadrado em retângulo de mesma área.
6	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Perceber, por recorte e colagem, que figuras diferentes podem ter a mesma área. Rever os conhecimentos trabalhados nas atividades anteriores.
7	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Identificar o quadrado e seus atributos. Perceber que a área de um quadrado é igual ao dobro da área do triângulo que se obtém cortando o quadrado ao longo de uma das suas diagonais. Perceber que é possível decompor o quadrado em dois retângulos de mesma área e que é possível construir um quadrado que tenha a metade da área de um quadrado dado.
8	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Resolver o problema da duplicação do quadrado. Reconhecer que a área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado é o dobro da área do quadrado dado.
9	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Trabalhar com a duplicação do quadrado. Construir um quadrado igual a um triângulo isósceles dado. Verificar a conservação de área na transformação do triângulo isósceles em quadrado.

Atividade	Eixo	Objetivo
10.1	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Identificar formas geométricas. Comparar as áreas.
10.2	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Perceber que a área de uma figura não muda, mas sua medida depende da unidade de medida escolhida. Transformar uma superfície não pavimentada em pavimentada. Calcular área por pavimentação tendo uma unidade de medida definida.
10.3	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem. Eixo 3: apontar as diferenças entre comprimentos e área.	Construir figuras com as peças do Tangram e comparar as áreas. Trabalhar o conceito de perímetro.
11	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem.	Evidenciar a natureza de uma unidade quadrada de área. Calcular a área da figura utilizando como unidade o quadrado. Escolher uma subunidade do quadrado para medir a área. Calcular a área de cada figura, adotando, como unidade de medida, o quadrado da malha na qual ela está desenhada.
12	Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Por recorte e colagem, transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada.
13.1	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem . Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Trabalhar com a unidade quadrada. Construir, no geoplano, polígonos cujo perímetro é dado. Comparar as áreas.
13.2	Eixo 3: apontar as diferenças entre comprimentos e área.	Perceber que polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas iguais ou diferentes. Entender que a medida do perímetro não tem relação com a medida da área. A unidade utilizada, para a medida do perímetro, é a distância entre dois pregos, e não a diagonal do quadrado formado por eles.
13.3	Eixo 3: apontar as diferenças entre comprimentos e área.	Identificar área e perímetro de figuras não convexas.
13.4	Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Consolidar os conceitos de área.
14	Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Promover situações que provoquem no aluno procedimentos para a medição de área para além da contagem de quadradinhos; transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada; tomar a decisão de fazer uma contagem por aproximação. Verificar quais procedimentos foram adotados pelos alunos.
15	Eixos 1, 2 e 3	Compreender que a área de um quadrado é uma unidade de medida e essa unidade varia de acordo com a medida do lado do quadrado. Compreender o metro quadrado como unidade padrão. Analisar algumas relações entre as unidades de medidas do sistema métrico decimal.

Nota: (*) Figura, neste trabalho, é uma superfície limitada e fechada contida no plano.

Após a elaboração das atividades, iniciamos a fase da experimentação, que consistiu no desenvolvimento das atividades em sala de aula, visando responder aos objetivos da pesquisa. Para Machado (2002), a experimentação tem início no momento em que se dá o contato com a população de alunos sujeitos da investigação e compreende a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos, o estabelecimento do contrato didático, a aplicação da sequência e, finalmente, o registro das observações realizadas durante a pesquisa.

Essa fase ocorreu em 23 encontros de duas aulas, algumas vezes havendo necessidade de mais tempo, pois os alunos queriam pintar as figuras e optamos por aguardar. Inicialmente, combinamos um encontro por semana, mas houve semanas nas quais foram necessários dois encontros, tempo suficiente para trabalhar todas as atividades previstas. As professoras preferiram iniciar a implementação no terceiro bimestre. Esse era o período para o qual estava previsto o trabalho com o conteúdo objeto desta pesquisa.

As atividades foram aplicadas em sala de aula pelas respectivas professoras colaboradoras, com a nossa participação, também realizamos as observações e os registros para composição do caderno de campo, juntamente com as produções e depoimentos dos alunos participantes. No entanto, realizamos medições na implementação da sequência quando julgamos necessárias ou quando solicitadas pela professora.

Ao término de cada aplicação realizávamos a análise dos procedimentos de resolução e das representações dos alunos imersos na resolução das atividades. Durante a aplicação da atividade, ao analisarmos os invariantes operatórios produzidos pelos alunos inseridos nas situações de contexto histórico do conceito de área e sua medida, apresentávamos outra situação para torná-los pertinentes, quando estes não eram. Podemos citar o seguinte teorema em ação utilizado: *dois triângulos formam um quadrado*, quando entregamos vários conjuntos de triângulos para os alunos formarem quadrados. Foi explicitado, também, outro teorema: *dois triângulos retângulos formam um quadrado.* Em seguida, entregamos triângulos retângulos, mas de tamanhos diferentes. Em seguida, novos teoremas, sistematizamos com a ajuda dos alunos: “dois triângulos retângulos isósceles de mesma área formam um quadrado”. Quando somente na análise percebíamos os teoremas não pertinentes, organizávamos uma atividade para retomar o assunto no encontro seguinte.

Nas análises, verificamos as conceitualizações implícitas nas ações dos alunos, os procedimentos de resolução, os erros e os acertos cometidos nas resoluções das situações, uma vez que os invariantes operatórios não são verdadeiros ou falsos, pois o conhecimento em ação nos permite agir em determinada situação independente de ser apropriado, ou não, segundo um determinado critério científico. (Vergnaud, 1990).

Ao final da aplicação da sequência, em sala, as professoras afirmaram que inicialmente ficaram apreensivas com a quantidade de conteúdo que faltava trabalhar; no entanto, ao longo da sequência, foram percebendo que muitos desses conteúdos estavam sendo trabalhados concomitantemente.

Em algumas atividades a história estava implícita, em outras, era trabalhada explicitamente. O planejamento da aplicação de cada atividade em sala de aula era constituído de uma seção denominada “um pouco da história da construção do conceito de área”. Essa seção tratava do contexto histórico que fundamentava a elaboração e o desenvolvimento em sala de tal atividade.

Apresentamos a seguir alguns elementos da história da construção do conceito de área que fundamentou de maneira geral todas as atividades.

Um Pouco de História do Conceito de Área

O conceito de área e sua medida foram produzidos historicamente pelo Homem em sua interação com o meio físico, social e político. Ao abordamos a história, no nosso trabalho, não temos por intenção trabalhar todos os conhecimentos de medidas constituídos pelos historiadores; nessa primeira atividade, queremos apresentar, de modo geral, conhecimentos que nos orientaram na elaboração das atividades e, quando possível, atermo-nos a fatos específicos relacionados à atividade em questão. Nossa preocupação é evidenciar fatos que nortearam a definição da estratégia metodológica adotada em nosso trabalho.

A origem e os primórdios da geometria são atribuídos ao Egito pelo historiador Herôdotos (trad. 1988), que viveu no séc. V a. C. A sociedade no antigo Egito era essencialmente agrícola, desenvolveu-se ao longo das margens do rio Nilo, sendo calculados os impostos pagos pelos proprietários de terras em função da quantidade de terra útil para plantio. Após a inundação anual do rio Nilo, havia a necessidade de recalcular os impostos, passando o dono do lote a pagar um tributo proporcional à porção restante. Assim, a geometria egípcia surge da necessidade de medir diferentes áreas de terra, de determinar o valor do imposto a ser pago e de calcular o volume de silos utilizados para armazenar grãos. A partir de Gillings (1972), a título de exemplo do cálculo de área por essa civilização, podemos citar o problema 49 do papiro de Rhind.

Outro exemplo de cálculo de área está em *Nove Capítulos da Arte Matemática*, um manual da matemática chinesa, que data de 200 a. C. Na dinastia Han (206 a. C a 220 d. C.), textos literários e científicos foram transcritos devido à destruição dos livros ocorrida na dinastia anterior, de maneira que os originais são anteriores a essa data, sendo, no entanto, difícil datá-los. Esse manual é composto por 246 problemas sobre questões de mensuração de campos, de agricultura, comércio, sociedades, engenharia, impostos, cálculos e equações, cada um dos seus nove capítulos tratando de um tema específico. O primeiro capítulo é chamado de Mensuração de Campo e traz exemplos práticos daqueles tempos em agrimensura, tamanhos dos campos, construção de aterros, valas e armazéns, ou seja, está intimamente ligado com as necessidades do dia a dia daquela época.

Podemos citar também os babilônios, do período entre 2000 a 1600 a. C., que podiam obter áreas de campos irregulares, dividindo-os em triângulos retângulos, trapézios e retângulos, cujas áreas sabiam calcular; no entanto, a geometria era tratada de forma algébrica (Eves, 2004).

A civilização indiana, segundo Amma (1979), estava envolvida com métodos para transformar uma figura geométrica em outra, mais especificamente o quadrado em outra figura geométrica equivalente, ao que tudo indica, por meio de decomposição e composição. Segundo os teóricos, os *Sulbasutras* (753 a. C) são os mais importantes documentos escritos que permitem compreender os processos matemáticos utilizados nas construções de templos pelos indianos. *Sulbasutras* significa regras de corda e neles encontramos, como unidade de medida de área, a "*purusha* quadrado", derivada da unidade de comprimento "*purusha"*, que significa a altura de um homem com os braços levantados. Assim como os egípcios, os indianos utilizavam homens conhecidos na época como estiradores de corda para realizar as medições. (Amma, 1979; Sarasvati, 1987). Gaspar (2004) refere-se à dimensão social da matemática e ao papel dos *Subakaras*, homens responsáveis pela construção dos altares indianos. Para Sarasvati (1987, p. 105), a construção dos altares exigia certos conhecimentos matemáticos: "Uma olhada nos diferentes altares é suficiente para mostrar que tudo isto não poderia ser realizado sem uma certa quantidade de conhecimento geométrico. Quadrados tinham de ser encontrados, os quais podiam ser iguais à soma de dois ou mais quadrados dados, ou iguais à diferença de dois quadrados dados; retângulos deviam ser transformados em quadrados e quadrados em retângulos; triângulos tinham de ser construídos iguais a quadrados ou retângulos dados; e assim por diante. A última tarefa, e não a menos importante foi o de encontrar um círculo, na zona em que pode ser igual, tanto quanto possível que a de um quadrado dado".

Então, o processo de comparar superfícies por recorte e colagem nos remete aos procedimentos utilizados por diferentes civilizações da Antiguidade – Egípcia, Babilônica, Indiana, Chinesa e Grega, na resolução de problemas envolvendo área. Os problemas mais comuns de medição baseados nos volumes de sólidos e áreas das figuras planas, em sua maior parte, eram calculados corretamente. Áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles foram obtidas corretamente, provavelmente por um processo de "decomposição e composição", semelhantes aos encontrados nas geometrias indiana e chinesa. (Joseph, 2000, p. 82).

Segundo Boyer (1996), no Papiro de Ahmes existem problemas que utilizam o cálculo da medida de área com o uso de composição e decomposição de figuras. Nos textos indianos, datados do século V ao século IX a. C., há vários problemas que solicitam transformar uma figura em outra de mesma área. Os indianos utilizavam um procedimento equivalente ao uso de “régua e compasso” para decompor a figura e construir outra equivalente em área a ela. Algumas dessas transformações podem sugerir procedimentos de recorte e colagem.

Para Hogben (1958), o método utilizado nos elementos de Euclides para determinar a área de polígonos envolve a decomposição em triângulos, levando à inferência de que também os gregos usavam esse princípio de composição e decomposição para determinarem a área de figuras. Eves (2004) comenta que os pitagóricos resolviam problemas de cálculo de área de uma figura plana transformando-a em outra figura plana cuja área era conhecida. A construção de um polígono de área igual a outro dado pode ser encontrada nas preposições 42, 44, 45 do Livro I e na preposição 14 do Livro II dos Elementos de Euclides.

A seguir, apresentamos uma das atividades da sequência desenvolvida na pesquisa e sua análise, para que o leitor tenha referência da aproximação da História da Matemática e da didática da matemática, uma vez que a história que trabalha com fatos já ocorridos foi o contexto das situações e as teorias da didática nos orientaram a compreender a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende.

Atividade 9 - Transformar um Quadrado em Triângulo Isósceles de Mesma Área por Recorte e Colagem

(1) **Um pouco de história do conceito de área**

Na civilização indiana a transformação de um quadrado em um triângulo isósceles era utilizada na construção do *Praugacit,* altar em forma de triângulo isósceles que tinha por finalidade destruir os inimigos. Todos *Sulbasutras* trazem a mesma orientação para a edificação desse altar: tomar um quadrado que tenha o dobro da área do quadrado; construir um quadrado “A” de área igual ao dobro de um quadrado “B”, que por sua vez tem a área desejada para o altar a ser edificado; nesse quadrado devem-se desenhar linhas a partir do ponto médio do lado leste para os cantos inferiores (vértice do lado oposto) e, então, o triângulo isósceles obtido tem área igual à metade da área o quadrado "A" e, portanto, igual a área do quadrado "B". (Amma, 1979).

Entre todas as transformações de uma figura em outra de mesma área, escolhemos a do quadrado em triângulo isósceles, pelo fato de a mesma permitir aplicar o conhecimento já adquirido da duplicação do quadrado. Para isso, optamos por trabalhar com a história explícita nessa atividade, orientando a resolução por etapas.

(2) **Objetivo**

Trabalhar com a duplicação do quadrado. Construir um quadrado igual em área a um triângulo isósceles dado. Verificar a conservação de área na transformação do triângulo isósceles em quadrado.

(3) **Material: Quadrados, sendo um o dobro da área do outro; tesoura e cola.**

(4) **Procedimento**

(I) **Contar aos alunos uma história que faça referência aos *Sulbasultras***

Os *Sulbasutras* são manuais, livros que contêm instruções de caráter religioso para a construção de altares. A palavra *Sulbasutra* deriva das palavras "sulba" e "sutra", que significam "regras de corda".

Três dos *Sulbasutras* mais importantes do ponto de vista matemático, compostos em versos, foram os compilados por três matemáticos indianos: Baudhayana, Apastamba e Katyayana. Sabe-se que o mais importante desses textos é o de Baudhayana, datado de 800 a. C a 600 a. C; os outros foram, provavelmente, reunidos dois séculos depois.

As instruções encontradas nos *Sulbasutras* eram usadas para construir figuras de uma área dada, como triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos, semicírculos, e também figuras com área igual à de outras figuras. Por exemplo, para transformar um quadrado em um triângulo isósceles, com a mesma área, *Baudhayana* utilizou o seguinte método:

(a) Primeiro constrói-se um quadrado com o dobro da área do quadrado inicial.
(b) Em seguida, une-se o ponto médio de um dos lados obtidos a cada um dos vértices opostos a esse lado. Assim, era obtido o triângulo isósceles de mesma área do quadrado dado (Amma, 1979; Sarasvati, 1987).

(II) **Propor, então, o desafio: por recorte e colagem, verificar se o método de *Baudhayana* está correto**

Iniciar a medição para a construção. Convidar os alunos para a verificação proposta. Entregar a cada aluno um par de quadrados e afirmar: “Você recebeu dois quadrados, sendo que um tem o dobro da área do outro. Deve-se verificar se a relação entre as áreas dos quadrados realmente está correta e, em seguida, pelo método utilizado por *Baudhayana,* construir um triângulo isósceles igual em área ao quadrado. Por fim, transformar o triângulo isósceles em um quadrado de mesma área”.

(5) **Análise da atividade**

Quanto à verificação se a área de um dos quadrados dado tem o dobro da área do outro, foram apresentadas respostas semelhantes a estas:

“É verdadeira porque a diagonal do quadrado menor é do mesmo tamanho do lado do quadrado maior”.
“Está correta porque o quadrado pequeno mede 2 triângulos e o grande mede 4 triângulos”.
“Está correta, sei por que dobrei o quadrado vermelho (maior) em oito triângulos e medi e ficou igual ao triângulo azul (menor)”.

Figura 1 - Medindo o lado do quadrado com a diagonal do quadrado

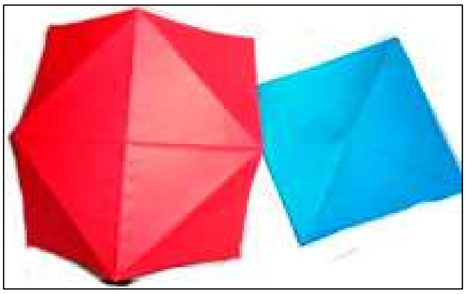


Figura 2 - Diagonal do quadrado é igual ao lado do quadrado maior

“É porque quadrado maior tem oito triângulos e o menor só quatro triângulos”.

“Eu dobrei na diagonal dos quadradinhos do quadrado grande e deu oito triângulos, o quadrado pequeno tem 4 triângulos”.

Os alunos resolveram a questão sem nenhuma dificuldade. Nós esperávamos que eles lembrassem a atividade da duplicação do quadrado e respondessem algo semelhante à primeira resposta, no entanto aquela foi a resposta que menos foi apresentada. Chamou-nos a atenção que eles trabalharam mais com o procedimento da atividade do que com o resultado, e se lembraram dos procedimentos para reduzir a área à metade. Então, tomaram o quadrado de maior área e dobraram de modo a encontrarem dois quadrados de mesma área, os quais, por sua vez, eram iguais à área do quadrado dado.

Questão 1 - Utilizando o método usado por Baudhayana para construir um triângulo isósceles igual em área ao quadrado

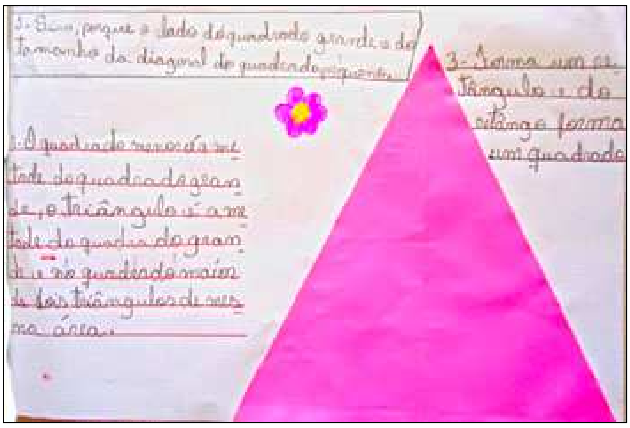


Figura 3 - Representação verbal escrita

"Eu pequei o quadrado com o dobro da área, dobrei e encontrei o ponto médio, formei o triângulo, cortei deu três triângulos, com os dois menores eu formei um triângulo. Fiquei com dois triângulos isósceles".
"Eu dobrei e encontrei o ponto médio e a partir dele eu passei linhas e formei um triângulo e depois eu recortei e com as partes que sobraram eu formei outro triângulo".

"No quadrado maior fizemos um triângulo isósceles com os outros triângulos formamos um retângulo de mesma área do triângulo isósceles".
"Eu cortei formei um triângulo isósceles e formei com ele um quadrado".

Figura 4 - Construção do triângulo isósceles

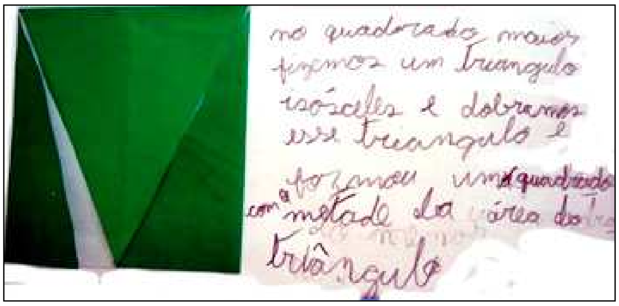


Figura 5 - Estabelecimento entre as medidas das áreas

Todos os alunos que colaram o triângulo isósceles na folha escreveram algo semelhante a: "eu virei as três pontas do triângulo e formou um quadrado. Esse quadrado tem a metade da área do triângulo". Provavelmente, alguns fizeram e os demais imitaram o procedimento.

É importante enfatizar que eles perceberam que o triângulo poderia ser transformado em um quadrado, mas as áreas não seriam iguais; a relação estabelecida entre as medidas das áreas estava correta. Em seguida, refletimos com os alunos que a área daquele triângulo deveria ser igual à do quadrado menor, pois havíamos construído dois triângulos isósceles de áreas iguais, então eles mediram os dois triângulos.

Questão 2 - Transformar o triângulo isósceles construído em um quadrado de mesma área

Os alunos pegaram os dois triângulos retângulos e formaram um retângulo e, em seguida, um quadrado. No entanto, muitos não realizaram a última transformação. Chegavam até à construção do retângulo e escreviam: “agora é só transformar em quadrado”, como se transformar o retângulo em quadrado fosse uma tarefa corriqueira, de conhecimento de todos e, assim, estava provado que o triângulo isósceles poderia ser transformado em um quadrado de mesma área. Eles se remetiam a um conhecimento adquirido anteriormente, especificamente, na Atividade 5.

Trabalharam com a decomposição do retângulo em triângulos para formar o quadrado, tendo um retângulo cujo lado era o dobro do outro.
Chamamos, mais uma vez a atenção a essa particularidade do retângulo para o qual o procedimento permitia realizar a transformação.

Figura 6 - Transformação do triângulo isósceles em retângulo

As respostas dadas assemelham-se a: “Forma um retângulo cortando o triângulo ao meio e do retângulo forma-se um quadrado”.

Figura 7 - Formação do retângulo cortando o triângulo ao meio

“Com o triângulo isósceles forma dois triângulos que formam o retângulo. Marca o ponto médio no lado maior do retângulo e desenha outro triângulo, recorta formando três triângulos junta os três triângulos formando um quadrado”.
“Para fazer o molde eu cortei o quadrado de área maior ao meio. Ficou um retângulo, eu dobrei ao meio formou dois quadrados iguais eu marquei a diagonal de cada quadrado, ficou um triângulo, eu cortei deu um triângulo grande e dois pequenos, depois juntei e formou o quadrado”.

Os alunos deste grupo, ao desenharem as linhas para cortarem, perceberam que dois triângulos retângulos formam um retângulo, então bastava pegar um quadrado, de mesma área, e cortar o meio formando dois retângulos. Esse era o “molde”.

Optaram por trabalhar com o molde por terem dificuldades em formar três triângulos a partir dos dois triângulos. Importante ressaltar que a dificuldade não era conceitual, e sim compor o triângulo como o da Figura 8, obtida a partir do retângulo, que por sua vez, estava composto por dois triângulos retângulos.

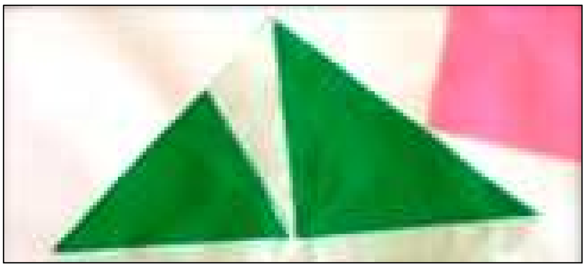


Figura 8 - Construção utilizando molde

A dificuldade não era cortar os triângulos, mas sim juntar as partes para formar o quadrado como a representação da Figura 9.

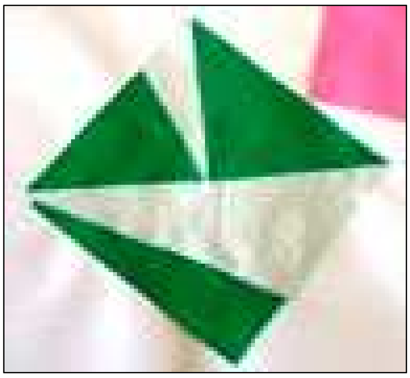


Figura 9 - Quadrado

“Eu cortei o triângulo isósceles ao meio, virei e ele formou um retângulo que eu cortei em triângulos arrumei em um quadrado”.

Nesta resposta, o aluno enfatizou os movimentos de rotação e translação dos triângulos.

Os alunos que transformaram o retângulo tiveram dificuldades em trabalhar com as partes na recomposição do quadrado, pelo fato de o retângulo estar dividido em dois triângulos. Então, um aluno perguntou se poderia fazer um modelo, já que aquele procedimento havia sido utilizado em atividade anterior. Com o modelo, os alunos acharam mais fácil, mas alguns ainda preferiram trabalhar montando as partes. Como exemplo, citamos um que teve dificuldade em escrever com detalhes todos os procedimentos e perguntou se poderia fazer tudo com colagem. Entregamos a ele uma folha em branco e quadrados.

Depois de pronto, pedimos para que ele explicasse à turma o que havia feito e, enquanto ele explicava, a professora escrevia no quadro. O procedimento do aluno por meio de recorte e colagem está representado na Figura 10. Utilizamos sua colagem para discutir passo a passo com a turma e depois a apresentamos na turma da professora Vitória.

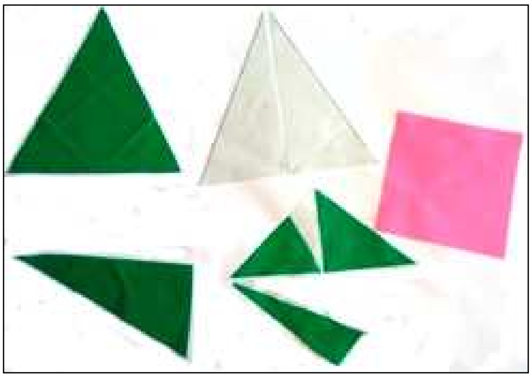


Figura 10 - Etapas da construção do triângulo isósceles

Conceitos em ação

- Triângulo isósceles tem dois lados iguais.
- Triângulo retângulo tem um ângulo de noventa graus.
- Ponto médio de um segmento de reta divide o segmento em dois de mesma medida.

Teoremas em ação

- A área do quadrado pode ser transformada em uma soma de áreas de triângulos iguais.
- Dividindo o triângulo isósceles ao meio, formam-se dois triângulos retângulos.
- Um quadrado pode ser transformado em dois quadrados de mesma área.
- O triângulo pode ser usado como unidade de medida de área.
- A medida de área é um número de determinada área, no caso, um triângulo.
- Para comparar igualdade entre área, a unidade de medida deve ser a mesma.
- Na comparação entre medidas de área, o dobro da unidade garante-nos o dobro da medida da área.
- Sabendo que uma unidade de medida de área é o dobro ou a metade de outra unidade de medida e a medida da área de uma grandeza em relação a uma delas, para saber a medida da área desta grandeza na outra unidade é suficiente multiplicar ou dividir a medida conhecida por dois.
- Em um quadrado x que tenha o seu lado igual à diagonal de um quadrado y, podemos dizer que a área do quadrado x é igual ao dobro da área do quadrado y.

Os teoremas em ação explicitados e os procedimentos de resolução nos permitiram perceber que os alunos compreenderam a mudança do estatuto da figura e produziram conclusões, ou seja, observamos que teoremas em ação, mobilizados em atividades anteriores, foram associados às tomadas de decisão na resolução da atividade.

Na resolução dessa atividade, mais uma vez, os alunos vivenciaram as especificidades da apreensão operatória e trabalharam a relação parte-todo da figura por meio da decomposição e composição. Ao reconstruírem o quadrado, a partir do triângulo isósceles, reconfiguraram o quadrado por meio da visualização e realizaram deslocamentos de rotação e translação na construção do quadrado. (Duval, 1994).

Consideramos que os alunos evidenciaram compreender que uma figura plana pode ser decomposta e composta em outra de mesma medida de área e, assim, que figuras diferentes podem ter áreas iguais. Logo, a medida de área não está condicionada à forma da figura, de acordo com as pontuações de Vergnaud (1990, p. 52): "O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por 'problema' é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução.".

Destacamos outra consideração: as concepções e crenças dos alunos em relação à Matemática, aos conceitos matemáticos e ao autoconceito como aprendizes de Matemática. A percepção das mesmas não só nessa atividade, como também ao longo de toda a sequência, apontou-nos caminhos para o trabalho em classe.

Reações Afetivas ao Longo das Atividades

Verificamos ao longo do trabalho que atividades fundamentadas na História da Matemática podem provocar no educando a explicitação de suas razões, emoções e ações, com relação a seus sentimentos, como aprendiz de matemática, e a sua capacidade de recriar conceitos, apropriando-se do mesmo, de acordo com sua vivência com a matemática. Acreditamos que os alunos passaram a perceber que o que conhecemos como matemática foi e é uma construção humana de avanços processuais.

Por meio da sequência de atividades, os estudantes foram capazes de comunicar seus conhecimentos e suas dificuldades ao grupo. Trabalhar com História da Matemática, pela investigação em sala de aula, foi, a nosso ver, tornar a aula criativa, na medida em que possibilitou a produção de um novo valor na aprendizagem e no desenvolvimento do aluno, pois o educando teve a possibilidade de desenvolver a oralidade e aquele que sentia dificuldade em se expor teve oportunidade de vencer seu silêncio. O ambiente tornou-se favorável para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de induzir, deduzir e inferir, para o desenvolvimento do senso crítico, da imaginação e da criatividade do aluno, para a manifestação da curiosidade da criança em relação ao tema e para a manifestação de suas propriedades artísticas.

Como os ritmos de aprendizagem são diferentes para as pessoas, percebemos que alguns alunos precisaram de mais tempo do que outros, mas para cada um foi um avanço relevante no movimento de muitas aprendizagens, entre elas a emocional. O tempo de produção e aprendizagem depende do "modus operandi", assim, como há nos grupos diferentes modos de produção matemática, temos, por consequência, tempos diferentes, e os que são mais rápidos, não necessariamente são mais inteligentes.

Pais (2002) afirma que o saber matemático se constituiu de noções objetivas, abstratas e gerais, no entanto não há como negar a intermediação da subjetividade e da particularidade na atividade humana de sua elaboração, uma vez que os sentidos subjetivos desenvolvidos na aprendizagem constituem, segundo González Rey (2006), verdadeiros sistemas motivacionais, que permitem aos alunos representarem o seu envolvimento afetivo com a atividade desenvolvida, isto é, a subjetividade, no contexto da aprendizagem, revela tendências na forma de pensar e agir no desenvolvimento da atividade pedagógica. Ainda, conforme González Rey (2006, p. 32): "As emoções que o sujeito vai desenvolver no processo de aprendizagem estão associadas não apenas com o que ele vivencia como resultado das experiências aplicadas no aprender, mas emoções que têm sua origem em sentidos subjetivos que trazem ao momento atual do aprender momentos de subjetivação produzidos em outros espaços e momentos da vida.".

Gómez Chacón (2003) se refere às crenças como "verdades" pessoais incontestáveis de cada um, derivadas da experiência ou fantasia que tem um forte componente avaliativo e afetivo. Para Vila e Callejo (2006), as crenças são um tipo de conhecimento subjetivo referente a um conteúdo com forte componente cognitivo que predomina sobre o afetivo.

Apontamos, pois, a História da Matemática, utilizada como recurso didático, como um espaço de: alegria, realização, descoberta do potencial de aprendizagem e de ver o mundo como uma obra em permanente construção.

Temos consciência de que a História da Matemática como metodologia de ensino ou como instrumento didático não pode dar conta de todas as dificuldades que o ensino da matemática tem enfrentado no mundo contemporâneo, no entanto constatamos que ela exerce importante papel no processo de ensino e aprendizagem. Assim, ela representa uma opção pedagógica de abordagem dos conteúdos, pois permite ao professor problematizar situações que tornam a aprendizagem significativa para o aluno, além de favorecer momentos de produções cognitivas nas quais podemos identificar e interpretar os procedimentos e a apropriação significativa do conhecimento matemático. Então, atividades com fundo histórico podem estimular a autoconfiança na capacidade de aprender matemática.

Com os estudos das teorias de Duval e Vergnaud, aprendemos a ficarmos alertas ao movimento do pensamento do aluno e do nosso. A pesquisa apontou que é mais fácil analisar a construção de um conceito pelo aluno quando ele erra, porque é possível identificar as diferentes interpretações que ele faz do objeto e as confusões com os símbolos análogos de um texto escrito em linguagem matemática. Quando ele aplica a regra corretamente, muitas vezes não modifica nada, então não há uma ação por meio da qual possamos perceber seus registros na construção do conceito.

Reiteramos, mais uma vez, que é esse um caminho da História da Matemática que podemos percorrer: trazer uma matemática viva. Viva porque explora e investiga o mundo real no tempo presente.

Consideraçõs Finais

Na pesquisa como um todo, verificamos que, ao longo das atividades, os estudantes foram identificando a área como grandeza, já que, para resolverem as situações dadas, utilizaram a visualização, a decomposição, a composição das figuras e das unidades e, nas tomadas de decisões, para resolução, não confundiram superfície com área, pois apreenderam que a área é uma grandeza associada à superfície. Os alunos também apresentaram estratégias que nos levaram a considerar que eles estavam dominando o conhecimento de que a decomposição e a reconfiguração da figura, sem perda nem acréscimo de partes, conserva a medida de área e, então, pode-se transformar a figura em outra figura cuja medida da área já era conhecida.

Os sujeitos calcularam a medida da área pela soma das áreas das subfiguras que preenchiam a figura dada. Adquiriram, de acordo com Duval (1994), por meio da apreensão perceptiva, a habilidade de interpretar figuras geométricas pela sobreposição das mesmas, conceitualizando que as figuras podem ter áreas diferentes ou iguais e que, ao compará-las, a que "cabe" dentro da outra tem área menor. Os alunos, também, evidenciaram que a compreensão de que a medida da área de uma superfície (uma figura) depende da unidade de medida que está sendo utilizada e que, na medida de área, o número está associado à grandeza, ou seja, a medição depende da unidade escolhida. Assim, a área não é igual a um número, pois esse pode mudar de acordo com a unidade escolhida para fazer a contagem.

Como já analisado por Duval (2003), nossos sujeitos também apresentaram, na resolução das atividades, a operação mereológica de reconfiguração na construção do raciocínio, levando-se em conta a sobreposição, e, tendo como filtros desse conhecimento, a ajuda entre pares, reconfiguração, a forma visualizada e desenhada no papel e caracterização de figuras diferentes formadas a partir das figuras que recebiam em cada atividade. Em outros termos, a grande maioria das atividades da sequência nos permitiu analisar as produções matemáticas em processo de reconhecimento de que, por meios de operações figurais, podemos transformar uma figura em outra de mesma área. Uma atividade na qual o aluno não precisava proceder a cálculos algébricos, pois utilizava as operações mereológicas de reconfiguração, as quais se apoiavam sobre a percepção.

Conforme Duval (2011), é preciso ter tomado consciência dos tipos de operações figurais e ter adquirido a mobilidade de focalização dimensional do olhar para reconhecer as múltiplas unidades figurais que se fundem no reconhecimento imediato de qualquer forma 2D. Pelos procedimentos de resolução adotados ao longo do trabalho, podemos dizer que as atividades ajudaram o aluno a tomar tal consciência.

Os estudantes também demonstraram compreender que para determinar a medida da área, devemos comparar essa área com a unidade de medida. No entanto, para isso, a medição não depende do recobrimento da figura utilizando uma quantidade finita de áreas unitárias da mesma forma da unidade dada. Se isso não for possível na figura dada, ele pode criar outros procedimentos de medida. Percebemos que os alunos não confundiram contorno com superfície, nem perímetro com área. Compreenderam que medir área é comparar duas áreas entre si, ou seja, verificar quantas vezes uma área tomada como unidade de medida cabe em outra área. Apresentaram a compreensão da relação entre o número e a unidade de medida ao afirmar que a área pode ser a mesma, mas ter medida de área diferente de acordo com a unidade de medida utilizada.

Constatamos ainda que a resolução de uma atividade apresentava a familiarização de procedimentos e de conhecimentos estudados em atividades anteriores da sequência, o que aponta o crescimento gradativo do aluno na significação do conceito de área e sua medida.

Assim, com base nas concepções históricas, as informações foram usadas na elaboração de atividades que provocaram ações de atividade no aluno, nas quais ele organizava o pensamento para a devida resolução, e, a partir de um esquema, ele construía novos esquemas. O aluno se apropriava dos conceitos elaborados e os reelaborava para dar conta de novas situações, realizando uma síntese dos conceitos anteriores de maneira racional e criativa. Isso também nos permite falar em construção de conceitos matemáticos pelo aluno a partir de conhecimentos fundamentados na História da Matemática.

Para esses estudantes, antes da participação na pesquisa, o mundo da matemática era platônico, sua concepção era de uma realidade matemática independente de nossa prática, de nossa linguagem, de nosso mundo.

O trabalho com as atividades fundamentadas na História da Matemática permitiu mostrar ao estudante que a matemática é para todos, apesar de requerer esforço, dedicação – se errar não pode desistir –, que é importante experimentar sempre, que as pessoas, as quais elaboraram um teorema, não o fizeram da noite para o dia e, muitas vezes, muitas pessoas pensaram naquele teorema e o melhoraram até ele estar na forma como o conhecemos hoje. Logo, os conhecimentos não estão prontos e nem instalados de maneira singular e simplória, mas são construídos num processo que envolve tempo, conhecimentos, contextos e pessoas.

É importante, também, tecer alguns comentários acerca do aspecto da linguagem verbal. O trabalho com a História da Matemática trouxe contribuições ao desenvolvimento da matemática como linguagem na elaboração do discurso argumentativo pelo aluno. Mencionamos, a título de exemplo, o questionamento de uma aluna: “os povos antigos transformavam tudo em quadrado para medir a área, mas os gregos dividiam as figuras em triângulos, dos triângulos em retângulos, os retângulos em quadrados. Então, por que a unidade de medida não é o triângulo? Por que nossa unidade é quadrática”? Como não aguardávamos por tal pergunta, não tínhamos a resposta elaborada. Ela continuou argumentando: “veja bem, se eu junto triângulos, tenho quadrado; se corto quadrados, posso ter triângulos; então, a unidade de medida deveria ser o triângulo”. Resguardadas algumas questões conceituais que discutimos com o grupo, como a questão de os triângulos formarem quadrados, a argumentação era pertinente aos seus conhecimentos.

Referências

Amma, T. A. S. (1979). *Geometry in Ancient and Medieval India*. Índia: Motilal Banarsidass.

Boyer, R, C. B. (1996). *História da Matemática* (2a ed.). (E. F. Gomide, Trad.). São Paulo: Edgar Blücher.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 387-424.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *Irem de Strasbourg, 5*, 37-65.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnememts d'une figure dans une demarche géométrique. *Irem de Strasbourg, 17*, 121-137.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In Machado, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas* (T. M. M. Campos, Org,) (M. A. Dias, Trad.). São Paulo: PROEM.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática* (H. H. Domingues, Trad.). Campinas: Unicamp.

Gaspar, M. T. J. (2004). Um estudo sobre áreas em um curso de formação de professores tomando como ponto de partida a história da matemática indiana no período dos Sulbasutras. *RBHM, 4*(8), 189-214.

Gillings, R. J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications Inc.

Gómez Chacón, I. M. (2003). *Matemática emocional.* Porto Alegre: Artmed.

González Rey, F. (2006). O sujeito que aprende: desafios do desenvolvimento do tema da aprendizagem na psicologia e na prática pedagógica. In Tacca, M. C. (Org.) *Aprendizagem e trabalho pedagógico* (pp. 29-44). Campinas: Alínea.

Herôdotos. (1988). *História* (2a ed.). (M. da G. Kury, Trad.). Brasília: Universidade de Brasília.

Hogben, L. (1958). *Maravilhas da matemática*: *influência e função da matemática nos conhecimentos humanos* (4a ed.). Rio de Janeiro: Globo.

Joseph, G. G. (2000). *The Crest of the Peacock: non-european roots of mathematics* (2a ed.). USA: Princeton University Press.

Machado, S. D. A. (2002). Engenharia Didática. In: _____. *Educação matemática*: uma introdução. (2a ed). (pp.197-208). São Paulo: EDUC, 2002.

Pais, L. C. (2002). Transposição didática. In Machado, S. D. A. *Educação matemática: uma introdução*. (2a ed). (pp. 11-48). São Paulo: EDUC.

Sarasvati, S. S. P. (1987). *Geometry in ancient India.* Índia: Govindran Hasanand.

Vergnaud, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 10*(2.3), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUNNER, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. In Grossi, E. P. (Org.). *Por que ainda há quem não aprende? A teoria* (pp. 21-64). Petrópolis: Vozes.

Vila, A., & Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar o papel das crenças na resolução de problemas* (E. Rosa, Trad.). Porto Alegre: Artmed.

Autores

Edilene Simões Costa dos Santos
Doutorado em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade de Brasília, mestrado na área de Educação (Ensino e Aprendizagem) pela Universidade Católica de Brasília. Graduação em Ciências, Habilitação em Matemática pelo UniCeub/DF. Professora do Instituto de Matemática da UFMS e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Integrante dos grupos de pesquisa Compasso/DF, GPHEME, GHEMAT. Mais informacões no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4416986244015282. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0509-0098.
E-mail: edilenesc@gmail.com.

Cristiano Alberto Muniz
Doutorado em Sciences de l'Education pela Université Paris Nord (1999). Pós-Doutor em Educação pela UnB (2015). Graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Universidade de Brasília (1982). Mestrado em Educação pela Universidade de Brasília (1992). Docente Associado Aposentado da Universidade de Brasília. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, educação matemática, aprendizagem matemática, aprendizagem matemática e formação do professor de matemática. Atualmente desenvolve jogos para aprendizagem matemática para crianças DI. Coordena projetos socio-educacionais junto à crianças em situação de risco social na Chapada dos Veadeiros/Goiás. Mais informacões no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9878321982029909.
E-mail: cristianoamuniz@gmail.com

Maria Terezinha Jesus Gaspar
Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2003). Mestrado em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (1980). Graduação em Matemática Bacharelado pela Universidade Federal da Bahia (1975). Atualmente é professora voluntária da Universidade de Brasília. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores, história da matemática, educação matemática, ensino médio e ensino fundamental e avaliação. Mais informacões no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4364026635376610.
E-mail: mtjg.gaspar@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p160-179.id836

INTERFACES ENTRE HISTORIA DE MATEMÁTICAS Y ENSEÑANZA A TRAVÉS DE ANTIGUOS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS: UNA EXPERIENCIA EN LA INVESTIGACIÓN ACADÉMICA

Ana Carolina Costa Pereira
carolina.pereira@uece.br
Universidade Estadual do Ceará

Recibido: 19/11/2019 **Aceptado:** 22/01/2020

Resumen
Los estudios que cubren la relación entre Historia y Educación Matemática han suscitado varios debates, entre ellos, sus diferentes perspectivas pedagógicas y didácticas vinculadas a las posibles formas de abordarlas en el aula. Los vínculos entre historia, enseñanza y aprendizaje pueden ofrecer recursos que reflejarán directamente la forma de concebir ciertos conceptos matemáticos. Entre algunas posibilidades, consideramos que el estudio de los aspectos teóricos y prácticos del conocimiento y los procedimientos involucrados en la construcción y uso de instrumentos matemáticos antiguos puede llevar al estudiante a comprender no solo el proceso de producción de conocimiento, sino también la formulación de conceptos matemáticos. Así, basado en una perspectiva historiográfica actualizada, este artículo es el resultado de la pasantía postdoctoral relacionada con el proyecto "Construcción de interfaces entre la historia de las matemáticas y la enseñanza a través de instrumentos matemáticos antiguos para la elaboración de una propuesta didáctico-pedagógica dirigida a la enseñanza de conceptos matemáticos en educación básica ", que tenía como objetivo principal investigar el instrumento científico en la articulación entre la historia de las matemáticas y la enseñanza con el fin de debatir y reflexionar, así como investigar, sobre las potencialidades didácticas de un antiguo instrumento matemático. Con este fin, proponemos presentar un informe centrado en la investigación, la experiencia docente y las propuestas teóricas desarrolladas en la pasantía postdoctoral en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUCSP) en el Programa de Estudios de Postgrado en Educación Matemática supervisado por el Prof. Dr. Fumikazu.
Palabras clave: Interfaz entre la historia y la enseñanza de las matemáticas. Instrumentos matemáticos. Petrus Ramus personal.

INTERFACES BETWEEN HISTORY OF MATHEMATICS AND TEACHING THROUGH OLD MATHEMATICAL INSTRUMENTS: AN EXPERIENCE IN ACADEMIC RESEARCH

Abstract
Studies covering the relation between History and Mathematical Education have raised several debates, among them, their different pedagogical and didactic perspectives linked to the possible ways of approach in the classroom. The articulations between history, teaching, and learning can offer means that will reflect directly on how certain mathematical concepts are conceived. Among some possibilities, we consider that the study of theoretical and practical aspects of knowledge and procedures involved in the construction and use of old mathematical instruments may lead the student to understand not only the process of production of knowledge, but also the formulation of mathematical concepts. Thus, based on an updated historiographical

perspective, this article is the result of the postdoctoral training course concerning the project "Building Interfaces between the History of Mathematics and Teaching through Old Mathematical Instruments for the Development of a Didactic-Pedagogical Proposal Teaching Mathematical Concepts in Basic Education "whose main objective was to investigate the scientific instrument in the articulation between the history of Mathematics and teaching in order to discuss and reflect, as well as to investigate, the didactic potentialities of an ancient mathematical instrument. To this end, we propose to present a report focusing on research, teaching experience and theoretical propositions developed in the postdoctoral internship at the Pontifical Catholic University of São Paulo (PUCSP) in the Program of Postgraduate Studies in Mathematical Education supervised by Prof. Dr. Fumikazu.
***Keywords*:** Interface between history and math education. Mathematical instruments. Baculum of Petrus Ramus.

INTERFACES ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO POR MEIO DE ANTIGOS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS: UMA EXPERIÊNCIA EM PESQUISA ACADÊMICA

Resumo

Estudos abrangendo as relações entre História e Educação Matemática vêm levantando diversos debates, dentre eles, suas diferentes perspectivas pedagógicas e didáticas ligadas aos possíveis caminhos de abordagem em sala de aula. As articulações entre história, ensino e aprendizagem podem oferecer recursos que irão refletir diretamente no modo de conceber certos conceitos matemáticos. Dentre algumas possibilidades, consideramos que o estudo de aspectos teóricos e práticos dos conhecimentos e dos procedimentos implicados na construção e no uso de antigos instrumentos matemáticos pode levar o discente compreender não só o processo da produção do saber, mas também da formulação de conceitos matemáticos. Dessa forma, baseado em uma perspectiva historiográfica atualizada, este artigo é resultado do estágio de pós-doutorado referente ao projeto "Construção de interfaces entre história da matemática e ensino por meio de antigos instrumentos matemáticos para a elaboração de uma proposta didático-pedagógica voltada para o ensino de conceitos matemáticos na educação básica" que tinha como objetivo principal investigar o instrumento científico na articulação entre história da Matemática e ensino com vistas a discutir e refletir, bem como investigar, sobre as potencialidades didáticas de um instrumento matemático antigo. Para tanto, propomos aqui apresentar um relato enfocando a pesquisa, experiência docente e proposições teóricas desenvolvidas no estágio pós-doutoral na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP) no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática supervisionado pelo Prof. Dr. Fumikazu.
***Palavras-chave*:** Interface entre história e ensino de matemática. Instrumentos matemáticos. Báculo de Petrus Ramus.

Introdução

Muitas tentativas de aproximar história e ensino de matemática podem ser encontradas em trabalhos nacionais e internacionais[1]. Tais iniciativas têm por base a ideia de que a história da matemática pode fornecer subsídios para desenvolver estratégias atreladas ao ensino de matemática, uma vez que trata o conhecimento matemático no seu processo de construção. Este estudo que advém de um estágio pós-doutoral também partiu deste pressuposto no momento de sua elaboração, contudo, diferentemente das muitas propostas já apresentadas, buscamos aqui aproximar história e ensino por meio da construção de interfaces, tendo por foco a fabricação e o uso de instrumentos históricos sob uma perspectiva historiográfica atualizada.

O interesse de desenvolver esta pesquisa no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUCSP se deu por duas razões. A primeira porque, dentre os pesquisadores brasileiros que desenvolvem estudos voltados para a interface entre história e ensino de matemática, encontramos o Fumikazu Saito, professor doutor, pesquisador junto ao Programa e líder do Grupo de Pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMa). Desde 2008, ele vem se dedicando ao estudo do papel da história da matemática no ensino. Sua proposta tem por base uma historiografia atualizada da história da matemática[2] que, articulada às atuais tendências da didática matemática, propicia a construção de interfaces entre história e ensino, com vistas não só a desenvolver atividades[3] voltadas para o ensino de conteúdos matemáticos, mas também promover um rico diálogo entre historiadores e educadores para refletir sobre os critérios e as razões do processo da elaboração do conhecimento matemático.

A segunda razão foi de ordem didática. Em 2011, a partir de um minicurso ministrado pelos professores Fumikazu Saito e Marisa da Silva Dias no IX Seminário Nacional de História da Matemática, intitulado "Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumentos de medida do século XVI", o tema tornou-se bastante relevante por introduzir novas questões de ordem não só histórica, mas também didática ligada à articulação entre história e ensino de matemática.

---

[1] Vide, estudos de Tzanakis *et al* (2002), Miguel; Miorim (2004), Mendes (2009) e Chaquiam (2017).

[2] Para maiores detalhes sobre as tendências historiográficas tradicional e atualizada, veja Saito (2015).

[3] Sobre a noção própria de interface, cf. Alfonso-Goldfarb (2003). No que diz respeito à construção de interfaces entre história da ciência e ensino, vide: Beltran (2009), Trindade *et al* (2010), Beltran, Saito e Trindade (2014). No que se refere à construção de interfaces entre história da matemática e ensino, vide: Saito e Dias (2013) e Saito (2016).

Essas questões direcionaram nosso interesse para o mesmo tema de pesquisa do professor Saito. Desse modo, o delineamento inicial tinha o propósito de compreender o instrumento matemático na articulação entre história e ensino da matemática com vistas a discutir e refletir, bem como investigar, sobre suas potencialidades didáticas. A proposta inicial tinha em vista o estudo dos instrumentos científicos em geral, mas delimitamos para o estudo dos instrumentos matemáticos, especialmente o báculo de Petrus Ramus, como discorremos mais adiante. Os objetivos delineados no projeto inicial foram contemplados: 1) mapeamento dos diferentes significados, terminologias, tipos e usos de instrumentos ao longo da história; 2) discussão e reflexão sobre uma possível articulação entre a história e o ensino de matemática voltado para o uso de instrumentos históricos; 3) reflexão sobre as potencialidades didáticas do instrumento no ensino de matemática tendo em vista a elaboração de atividades orientadas para a Educação Básica; e 4) construção de uma interface que propicie a elaboração de propostas de ensino que contribua para a formação de conceitos matemáticos a partir do estudo de instrumento.

Dessa forma, para esse artigo dividimos a escrita em três partes. Na primeira, é apresentada, de forma sucinta, a proposta inicial da pesquisa desenvolvida. Na segunda parte, o detalhamento do que foi realizado e resultados, ou seja, os resultados da pesquisa. Por fim, algumas produções resultantes da pesquisa, em que se apresenta as atividades desenvolvidas, os trabalhos apresentados em eventos e as publicações resultantes, assim como outras pesquisas que emergiram desse processo acadêmico.

Relacionando a história e o ensino da matemática por meio de uma interface

Por interface entendemos um "conjunto de ações e de produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático com vistas a elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática" (SAITO, DIAS, 2013, p. 92). Por meio dela, buscamos promover o diálogo entre historiadores, educadores e professores de matemática com o propósito de refletir sobre uma possível metodologia de abordagem voltada para a história e o ensino de matemática.

Tal diálogo, como delineamos inicialmente, tem por base um documento histórico, que pode ser um texto ou excerto de um texto, ou ainda um instrumento, um monumento, uma foto, uma imagem, uma figura, um vídeo, entre muitos outros. É a partir da escolha consciente do documento histórico, ou do seu consequente estudo e análise, que o diálogo tem início.

A escolha deste documento tem em vista a realização de dois movimentos: "o movimento do pensamento na formação do conceito matemático" e "o contexto no qual o conhecimento é desenvolvido" buscam alinhar as questões de ordem historiográfica da história da matemática às outras didáticas e/ou pedagógicas do ensino de matemática. Segundo Pereira e Saito (2018a, p. 4):

> O primeiro está relacionado com o pensamento na formação do conceito matemático. Trata-se de buscar no processo histórico o movimento do pensamento da apreensão do objeto e, portanto, do desenvolvimento do conceito. Esse movimento, que tem por pressuposto o objeto matemático em formação, permite que a formação de ideias componha a lógica do movimento do pensamento. Contudo, para que o lógico não prevaleça sobre o epistemológico e os fundamentos da matemática sobre a própria matemática e suas aplicações, prima-se na construção da interface a busca pelo contexto de formação desses objetos, evitando-se anacronismos e a sobreposição de temas históricas aos propósitos do ensino.
>
> Assim, o segundo movimento se refere ao contexto no qual os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos, isto é, procura observar agora o conteúdo matemático, método e os motivos por trás da escrita do documento, contextualizando na época em que foi elaborado e, portanto, considerando todas as características de ordem matemática, técnica e epistemológica como propõe uma historiografia contemporânea.

Ressaltamos que são existe uma ordem para executar esses dois movimentos, pois dependerá da forma pela qual a construção da interface será conduzida por quem está à frente do processo. Dessa forma, quando o educador matemático inicia o estudo do documento histórico ele já estabelece alguns requisitos que permitem dialogar na interface, proporcionando uma ação que procura determinar relações com a elaboração de algum conceito nele retratado. Baseado nisso, começam a surgir algumas inquirições de ordem didática, pedagógica, epistemológica e matemáticas (conceituais) capaz de mostrar aspectos potencialmente didáticos e/ou pedagógicos.

A atividade resultante da interface, "busca refletir o processo da produção do conhecimento que, dependendo da intencionalidade do educador, poderá ser orientada para diferentes propostas de ensino" (SAITO; DIAS, 2013, p. 101) e está relacionada a três etapas inter-relacionadas: o tratamento didático do documento; a intencionalidade e plano de ação; e o desenvolvimento[4].

[4] Sobre a proposta de articulação entre história e ensino de matemática na construção de interfaces, vide Saito e Dias (2013), Saito (2016) e Pereira e Saito (2018a).

O tratamento didático do documento segundo Pereira e Saito (2019a, p. 347)

> **e**stá relacionado à forma pela qual o documento será apresentado ao docente e/ou discente, levando-se em consideração o objetivo que se tem em utilizá-lo, o público-alvo e o tempo disponível para o desenvolvimento da atividade por meio dele, entre outros aspectos de ordem didática.

Essa etapa é importante, pois enfatiza a tradução do documento, o uso das imagens e/ou esquemas, a importância de termos da época da escrita, assim como, as expressões e/ou os nomes de objetos inseridos. Entretanto, a intencionalidade "está ligada aos propósitos de aprendizagem e, portanto, relacionada ao momento da organização da atividade proposta. Nesta etapa, o que está em questão é o olhar do pesquisador para a potencialidade didática no intuito de articulá-la com o ensino de algum conceito matemático" (PEREIRA; SAITO, 2019a, p. 348). Isso direciona a construção de um plano de ação, ou seja, o planejamento da aplicação das atividades que será executada na sala de aula. É nesse momento que será organizado as ações que conduzirão a prática, que vai desde a entrega dos documentos históricos e/ou instrumento matemático, escolha do local para a realização das atividades, disposição e distribuição de materiais, postura do professor e dos alunos, até a escolha do tipo de organização dos grupos que melhor proporcione uma discussão mais aprofundada da temática estudada.

Por fim, o desenvolvimento é o momento que acontece a aplicação propriamente dita. Segundo Pereira e Saito (2019a, p. 348) "buscam-se considerar todas as variáveis delineadas no plano de ação de modo a propor o ensino do conceito (ou algo relacionado a ele), bem como investigar sobre os processos de ensino e de aprendizagem que emergiram da interface entre história e ensino de matemática".

Dessa forma, visando um estudo que possibilitasse a construção de uma interface entre a história e o ensino de matemática, traçamos algumas metas, tais como integrar e consolidar a linha de pesquisa "História, Epistemologia e Didática da Matemática" e do HEEMa, por meio da vertente "Construção de interfaces entre história, ensino e aprendizagem da matemática, explorando as potencialidades didáticas de antigos instrumentos matemáticos"; fortalecer as relações acadêmicas já existentes entre o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática – GPEHM/UECE, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECM/IFCE e o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM/PUCSP; de modo a: 1) produzir e organizar um banco de dados com as dissertações e teses produzidas na área, em particular, que envolva o estudo de instrumentos matemáticos voltados para o ensino; 2) colaborar com o estudo da arte de pesquisas relacionadas a antigos instrumentos matemáticos e sua articulação com a história da matemática e o ensino; e 3) publicitar a pesquisa estudada por meio de artigos em periódicos, participação em eventos e publicação de livros.

Relatamos que todas as metas foram realizadas satisfatoriamente, incluindo as atividades destinadas a elas, e que a pesquisa foi realizada a contento, perfazendo as fases da construção de uma interface entre história e ensino, a partir do instrumento matemático denominado báculo, exposto no capítulo 9 do tratado de Petrus Ramus intitulado *Via regia ad geometriam – They Way of Geometry* (1636).

Detalhamento da realização e resultados da pesquisa

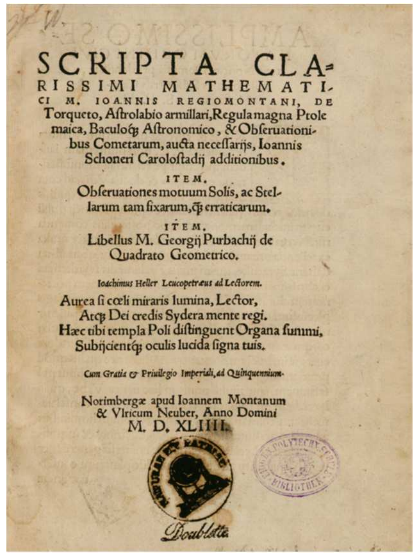
Esta pesquisa alinhou-se às propostas que buscam construir uma interface entre história e ensino de matemática, e que são desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática (HEEMa) da PUCSP, no contexto do projeto "Construção de interfaces entre história, ensino e aprendizagem da matemática, explorando as potencialidades didáticas de antigos instrumentos matemáticos". O HEEMa tem o intuito de discutir e refletir sobre as potencialidades pedagógicas da História da Matemática, investigando as muitas iniciativas de educadores e suas abordagens, tanto na pesquisa em educação matemática, quanto nas práticas docentes.

Periodicamente, no HEEMa, desenvolve seminários pesquisa entre os pesquisadores e discentes da pós-graduação em Educação matemática da PUC/SP e de demais instituições com intuito de gerar discussões sobre temáticas estudadas por seus membros de forma a contribuir com as produções científicas e outros materiais, por meio de dissertações, teses, artigos, livros, entre outros, cujo enfoque é para a elaboração de novas estratégias de ensino.

Assim, inicialmente participamos de algumas reuniões do HEEMa como forma de discutir a base teórica de nosso estudo, conjuntamente com o supervisor de estágio pós-doutoral, Prof. Dr. Fumikazu Saito. Essas discussões foram sobre os instrumentos matemáticos na história, sobre tratados de geometria prática do século XVI, e sobre a teoria que envolve a interface entre história e ensino de matemática.

Realizamos assim, um estudo inicial sobre a história dos instrumentos matemáticos no contexto de uma historiografia da história da matemática mais atualizada. Este estudo teve por base, inicialmente, um tratado intitulado *Scripta Clarissimi Mathematici* (Figura 1), publicado em 1469. A escolha deste tratado foi motivada pelo fato de ele trazer descrito o *radius astronomicus*, um dos muitos instrumentos matemáticos utilizados naquele período por astrônomos.

Figura 1 - Capa do *Scripta clarissimi mathematici... de 1544*


SCRIPTA CLA-
RISSIMI MATHEMATI-
CI M. IOANNIS REGIOMONTANI, DE
Torqueto, Aſtrolabio armillari, Regula magna Ptole
maica, Baculoq; Aſtronomico, & Obſeruationi-
bus Cometarum, aucta neceſſarijs, Ioannis
Schoneri Caroloſtadij additionibus.

ITEM.
Obſeruationes motuum Solis, ac Stel-
larum tam fixarum, quam erraticarum.

ITEM.
Libellus M. Georgij Purbachij de
Quadrato Geometrico.

Ioachimus Heller Leucopetræus ad Lectorem.

Aurea ſi cœli miraris lumina, Lector,
Atq; Dei credis Sydera mente regi.
Hæc tibi templa Poli diſtinguent Organa ſummi,
Subijcientq; oculis lucida ſigna tuis.

Cum Gratia & Priuilegio Imperiali, ad Quinquennium.

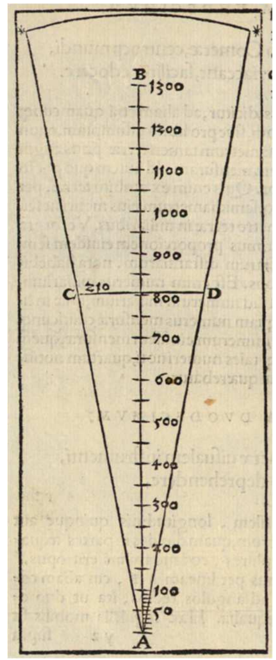
Norimbergæ apud Ioannem Montanum
& Vlricum Neuber, Anno Domini
M. D. XLIIII.

Fonte: Schöner (1544, capa)

Esses estudos tiveram como resultado dois trabalhos que foram apresentados e publicados nos anais de dois eventos. O primeiro, intitulado “O Tratado *Scripta Clarissimi Mathematici* (1469): uma possibilidade de uso envolvendo instrumentos”, foi apresentado no 5o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Nele tratamos de apresentar e descrever a obra que reúne vários instrumentos tais como Torquatun, Astrolábio Armilar, Régua Ptolomaica e raio astronômico (PEREIRA; SAITO, 2018b).

O segundo trabalho, intitulado “Algumas breves considerações sobre o *radius astronomicus* (Figura 2) na interface entre história e ensino de matemática”, foi apresentado no V Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática. Este trabalho buscou identificar algumas potencialidades didáticas que emergiram de um estudo preliminar sobre um instrumento matemático, denominado *radius astronomicus*, que foi apresentado por Johann Miller (Regiomontanus), em sua obra intitulada *Cometae magnitudine, longitudinecque, ac de loco eius vero Problemata XVI*, publicada em 1531 (PEREIRA; SAITO, 2018c).

Figura 2 – Báculo no tratado *Cometae magnitudine, longitudinecque, ac de loco eius vero Problemata XVI* contida na obra *Scripta clarissimi mathematici..., de 1544.*



Fonte: Schöner (1544, f. 35r).

Esses dois estudos iniciais tiveram por foco, basicamente, algumas questões de ordem epistemológica e histórica de tratado que envolvessem instrumentos. Assim, ainda decorrente desses estudos iniciais, começamos a delinear um trabalho, intitulado "Um estudo preliminar sobre o *Radius Astronomicus* de Regiomontanus", para o GT 05 da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, que foi aceito e está no prelo.

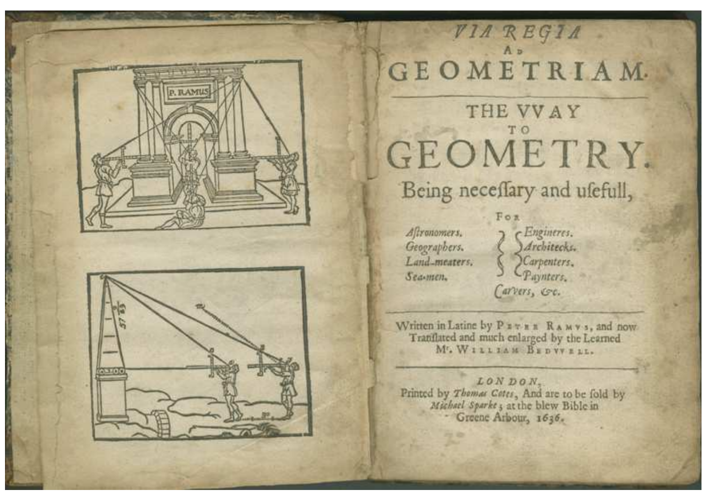
Esse trabalho enfoca a contextualização histórica do instrumento *radius astronomicus* descrito por Johann Miller, o Regiomontanus, no opúsculo *Cometae magnitudine, longitudinecque, ac de loco eius vero Problemata XVI*, detendo-nos mais especificamente no problema doze que apresenta instruções acerca de sua construção e de seu uso. A edição consultada é a exposta no *Scripta Clarissimi Mathematici*, escrito, por volta de 1469 e publicado, em latim, no ano de 1544, sob a direção de Johannes Schöner, que traz uma compilação de tratados dos famosos astrônomos e matemáticos da época.

Também foi realizado, durante a elaboração desses trabalhos, um levantamento de estudos cuja a temática envolvia os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática, oriundos de pesquisas publicadas em dissertações e teses de programas de pós-graduação no Brasil. Essa compilação foi apresentada e publicada no III Seminário Cearense de História da Matemática num trabalho intitulado "Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos".

Essa ação teve o propósito de produzir e organizar um banco de dados com artigos, dissertações e teses produzidas na área, em particular, que envolva o estudo de instrumentos matemáticos voltados para o ensino. Esse material foi compilado e está divulgado no site do HEEMa[5] e do GPEHM[6]. (PEREIRA; SAITO, 2018a).

Após esse estudo inicial, que teve por objetivo introduzir para as discussões sobre a construção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, buscamos selecionar um instrumento que tivesse sido descrito num dos muitos instrumentos matemáticos que circularam nos séculos XVI e XVII. Escolhemos, assim, o báculo de Petrus Ramus (1515-1572) descrito no tratado intitulado *Via regia ad geometriam – They Way of Geometry*, edição inglesa de 1636, com o intuito de elaborar uma proposta didático-pedagógica voltada para o ensino de conceitos matemáticos na educação básica. Esse tratado foi originariamente incorporado na obra intitulada *Arithmeticae libri duo: geometriae septem et viginti*, publicada, em 1569, na Basiléia, Suíça. Posteriormente, foi traduzido para a língua inglesa por William Bedwell (1561 – 1632), com o título *Via Regia ad Geometriam – The Way of Geometry* (Figura 3), e publicado separadamente em 1636, em Londres[7].

Figura 3 - Frontispício de *Via Regia dd Geometriam - The Way To Geometry (1636)*



Fonte: Ramus (1636, frontispício)

[5] Para maiores informações acesse: https://heemaweb.wordpress.com/.
[6] Para maiores informações acesse: http://gpehm.blogspot.com/.
[7] Para o desenvolvimento do estudo utilizamos a versão inglesa Ramus (1636) que foi cotejada com outras duas versões latinas, Ramus (1569, 1599).

Assim, foi realizado um estudo contextual e historiográfico do tratado, *Via regia ad geometriam – They Way of Geometry* (1636), em que ministramos um seminário de pesquisa no HEEMa apresentando algumas considerações iniciais sobre de Petrus Ramus (1515-1572) e sua obra que faz parte da rica literatura dedicada à geometria prática publicada ao longo dos séculos XVI e XVII.

As discussões e os debates durante o seminário revelaram que grande parte da audiência, composta basicamente por discentes do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PPGEM/PUCSP), não conhecia a importância de Petrus Ramus e sua obra para o desenvolvimento da geometria prática do século XVI, assim como o instrumento denominado de báculo pelo autor.

Isso, entretanto, não nos causou espanto, visto que Ramus é pouco conhecido na matemática pelos historiadores no cenário nacional e internacional, mas teve um impacto considerável no que diz respeito à reforma curricular das universidades em seu período. Ele se envolveu ativamente no combate contra o aristotelismo e a escolástica cultivado dentro das universidades, defendendo que todo ensino deveria ser vinculado a prática, em que os alunos poderiam compreender com mais facilidade e naturalidade. Esse pensamento é o que ele chamava de "método" que consistia em um meio de ensino eficaz, em que trazia seus alunos para uma compreensão profunda do conteúdo, organizando sempre os conceitos mais gerais para os mais específicos (GOULDING, 2006). Segundo Pereira e Saito (2018a, p. 27) "na opinião de Ramus, a única forma de colocar as matemáticas em seu verdadeiro caminho era valorizando um ensino que primasse pela utilidade do conhecimento matemático, ou seja, que tivesse por base a aplicação de teoremas a problemas práticos".

Com relação ao tratado de Ramus, o estudo teve por base a tradução inglesa que foi publicado por William Bedwell (1561-1632) e cotejado com a edição latina de 1569. O tratado foi editado por Jonh Clerke (?1596 – 1658), em que na nota para o leitor, ele informa que a tradução apresentada foi realizada inicialmente por Thomas Hood (1556-1620), mas nunca publicada anteriormente com demonstrações e diagramas[8]. No prefácio, Bedwell também faz menção à primeira versão publicada por Hood e observa que fez algumas alterações em sua tradução, mudando algumas expressões e inserindo novas informações aos quais são

[8] Cf. Ramus (1590).

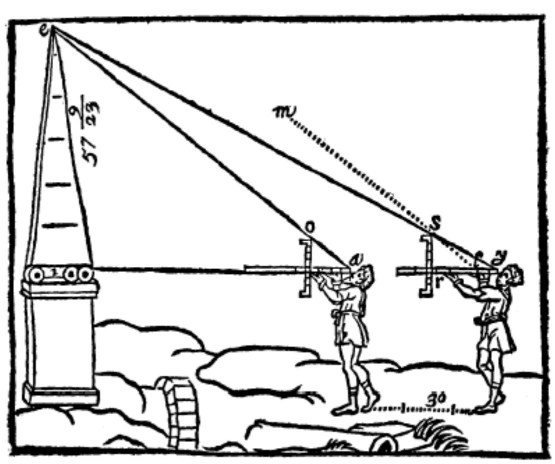
acrescentados comentários e outras observações que elucidam alguns conhecimentos geométricos presente na obra.

A obra trata de uma das muitas compilações que buscaram organizar diferentes conhecimentos geométricos que transitaram em distintos segmentos de saber desde a Antiguidade Clássica. Orientado para resolver questões de ordem prática, seu conteúdo parece à primeira vista um conjunto desordenado de proposições geométricas quando comparado aos *Elementos* de Euclides.

As primeiras impressões deste estudo inicial da obra de Ramus foi apresentada no 8º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Com o título "Um estudo preliminar da obra V*ia Regia ad Geometriam* (1636) de Petrus Ramus", este trabalho teve em vista apresentar um estudo preliminar dessa obra com vistas em reconhecer aspectos que ora a aproximam e ora a afastam da tradição da geometria prática medieval. (PEREIRA; SAITO, 2018e).

O *Via regia ad geometriam* está organizado em vinte e sete livros. O livro que nos interessou para esta pesquisa é o nono, intitulado "O nono livro de Geometria de Petrus Ramus, que trata da medição de linhas retas por meio de triângulos retângulos semelhantes". Dividido em dezesete tópicos ou capítulos, que vai da página 113 a 135 (vinte e duas páginas no total), este livro apresenta várias maneiras de medir "linhas retas" por meio de um instrumento matemático denominado "báculo" (Figura 4).

Figura 4 – Situação de medição em que o báculo é utilizado.



Fonte: Ramus (1636, p. 122)

Dessa forma, a partir do estudo da parte em que Ramus se refere ao báculo, buscamos percorrer os dois movimentos "o contexto no qual o conhecimento foi desenvolvido" e o "movimento do pensamento na formação do conceito matemático". Para tanto, traduzimos o nono livro e, a partir das orientações ali contidas, procuramos construir um protótipo do instrumento com vistas a estudá-lo e a compreendê-lo. Os principais apontamentos e outras questões de ordem teórica ligadas à construção do instrumento foram publicados na *Revista Cocar*, com o título "A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática". (PEREIRA; SAITO, 2019a)

As questões que emergiram da construção do protótipo do báculo serviram de base para elaborarmos uma atividade que consistiu inicialmente em reconstruir o báculo de Ramus, suscitando questões de ordem matemática que poderiam ser exploradas numa situação de medida, valorizando condicionantes manipulativos, a partir de uma situação-problema. Assim, foi desenvolvida uma atividade que explorou alguns aspectos do conhecimento matemático incorporado no báculo por meio de seu uso numa situação de medição.

A atividade teve o intuito de mapear algumas potencialidades didáticas e/ou pedagógicas, que emergem do seu manuseio, a partir das ações que envolve o uso do báculo de Ramus. Cabe, entretanto, aqui observar que a atividade proposta foi um "piloto", e, portanto, consiste numa primeira tentativa de mapear as ações que ressignificam conceitos matemáticos bem elementares, utilizando antigos instrumentos matemáticos.

Desse modo, com o intuito de avançarmos no estudo de construção da interface entre história e ensino de matemática, foi planejado e aplicado um curso de extensão universitária realizado na Universidade Estadual do Ceará (UECE) para doze professores de matemática (Figura 5). Esse curso foi organizado em forma de oficinas, em quatro encontros no período matutino, com duração de aproximadamente cinco horas, de 16 a 19 de julho de 2018[9]. Todos os encontros foram filmados e os participantes entregaram, ao final de cada etapa um relatório, descrevendo suas impressões sobre o processo realizado e os procedimentos executados.

Figura 5 – Postura e medição com o báculo.

[9] Os instrumentos de coleta de dados aplicados foram autorizados pelos participantes e pelo Comitê de Ética da UECE, sob n° 3.285.665 e CAAE: 08268319.7.0000.5534.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Esse curso possibilitou a coleta de vários dados, em que muitos ainda precisam ser tratados. Uma parte desses resultados foi enviado para publicação na revista *Educação Matemática Pesquisa da PUCSP*, cujo título é "Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus" (PEREIRA; SAITO, 2019b). Esse artigo tem a intenção de apresentar alguns resultados preliminares de uma atividade que envolveu o uso de um instrumento denominado "báculo", descrito por Petrus Ramus (1515-1572) em sua obra intitulada *Via regia ad geometriam – The Way of Geometry*, com vistas a elencar algumas potencialidades didáticas do báculo. Focou-se nas propriedades geométricas deste instrumento de modo a mapear um conjunto de ações implicado no processo de medição.

Outra produção vinculada a construção da interface entre história e ensino, foi publicada na *Revista de Matemática, Ensino e Cultura* (REMATEC) intitulada "A organização do saber geométrico em V*ia Regia ad Geometriam* (1636) de Petrus Ramus: uma reflexão sobre a definição de ângulo reto e de perpendicular". Neste artigo tratamos de uma discussão sobre a elaboração do tratado de geometria de Ramus e de sua relação com a reforma curricular da faculdade de artes da Universidade de Paris. Também é apresentada uma descrição do tratado expondo suas partes e sua organização, confrontando com os *Elementos* de Euclides; e por fim, é explorado um exemplo relacionado às definições de ângulo reto e de retas perpendiculares, que pode promover uma reflexão sobre a noção de perpendicularidade. Esse estudo nos deu uma visão de como os conceitos eram organizados em sua obra e como eles eram ensinados. Ramus apresenta primeiro a definição de retas perpendiculares, para posteriormente definir ângulo reto, apoiando-se em instrumentos geométricos como a régua, o compasso, o esquadro e o *perpendiculum.* Compreendemos que esse procedimento estava estreitamente relacionado à noção própria de geometria aqui considerada, que recorre aos instrumentos geométricos para aferir medidas, que reformulam e alteram a disposição das definições. (PEREIRA; SAITO, 2018a)

Como forma de sintetizar a produção acadêmica desenvolvida o estágio pós-doutoral, elaboramos, em conjunto com o supervisor deste estágio, um material no formato de livro que colabora para as atuais reflexões sobre a interação entre história da matemática e educação matemática. Este livro será lançado no XIII Seminário Nacional de História da Matemática em abril/2019 intitulado *A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino.* Neste livro, apresentamos os principais resultados das discussões, que contribuíram não só para o desenvolvimento da pesquisa, mas também para o aprimoramento das questões de ordem teórica em relação à construção interfaces entre história e ensino. Segundo Saito e Pereira (2019, p. 8) o livro visa "discutir sobre as potencialidades didáticas e/ou pedagógicas que emergem do processo de construção e de uso de um instrumento matemático denominado "báculo", descrito em *Via regia ad geometriam – The Way of Geometry*, publicado em 1636". É selecionado alguns excertos do documento para discutir a elaboração de atividades com um instrumento nele descrito, "com vistas a elaborar um material que constituísse uma proposta de ensino a ser desenvolvida com os professores. (SAITO; PEREIRA, 2019, p. 8)

Ainda no que diz respeito aos estudos sobre os conceitos matemáticos mobilizados em tratados, aprovamos o trabalho nomeado de "Um estudo preliminar sobre o conceito de ângulo reto em tratados de geometria prática do século XVI" para ser apresentado no XIII Seminário Nacional de História da Matemática. Esse estudo é apresentado a noção de ângulo reto, no *status* da geometria prática e sua relação com o conhecimento geométrico teórico e aplicado em três tratados do século XVI: *The pathwaie to knowledge* de Robert Recorde (1510-1558), *Via regia ad geometriam – They Way of Geometry* de Peter Ramus (1515-1572), e *Geometrical Practise* *named Pantometria* de Thomas Digges (1546-1595). Segundo os autores esse “estudo preliminar nos evidenciou que uma análise além das definições, ou seja, olhando a disposição, a organização dos teoremas e das proposições e dos problemas práticos neles expostos notamos que a exposição dos conceitos depende de outros fatores que não são matemáticos em essência” (PEREIRA; SAITO; 2019c, p. 16).

Outras atividades também foram realizadas que estão estreitamente relacionadas ao desenvolvimento desta pesquisa. Dentre elas podemos citar: a participação de algumas aulas da disciplina *Tópicos de História e Filosofia da Matemática,* ministrada pelo Prof. Fumikazu Saito, durante 2018.2; o convite para ministrar uma palestra no Seminário do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) intitulada “Regiomontanus e seu legado para o desenvolvimento de conhecimentos trigonométricos”, em outubro de 2018; a participação bancas de qualificação e defesa de trabalhos de mestrado de ambas instituições (IFCE e PUCSP).

No que se refere a participação de bancas, ela visa fortalecer as relações acadêmicas já existentes entre o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática - GPEHM (UECE), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECM (IFCE) e o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PPGEM (PUCSP). Os temas das dissertações estão ligados diretamente a temática da pesquisa desenvolvida no estágio pós-doutoral, visto que todas estão ligadas a construção de uma interface entre história e ensino de matemática.

Considerações Finais

Desenvolver uma pesquisa acadêmica na interface entre as áreas de história da matemática e educação matemática que requer estudo teórico de um documento em seus vários aspectos, conceitual, historiográfico e epistemológico, vinculando a propostas didáticas que podem ser implantadas na educação básica ou na formação de professores, demanda tempo. Esse artigo relatou uma experiência vivenciada no estágio pós-doutoral desenvolvido no ano de 2018 com duração de 12 meses enfocando aspectos como desenvolvimento da pesquisa, experiência da docente/pesquisadora e proposições teóricas.

Percebemos que, embora haja um crescimento de pesquisa que envolvem a inserção na história da matemática no ensino no século XXI, poucas são aquelas que conseguem apresentar uma proposta didática que vise construir um corpo de conhecimentos matemáticos por meio da história, sob uma perspectiva historiográfica atualizada.

Os instrumentos matemáticos no seu caráter teórico e experimental estudado sob o ponto de vista do saber-fazer, torna-se um potencial elemento do docente na interface entre a história e ensino, visto que permite discutir questões epistemológicas, axiológicas e ontológicas sejam estudadas. Entretanto, para o pesquisador, é um estudo demasiadamente cansativo, pois além dos obstáculos apresentado na coleta de material documental da época da obra, envolve a tradução de documentos do século XVI, que requer cuidado, pois a linguagem, as expressões, as imagens e os esquemas são desconhecidos em contextos mais atual.

Dessa forma, esse estudo não termina aqui, outros pontos encontrados na própria obra estudada, *Via regia ad geometriam – The Way of Geometry*, de Petrus Ramus, seja ela envolvendo seu instrumento, o báculo, ou o conteúdo geométrico apresentado, ainda precisam ser aprofundadas. Outro ponto, são as questões metodológicas que embasam a interface entre história e ensino de matemática, pouco discutida até então.

Referências

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. **Como se daria a construção de áreas interface do saber?**. Kairós. V. 6, N. 1. São Paulo: Núcleo de Estudo e Pesquisa do Envelhecimento e Programa de Estudos Pós-Graduados em Gerontologia (PUCSP), 2003. pp. 55-66.

BELTRAN, M. H. R. **História da ciência e ensino**: algumas considerações sobre a construção de interfaces. In: WITTER, G. P.; FUJIWARA, R. (Org.). Ensino de ciências e matemática: análise de problemas. São Paulo: Ateliê Editorial, 2009, p. 179-208.

BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. **História da ciência para formação de professores**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; CAPES/OBEDUC, 2014.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos História e Matemática em sala de aula.** Belém: Sbem/Sbem-pa, 2017.

GOULDING, R. Method and Mathematics: Peter Ramus's Histories of the Sciences. **Journal of the History of Ideas**, v. 67, n. 1, p. 63-85, 2006.

MENDES, I. A. **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **História na Educação Matemática:** Propostas e desafios. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. **A organização do saber geométrico em *Via Regia ad Geometriam* (1636) de Petrus Ramus**: uma reflexão sobre a definição de ângulo reto e de perpendicular. Rematec. V. 13, N. 27. Natal: Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática, 2018a. pp.24-38.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, v. 13, n. 25, pp. 342-372, 2019a.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Algumas breves considerações sobre o *Radius Astronomicus* na interface entre história e ensino de matemática In: As múltiplas linguagens da educação matemática na formação e nas práticas docentes.1 ed. Fortaleza: EDUECE, 2018c, v.1, p. 699-714.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. O Tratado Scripta Clarissimi Mathematici (1469): uma possibilidade de uso envolvendo instrumentos In: 5o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018b, Belém. **Anais do 5o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Belém: SBEM-PA, 2018b. v.1. p.1 – 15.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos In: III Seminário Cearense de História da Matemática, 2018, Juazeiro do Norte - CE. **Anais do III Seminário Cearense de História da Matemática**. Fortaleza: Editora da UECE, 2018d. v.1. p.1 – 12.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Um estudo preliminar da obra Via Regia Ad Geometriam (1636) de Petrus Ramus In: 8o Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. **Caderno de Resumos do 8o Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática**. Foz do Iguaçu: UNIOESTE, 2018e. v.1. p.71 – 71.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Um estudo preliminar sobre o conceito de ângulo reto em tratados de geometria prática do século XVI. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 13., 2019, Fortaleza. **Anais... .** Fortaleza: Sbhmat, 2019c. p. 1092 - 1107.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F.. Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p.405-432, 2019b.

RAMUS, P. **Arithmeticae libri duo:** geometriae septem et vinti. Basileae: per Eusebium Episcopium & Nicolai fratris haeredes, 1569.

RAMUS, P. **Arithmeticae libri duo:** geometriae septem et vinti. Francofurti: Andreae Wecheli Heredes, Claudium Marninum & Ioannem Aubrium, 1599.

RAMUS, P. **Via Regia ad Geometriam:** The way to geometry. London: Thomas Cotes, 1636.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 259 p.

SAITO, F. **História e ensino de matemática: construindo interfaces**. In: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F. (eds.). Investigaciones en Educación Matemática. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016, p. 237-291.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação,** Bauru, v. 19, n. 1, p.89-111, mar. 2013. Quadrimestral.

SAITO, F.; PEREIRA, A. C. C. **A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino.** São Paulo: Livraria da Física, 2019. (História da Matemática e da educação matemática para o ensino, volume 2).

SCHONER, J. (Ed.) **Scripta Clarissimi Mathematici** M. Ioannis Regiomontani, De Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica, Baculoque Astronomico, Obseruationibus Cometarum, aucta necessarijs, Ioannis Schoneri Carolostadij additionibus; Item. Obseruationes motuum Solis, ac Stellarum tam fixarum, quam erraticarum; Libellus M. Georgii Purbachii de Quadrato Geometrico. Nürnberg: Johann Montanus & Ulrich Neuber 1544.

TRINDADE, L. S. P.; RODRIGUES, S. P.; SAITO, F.; BELTRAN, M. H. R. **História da Ciência e Ensino**: alguns desafios. In: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Orgs.). História da Ciência: Tópicos Atuais. São Paulo: Ed. Livraria da Física/CAPES, 2010, p. 119-132.

TZANAKIS, C. *et al*. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. IN: FAUVEL, J.; MAANEN, J. van. **History in Mathematics Education**: The ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 6, 2002. p. 201- 240.

Autora
Ana Carolina Costa Pereira

Pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010) e Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2005). Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2001). Atualmente é Professora Adjunta da Universidade Estadual do Ceará e líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores de matemática e interface entre história e ensino de matemática. Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1062497580478584. Orcid: http://orcid.org/0000-0002-3819-2381. E-mail: carolina.pereira@uece.br

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p180-196.id837

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: LA IMPORTANCIA DE EXPLICITAR LAS POSICIONES TEÓRICAS[1]

Bernadete Barbosa Morey[1]
bernadetemorey@gmail.com

Valdenize Lopes do Nascimento[1,2]
denizeln@ufersa.edu.br
[1]*Universidade Federal do Rio Grande do Norte*
[2]*Universidade Federal Rural do Semi-Árido*

Recibido: 24/11/2019 **Aceptado:** 22/01/2020

Resumen

Este artículo tiene como objetivo proponer la explicación de un elemento más en el debate sobre las relaciones entre la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática. Primero examinamos la pregunta de por qué, cuando estudiamos matemáticas en el siglo XXI, nos referimos a la historia de las matemáticas. Participamos en este debate apoyados por la posición de Luis Radford, autor de la Teoría de la Objetivación, una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de la corriente sociocultural y el filósofo Evald Ilyenkov y su concepto de realidad como un proceso preñado de historicidad. Pero es el recapitulacionismo expuesto por Antonio Miguel y Maria Ângela Miorim en *História na Educação Matemática: propostas e desafios* lo que nos da pistas para ir más allá y argumentar que en estudios relacionados con la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática tiene perfecto sentido hacer explícita la teoría del aprendizaje o incluso la visión de las matemáticas y el aprendizaje que se asume para evitar la suposición de que el recurso a la Historia de las Matemáticas que se propone tiene sentido universal.

***Palabras clave*:** Historia de las Matemáticas, Educación Matemática, Recapitulacionismo, Aprendizaje, Teoría de la Objetivación.

HISTORY OF MATHEMATICS IN MATHEMATIC EDUCATION: THE IMPORTANCE OF EXPLICITING THEORETICAL POSITIONS

Abstract

This article aims to propose the explanation of one more element in the debate about the relations between History of Mathematics and Mathematical Education. We first examine the question of why, when studying mathematics in the 21st century, refer to the history of mathematics. We took part in this debate supported by the position of Luis Radford, author of Theory of Objectification, a theory of teaching and learning of the sociocultural current and the philosopher Evald Ilyenkov and his concept of reality as a pregnant process of historicity. But it is the recapitulationism expounded by Antonio Miguel and Maria Ângela Miorim in *História na Educação Matemática: propostas e desafios* that gives us clues to go further and

[1] Uma versão simplificada deste artigo foi publicada nos Anais do ENEM 2019.

argue that in studies relating the History of Mathematics and Mathematical Education it makes perfect sense make explicit the theory of learning or even the view of mathematics and learning that is being assumed so as to avoid the assumption that the recourse to the History of Mathematics being proposed makes universal sense.
***Keywords*:** History of Mathematics, Mathematical Education, Recapitulationism, Learning, Theory of Objectification.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DE EXPLICITAR AS POSIÇÕES TEÓRICAS

Resumo

O presente artigo tem como objetivo propor a explicitação de um elemento a mais no debate em torno das relações entre História da Matemática e Educação Matemática. Inicialmente examinamos a questão do porquê, ao estudar a matemática em pleno século XXI, reportar-se à História da Matemática. Participamos deste debate apoiadas na posição de Luis Radford, autor da Teoria da Objetivação, uma teoria de ensino e aprendizagem da corrente sociocultural e no filósofo Evald Ilyenkov e seu conceito de realidade como um processo prenhe de historicidade. Mas é o recapitulacionismo exposto por Antonio Miguel e Maria Ângela Miorim em *História na Educação Matemática: propostas e desafios* que nos dá pistas para ir mais adiante e defender que nos estudos que relacionam História da Matemática e Educação Matemática faz todo sentido explicitar a teoria de aprendizagem ou mesmo a visão de matemática e de aprendizagem que está sendo pressuposta, de modo a evitar a suposição que o recurso à História da Matemática que está sendo proposto faça sentido universalmente.
***Palavras-chave*:** História da Matemática, Educação Matemática, Recapitulacionismo, Aprendizagem, Teoria da Objetivação.

INTRODUÇÃO

Na sociedade contemporânea é indiscutível a importância da Matemática para o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia, bem como para a formação do cidadão. Infelizmente, é indiscutível também que existem muitos problemas relacionados ao processo de ensino-aprendizagem desta complexa ciência, em todos os níveis educacionais. O renomado pesquisador da Educação Matemática Ubiratan D'Ambrosio destaca que:

> A complexidade da Matemática, sobretudo por suas relações com outras áreas de conhecimento e por suas implicações sociais, políticas e econômicas, justifica, desde a Antiguidade, reflexões, teorias e estudos sobre seu ensino. (D'Ambrosio, 1993, p. 9-10)

As preocupações com o processo de ensino-aprendizagem da matemática continuam pujantes e as reflexões sobre esse tema têm acarretado uma busca constante por recursos pedagógicos que possam ser utilizados para melhoria desse processo. Dentre os recursos pedagógicos em evidência na Educação Matemática (EM) atualmente está a História da Matemática (HM), considerada uma de suas tendências.

Muitas pesquisas envolvendo as relações entre HM e EM vêm sendo desenvolvidas, tanto nacional quanto internacionalmente, e muitos são também os argumentos que destacam a importância da História da Matemática para o ensino-aprendizagem dos saberes matemáticos. Diversas são as abordagens e diversos são os benefícios alegados que a HM pode trazer para o ensino-aprendizagem da Matemática, mas, o debate sobre esta temática continua.

Queremos neste artigo contribuir para o debate enfatizando a importância de explicitar as posições teóricas utilizadas para justificar o vínculo entre os saberes matemáticos produzidos historicamente e a aprendizagem desses saberes no presente e também trazendo aqui a posição teórica assumida pelo professor e pesquisador canadense Luis Radford, cuja visão sobre o papel da HM na EM está estreitamente ligada ao arcabouço teórico da Teoria da Objetivação (TO), teoria de ensino-aprendizagem da qual é autor.

Este artigo está estruturado em cinco seções, sendo esta introdução a primeira. Na segunda seção apresentamos um breve histórico do debate em torno das relações entre HM e EM a partir de uma fonte pela qual se pode acompanhar as discussões contemporâneas sobre a temática em foco. Na terceira seção apresentamos e discutimos alguns argumentos envolvendo o papel da HM na EM, a partir dos estudos do pesquisador Antonio Miguel. Na quarta seção abordamos a relação entre os saberes matemáticos produzidos historicamente e a aprendizagem desses saberes no presente. Na quinta seção apresentamos a posição teórica de Luis Radford acerca do papel da HM na EM, a qual, está estreitamente ligada ao arcabouço teórico da Teoria da Objetivação. Concluímos o artigo com algumas considerações sobre as discussões apresentadas e sobre o potencial da HM para a EM no século XXI.

BREVE HISTÓRICO DO DEBATE EM TORNO DAS RELAÇÕES ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para um breve histórico do debate envolvendo as relações entre HM e EM consideramos pertinente tomar como base a recente publicação de Clark et al. (2016), que descreve o estado da arte sobre o papel da HM na EM**,** tema do Grupo de Estudo Temático (*Topic Study Group* - TSG) nº 25 do XIII Congresso Internacional de Educação Matemática *(International Congress on Mathematical Education - ICME 13)*, e “fornece um breve relato dos desenvolvimentos desde 2000 [2] sobre as relações entre História e Pedagogia da Matemática." (Clark et al., 2016, p. 135, tradução nossa)

De acordo com os autores, a questão da integração da HM com a EM vem sendo debatida desde a segunda metade do século XIX, quando matemáticos como Augustus De Morgan (1806 – 1871), Henri Poincaré (1854 – 1912) e Felix Klein (1849 – 1925), dentre outros, viram com bons olhos e passaram a apoiar a integração destes dois domínios. Posteriormente, os historiadores Paul Tannery (1843 – 1904) e Gino Benedetto Loria (1862 – 1954) também vieram a se interessar ativamente pelo papel que a HM pode exercer na EM.

No início do século XX o debate foi revivido, impulsionado pelos debates sobre os fundamentos da matemática. No período 1960-1980, como consequência da reforma da Matemática Moderna, o interesse no debate sobre o papel da HM na EM se fortaleceu ainda mais, pois, enquanto os proponentes da reforma se posicionavam contra uma abordagem histórica da EM, os críticos dessa reforma viam na HM um remédio contra o dogmatismo e concebiam a matemática como uma atividade humana e não apenas como uma linguagem.

Outro momento importante para a consolidação dos estudos na temática em foco tem início em 1969 quando o 31º anuário do Conselho Nacional de Professores de Matemática (*National Council of Teachers of Mathematics - NCTM)* nos Estados Unidos, foi dedicado à HM como recurso para o ensino.

Na década de 1970 um movimento internacional começou a se propagar, em grande parte apoiado pela criação em 1972 do Grupo de Estudos Internacional sobre as Relações entre a História e a Pedagogia da Matemática (*HPM Group*) afiliado à Comissão Internacional de Instrução Matemática (*International Commission on Mathematical Instruction - ICMI*), por ocasião da segunda edição do ICME.

Nos últimos 40 anos, ainda de acordo com Clark et al. (2016), a questão da integração da HM à EM evoluiu para uma área de estudos na qual novas práticas pedagógicas e atividades de pesquisa específicas se estabeleceram internacionalmente. O marco que forneceu mais visibilidade a estas discussões foi a publicação no ano de 2000 da obra *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, editado por John Fauvel e Jan van Maanen (ver Fauvel & van Maanen (2000)), uma obra coletiva escrita por 62 colaboradores que trabalharam juntos distribuídos em 11 grupos. Esta obra também contribuiu fortemente para

[2] O ano de publicação da obra *History in Mathematics Education: The ICMI Study*.

estimular e intensificar o interesse da comunidade educacional internacional sobre esta temática.

Em se tratando dos estudos no Brasil, podemos citar como grandes pioneiros e incentivadores das gerações mais jovens, nomes como: Ubiratan D'Ambrosio, Eduardo Sebastiani, Antonio Miguel, dentre outros. Um estudo que se tornou referência nacional foi a tese de doutorado do pesquisador Antonio Miguel, intitulada *Três Estudos sobre História e Educação Matemática* de 1993. Na tese são apresentados três estudos sobre a relação entre HM e EM cujos objetivos são explicitar e fundamentar três pontos de vista do pesquisador envolvendo três formas possíveis que essa relação assume.

No estudo de Miguel, a primeira forma que a relação entre HM e EM se manifesta é nos papeis atribuídos à História da Matemática a fim de tornar mais eficiente o ensino e o aprendizado da matemática. Nas palavras do pesquisador, a primeira forma de manifestação se refere "às possibilidades de se recorrer à história como um recurso pedagógico adicional, isto é, como um meio potencialmente rico para se promover o ensino-aprendizagem da matemática." (Miguel, 1993, p. 12).

A possibilidade de usar a história como recurso pedagógico foi enunciada e divulgada por professores e pesquisadores sempre acompanhada de argumentos que pareciam convincentes. Foi pensando nisto que Miguel se dispôs a olhar detalhadamente cada um dos argumentos usados a favor do uso da História como recurso pedagógico e ao mesmo tempo analisar alguns argumentos formulados contra. Assim, o primeiro estudo se propôs a:

> [...] resgatar a própria história dessa forma de relação através do levantamento, detalhamento e análise dos diferentes papéis pedagógicos atribuídos à história por matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos que, de modo direto ou indireto, acabaram expressando suas posições em relação a essa questão. (Miguel, 1993, p. 16)

O segundo estudo tratava "de recorrer à história e à filosofia da matemática e à história e à filosofia da educação na tentativa de reconstituir alguns aspectos da história e da filosofia da educação matemática." (Miguel, 1993, p. 18). Já o terceiro estudo tinha por objetivo "apresentar e discutir um estudo histórico-pedagógico-temático sobre os números irracionais", que tratava de "mostrar como a história pode operar em um nível temático bastante específico da matemática e revelar todo o seu potencial cultural, humano e educativo mais amplo." (Miguel, 1993, p. 29)

No presente artigo nos interessa mais de perto, o primeiro dos estudos citados, pois, é deste debate que queremos participar. Na sessão seguinte trazemos uma breve apresentação sobre o teor de alguns argumentos envolvendo a participação da HM como recurso pedagógico na EM, conforme estudos realizados por Antonio Miguel.

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO PEDAGÓGICO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Miguel (1997) apresenta um levantamento dos argumentos em voga sobre a participação da HM como recurso pedagógico na EM até os anos finais do século XX. O autor examina com detalhes não apenas os argumentos que reforçam o papel pedagógico da HM, mas também alguns argumentos que o questionam. Apresentamos a seguir apenas os argumentos que reforçam o papel pedagógico. Estes são diversos mas, o mais difundido é o argumento da motivação.

Sobre o argumento da motivação Miguel ressalta que:

> Os partidários desse ponto de vista acreditam que o conhecimento histórico dos processos matemáticos despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo que está sendo ensinado. Os mais ingênuos acabam atribuindo à história um poder quase mágico de modificar a atitude do aluno em relação à matemática. [...] o poder motivador da história é atestado e exaltado em função da adoção de uma concepção lúdica ou recreativa da mesma. É a história-anedota vista como contraponto momentâneo necessário aos momentos formais do ensino, que exigiriam grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz. Essa história-anedota, de caráter estritamente factual, quando incorporada de forma episódica nas aulas de matemática, adquiriria, segundo esses autores, uma função didática de 'relax' – a recompensa [...] [repousante] merecida e necessária pelo esforço estafante requerido pela aprendizagem da matemática; tudo se passaria como se a matemática exigisse o pensamento e a seriedade, enquanto a história aliviaria a tensão e confortaria. (Miguel, 1997, p. 75)

Miguel (1997, p. 76) refuta este suposto potencial motivador da história argumentando inicialmente que “se fosse esse o caso, o ensino da própria história seria automotivador.” E segue dizendo que:

> Não é isso, porém, o que atestaria a maioria dos professores de história os quais se defrontam em seu cotidiano não apenas com o desinteresse de seus alunos por esse campo do saber, como também com a enorme dificuldade de fazer com que eles compreendam a sua importância, a sua natureza, os seus objetivos e os seus métodos. (Miguel, 1997, p. 76)

Em seguida ele destaca que "um argumento mais especializado contra esse suposto potencial motivador da história pode ser buscado no terreno da psicologia, [...] em uma de suas áreas específicas que tem por objeto de estudo a motivação." (Miguel, 1997, p. 76)

Trouxemos aqui o primeiro e mais difundido dos argumentos de modo mais detalhado, porque queremos dar ao leitor a ideia do que se trata. No entanto, não vem ao caso fazer o mesmo com todos os argumentos posteriores, de modo que vamos apenas citá-los.

Os demais argumentos que atribuem à HM o papel de recurso pedagógico na melhoria do ensino e aprendizagem da matemática, conforme Miguel (1997), apontam a HM como:

1. Uma fonte de métodos, problemas e objetivos de ensino, o que permitiria ao professor de matemática beber da fonte HM para enriquecer suas aulas nas três direções apontadas, isto é, do ponto de vista de objetivos de ensino, do ponto de vista de metodologia de ensino e ainda extrair dali problemas históricos relevantes para o ensino.
2. Um instrumento de desmistificação da matemática e desalienação de seu ensino, uma vez que o processo histórico mostra a matemática sendo feita por homens, com todas as qualidades e defeitos de uma construção humana.
3. Um meio efetivo de formalização de conceitos matemáticos, uma vez que a história permite seguir o curso de como um conceito se forma e se estabelece.
4. Um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico, uma vez que desmitificando a matemática e vendo-a como uma criação humana, o aluno se inclui no rol daqueles que podem opinar sobre a matemática e, até quem sabe, fazer contribuições.
5. Um meio de unificação dos vários campos da matemática. Na verdade, a matemática é um campo de conhecimento único. O seu ensino na academia é feito separando-a em disciplinas estanques, o que leva o aluno a pensar nela como sendo em partes separadas. O estudo da HM viria a mostrar o contrário, isto é, mostraria a unidade da matemática.
6. Um instrumento de promoção de atitudes e valores. Aqui, os defensores deste argumentos apontam que conhecer as biografias e o trabalho dos grandes matemáticos pode incentivar os alunos a não desistir diante das dificuldades.
7. Um instrumento de conscientização epistemológica, o que se refere ao progressivo amadurecimento intelectual do aprendiz de matemática com a concomitante compreensão por parte dele do porquê da exigência dos padrões de rigor exigidos atualmente.

Um último argumento citado por Miguel é o que aponta a HM como um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural. Tal argumento se apoia mais que tudo em estudos como o de Paulus Gerdes, que mostra como a HM pode ser usada para que o aprendiz se sinta incluído entre os povos que fizeram matemática.

Aqui concluímos a apresentação dos argumentos defensores da presença da HM na EM trazidos por Antonio Miguel. Na próxima sessão nos debruçaremos sobre uma questão que emergem ao considerarmos a HM como recurso pedagógico para o ensino-aprendizagem da matemática.

SOBRE A RELAÇÃO ENTRE OS SABERES MATEMÁTICOS PRODUZIDOS HISTORICAMENTE E A APRENDIZAGEM DESSES SABERES NO PRESENTE

Ao considerar a História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino-aprendizagem da matemática emerge, inevitavelmente, a questão do vínculo entre os saberes matemáticos produzidos historicamente e a aprendizagem desses saberes no presente. Diante disto, consideramos importante que sejam explicitadas as posições teóricas utilizadas para fundamentar este vínculo. Nos referimos mais precisamente a explicitação da concepção de aprendizagem que é adotada e a concepção de como os saberes matemáticos são produzidos historicamente. Ao nosso ver, a explicitação destas posições teóricas permitiriam um uso mais eficiente e consciente da história, uma vez que uma proposta didática construída a partir de uma concepção de aprendizagem específica não é necessariamente utilizável em uma outra concepção de aprendizagem. Por exemplo, uma proposta didática construída a partir da abordagem construtivista, não poderia ser aplicada diretamente (se é que poderia o ser de algum modo) à uma aula na qual se pretende utilizar uma abordagem sociocultural. E sabemos que não é incomum que os professores tentem utilizar propostas didáticas produzidas por outros professores.

Nossa atenção para a necessidade de explicitação destas posições teóricas foi despertada a partir de estudos realizados por Antonio Miguel, Maria Ângela Miorim, Fulvia Furinghetti e Luis Radford.

Em uma publicação conjunta, Miguel e Miorim destacam que:

> No final do século XIX, a maior parte da literatura que havia sido produzida em relação à discussão acerca da participação da história no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar recorria ao chamado princípio

> genético – um tipo particular de princípio recapitulacionista – como um modo aparentemente sensato e natural de se justificar essa participação. (Miguel e Miorim, 2004, p. 73)

Em uma publicação mais recente, Antonio Miguel relata que em estudos posteriores à sua pesquisa de doutorado, finalizada em 1993, por ocasião de sua participação em uma mesa redonda durante o VI ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) realizado em 1998, ao retomar suas reflexões sobre as relações entre história e ensino-aprendizagem da matemática, foi possível perceber que:

> Grande parte, senão a totalidade, dos argumentos aparentemente distintos geralmente utilizados para reforçar as potencialidades pedagógicas da história estariam baseados no pressuposto de que o ensino-aprendizagem da matemática deveria funcionar como um 'espelho' mais ou menos fiel da história da matemática. (Miguel, 2015, p. 2)

Tal pressuposto tem sua origem na versão psicológica da lei da recapitulação biológica do alemão Ernst Haeckel (1834 – 1919) a qual, de acordo com Furinghetti e Radford, "deu origem a um discurso que enquadrou grande parte das discussões sobre o desenvolvimento infantil desde o início do século XX." Esses autores destacam ainda que "a recapitulação psicológica foi adotada por alguns eminentes matemáticos que, de uma forma ou de outra, apoiaram a ideia de que, ao desenvolver seu pensamento matemático, as crianças atravessariam etapas semelhantes àquelas encontradas na história da matemática." Nesta concepção, "durante o seu desenvolvimento, as crianças supostamente enfrentariam alguns problemas, dificuldades ou obstáculos semelhantes aos encontrados pelos matemáticos do passado". Esta é uma visão na qual, os "desenvolvimentos conceituais são vistos como cronologicamente autoexplicativos e a evolução psicológica é tida como certa." Além disso, nesta visão, "o conhecimento é concebido como tendo pouco (se algum) vínculo com seu contexto e a história é reduzida a uma sequência linear de eventos julgados a partir do ponto de vista do observador moderno." (Furinghetti; Radford, 2008, p. 649, tradução nossa)

Dois exemplos típicos desta visão, abordados por Furinghetti e Radford (2008) e por Miguel (2015), são as perspectivas histórico-epistemológicas desenvolvidas por Jean Piaget e Rolando García na obra *Psicogênese e história das ciências* (Ver Piaget e García (2011)) e por Gaston Bachelard na obra *A formação do espírito científico* (Ver Bachelard (1996)).

Ao analisarmos os argumentos apresentados na seção anterior é possível verificar que estes argumentos continuam em voga atualmente (principalmente nos discursos dos professores de matemática), basta observar por exemplo os relatos de experiência referentes aos usos pedagógicos da HM, apresentados em eventos que contemplam esta temática em algum de seus eixos articuladores. Portanto, se como Miguel destaca, grande parte destes argumentos estão fundamentados em algum tipo de Recapitulacionismo, corremos o risco de estar admitindo e propagando visões equivocadas do vínculo entre a produção de saberes matemático e a aprendizagem destes saberes. Daí nossa preocupação com a explicitação das posturas teóricas utilizadas.

Aqui concluímos nossa breve discussão sobre a relação entre os saberes matemáticos produzidos historicamente e a aprendizagem. Na próxima sessão nos debruçaremos sobre o posicionamento teórico de Luis Radford.

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO UMA NECESSIDADE PARA COMPREENSÃO DA REALIDADE

No artigo *Beyond Anecdote and Curiosity,* publicado em 2008, Radford discute a relevância, para o cidadão do século XXI, da dimensão histórica da Educação Matemática. Ele inicia suas reflexões levantando a questão do por que seria importante, em nosso ensino moderno de matemática, recorrer à história. Ele mesmo inicia uma série de respostas que vêm sendo dadas nos últimos anos.

A primeira destas respostas diz que a História (da Matemática) seria útil para motivar alunos e professores. Segundo Radford, como muitos alunos (e professores!) acham a matemática misteriosa e uma chateação, então a história da matemática na forma de biografias de matemáticos pode ter um papel motivacional. Radford continua dizendo que se poderia usar as obras[3] de Charraud sobre George Cantor e Astruc sobre Evariste Galois, ambas de 1994, para destacar os aspectos humanos e sociais que cercam o pensamento matemático criativo. Apesar de concordar com o argumento motivacional, Radford é categórico em dizer que, no entanto, a história é mais que isto.

Uma segunda tentativa de resposta é que a história pode fornecer um panorama que vai além dos meros aspectos técnicos da matemática contemporânea, ou seja, ela possibilita a discussão da história de certos problemas, terminando por ser uma maneira interessante de

[3] Estas obras estão devidamente referenciadas em Radford (2008).

sensibilizar os estudantes para a natureza mutável da matemática e enfatizar as contribuições de diferentes culturas. Mas outra vez, Radford diz que a história é muito mais que isto.

Um terceiro argumento oferecido é que a história pode ser uma ferramenta que permite ao professor entender melhor o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Radford reconhece que há alguns anos ele mesmo defendia este argumento, porém, agora ele o acha terrivelmente incompleto.

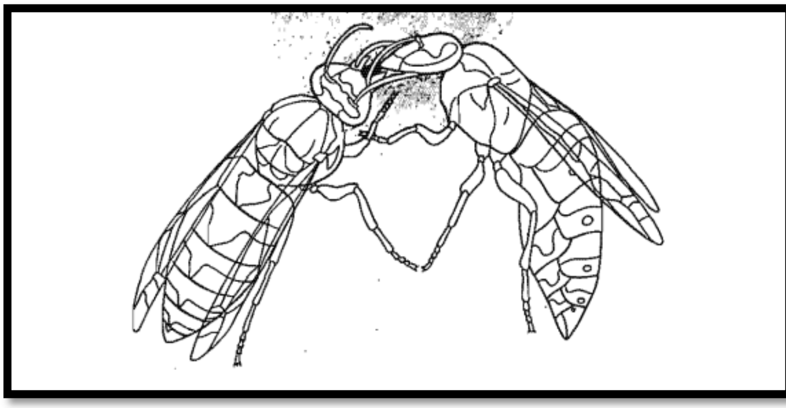
Para Radford, uma abordagem satisfatória para esta questão seria reconhecer a história como uma *necessidade*. Assumindo o pensamento do filósofo russo Evald Ilyenkov (1982) ele argumenta que a história é uma necessidade porque somente através de uma abordagem histórica é possível alcançar uma concreta compreensão da realidade.

> A realidade não pode ser compreendida pela simples observação, nem pela simples aplicação de conceitos, não importa o quão sutis sejam suas ferramentas conceituais. As configurações da realidade a cada momento estão ligadas numa espécie de sistema orgânico contínuo àquelas camadas histórico-conceituais que tornaram a realidade o que ela é. A realidade não é uma coisa, mas é um processo que mesmo sem ser percebido, retrocede discretamente a todo momento aos pensamentos e ideias das gerações anteriores. A história está embutida na realidade. (Radford, 2008, p. 164, tradução nossa)

Para ilustrar esta ideia, Radford recorre à seguinte imagem (Figura 1), que "mostra como as formigas mirmíceas realizam um intercâmbio[4] de substâncias estomacais" todas as vezes que se encontram. Na ilustração utilizada por Radford, a formiga da esquerda "representa o desenvolvimento filogenético dos conceitos e valores éticos, estéticos, científicos, matemáticos e outros que encontramos na cultura em que vivemos e crescemos" e a formiga da direita "representa o nosso desenvolvimento individual conceitual sociocultural ao longo de nossas vidas", ou seja, representa nosso desenvolvimento ontogenético. Nesta comparação metafórica sugerida por Radford, o que a formiga da direita está adquirindo seria "uma espécie de kit cultural-conceitual contendo linguagem, símbolos, crenças sobre como o mundo é, como deve ser investigado, etc." Isto significa que, "ao crescer, estamos continuamente recorrendo ao passado." (Radford, 2008, p. 164, tradução nossa)

[4] O mecanismo de acoplamento entre as formigas mirmíceas, caracterizadas como insetos sociais, estabelece "um fluxo contínuo de secreções entre os membros de uma colônia – [elas] trocam seus conteúdos estomacais todas as vezes que se encontram", o que pode ser notado quando se observa "uma fileira de formigas na cozinha." Este intercâmbio contínuo de substâncias estomacais determina a especificação e diferenciação dos papéis de cada membro da colônia. (Maturana; Varela, 1995, p. 211)

Figura 1. Conexão entre ontogênese e filogênese através da metáfora das formigas mirmíceas utilizada por Radford



Fonte: Maturana e Varela (1995, p. 212))

Ao abordar a conexão entre ontogênese e filogênese, Radford não está dizendo que esta conexão é direta, como ocorre com a visão do paralelismo recapitulativo exposto na seção anterior. Na verdade, a postura teórica de Radford está alinhada a uma linha de pensamento que concebe "os seres humanos como *consubstanciados* com a cultura na qual eles vivem suas vidas". Isto significa que "o que os seres humanos pensam, fazem, sentem, imaginam, esperam e sonham está profundamente enredado em sua cultura." (Radford, 2017, p. 230) Porém, ele também não descarta a existência de uma conexão[5] entre estes dois domínios. De fato, se tal conexão não existisse, cada geração teria recomeçar toda a história do zero.

Referindo se mais precisamente à matemática, Radford destaca que:

> Como a poesia ou a literatura, a matemática - como uma das possíveis formas de reflexão, compreensão e ação sobre o mundo em um dado momento de uma cultura - não é um mero repositório de conteúdos conceituais a serem apropriados por um observador desapaixonado da realidade, mas um produtor de sensibilidades e subjetividades também. (Radford, 2008, p. 165, tradução nossa)

Radford argumenta que deve-se recorrer à história a partir do momento que se tenha consciência do fato de que "essas duas coisas em constante mudança - o que pensamos e o que somos - só foram possíveis graças aos desenvolvimentos filogenéticos das culturas em que vivemos" e que "os significados que nós formamos sobre o nosso mundo têm uma história cultural como pré-condições." (Radford, 2008, p. 165-166, tradução nossa)

[5] O posicionamento de Radford em relação à conexão entre ontogênese e filogênese está detalhado em Furinghetti e Radford (2008).

Retomando o pensamento do crítico literário Mikhail Bakhtin, ele diz que os significados que formamos sobre o mundo só revelam suas profundidades quando entram em contato com significados históricos do passado pois, neste caso, "eles se engajam em um tipo de diálogo que supera a unilateralidade de [nossos] significados particulares." (Bakhtin apud Radford, 2008, p. 166, tradução nossa).

Ele conclui argumentando que:

> A matemática, com seu equipamento conceitual tremendamente sofisticado, deveria ser uma janela para entender outras vozes e subjetividades, e compreender a nós mesmos como criaturas historicamente e culturalmente constituídas. (Radford, 2008, p. 166, tradução nossa)

É importante destacar que a posição teórica de Radford sobre o papel da HM na EM está estreitamente ligada ao arcabouço teórico da Teoria da Objetivação[6] (TO), uma teoria de ensino e aprendizagem da corrente sociocultural com forte abordagem semiótica de sua autoria, na qual a Educação Matemática não é vista como uma espécie de apêndice da matemática, ou seja, como a busca de métodos pedagógicos eficientes para transmitir o saber matemático aos estudantes. Pelo contrário, a Educação Matemática é concebida pela TO como uma prática social, cultural, política e histórica que tem por objetivo a criação de sujeitos éticos, capazes de refletir criticamente e matematicamente sobre os problemas de suas comunidades e do mundo. (D'Amore; Radford, 2017, tradução nossa)

> [...] na TO o foco muda de como os estudantes *recebem saber* (ensino tradicional) e como os estudantes *constroem seu próprio saber* (construtivismo), para *como professores e estudantes produzem [juntos] o saber* em sala de aula tendo como pano de fundo *a cultura e a história*. Contudo o foco também se desloca para *a forma como os professores e estudantes coproduzem* a si mesmos como sujeitos, em geral, e como sujeitos da educação, em particular. (Radford, 2017, P. 243, grifos nossos)

Esta posição assumida pela TO faz com ela não se limite à dimensão do saber, mas considere igualmente importante a dimensão do ser, do tornar-se (tornar-se alguém com outros). Nesta teoria, qualquer processo em direção ao saber é também um processo de constituição do 'eu'. (Radford, 2008)

[6] Um maior aprofundamento sobre os principais elementos da TO pode ser obtido em D'Amore e Radford (2017) e também em vários artigos disponibilizados na página pessoal de Radford (http://luisradford.ca/).

Nesta posição teórica, a História da Matemática torna-se uma necessidade também para que a Educação Matemática, conforme vista pela Teoria da Objetivação, possa cumprir seu papel de formar indivíduos críticos e reflexivos que se posicionam no mundo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nosso artigo por um breve histórico do debate envolvendo as relações entre a História da Matemática e a Educação Matemática, o que abarcou o período de finais do século XIX até nossos dias.

A seguir, voltamo-nos para o cenário brasileiro no qual destacamos o trabalho de Antonio Miguel que expõe e analisa os argumentos a favor da presença da HM na EM: motivação, fonte de métodos, instrumento de desmistificação da matemática, meio efetivo de formalização de conceitos matemáticos, instrumento de promoção do pensamento independente e crítico, meio de unificação dos vários campos da matemática, instrumento de promoção de virtudes e valores, instrumento de conscientização epistemológica e, por último, um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural.

Destacamos uma questão importante que emerge ao considerarmos a História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino-aprendizagem da Matemática, a saber, a questão do vínculo entre os saberes matemáticos produzidos historicamente e a aprendizagem desses saberes no presente.

Observamos, a partir de estudos realizados pelos pesquisadores Antonio Miguel, Maria Ângela Miorim, Fulvia Furinghetti e Luis Radford, que em grande parte dos argumentos utilizados para defender o potencial pedagógico da História da Matemática, está subjacente uma visão recapitulacionista, na qual o desenvolvimento das ideias de um indivíduo no presente seguiria a mesma sequência e os percalços que seguiram o desenvolvimento destas ideias ao longo do tempo.

Uma vez que muitos, senão todos, destes argumentos continuam em voga atualmente, consideramos pertinente alertar para a importância de um uso consciente da História da Matemática como recurso pedagógico de modo a evitar a admissão e propagação de uma visão recapitulacionista, e para tanto, defendemos que uma condição necessária é adoção de uma posição teórica explícita de como a aprendizagem ocorre e como os saberes matemáticos são produzidos.

Por fim, apresentamos a posição teórica do pesquisador Luis Radford, que caminha em uma direção completamente diferente da visão recapitulacionista, uma vez que concebe a história como uma necessidade para a compreensão da realidade. Tal posição está ligada ao arcabouço teórico da teoria de ensino-aprendizagem que está desenvolvendo, a Teoria da Objetivação, que concebe a Educação Matemática como uma prática social, cultural, política e histórica que tem por objetivo a criação de sujeitos éticos, capazes de refletir criticamente e matematicamente sobre os problemas de suas comunidades e do mundo e, para tal, faz-se imprescindível a compreensão da realidade que está vivenciando.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro através do Programa PRODOUTORAL) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro (Brasil): Contraponto.

Clark, K. et al. (2016). *History of mathematics in mathematics education*. *Recent developments*. In: Radford, L.; Furinghetti, F.; Hausberger, T. (Eds.). Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics. Montpellier, France: IREM de Montpellier. p. 135-179.

D'ambrosio, U. (1993). *Educação Matemática: Uma Visão do Estado da Arte*. Pro-Posições, volume (4, n. 1), p. 9-17.

D'Amore, B.; Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fauvel, J.; Van Maanen, J. (2000). (Eds.). *History in mathematics education: The ICMI Study*, New ICMI Study Series, volume (6). Dordrecht: Kluwer.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2008). *Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics*. In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition, p. 626 – 655. New York: Routledge, Taylor and Francis.

Ilyenkov, E. V. (1982). *The dialectic of the abstract and the concrete in Marx's Capital*, Moscow: Progress.

Maturana, H.; Varela, F. (1995). *A árvore do conhecimento. As bases biológicas do entendimento humano*. Campinas: Editorial Psy.

Miguel, A. (1993). *Três Estudos sobre História e Educação Matemática*. Campinas: UNICAMP, 1993. 285p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Miguel, A. (1997). *As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*. Zetetiké, Campinas, volume (5, n. 2), p. 73-106.

Miguel, A.; Miorim, M. A. (2004). *História na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Miguel, A. (2015). *Formas especulares e não-especulares de se conceber a relação entre história, epistemologia e educação matemática*. Campinas, SP: FE/UNICAMP.

Piaget, J.; García, R. (2011). *Psicogênese e história das ciências*. Petrópolis: Editora Vozes.

Radford, L. (2008). *Beyond Anecdote and Curiosity. The Relevance of the Historical Dimension in the 21st Century Citizen's Mathematics Education*. In: Barbin, E.; Stehlíková, N.; Tzanakis, C. (Eds.). Proceedings of the 5th European Summer University. Prague: Vydavatelský servis, Plzeň, p. 163-166.

Radford, L. (2017). *A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática*. In: Moretti, V. D.; Cedro, W. L. (Org.). Educação matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas. São Paulo: Mercado das Letras, p. 229-261.

Autoras

Bernadete Barbosa Morey

Estágio pós-doutoral na UNESPRC em História da Matemática (2010), Estágio pós-doutoral na Universidade de Penza, Rússia (2016) em História da Matemática. Estágio pós-doutoral (2017-2018) na Laurentian University, Sudbury, Canadá. Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Amizade dos Povos (1992). Mestrado em Matemática pela Universidade Amizade dos Povos (1981). Graduação em Matemática pela Universidade Amizade dos Povos (1979). Lider do Grupo de Pesquisa Matemática e Cultura. Seus interesses em pesquisa são: 1. Teoria da Objetivação, uma teoria de ensino e aprendizagem sociocultural; 2. Relações entre a História da Matemática e a Educação Matemática; 3. Matemática Recreativa e Ensino de Matemática; 4. Matemática Medieval Islâmica. Atualmente é docente Titular aposentada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (RN/Brasil). Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/7554818862651491. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3253-0383. E-mail: bernadetemorey@gmail.com

Valdenize Lopes do Nascimento
Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (2007). Graduação (2004). Atualmente é doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (RN/Brasil). Docente do Magistério Superior na Universidade Federal Rural do Semiárido - UFERSA em Mossoró-RN. Mais informações no Currículo Lattes: http://Lattes.cnpq.br/3101795420928094. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0984-0519. E-mail: denizeln@ufersa.edu.br

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p197-211.id838

HISTORIA Y MATEMÁTICAS INTEGRADAS A TRAVÉS DE UN DIAGRAMA METODOLÓGICO

Miguel Chaquiam
miguelchaquiam@gmail.com
Universidade do Estado do Pará

Recibido: 06/12/2019 **Aceptado:** 02/02/2020

Resumen

La propuesta presentada surge de las preocupaciones de enseñar el curso de Historia de las Matemáticas en el curso de pregrado en Matemáticas, en 2005, y estudios relacionados con el doctorado, de 2009 a 2012, y evaluado en el curso de posgrado al enseñar el curso de Historia de las Matemáticas. como recurso didáctico. Después de revisar la literatura sobre el uso de la historia en la enseñanza y varios estudios empíricos utilizando el diagrama de pregrado y posgrado, cuyos resultados rentables fueron expuestos en libros, inicialmente en 2015, reestructurados en 2016 y refinados en 2017, me propuse presentar el diagrama, reflexiones sobre el texto marcado por el diagrama y el público objetivo, así como ejemplos y percepciones de los estudiantes sobre el diagrama. Los experimentos señalan que el diagrama puede ser un elemento guía importante en la composición de textos que relacionan la historia y las matemáticas en función de la elección del tema/contenido. Además, la composición del diagrama se ha configurado como un espléndido ejercicio de investigación en la búsqueda de información en diversos contextos y, más aún, la composición textual se ha convertido en un ejercicio admirable ante la necesidad de articular y dar forma a diferentes coyunturas y contenidos en el mismo.
***Palabras clave*:** Historia de las matemáticas. La historia como recurso didáctico. Historia de la enseñanza de la matemática. Elaboración de textos con Historia y Matemáticas.

HISTORY AND MATHEMATICS INTEGRATED THROUGH A METHODOLOGICAL DIAGRAM

Abstract

The proposal presented emerges from the concerns of teaching the History of Mathematics course in the undergraduate course in Mathematics, in 2005, and studies related to the doctorate, from 2009 to 2012, and appraised in the postgraduate course when teaching the course History of Mathematics. as a didactic resource. After reviewing the literature on the use of history in teaching and various empirical studies using the undergraduate and postgraduate diagram, which profitable results were exposed in books, initially in 2015, restructured in 2016 and refined in 2017, I set out to present the diagram, reflections about the text marked by the diagram and the target audience, as well as example and students' perceptions of the diagram. Experiments point out that the diagram can be an important guiding element in the composition of texts that relate history and mathematics based on the choice of theme/content. Moreover, the composition of the diagram has been configured as a splendid research exercise in the search for information in various contexts and, more, the

textual composition has become an admirable exercise in the face of the need to articulate and shape different conjunctures and contents in the same.
Keywords**:** History of Mathematics. History as a didactic resource. History for Mathematics Teaching. Text Writing with History and Mathematics.

HISTÓRIA E MATEMÁTICA INTEGRADAS POR MEIO DE UM DIAGRAMA METODOLÓGICO

Resumo

A proposta apresentada emerge a partir das inquietações ao ministrar a disciplina História da Matemática no curso de licenciatura em Matemática, em 2005, e de estudos relativos ao doutoramento, de 2009 a 2012, e aquilatada na pós-graduação ao ministrar a disciplina História da Matemática como recurso didático. Após revisões da literatura sobre o uso da história no ensino e de diversas empirias utilizando o diagrama na graduação e na pós-graduação, cujos resultados proveitosos foram expostos em livros, inicialmente em 2015, reestruturados em 2016 e afinados em 2017, estabeleci como objetivo apresentar o diagrama, reflexões acerca do texto balizado pelo diagrama e do público alvo, bem como exemplo e percepções de alunos em relação ao diagrama. As experimentações apontam que o diagrama pode ser um importante elemento balizador na composição de textos que relacionam história e matemática a partir da eleição de tema/conteúdo. Além disso, a composição do diagrama tem se configurado como um esplêndido exercício de pesquisa na busca de informações em diversos contextos e, mais, a composição textual tem se tornado um admirável exercício frente a necessidade de se articular e amoldar diferentes conjunturas e conteúdos num mesmo texto.
Palavras-chave: História da Matemática. História como recurso didático. História para o Ensino de Matemática. Elaboração de texto com História e Matemática.

INTRODUÇÃO

Esse constructo nasce da necessidade de se organizar didaticamente a disciplina de História da Matemática nos cursos de graduação e pós-graduação e do surgimento de um esboço do diagrama a partir de empirias diversas onde se procurava agregar história da matemática, conceitos matemáticos e personagens. Vislumbrado a possibilidade de melhoria desse esboço, debruço-me sobre o desafio de se construir um modelo estrutural que contemple uma visão histórica, e até crítica, da Matemática ao longo da evolução de conceitos matemáticos, associada a personagens e com possíveis interconexões com o seu ensino.

O diagrama metodológico orientador destaca o saber matemático numa dinâmica multifacetada estabelecendo conexões pluridisciplinar e sociocultural, além disso, explora os conteúdos a partir da produção de um personagem, conectando esse personagem a alguns contemporâneos seus, adotando como referência a tríade contextual nos aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-cientifico.

A proposta descrita não está endereçada aos historiados de profissão ou matemáticos com experiência em história da matemática, mas, sim, aos que se encontram em formação inicial e professores em geral, com pouca ou sem nenhuma experiência na elaboração de textos com esse viés, tendo em vista aproxima-los da história, em especial, da história da matemática, e com o intuito de apresentar um entrelaçamento entre história e matemática com possibilidades de uso do texto resultante como recurso didático no ensino de matemática.

Por meio dessa proposta é possível destacar temas ou conceitos matemáticos que são frequentemente debatidos, muitas vezes reforçados desde a educação básica, mais também valorizar trabalhos subsidiários e seus autores. Escrever recortes da história da matemática com esse viés visa aproximar estudantes e professores da matemática e de sua história. Por outro lado, a composição do texto nos fornece uma espécie de catálogo de fatos da história geral, em especial da matemática, organizados temporalmente de acordo com a evolução dos temas e personagens associados a estes.

Em relação aos cursos de formação de professores identificam-se em suas estruturas curriculares disciplinas que possibilitam certa aproximação com a história da matemática, assim como, mais recentemente com a história da educação matemática. Embora Moura e Silva (2014, p. 336) argumentem que "incorporação de conteúdos históricos no ensino tem sido considerada importante por seu potencial em contribuir para a melhoria do aprendizado de conceitos e ideias científicas e para uma formação cultural ampla dos indivíduos", observa-se em diversos estudos que pouco efeito tem causado na formação do futuro professor, ou seja, esses componentes contribuem pouco à compreensão do viés histórico e, mais, pouco incentiva a inserção da história em suas atividades profissionais.

Concordamos com Moura e Silva (2014, p. 337) quanto ao fato de que história pode "fornece subsídios para compreender como a ciência é produzida, como os cientistas trabalham e quais são as influências sofridas e exercidas por eles, afastando concepções ingênuas e distorcidas sobre o processo de construção do conhecimento científico". Por outro lado observa-se que predomina certo marasmo, que se prefere manter um discurso autoritário a partir de um conjunto de verdades absolutas, apoiados por lamentos pela carência de materiais didáticos disponíveis para tal finalidade, do que enveredar por caminhos para sair da zona de conforto, lidar com desafios, definir novas metas, conquistar novos objetivos e incorporar a história como um recurso didático no ensino, em particular, no ensino de matemática.

O que um iniciante pode imaginar ao se deparar com informações que ressaltem um personagem e suas contribuições para o desenvolvimento da ciência ou quando são desnudas suas fraquezas? Ou ainda, como despertar em iniciantes com pouco arcabouço matemático, desenvolturas reduzidas na elaboração de textos que integrem história e matemática ou experiência profissional mínima o gosto pela história e contribuir para o desenvolvimento de um sentido histórico?

Esta proposta, muito provavelmente, não é uma forma muito significativa de bordar a história sob o ponto de vista de historiadores de ofício numa perspectiva atualizada. Aqui, nossos interesses são bem diferentes das dos historiadores profissionais. Esse esforço intelectual também funciona no sentido de promover descobertas e métodos associados a personagens, nem sempre tão conhecidos no mundo acadêmico, e aclarar diante de nossos olhos "amostras" de trabalhos matemáticos de primeira linha em suas épocas e seus idealizadores.

Sob outro ponto de vista, pode fornecer certo "caminho" para investigar a interação entre os diversos contextos que integram o diagrama. Também pode servir de inspiração ao iniciante, seja tomando de modelo o trabalho de antepassados ou pela aproximação da matemática e sua história, que de certo modo é função do professor com algum senso de história apresentá-los.

O uso do diagrama proposto orienta a elaboração de um texto que contempla uma abordagem multicontextual, proporciona a integração da história e matemática e fornece uma visão global aos iniciantes da historicidade do conhecimento científico. Não é foco principal a elaboração de um texto temático nos moldes que parametrizam vertentes historiográficas atualizadas, mais fazer uso de textos elaborados com esse viés na composição do texto baseado no diagrama. Nessa proposta não estamos apenas visando o desenvolvimento de "temas" interessantes, não apenas por sua estética matemática, mas também para que a arte da descoberta seja promovida.

Não há intensão em reforçar vertente historiográfica tradicional, de reforçar a necessidade do desenvolvimento do tema/conceito numa perspectiva evolucionista linear e presentista do conhecimento, tão pouco enfatizar que fatos correlacionados ao longo da história (passado) contribuíram para as etapas mais aprimoradas do conhecimento (presente).

Ressalto que nessa proposta não é feito uma simples "justaposição cronológica" de história e matemática para obtenção do texto final e, nesse sentido, de certo modo essa proposta vai de encontro ao proposto por Saito e Dias (2013) quanto ao localizar um objeto matemático e, tomado por sua episteme, revelar as diversas conexões que dão sentido a sua existência naquele contexto histórico e gerar possibilidades para exploração pelos educadores matemáticos, dando ênfase maior ao contexto no qual esses conceitos foram desenvolvidos.

Um requisito indispensável é o uso adequado de linguagens – materna e matemática – bem como a fiabilidade das fontes, princípio básico da pesquisa em história, principalmente quando as fontes primárias não estiverem disponíveis, muito embora, este trabalho não requeira o uso de originais em face da natureza dos textos a serem elaborados e seus propósitos.

Para um iniciante é difícil reconhecer e compreender ideias matemáticas e, muito mais, rastreá-las sob muitos disfarces antes de emergirem, bem como traçar suas consequências, fatos que podem gerar anacronismos, falta de alinhamento das informações ao retratar ocorrências de uma determinada época noutro período. Nesse sentido concordamos com Saito e Dias (2013, p. 96) quando afirmam que "ao introduzirmos a história no ensino de matemática, corremos o risco de acentuar o anacronismo existente nas várias histórias da matemática. Esse anacronismo consiste em atribuir, a um estudioso de matemática do passado, posturas e atitudes conscientes que ele nunca possuiu".

Considerando o público a quem se destina a proposta e considerando o questionamento apresentado por André Weil durante sua conferência no *International Congress of Mathematicians*, Helsinki, em 1978: "Quanto conhecimento matemático deve-se possuir para lidar com a história da matemática?" e tomando por base a constituição do diagrama e as características do texto a ser elaborado, questiono: Quanto conhecimento matemático deve possuir um iniciante para lidar com os diversos contextos que compõe o diagrama e elaborar um texto entrelaçando história e matemática, inclusive para fins didáticos?

Concordo com André Weil quando afirmar que para um melhor entendimento de um determinado tema/assunto é necessário que esse conhecimento ultrapasse o período demarcado, que é necessário compreender que de ideias "rudimentares" do passado frequentemente emergem conceitos é métodos no futuro. Entretanto, em nosso caso, observa-se que o público alvo detêm conhecimentos com pouca profundidade sobre as temáticas mais recorrentes, a exemplo do conceito de função, trigonometria, cálculo diferencial e integral, matrizes e etc., uma vez que estamos lidando com iniciantes ou alunos da licenciatura no desenvolvimento da disciplina história da matemática, componente curricular constante nos últimos semestres dos cursos de licenciatura em matemática. Para além dos conhecimentos relacionados aos conceitos matemáticos, devem também ter conhecimentos de história geral preconizado para a educação básica.

Na composição dos contextos integrantes do diagrama não é objetivo identificar as ideias iniciais, rastreá-las, analisar suas influências ou caracterizar onde se tornaram obstáculos nos desenvolvimentos subsequentes, mas, é de bom tom identificar trabalhos realizados por especialistas que apresentem tais fatos e, a partir destes, selecionar recortes de modo que possam ser explorados dentro de um contexto didático-pedagógico como recurso didático.

Ressalto que também houve contribuições dos integrantes do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ) a partir das discussões correlacionadas aos contextos que compõe o diagrama, bem como a elaboração de um texto numa perspectiva didático-pedagógica, considerando as possíveis dificuldades quanto a disponibilidade de materiais e a pouca experiência do público alvo.

DA CONSTITUIÇÃO DO DIAGRAMA A ELABORAÇÃO DO TEXTO

Discorro de forma abreviada os primeiros passos a partir da indicação do Departamento de Matemática para ministrar História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática em 2005. Ultrapasso esse desafio frente a alunos com pouco ou quase nenhum embasamento sobre história matemática, ciências ou pesquisa em história e introduzo leituras que foram de encontro a aquelas constantes nos livros técnicos de matemática.

Novos questionamentos surgiram quanto ao desenvolvimento da disciplina História da Matemática depois de uma tentativa de desenvolvê-la por meio de seminários que contemplassem tópicos da matemática, visto que as apresentações se constituíram fundamentalmente nas leituras dos slides contendo recortes de textos de livros ou artigos e, principalmente, informações obtidas na internet.

Posteriormente, após a leitura de textos pré-selecionados, iniciei debates sobre como a História de Matemática pode contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos e, considerando a experiência obtida pela participação na avaliação de livros didáticos de matemática da educação básica, propus que fossem efetuadas análises de livros didáticos quanto ao uso da história da matemática como estratégia facilitadora no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

A criação da coleção *Trilhos da Matemática* – composta inicialmente por vinte quadros e exposta na Galeria de Artes Graça Landeira, em 2006 – se deu a partir dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos do curso de licenciatura em Matemática, os quais contemplavam personagens pré-selecionados que contribuíram para o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo, sendo obrigatório apresentar o nome completo e sua árvore genealógica, quando fosse possível identificar sua genealogia; pseudônimo, quando fosse o caso; traços biográficos e acadêmicos; trabalhos produzidos, com ênfase aos mais relevantes e/ou soluções de problemas internos à própria matemática ou áreas afins; identificação de contemporâneos de outras áreas do conhecimento científico; frases célebres, curiosidades e fotografias em geral, dentre outros itens. Em decorrência da repercussão positiva frente alunos e professores que visitaram a exposição, a coleção foi aceita para exposição no IX Encontro Nacional de Educação Matemática (IX ENEM), realizado em Belo Horizonte (MG), em 2007, cujo conjunto era composto por trinta e seis quadros.

Os estudos relacionados ao uso da história da matemática como recurso didático foram intensificados a partir da maior aproximação com a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), em 2007, com realização do VIII Seminário Nacional de História da Matemática (VIII SNHM), em Belém do Pará, em 2009, da coordenação dos Encontros Paraenses de Educação Matemática (EPAEM), em 2010 e 2011, este último sob a temática *Faces da História da Matemática e da Educação Matemática na Amazônia*.

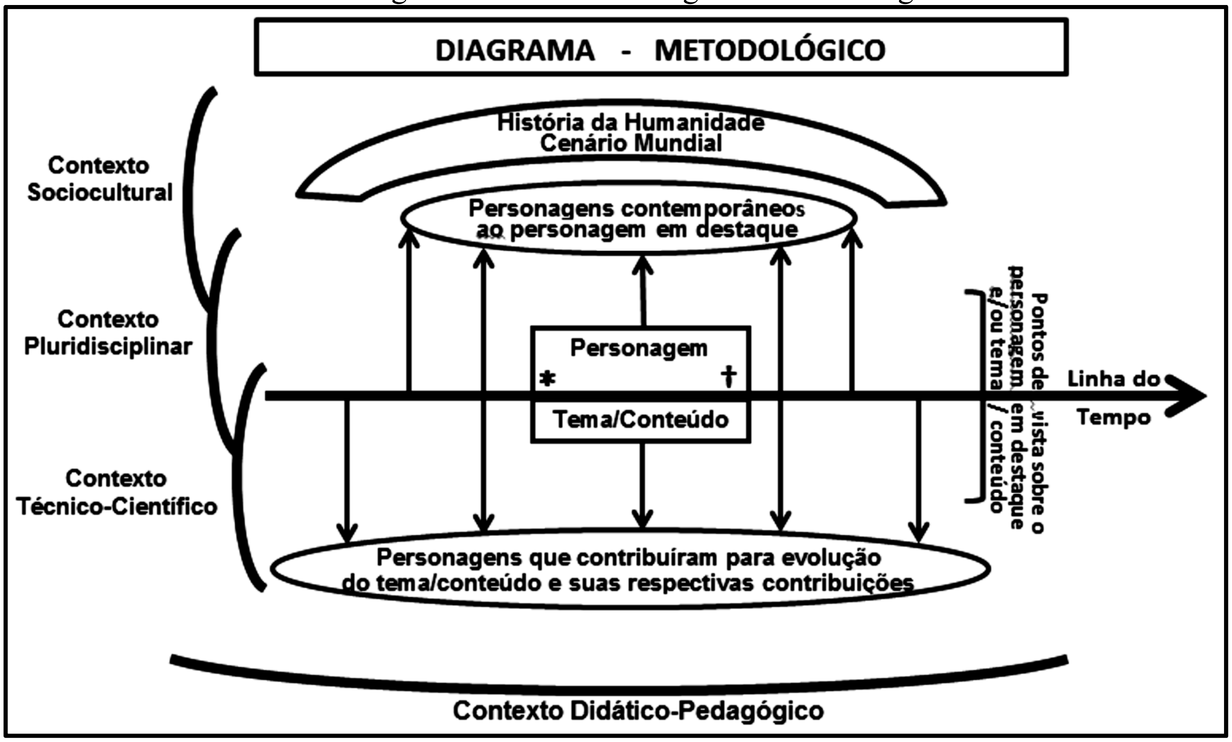
No XI ENEM de 2013, durante a participação na mesa *Propostas práticas de uso didático da História da Matemática na Educação Básica*, apresento a primeira versão do diagrama e proponho o ensino de conteúdos matemáticos e de história da matemática a partir de personagens/matemáticos. No XI SNHM em 2015, após experimentações e recomposições do diagrama, reapresento a proposta no livro *História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*, onde destaco que modelo base do diagrama metodológico poderá balizar a elaboração de um texto envolvendo tópicos de história da matemática associada a personagens/matemáticos e tema/conteúdos ministrados em salsa de aula.

Em 2016, após apresentação e discussões em torno do diagrama e dos exemplos gerados a partir deste no II Seminário Cearense de História da Matemática (II SCHM), no curso de mestrado profissional em Ensino de Matemática e no grupo de pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), adicionado minhas reflexões e contribuições a respeito dos debates ocorridos, apresento outra versão do diagrama, onde foram delimitados os contextos técnico-científico, pluridisciplinar, sociocultural e didático-pedagógico. Esses ajustes foram publicados no livro de Mendes e Chaquiam (2016) – *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, na segunda parte onde retrato "Um diagrama, um texto".

Em 2017 apresento sete exemplos de textos elaborados por alunos que tomaram o diagrama como balizador das escritas dos textos no livro *Ensaios Temáticos: História e Matemática em sala de aula* – disponível em *www.ghemaz.com.br* – a saber: Equação Quadrática: recorte da história das equações; Números Primos: uma história dos números; Conjuntos: sobre a história de sua evolução; Grandezas: uma história dos comensuráveis e incomensuráveis; Análise Combinatória: história para sala de aula; Trigonometria: recortes da história da sua evolução e Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas: composição histórica.

A seguir apresento o diagrama que têm sido objeto de estudos e pesquisas e considerações sobre cada um dos contextos que o compõe, bem como reflexões sobre o texto a ser elaborado a partir deste.

Figura 1: Modelo do Diagrama-Metodológico



Fonte: Chaquiam (2017).

O diagrama é composto por três contextos principais: sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico. Esses contextos constituem as diferentes dimensões de abordagens pelos quais o tema/conceito pode ser trabalhado. O contexto técnico-científico abrange conceitos matemáticos, apresentados por meio de uma vertente teórico-prática, associada aos personagens que o conceberam numa ordem cronológica, dentre os quais é eleito um e, a partir deste, constituir os demais contextos – pluridisciplinar e sociocultural.

No contexto pluridisciplinar procura-se evidenciar o personagem eleito no contexto anterior por meio de seus contemporâneos oriundos das mais diversas áreas, onde são abordadas questões disciplinares, não necessariamente matemáticas, no sentido de caracterizar o que está ocorrendo nesses outros contextos científicos e seus personagens, perpassa por diferentes áreas do conhecimento, porém sua finalidade permanece inscrita ao contexto inicial. O contexto sociocultural contempla questões históricas e culturais mais abrangentes tendo em vista localizar o leitor a partir do personagem, eleito no contexto inicial, e de seus contemporâneos dentro do contexto pluridisciplinar.

O contexto didático-pedagógico está relacionado à constituição do texto, ou seja, sugere-se que o texto deve ser elaborado a partir do contexto sociocultural, integrar o contexto pluridisciplinar, seguido do contexto técnico-científico e finalizado com a apresentação de outros pontos de vista mais recentes sobre o personagem destacado ou sobre o conteúdo matemático abordado e, sem separado, apresentar um conjunto de atividades que possam ser exploradas em sala de aula a partir do texto elaborado. Uma descrição mais detalhada pode ser obtida em Chaquiam (2017), disponível na Biblioteca em Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) - *www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/*.

EXEMPLOS E AVALIAÇÃO DA EMPIRIA

A evolução dessa proposta e exemplos pode ser constatada em Chaquiam (2015), Mendes e Chaquiam (2016) e Chaquiam (2017). Os exemplos apresentados nesse ínterim evidenciam a evolução do diagrama e a integração de novos elementos a este, bem como, profundidade dos textos elaborados pelos alunos da graduação e pós-graduação.

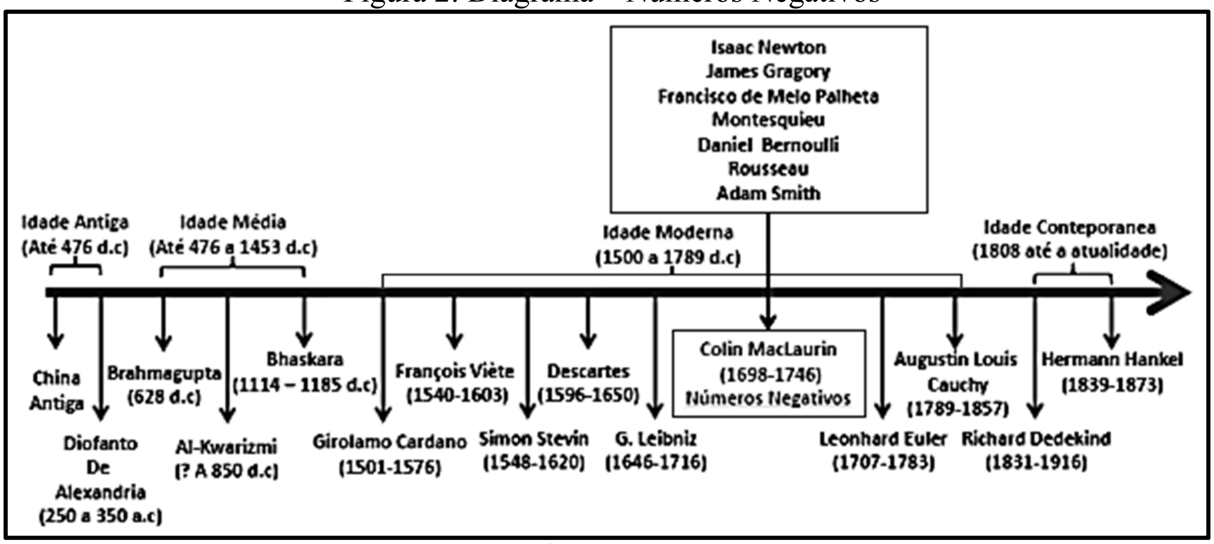
Dentre os problemas identificados durante a apresentação da proposta e constituição do diagrama destacam-se o desinteresse inicial dos alunos em relação ao uso da história da matemática no ensino de matemática – muito provavelmente gerada pela falta de aproximação destes com a história geral, principalmente com a história da matemática – e a pouca experiência quanto à elaboração de textos que desviar-se das características dos livros técnicos de matemática.

Pode-se afirmar que os primeiros diagramas apresentavam poucos personagens, tanto para caracterizar a evolução do tema quanto para caracterizar outros campos da ciência, bem como episódios relacionados à história geral dentro do recorte temporal estabelecido dissociado do apresentado nos contextos pluridisciplinar e técnico-científico, além disso, os textos finais apresentavam pouca integração entre os contextos indicados no diagrama.

As empirias foram realizadas ao longo do desenvolvimento das disciplinas *História da Matemática* e *História da Matemática como recurso didático*, respectivamente, no curso de licenciatura em Matemática e no Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática, como parte dos seus conteúdos programáticos.

O diagrama a seguir foi elaborado a partir do tema "Números Negativos", em 2019, onde se sobressai ao longo da linha do tempo a quantidade de personagens envolvidos com a temática, bem como, o número de contemporâneos do personagem destacado Colin MacLaurin (1698 - 1746). Esse é um dos resultados da proposta apresentada por Chaquiam (2017), no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, onde se fez uso de um diagrama para balizar a elaboração de um texto que envolve história e matemática.

Figura 2: Diagrama – Números Negativos



Fonte: Vasconcelos e Santos[1], adaptado de Chaquiam (2017), 2019.

Iniciam-se as referidas disciplinas apresentando as diversas possibilidades de uso da história da matemática constantes nas literaturas mais recente e posteriormente, ampla discussão e análise dos diagramas e textos produzidos em anos anteriores. As reflexões a partir desses cenários contribuem de forma eficaz à produção de diagramas que contemplam uma maior diversidade e profundidade de elementos e personagens. Além das disciplinas, os trabalhos de conclusão de curso em licenciatura em Matemática tem gerado textos que podem ser utilizados em sala de aula.

Dentre os trabalhos conclusos, destacam-se os trabalhos de Lucas Antonio Mendes de Lima e Mayara Gabriella Grangeiro Pereira, intitulado "História da Matemática: Contribuições para o ensino de funções, equação quadrática e matrizes", 2017, e de Jessie

[1] Akilson Medeiros Vasconcelos e Francisco Nordman Costa Santos – alunos do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Heveny Saraiva Lima, intitulado “A História da Matemática no Ensino de Matemática: O caso da trigonometria”, 2019.

Do primeiro trabalho resultaram dois trabalhos publicados em eventos científicos, a saber: Uma história do conceito de função para uso em sala de aula, no XII Seminário Nacional de História da Matemática (2017) e Equação Quadrática: um recorte histórico, no XI Encontro Paraense de Educação Matemática (2017), e um artigo publicado no Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (2018), intitulado Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula.

Do segundo, três artigos em eventos científicos, a saber: A TRIGONOMETRIA NA GRÉCIA ANTIGA: Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio e Hiparco de Nicéia, no XVIII Seminário Nacional de História da Matemática (2019); As contribuições à trigonometria nos séculos XVII, XVIII E XIX, no XVIII Encontro Nacional de Educação Matemática (2019) e Trigonometria: Al-Battani, Bhaskara Akaria, Fibonacci e Nicoled’ Oresme, no XII Encontro Paraense de Educação Matemática (2019).

No decorrer das empirias foram efetuadas pesquisas para saber a visão dos participantes antes de terem cursarem as disciplinas supracitadas e sobre a utilização da história da matemática como recurso didático, particularmente o diagrama, em suas atividades profissionais ou acadêmicas.

A visão dos alunos em relação ao uso da história da matemática pode ser evidenciada ao responderem o seguinte questionamento: Antes de cursar História da Matemática, qual era sua visão sobre essa disciplina? Visto de cerca de 60% dos respondentes afirmaram que viam a disciplina constituída apenas por leituras que envolviam a história dos conteúdos e personagens. Por outro lado, cerca de 30% não consideram a história da matemática um elemento importante para o ensino de matemática. Essas afirmações estão em consonância as respostas dos 73% que dizem não fazer uso da história da matemática em suas atividades acadêmicas ou profissionais antes de terem cursado uma das disciplinas citadas.

Quando a totalidade dos respondentes afirma que o diagrama é um meio viável para elaboração de textos que envolvem história e matemática, descortina-se a fragilidade destes quanto a organização de textos desta natureza, bem como, a pouca aproximação que possuem em relação a história da matemática de um modo geral.

Cerca de 70% dos respondentes apontam ter tido dificuldades em obter informações para composição dos elementos constitutivos do diagrama metodológico em decorrência da escassez de referenciais teóricos ou materiais didáticos que abordem a história de conteúdos matemáticos, suas transformações e personagem contribuintes. Salientam que há pouca literatura disponível contemplando especificamente o uso da história da matemática em sala de aula.

Os respondentes afirmaram que o diagrama foi elemento primordial para a constituição do texto envolvendo os elementos indicados nos diversos contextos, que serviu de guia segundo cerca de 90% dos respondentes, embora tenham tido dificuldades de relacionar a história da matemática com os conteúdos matemáticos e a elaboração de atividades que explorem o texto produzido.

Quase a totalidade dos respondentes afirmou que essa abordagem da história da matemática por meio do diagrama contribuiu à sua formação acadêmica ou profissional, proporcionou maior compreensão de como utilizar a história da matemática como um recurso didático, trouxe novas perspectivas quanto a importância do uso da história da matemática no ensino e melhor compreensão das transformações ocorridas na matemática ao longo dos anos.

CONCLUSÃO

Essa proposta é uma das muitas pesquisas que procuram relacionar a história da matemática e o ensino de matemática, o diagrama pode ser considerado um meio de se organizar e integrar história e matemática por meio dos diversos contextos, bem como proporcionar melhor compreensão das origens das ideias matemáticas que temos hoje, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem prontas e acabadas vieram de grandes esforços e desafios enfrentados por muitos ao longo dos tempos.

Em relação à formação inicial de professores de matemática, essa forma de pesquisa tem se demonstrado um meio eficaz para aproximar os alunos com a história da matemática, desmistificar que história da matemática está restrita a nomes, datas e fatos, além de proporcionar melhoria quanto a elaboração de textos que envolvem história e matemática.

Os resultados da utilização desse modelo metodológico apontam sua eficácia, os textos apresentam maior integração da história e com a matemática, apresentam-se cada vez mais consistentes e harmoniosos, entretanto, ainda faltam maiores aprofundamentos no que tange a elaboração de atividades abordando a temática e seu uso em sala de aula.

A proposta descrita não está endereçada aos historiados de profissão ou matemáticos com experiência em história da matemática, pode não ser uma forma muito significativa de bordar a história sob o ponto de vista de historiadores de ofício numa perspectiva atualizada, entretanto, orienta a elaboração de um texto que contempla uma abordagem multicontextual, proporciona a integração da história e matemática e fornece uma visão global aos iniciantes da historicidade do conhecimento científico.

Formatada inicialmente dentro de uma visão historiográfica tradicional, procura-se distanciar-se da visão presentista e evolucionista, aproximar-se de vertentes historiográficas mais atualizadas, embora não seja objetivo identificar as ideias iniciais, rastreá-las, analisar suas influências ou caracterizar onde se tornaram obstáculos nos desenvolvimentos subsequentes, mas, agregar trabalhos realizados por especialistas que apresentem tais fatos e, a partir destes, selecionar recortes de modo que possam ser explorados dentro de um contexto didático-pedagógico como recurso didático.

Considerando as similaridades entre a história da matemática e a história de outras áreas do conhecimento científico, dentre elas, física, química e biologia, entende-se que é possível adequar o diagrama proposto a essas outras áreas, bem como elaborar textos que integrem a história dessas áreas aos conteúdos específicos de cada área.

REFERÊNCIAS

CHAQUIAM, M. **Uso e Implicações das Linguagens no Ensino de Matemática**. Coleção Educação Matemática na Amazônia, v. 4. Belém: SBEM-PA, 2015.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Natal: Livraria da Física, 2015.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A. & CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016, p. 77 - 125.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos**: História e Matemática em sala de aula. Belém: SBEM-PA, 2017.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino**: Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A. & CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

MENDES, I, A. **O uso da história no ensino da Matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém (PA): EDUEPA, 2001.

MOURA, Breno Arisoli; SILVA, Cibelle Celestino. **A abordagem Multicontextual da História da Ciência na Formação de Professores de Física**: análise de um estudo de caso. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 336-348.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. **Interface entre História e Ensino de Matemática: Aspectos Teóricos e Metodológicos**. In. Actas del VII CIBEM. Pp. 7502 – 7509. ISSN 2301-0797. Montevideo, setembro, 2013.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. **Interface entre História da Matemática e Ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI**. In. Ciência &Educação, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

Autor

Miguel Chaquiam

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2012). Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001). Licenciado em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984). Atualmente é professor da Universidade do Estado do Pará (UEPA/PA/Brasil) e pesquisador do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Computacional, Álgebra Linear; Estruturas Algébricas, Análise Real, História da Matemática, História das Ciências e Formação de Professores. Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ). Tem interesse Matemática, Ensino de Matemática e História da Matemática. Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9356361533701895. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1308-8710. E-mail: miguelchaquiam@gmail.com.

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p212-239.id839

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, UNA RUTA DE INVESTIGACIÓN, CREATIVIDAD Y DIVERSIDAD CULTURAL

Ligia Arantes Sad[1]
ligia.sad@ifes.edu.br

Claudia A. C. de Araujo Lorenzoni[1]
claudia.araujo@ifes.edu.br
[1]*Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória (Ifes-Vitória), Brasil*

Recibido: 08/12/2019 **Aceptado:** 06/02/2020

Resumen

El texto discute el potencial y las contribuciones de la Historia de las Matemáticas en las prácticas de enseñanza de la Educación Matemática, ilustrada por dos episodios específicos de la práctica pedagógica de los autores. Toma como notas teóricas estudios como los de Ferreira, D'Ambrosio, Barbin, Jankivist y Vianna sobre los argumentos, implicaciones y sugerencias dirigidas al uso didáctico de la historia de las matemáticas. Los fundamentos de los autores se basan en un diálogo con la etnomatemática, entendiendo así las matemáticas escolares o las matemáticas, vistas en una forma occidental dominante, como una entre otras posibilidades de hacer y pensar matemáticamente. A lo largo del texto, la historia se destaca como un subsidio para la creación, tanto individual como colectiva, de explicaciones, relaciones de significados, objetos y significados que no se constituyeron hasta entonces. La creatividad, desde la perspectiva de Karwowski, Jankovska y Szwajkowski, y la investigación, en la línea de Ponte, se presentan como elementos relevantes en el proceso de enseñanza para estimular en cada estudiante una relación de construcción y apropiación del conocimiento matemático escolar de manera participativa. , interrogador y productor de nuevos conocimientos. Como resultado, señalamos: ser capaces de unir teorías e ideas científicas al analizar el potencial y las contribuciones de la Historia de las Matemáticas en las prácticas de enseñanza de la enseñanza de las matemáticas en la escuela, involucrando investigación y creatividad en metodologías y contextos híbridos de diferentes culturas.

Palabras clave: Historia de las matemáticas. Educación matemática escolar. Juegos indígenas tradicionales. Investigación y creatividad.

HISTORY OF MATHEMATICS IN MATHEMATICAL EDUCATION, A ROUTE OF RESEARCH, CREATIVITY AND CULTURAL DIVERSITY

Abstract

The text discusses the potential and contributions of the History of Mathematics in teaching practices in Mathematical Education, illustrated by two specific episodes of the authors' pedagogical practice. It takes as theoretical notes studies like those of Ferreira, D'Ambrosio, Barbin, Jankivist and Vianna about the arguments, implications and suggestions directed to the didactic use of the history of mathematics. The authors' foundations are based on a dialogue with Ethnomathematics, thus understanding school mathematics or mathematics - seen in a dominant Western way - as one among other possibilities of doing and thinking mathematically. Throughout the text, history stands out as a subsidy for the creation, both individual and collective, of explanations, relations of meanings, objects and meanings that were not constituted until then. Creativity, from the perspective of Karwowski, Jankovska and Szwajkowski, and research, in the Ponte line, are presented as relevant elements in the teaching process in order to stimulate in each student a relationship of construction and appropriation of school mathematical knowledge in a participatory way, questioner and producer of new knowledge. As a result we point out - being able to unite theories and scientific ideas when analyzing potentialities and contributions of the History of Mathematics in teaching practices of school Mathematics teaching, involving research and creativity in hybrid methodologies and contexts of different cultures.

Keywords: History of Mathematics. School mathematical education. Traditional indigenous games. Research and creativity.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, UMA VIA DE INVESTIGAÇÃO, CRIATIVIDADE E DIVERSIDADE CULTURAL

Resumo

O texto discute potencialidades e contribuições da História da Matemática em práticas docentes da Educação Matemática, ilustradas por dois episódios específicos da prática pedagógica das autoras. Toma como apontamentos teóricos estudos como os de Ferreira, D’Ambrosio, Barbin, Jankivist e Vianna acerca dos argumentos, implicações e sugestões direcionadas ao uso didático da história da matemática. Os fundamentos das autoras são alicerçados em diálogo com a Etnomatemática, entendendo, assim, a matemática ou a matemática escolar - vista de modo ocidental dominante – como uma entre outras possibilidades do fazer e pensar matematicamente. Ao longo do texto, destaca-se a história como subsídio para criação, tanto individual quanto coletiva, de explicações, relações de significados, objetos e sentidos que não estavam até então constituídos. A criatividade, na perspectiva de Karwowski, Jankovska e Szwajkowski, e a investigação, na linha de Ponte, são apresentadas como elementos relevantes no processo de ensino a fim de estimular em cada estudante uma relação de construção e apropriação do conhecimento matemático escolar de

forma participativa, questionadora e produtora de novos conhecimentos. Como resultado apontamos - poder unir teorias e ideias científicas ao analisar potencialidades e contribuições da História da Matemática em práticas docentes do ensino da Matemática escolar, envolvendo a investigação e a criatividade em metodologias híbridas e contextos de diferentes culturas.
Palavras-chave: História da Matemática. Educação matemática escolar. Jogos tradicionais indígenas. Investigação e criatividade.

Introdução

Ao longo dos anos de vivência acadêmica, na interdinâmica entre os campos de conhecimento da Educação Matemática e da História da Matemática, vários pesquisadores têm explorado as potencialidades e contribuições da História da Matemática no sentido de se tornar mais presente e poder fomentar uma matemática mais humanizada nas práticas docentes da Educação Matemática (Ferreira, 1998; D'Ambrosio, 2001; Barbin, 2006; Guillemette, 2015; Rogers e Pope, 2019). É nesse sentido que temos por objetivo central trazer à discussão compreensões sobre as potencialidades e contribuições da História da Matemática em práticas docentes da Educação Matemática.

Localmente, em Vitória-ES, também tem ocorrido, por décadas, uma busca desafiadora em nossas práticas enquanto educadoras na Educação Básica e na Educação Superior, mediante algumas estratégias e situações criadas para atuação nessa interface ou interdinâmica. Não podemos esquecer as influências curriculares que têm indicado, desde os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) até as atuais BNCC – Bases Nacionais Comuns Curriculares (Brasil, 2018), uma articulação bem vinda das ciências com a esfera social e cultural, que pode ser interpretada e carregada de sentido e significado mediante os relacionamentos com a história da matemática. Contudo, esses documentos oficiais normativos não provêm indicações de meios pedagógicos que, na prática docente, possam potencializar a comunidade escolar e acadêmica no trabalho com a presente diversidade cultural. Por um lado, que eles permitam mitigar a opressão e desigualdade social como fatores de desumanização das ciências de modo geral e, por outro, valorizar a condução de relações interculturais que respeitam e prezam valores defendidos em comunidades tradicionais como fontes de produção de novos significados, conhecimentos e criatividades.

É pertinente comentar que consideramos o termo ‘tradicional’ como polissêmico, embora possa ser pensado com significado sintetizado de conjunto de traços culturais, passado e preservado de geração a geração, como princípios identitários. (Diegues; Arruda, 2001). Contudo, como as sociedades estão sempre em movimento de transformação, não é pertinente que se veja qualquer tipologização de “tradição” como algo estático e retrógrado, uma vez que a adjetivação de tradicional é lida, muitas vezes, com significados de uma antropologia ocidental. Enquanto que, “um dos critérios mais importantes para a definição de culturas ou populações tradicionais, além do modo de vida, é, sem dúvida, o **reconhecer-se** como pertencente àquele grupo social particular. Esse critério remete à questão fundamental da **identidade”** (Diegues; Arruda, 2001, p. 26, grifo dos autores). Acrescentamos ainda que tal critério se relaciona diretamente com o que aquele grupo cultural determina como ontologicamente próprio. Importante adicionar que não vemos como posições antagônicas o “tradicional” e o “novo”, mesmo porque estamos constantemente nos valendo de aspectos tradicionais e históricos para a criação do novo. Burke (2005), ao comentar sobre a provocação que a tradição trouxe à historicidade, discute a produção de novas tradições, ao serem reinventadas em ações coletivas.

O entendimento na perspectiva de olhar as possibilidades da atuação, na prática educacional do professor que lida com a história da matemática como aliada ao ensino de matemática, tem levado a estudos como os de Jankvist (2009) sobre os argumentos para uso da história e categorização dos “porquês” e “como” utilizá-la. Ainda no final do século XX, Vianna (1995) discutiu algumas implicações e sugestões direcionadas ao uso didático da história da matemática, entre as quais destacamos a história como subsídio para criação, tanto individual quanto coletiva, de explicações, relações de significados, objetos e sentidos que não estavam até então constituídos.

Com esses apontamentos teóricos e caracterizações sobre o lugar de onde estamos a elaborar as narrativas e considerações analíticas, adotamos no restante do texto uma composição que, primeiramente, agrega de modo sintetizado compreensões a respeito de criatividade e investigação para, em sequência, articular com dois episódios específicos da nossa prática pedagógica local. Descrevemos as metodologias integradas aos episódios, discutindo-as como potentes vias de integração e produção de conhecimentos históricos, bem como de desenvolvimento do fazer matemático na educação escolar. Os caminhos a serem seguidos com a história da matemática e a matemática são ao mesmo tempo alicerçados em diálogo com a Etnomatemática, entendendo a matemática - vista de modo ocidental dominante - como uma entre outras possibilidades do fazer e pensar matematicamente.

Compreensões e caracterizações sobre criatividade e investigação como metodologia

A escolha de procedimentos metodológicos no ensino da matemática que fazemos ao trabalhar com determinada turma, depende de vários fatores, mas de forma predominante podemos buscar por sugestões dinâmicas que façam uso ou permitam incluir relacionamentos com a história da matemática. São preferenciais, procedimentos como de investigação, experimentos, atividades práticas, jogos e brincadeiras, dependendo da turma no que tange à idade, nível de escolaridade e situações emergentes do contexto cultural. Isso porque queremos que os estudantes saiam de uma posição de "espectadores para se posicionarem como criadores ativos, não na perspectiva de serem cientistas ou técnicos, mas numa posição em que participem, compreendam e questionem o próprio conhecimento matemático escolar." (Mendes, 2009, p.109).

Antecedente a esse posicionamento, em geral, há uma "vontade consciente" do aprendiz para engajar-se nas ações que, segundo Vygotski (1995), é influenciada pela sensação interna de afeto, pelo ambiente social e cultural. De acordo com essa perspectiva, temos a defesa do papel fundamental desempenhado pela interação social na produção de significado durante o processo de ensino e aprendizagem. "O ponto crucial é que a sala de aula é um *espaço simbólico.* É um espaço que transmite valores culturais, científicos, estéticos, éticos e outros historicamente constituídos". (Radford, 2011, p. 325). Mas, como afirma Bishop (2008), valores educacionais estão impregnados da cultura das sociedades e valores de estudantes específicos vêm de seus contextos sociais específicos.

A exploração de determinado objeto ou situação histórica de certo modo envolve investigação, mas que tipo de investigação? Conforme Ponte (2003), temos uma gama variada de apropriações, desde simples buscas por informações utilizando pesquisa na Internet, até investigações no caso de situações mais abertas, sem definições precisas. Mas, a investigação matemática, que discutimos como procedimento metodológico possível para abordagens históricas em meio ao ensino de matemática, envolve as três fases apresentadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), quais sejam: "(i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados [...]".

No caso específico da investigação que se relaciona à história da matemática, temos alguns aspectos a comentar. Na fase (i), há inicialmente um diálogo a respeito da atividade de investigação, seguida de convite para ajudarem a pensar e levantar possíveis objetos matemáticos ou que foram construídos em contextos históricos, bem como situações caracterizadas por problemas mais abertos, antes mesmo de lançar propostas. Quanto à fase (ii), é importante que o professor fique atento à necessidade de orientar e levantar discussões críticas, não somente quanto às fontes utilizadas, para não haver escolhas muito deficitárias e até mesmo desânimos, mas, de modo específico, sobre o teor do que foi encontrado e as contribuições no sentido de justificações às possíveis conjecturas matemáticas. Já na última fase de discussão, os alunos além de relatar oralmente o que realizaram, por vezes são solicitados a cooperar na confecção de materiais, exposições e/ou relatórios.

Outro destaque que merece análises epistemológicas mais aprofundadas é a respeito do desenvolvimento de notadas dimensões que levam à criatividade. Uma capacidade bastante estudada cientificamente, mas que continua a não ter um modelo consensual, segundo Gerlovina (2011). A partir das leituras teóricas e de observações práticas, estamos considerando criatividade de acordo com Karwowski, Jankovska e Szwajkowski (2017) relacionada a um modelo de imaginação criativa – definida como a capacidade de criação expressiva e de imagens complexas; originalidade – capacidade de criar coisas únicas (novas); e de transformação. Aqui apenas explicitamos alguns aspectos que podem estar a contribuir a uma imaginação criativa no decorrer das atividades interdisciplinares envolvendo matemática, lembrando que ao longo da história da matemática existem vários exemplos de expoentes criativos, como os que podem ser observados na historiografia de criação dos jogos que abordaremos em um dos episódios da prática local.

Epidódio 1 - Povos tradicionais, jogos e matemática

Na contemporaneidade, entre as formas culturais históricas de matematizar, manifestas por quase todos os grupos culturais, consideramos processos ou estratégias basilares como contar, medir, ordenar, classificar, desenhar, jogar e inferir, conforme perspectivas próximas assinaladas por Zaslavsky (1989), Bishop (1999) e D'Ambrosio (2001). Do entrelaçamento dessas atividades básicas provém todo o arcabouço dos saberes matemáticos historicamente constituídos em seus processos diferenciados de transformação cultural. Especificamente, situa-se o espaço de discussão deste presente artigo nessa confluência da formação histórica de um fazer matemático ensejado por jogos culturais tradicionais entre povos indígenas, aldeados há centenas de anos no Espírito Santo. Nesse sentido, o episódio aqui narrado apresenta resultados parciais de uma pesquisa mais ampla, em andamento junto aos Tupinikim e Guarani em Aracruz, no Espírito Santo, Brasil[1], que envolve o contexto histórico dos povos, a educação matemática escolar indígena e não indígena e as transformações possíveis mediadas pelo diálogo intercultural, além de prezar pela criatividade em ações conjuntas, com a produção de novos significados e conhecimentos.

No País, é comum o termo "tupiniquim" ser usado no sentido de "nacional", "brasileiro". Todavia, o emprego do termo com esse sentido pode ofuscar a história e a existência desse povo habitante do Brasil desde antes da chegada dos colonizadores portugueses, que se autodenomina "Tupinikim", com "k" como explica Silva (2016). Em Terras Indígenas (TI) situadas no município de Aracruz, ao Norte do Estado do Espírito Santo, os Tupinikim, juntamente com os Guarani, vivem aldeados numa área de 18212,3314 hectares de extensão, segundo a Fundação Nacional do Índio - Funai (Brasil, 2013). O censo de 2010 (Brasil, 2013) contabilizou 3.005 indivíduos habitando a região, sendo a maioria Tupinikim. Em 2019, o número de indígenas nas TI do Estado passou para 4.052 (Brasil, 2019) .

Os Tupinikim, os Guarani e, de um modo geral, os povos indígenas têm produzido e transmitido, ao longo de sua história, saberes que são próprios à sua condição material, social, política, religiosa, etc. determinados por uma racionalidade que lhes é específica. Em meio ao trabalho sócio-histórico organizado e controlado no interior de cada grupo social desenvolve-se uma maneira particular de produção de conhecimento. Em relação a populações indígenas é

---

[1] *Jogos e brincadeiras indígenas numa perspectiva etnomatemática*. Brasil (Ifes Edital 04/2019; Ifes/CNPq, Editais 02 e 04/2019; Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo - Fapes - Edital 21-2018)

pertinente a observação de Nascimento (2004, p. 88), "a percepção da totalidade que a vivência de uma doutrina de semelhança propicia ao índio permite que tudo aquilo que faz parte de seu *habitat* seja muito mais do que aparência objetiva de ser".

Em Lorenzoni (2014) são apresentados grafismos da cestaria dos Guarani e os significados atribuídos por eles, paralelamente a ideias que poderiam ser chamadas de matemáticas. Mostra-se que o sentido matemático de cada grafismo não está desassociado do seu significado cultural. Além do que, em sociedades tradicionais os processos de comunicação de noções e saberes costumam se realizar via oralidade, "por contatos primários, mais próximos do concreto, da intuição sensível e da rotina da vida diária" (Nascimento, 2004, p. 85). Há de se supor que na educação escolar indígena o encontro entre saberes tradicionais e o componente curricular Matemática, nos seus moldes eurocêntricos de argumentação, demonstração e abstração, pode se tornar conflituoso. Por isso, um modo de harmonizar os estranhamentos pode ser a via de utilização de elementos culturais e históricos, como são certos artefatos e jogos.

Na legislação brasileira, são considerados Povos e Comunidades Tradicionais:

> grupos culturalmente diferenciados e que se reconhecem como tais, que possuem formas próprias de organização social, que ocupam e usam territórios e recursos naturais como condição para sua reprodução cultural, social, religiosa, ancestral e econômica, utilizando conhecimentos, inovações e práticas gerados e transmitidos pela tradição (Decreto nº 6040, 2007).

Conhecer a historicidade e explorá-la em conjunção com ideias matemáticas a serem introduzidas na educação escolar indígena passa, então, por conhecer e reconhecer os saberes tradicionais da comunidade e viabilizar o emprego dos conhecimentos, inovações e práticas produzidos nesse encontro para a solução de problemas do grupo.

Geralmente, promover investigações sobre um possível matematizar local, dentro das matemáticas de algumas culturas, oportuniza contribuir não só localmente, mas como Onstad (2017) ressalta, até mesmo no sentido de novas perspectivas, resultados e raciocínios ainda desconhecidos dentro da matemática acadêmica mais global.

Explorar oportunamente, no contato com comunidades escolares locais, determinadas matematizações, nos fez refletir e buscar sobre jogos e brincadeiras tradicionais. Em Grando (2010) encontram-se diferentes jogos indígenas: na forma de desafios, de atividades corporais e de jogos de tabuleiros. Nesta vertente, dedicamos especial atenção a jogos que têm uma historicidade, são caracterizados com ‘arremesso de peças’ ou ‘de tabuleiro’ e se assemelham de algum modo a jogos da cultura indígena local, os quais são investigados como recursos didáticos a serem utilizados em oficinas e aulas de matemática. Ao mesmo tempo, no procedimento das investigações provocam-se práticas narrativas, com características das culturas indígenas envolvidas, que segundo Burke (2005, p.158) “oferecem pistas importantes para o mundo em que foram contadas”, instigando interesses históricos que ajudam a constituir o delineamento de identidades.

Cabe observar que a metodologia de investigação, nas três fases apresentadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), já era uma base adequada para esse episódio que estamos narrando, e, sob a qual, os grupos de estudantes locais, da Licenciatura de Matemática do Ifes-Vitória, e pesquisadores estavam desde o início promovendo reflexão em aula e encontros. Foi importante, nesses momentos, o papel dos professores no grupo, para que fosse discutido, coletivamente, o próprio processo em que estávamos engajados, inclusive na “procura de justificações matemáticas [dos estudantes não indígenas] para as conjecturas” (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009, p. 53) a respeito dos jogos em tela. Naquele momento já ultrapassando a etapa (i) e adentrado na (ii) - a qual levou à investigação tanto bibliográfica histórica quanto no contexto indígena local.

A seguir, vamos abordar as atividades realizadas com dois jogos integrantes desse episódio envolvendo comunidades indígenas.

O Milho e os Tupinikim: Um jogo de dados?

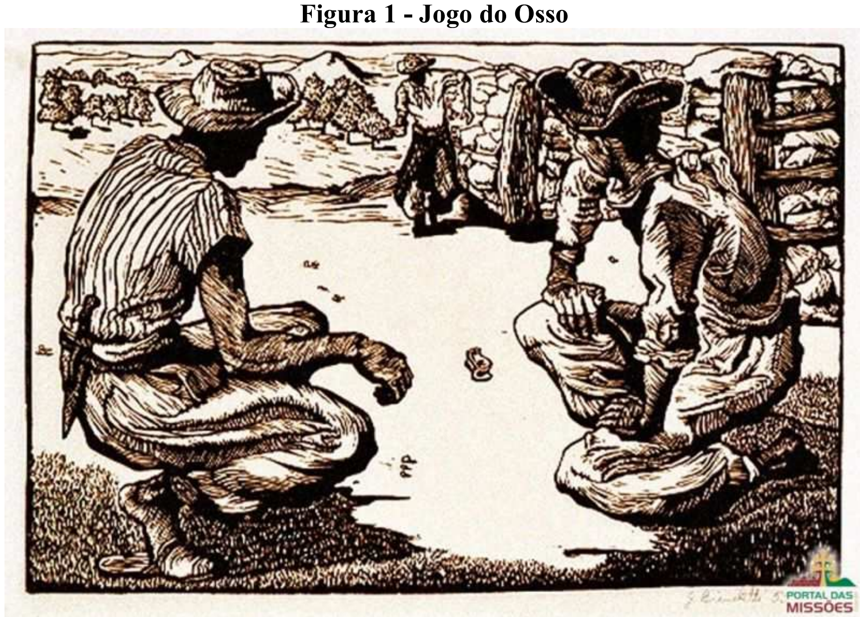
Para Coutinho (2009), muitos jogos são reminiscências de rituais mágicos e religiosos. O autor destaca, por exemplo, o uso de dados como elementos de jogos como “descendentes dos astrágalos, búzios e outros objetos que adivinhos jogavam para ver o futuro” (Coutinho, 2009, p. 44). Embora, com as transformações sociais e culturais, os jogos tenham adquirido outros sentidos, como o lúdico. A seguir, apresentamos jogos com alguns desses materiais como peças, juntamente a um jogo do povo Tupinikim.

Em Mlodinow (2011), encontramos informações a respeito de um jogo praticado desde a Antiguidade, pelos gregos, com astrágalos de animais:

> (...) dispondo de uma abundância de carcaças animais, o que jogavam eram astrágalos, feitos de ossos do calcanhar. Um astrágalo tem seis lados, mas só quatro deles são estáveis o suficiente para permitir que o osso se apoie sobre eles. Estudiosos modernos apontam que, em virtude da anatomia do osso, as probabilidades de que caia em cada um dos lados não são iguais: são de aproximadamente 10% para dois dos lados e de 40% para os outros dois. Um jogo comum consistia em jogar 4 astrágalos. O resultado considerado como o melhor era raro, mas não o mais raro de todos: tratava-se do caso em que os 4 astrágalos caíam em lados diferentes. Tal resultado se chamava jogada de Vênus. A jogada de Vênus tem uma probabilidade de aproximadamente 384/10 mil. (Mlodinow, 2011, p.41)

Há referências a um jogo com astrágalo de boi entre os esportes tradicionalistas do Estado do Rio Grande do Sul (G1 RS, 2015), como ilustra a figura 1.

Figura 1 - Jogo do Osso



Fonte: Portal das Missões (2019).

Nessa modalidade de jogo, o astrágalo recebe duas chapas, uma de bronze e a outra de ferro, transformando-se na peça do jogo. A tava, como é chamada a peça, é arremessada por cada participante e sua posição relativa ao solo determina, criativamente, a pontuação do jogador. São consideradas 8 posições possíveis. A figura 2 mostra duas delas.

Figura 2 - Possibilidade de Arremesso da Tava

Fonte: Portal das Missões (2019, 04 janeiro).

Em Magalhães (2007), há registros de um antigo jogo praticado entre os Tupinikim no Espírito Santo em que são lançados grãos de milho sobre uma superfície. O relato colhido pela autora apresenta as regras, do que intitulamos aqui de “Jogo do Milho Queimado”:

> Tomávamos 6 grãos de milho e, com a ponta de um pauzinho resistente – que podia ser de cedro, bem fininho, em brasa, marcávamos o lado mais macio de cada grão. Assim, cada grão ficava com um lado marcado (queimadinho) com um ponto preto e, no outro, o mais duro e brilhoso, ficava tal como era. De um jeito que, no lado brilhoso, não pudesse transparecer o ponto marcado do outro. Assim, cada criança tomava posse de seus seis grãos marcados. Sentávamos no chão em forma de roda e combinávamos quem começaria o jogo. Com cada das mãos em forma de concha, juntas e entrelaçadas, sacudíamos as 6 pecinhas que ficavam ali dentro. Então, próximo do chão largávamos, cada um de nós, ao mesmo tempo, as peças. Contávamos as peças de cada um, que estavam no chão, mas somente as que tinham o ponto preto para cima. Aquele que tinha menos peças com pontos pretos saía do jogo. [...] E assim continuávamos até surgir o vencedor. Jogávamos várias rodadas no mesmo dia com as mesmas peças. [...] Esse é um jogo muito antigo, meus pais, meus avós, meus bisavós já jogavam. Meus bisavôs contaram que os bisavôs deles jogavam isso. (Magalhães, 2007, p. 114)

O milho é um dos principais alimentos entre os indígenas na América, faz parte de sua tradição o cultivo de variadas espécies desse cereal. O uso dos grãos no Jogo destaca esse fato. Em 2008, um Tupinikim nos fez relatos a respeito do mesmo jogo dessa vez intitulado “Jogo do Buzo”, em referência aos búzios utilizados como peças em vez de grãos de milho, talvez a troca fosse favorecida pela proximidade das terras indígenas do litoral de praias, onde os búzios podem ser encontrados. Nesse caso, as partes côncava e convexa nos búzios têm o papel das faces queimadas e não-queimadas nos grãos de milho. Segundo os depoimentos, o jogo era mais comum entre os homens e jogado muitas vezes em encontros de bar. Por se tratar de “jogo de índio”, foi associado a badernas e chegou a ser proibido no Município.

Em julho de 2017, por meio do Programa Ação Saberes Indígenas na Escola, do Ministério da Educação, ministramos uma oficina de matemática para 30 professores indígenas do município de Aracruz. A oficina teve como objetivo proporcionar a experiência de um “fazer matemático”, procurando levantar uma reflexão sobre a importância do jogo no contexto indígena e discutir suas potencialidades no ensino da matemática escolar. Para tanto, demos destaque ao “Jogo do Milho Queimado”. Por meio dele foram realizadas discussões e atividades, inclusive com problemas matemáticos, desenvolvidas coletivamente ou em grupos menores.

Uma primeira observação sobre o Jogo foi sua semelhança com jogos ‘de arremesso de peças’ como o de astrágalos e mesmo de lançamento de um dado. No caso do astrágalo, os gaúchos consideram oito possíveis resultados, enquanto que os gregos antigos consideravam seis possibilidades de resultado e respectivos lados, da mesma forma que hoje podemos obter com um dado cúbico. No caso do Jogo Tupinikim, cada jogador tem 7 possibilidades de resultado quando lança seus grãos (ou búzios), conforme o número de peças com pontos pretos voltados para cima (de 0, quando não aparecem grãos queimados, a 6 quando em todos aparecem os queimados).

Ao jogarmos na oficina com os grãos previamente preparados, percebemos que, semelhantemente a um astrágalo, alguns grãos são irregulares e podem não mostrar nenhuma das duas faces esperadas. O jogo original traz a situação da escolha dos grãos e do seu preparo por cada jogador, e daí a vantagem de integrar estudantes-participantes no preparo do material, com a produção e controle dos mesmos, fomentando a autonomia e a criatividade no uso e aproveitamento de materiais.

A oficina estimulou nos participantes o interesse pelo uso de jogos e brincadeiras na educação escolar, como reconhecimento do papel dos jogos na identidade dos povos indígenas, como ilustra o depoimento a seguir:

> Achei importante a formação de hoje, pois os alunos precisam realmente de um ensino diferenciado e descontraído, pois, crianças aprendem muito mais através de brincadeiras. Na aldeia, as crianças aprendem a pescar, brincando de pescar. Aprendem a fazer casa, brincando de fazer casa. É assim com armadilhas e artesanatos. (Depoimento de professor indígena, Acervo das autoras, 2017)

Motivados pelo "Jogo do milho queimado", alguns professores têm buscado identificar outros jogos tradicionais. Posteriormente ao momento da oficina, muitos relataram o quão positivas foram as experiências com o jogo em suas respectivas salas de aula, estimulando a atividades básicas como contar, agrupar (classificar) e inferir. Ademais, incentiva a continuar investigando historicamente em meio às especificidades culturais indígenas, atuando e trocando experiências com eles, na pretensão conjunta de contribuir à historicidade de suas tradições carregadas de vestígios culturais antigos que apresentam potencialidades, ainda hoje, de serem trabalhadas na educação escolar indígena.

Observamos que a atividade com o Jogo foi aos poucos sendo apropriada, qualitativamente, em termos de organização entre os participantes, criação de regras, estratégia e de conjecturas em casos específicos de determinados números de jogadores, lançamentos e resultados. Adicionamos a isso, a elaboração de relatos e de relatórios pelos estudantes que participaram, os quais "mostram que a qualidade da argumentação dos alunos pode melhorar com a redação continuada de relatórios escritos". (Ponte, 2003, p. 28).

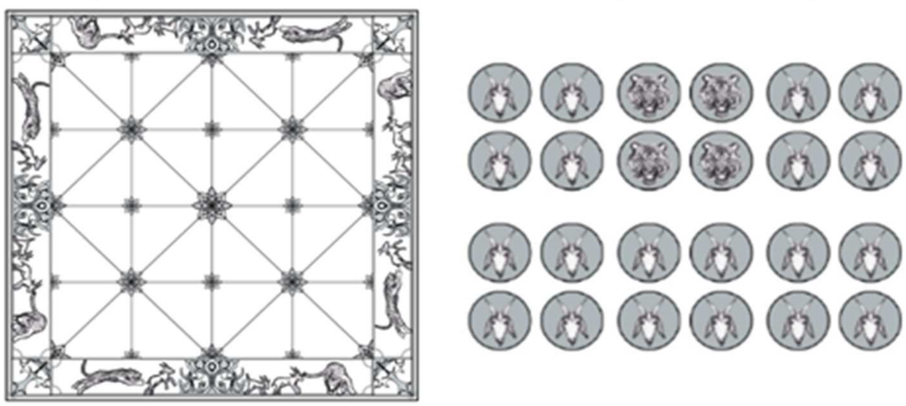
Os Guarani e o Jogo da Onça

Existem imprecisões quanto às origens de muitos dos jogos antigos de tabuleiro, mesmo porque eles sofrem transformações com o tempo e os diversos contatos culturais, convergindo com o comentário de Alves (2003, p.5) quando afirma que "jogos tradicionais brasileiros carregam a marca de nossa miscigenação, a mistura do europeu (essencialmente o português), do negro e do índio fez surgir uma combinação genética e cultural influenciando a vida social do brasileiro".

Nesse sentido, também está o alerta de Grando (2010) a respeito da falta de registros sobre a origem dos jogos indígenas, se foram criados pelos indígenas ou aprendidos com os colonizadores, subjugados pelo dominador e miscigenando algumas ideias e costumes. Talvez por isso, no caso do jogo de tabuleiro indígena tradicional observado entre os Guarani, tenhamos verificado proximidades de regras, movimentos e peças. Em geral, esses jogos são caracterizados por simulações, nas quais "todas as situações visam planejar, avaliar e calcular sua posição em um jogo, real ou não, figurando ensinamentos que têm na base a estratégia" (Ferreira,Vinha & Souza, 2008, p. 49).

Alguns jogos de tabuleiro derivam de arquiteturas de templos sagrados, e foram talhados em diversos materiais, os "objetos (pedras, figuras etc.) por vezes simbolizam pessoas ou animais ferozes, ambos com poderes que estimulam desafios" e contribuem para "refletir sobre as representações sociais da sociedade que o pratica" (Vinha, 2010, p.27). Ou seja, até se tornar um jogo tido como tradicional, ele vai agregando significados que são moldados pela sociedade do local que o adota. Exemplos podem ser citados também em outros continentes, como o *Bagh Chal* (figura 3), do Nepal, que representa uma batalha entre tigres e cabras (Perera; Oliveras & Oliveras, 2016) ou o antigo jogo viking *Hnefatafl* (figura 4) que simula sagas medievais. O *Hnefatafl* inicia com forças desiguais e representa estratégias tomadas por reis e exércitos para expansão, trazendo semelhanças com alguns jogos de padrão europeu como xadrez.

Figura 3 - Tabuleiro decorado do *Bagh Chal* e representação das peças



Fonte: Perera, Oliveras & Oliveras, 2016.

Figura 4 - Tabuleiro e peças do *Hnefatafl*

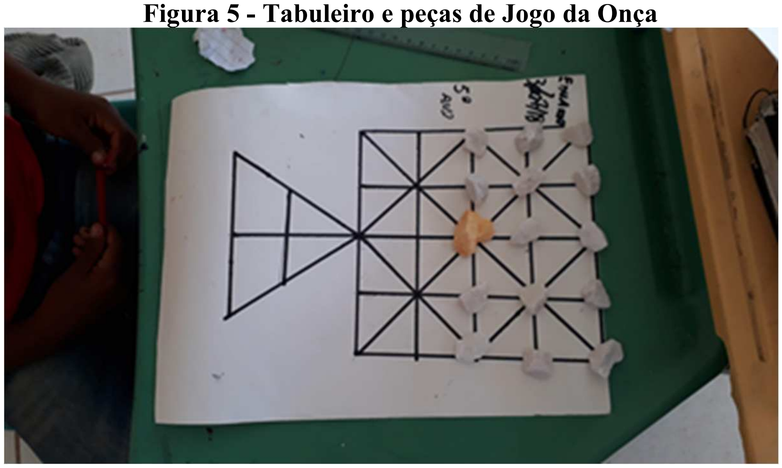
Fonte: Acervo das autoras, Oslo, 2017.

O jogo de tabuleiro indígena que evidenciamos aqui é o denominado *Jogo da Onça* que também inicia com forças desiguais, quais sejam a onça e os cachorros. Segundo Grando (2010), o jogo é encontrado nos primeiros registros históricos dos grupos étnicos entre os Manchakeri (Acre), os Bororo (Mato Grosso), e os Guarani (São Paulo).

O Jogo da Onça também é conhecido como Jogo da Onça e dos cachorros, porque envolve, além da imponente e importante figura do animal onça, 14 cachorros como personagens. As peças representam força e ataque, a onça mostrando sua força e os cachorros habilidade de ganhar com o ataque em alcateia. O tabuleiro é habitualmente traçado na terra e pedras são usadas como peças na representação do tabuleiro. De modo especial, observamos o quanto os estudantes demonstraram vontade para engajar-se nos grupos e jogar! O que, segundo Vygotski (1995), é influência da sensação interna de afeto, corroborada pelo ambiente social e cultural constituído. Além disso, as crianças participantes se esmeraram nas construções de seus respectivos tabuleiros, buscando inclusive criar as condições do contexto do jogo com materiais alternativos, para na sequência usarem de concentração e abstração como se fossem os próprios personagens (onça e cachorros) reificados.

A figura 5 (foto) mostra o tabuleiro confeccionado por um aluno de 5º ano na Escola Guarani, em uma das ações do jogo, com as peças na posição inicial. Na sua abstração, as pedras brancas representam os cachorros e a pedra colorida representa a onça.

Figura 5 - Tabuleiro e peças de Jogo da Onça



Fonte: Acervo das autoras, 2018.

As regras do Jogo da Onça são descritas com base em Lima & Barreto (2005), sendo que é disputado em dupla de jogadores. Um jogador fica com a onça (centro do tabuleiro) e outro com os 14 cachorros nos lugares marcados atrás da onça. O jogador com a onça inicia a partida movendo sua peça para qualquer casa adjacente que esteja vazia. Qualquer movimento, da onça ou dos cachorros, deve seguir pelas linhas – segmentos de reta traçados no tabuleiro. O jogador com os cachorros move qualquer uma de suas peças também para uma casa adjacente que esteja vazia, alternando as jogadas com o jogador com a onça. As peças podem se mover em qualquer direção. Uma das estratégias da onça é tomar cuidado para não entrar em sua toca (parte triangular do tabuleiro). Caso isso aconteça, ela poderá ser mais facilmente encurralada pelos cachorros. A onça captura um cachorro quando salta sobre ele para uma casa vazia (apesar de não pode saltar dois juntos), mas os cachorros não podem pular sobre a onça. A captura da onça pode acontecer em qualquer sentido em que ela não puder mais se mexer. O jogador com a onça não pode fazer mais de uma captura de cachorros na mesma jogada, mesmo que haja a possibilidade. Vence a partida o jogador com a onça se consegue capturar cinco cachorros ou o jogador com os cachorros quando consegue imobilizar a onça.

Nas palavras do professor guarani Mauro Carvalho (Karai), “o jogo é igual à natureza” (Carvalho Guarani, 2018), pois representa a relação entre os dois personagens: a onça é capaz de matar um cachorro, mas eles juntos conseguem cercá-la ou afugentá-la. A presença desses animais na memória cultural dos Guarani se expressa, por exemplo, na narrativa de uma anciã colhida por uma de suas netas:

> Numa floresta distante havia uma onça e um bando de cachorros. Certo dia, a onça foi até os cachorros e quando ele chegou os cachorros o cercaram.
> Então, a onça ficou com muita raiva, e pegou um dos cachorros e comeu. Logo fugiu, voltando para sua toca.
> Os cachorros ficaram muito tristes porque a onça comeu um cachorro, e resolveram ir à casa da onça e falaram para ela:
> -Queremos que você vá embora dessa floresta!
> E a onça respondeu:
> Não irei! E SAIAM DA MINHA CASA!
> Assim, os cachorros foram embora e noutro dia falaram novamente na toca da onça, porém, desta vez levaram carne, e lhe perguntaram:
> -Por que você matou e comeu um de nós? Por isso queremos que você vá embora daqui.
> E então a onça lhes disse:
> -Irei embora, mas quero que vocês tragam muita carne para mim.
> E assim os cachorros fizeram, trouxeram bastante carne, a onça encheu a barriga e foi embora. E nunca mais foi vista naquela floresta.
> E os cachorros viveram felizes para sempre. (Acervo das autoras, 2018)

Entre os Guarani no Espírito Santo, encontramos uma outra versão de jogo de tabuleiro, dessa vez simulando uma disputa entre "gatinhos e ratinhos", como nos relatou a mesma anciã em 2017. Elementos históricos locais e mais detalhes do jogo ainda estão em fase de investigação. Contudo, abrimos espaço para reforçar que, conforme analisado no jogo anterior, a integração com o contexto da comunidade e participação na elaboração de elementos do jogo, fomentam a autonomia e a criatividade das escolhas.

Algumas características identificadas no Jogo dos Guarani no Estado são o tabuleiro, formado por 42 casas dispostas em 7 fileiras de 6 casas cada uma, e o número de 12 peças para cada um dos dois jogadores. O jogador tem como objetivo ganhar as peças do adversário ou criar uma disposição de peças que impeça qualquer movimento às pedras do adversário.

No envolvimento do jogar, esses dois jogos permitem explorar o desenho, medição e escala, por exemplo, na construção do tabuleiro (segmentos cruzados, paralelos e perpendiculares), ou reconhecimento de polígonos e suas propriedades, além de ideias de contagem e operações, entre outras. Contudo, esse é um olhar dentro dos significados da matemática escolar não indígena, que pode ser utilizada no fazer matemático da escola indígena.

Ambos os jogos indígenas de tabuleiro, anteriormente mencionados, têm aproximações com o jogo *Alquerque*, que se acredita tenha chegado à Europa pelos árabes, onde era nomeado *Al-Quirkat*, embora haja origens remotas (figura 6) de tabuleiros de pedras semelhantes no templo egípcio de Kurna, em 1400 a.C., conforme Millán (2012).

Figura 6 - Tabuleiro de Alquerque Igreja de N. Sra. da Oliveira, Braga, Portugal

Fonte: Carreira; Alberto & Fernandes (2004).

Desse jogo do Alquerque existem centenas de variantes e aproximações, como notamos em relação aos dois jogos indígenas que anteriormente apresentamos. Em especial, no tipo de tabuleiro, jogo a dois e a locomoção das várias peças, além de semelhanças no modo das estratégias do jogar.

Outros exemplos de similitude de jogos talvez pudessem ser levantados nessa busca de construção de aprofundamento da historicidade dos jogos indígenas locais e suas possíveis relações com o fazer matemático, mas devido ao caminhar da pesquisa do grupo, nos restringimos a indicar estas.

Episódio 2 - O Teorema de Pitágoras com recursos de um Curso Técnico de Mecânica

O episódio apresentado aqui ocorreu como uma atividade extracurricular desenvolvida por três alunos de 1º ano de um Curso Técnico em Mecânica Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Espírito Santo com a orientação e participação de sua professora de Matemática, uma das autoras do presente texto, com a finalidade de ser exposto na Feira de Matemática do Ifes, *campus* Vitória em 2019. A atividade teve como tema de estudo e investigações o Teorema de Pitágoras, destacando a sua importância ao longo do tempo por meio de menções que extrapolam o mundo matemático, revelando a sua popularidade, ainda que permeada de falhas e equívocos de interpretação. O que segue foi resultado da investigação do grupo de alunos, orientados pela professora quanto a algumas escolhas para a elaboração escrita e apresentação (Puente, Visintini , Souza , & Lorenzoni , 2019).

Enquanto um dos assuntos mais conhecidos da Matemática, o Teorema de Pitágoras possui um enunciado relativamente simples: Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Sua abordagem pelo matemático grego Pitágoras de Samos, ou algum de seus discípulos, por volta dos anos 500 a.C., teve um papel fundamental no desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade global, não só por se constituir numa ferramenta de resolução de problemas, mas por ter despertado o espírito investigativo de estudiosos e cientistas provocando avanços na matemática até os dias atuais.

Apontado por Stewart (2012) como, provavelmente, a mais célebre e recordada expressão matemática, ou sem dúvida, a mais famosa entre as elaborações pitagóricas (Kline, 1999), o Teorema de Pitágoras tem também suas versões criativas que contribuem para a disseminação e compreensão de ideias matemáticas, quando lhe são leais. Algumas revelam equívocos de interpretação que o trabalho buscou contrapor, com escolhas iniciadas durante a primeira fase das investigações, para se fazer justiça ao enunciado, apresentando versões historicamente validadas. Para tanto, o trabalho buscou apresentar o Teorema de Pitágoras do ponto de vista matemático, sem perder de vista sua contextualização histórica, importante ao reconhecimento da matemática como uma construção vinculada à história da humanidade.

Diante das perspectivas propostas, três aspectos distintos de observação do Teorema foram considerados: matemático, histórico e artístico. Em relação ao aspecto matemático, foram investigados os princípios do Teorema, sua relação com o triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e sua aplicação em diferentes problemas matemáticos. Sobre o aspecto histórico, investigou-se o período de atividade de Pitágoras de Samos, a criação da Escola Pitagórica e o possível processo de elaboração do enunciado do Teorema. Segundo afirmação de historiadores (Kline 1999; Roque, 2012), é duvidoso que tenham demonstrado nessa época o Teorema, uma vez que não conheciam resultados teóricos de semelhança de triângulos e, geralmente, as justificações eram a partir de casos particulares. Posteriormente, o tratamento dado ao mesmo teorema por outros personagens da Grécia Antiga, como a atribuição de Proclus a Euclides de Alexandria (300 a.C.) como sendo o mentor da demonstração (figura 7) apresentada na proposição 47 do Livro I da obra "Elementos" de Euclides (Kline 1999; Boyer, 1996). Consideramos que tal abordagem de aspectos históricos do Teorema reforça a importância de se reconhecer a Matemática como uma criação humana, cujo "rigor" das demonstrações aceitas foi sendo transformado e a História da Matemática como fonte de possibilidades para um "fazer matemática" na Educação Básica (Lorenzoni & Sad, 2018).

Figura 7 – Diagramas da proposição I.47 de Euclides em um manuscrito árabe do séc. XIII (à esquerda) e em um cenário da Primeira Guerra Mundial (à direita)

Fonte (imagem esquerda): Guardeño (2000, p. 44); Fonte (imagem direita): Boyer (1996, p.80).

Além disso, observou-se a importância do Teorema para o desenvolvimento da Matemática e de outras ciências, como a Física e a Astronomia, em séculos posteriores a Pitágoras, e suas repercussões no ensino de matemática, inclusive no Brasil. Em 1870, Raymundo Teixeira Mendes, um estudante do então Imperial Collegio de Pedro II do Rio de Janeiro, aos 16 anos de idade, usando sua criatividade, propôs sua própria demonstração do Teorema (Silva & Lorenzoni, 2002). Finalmente, tratando-se do aspecto artístico, foram feitas pesquisas bibliográficas em obras como "Os Segredos Matemáticos dos Simpsons" (Singh, 2016), "Poesia Matemática" (Fernandes, 2009) e o filme "O Mágico de Oz" (Fleming, Vidor, & Cukor, 1939), baseado no livro homônimo de 1900 (Baum, 2013).

A fase de investigação sobre o tema foi providencial para relacionar os diferentes aspectos do Teorema de Pitágoras, lembrar e discutir conceitos já estudados, produzindo significados novos (Ponte; Brocado & Oliveira, 2009). Como consequência, isso tornou possível o direcionamento às formas de apresentação do trabalho durante a exposição dos alunos na Feira de Matemática, descrita no início desse episódio.

Além da exposição do tema, a criatividade do grupo foi suscitada pela professora e aproveitada para a confecção de uma representação, com auxílio de massa de modelar, da demonstração de Euclides de Alexandria para o Teorema de Pitágoras. A massa de modelar foi usada para preencher fôrmas metálicas, confeccionadas pelos autores em parceria com dois outros estudantes e um professor do Curso Técnico em Mecânica Integrado ao Ensino Médio, especificamente para ilustrar a demonstração, segundo Euclides, de que, num triângulo retângulo, a área do quadrado de lado igual à hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados de lados iguais aos catetos. De fato, o material (figura 8), sendo tridimensional, remete à comparação de volumes dos sólidos construídos em forma de paralelepípedos. No entanto, todos possuem mesma altura quando dispostos como nas imagens. Do que se pode concluir também uma equivalências de áreas.

Figura 8 - Kit auxiliar de visualização da proposição I.47 de Euclides

Fonte: Acervo das autoras, 2019.

Assim, os presentes na Feira puderam explorar, por meio de atividades interativas, os erros ou acertos de versões do Teorema como o verso de Millôr Fernandes (2009), quando se diz “Sou a soma dos quadrados dos catetos, mas pode me chamar de hipotenusa”, e a cena do filme “O Mágico de Oz” (1939), quando o Espantalho diz que “A soma da raiz quadrada de dois lados de um triângulo isósceles é igual a raiz quadrada do terceiro lado”. Além do kit da Figura 6, o grupo usou também como recursos um painel com representações da Hipotenusa de Fernandes (2009), do Espantalho de Oz e possíveis falas para os personagens segundo o Teorema de Pitágoras; e um quebra-cabeça, em referência à representação chinesa. Este último foi construído por iniciativa de um dos estudantes, com auxílio de seu pai. Por motivos de ética em pesquisa, chamaremos o referido estudante de Sol.

A escolha do teorema de Pitágoras baseou-se no reconhecimento de que representa um dos importantes teoremas da matemática, com aplicações em diversas áreas de atuação humana, o que lhe permite gozar de uma popularidade que ultrapassa o mundo acadêmico, sendo uma das expressões matemáticas mais recordadas, ainda que permeada por equívocos de interpretação que, mesmo merecendo ser criticados, devem ser reconhecidos por sua colaboração à superação da imagem excessivamente abstrata que a Matemática costuma ocupar no imaginário popular. Como por exemplo, levantar questionamentos em torno da questão histórica da importância da busca de ternos pitagóricos para obtenção do ângulo reto.

Assim, além de tratar de demonstrações matemáticas do Teorema, foram discutidas aplicações que utilizaram o resultado em diferentes regiões do mundo, algumas em soluções de problemas tanto ou mais antigos que dos gregos, como a solução chinesa do Problema do bambu quebrado, no 9º capítulo do antigo livro *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* (título original: *Chiu Chang Suan Shu*) no início da era cristã. (Estrada et al, 2000). De Euclides de Alexandria, o trabalho abordou menções a ele encontradas no universo artístico, na poesia e no cinema, ressaltando os equívocos de interpretação e apontando sua expressão considerada válida. Ademais, o trabalho buscou contextualizar historicamente o Teorema de Pitágoras pela importância de se reconhecer a matemática como uma criação humana, vinculada à história da humanidade e fruto, portanto, de seu desenvolvimento intelectual e social.

> A apresentação do trabalho "Pitágoras e o Espantalho: Entre Teoremas e Equívocos" na 8ª Feira de Matemática do IFES foi uma experiência extremamente proveitosa e de enorme valor contribuinte para os meus conhecimentos e vivências que extrapolam as atividades curriculares escolares básicas. O trabalho exigiu grande empenho e conhecimento de diversos aspectos: inicialmente foram necessárias extensas pesquisas voltadas à elaboração da parte escrita e da construção conceitual do trabalho; depois, precisamos decidir e idealizar de que forma e com que materiais apresentaríamos nosso trabalho ao público, e quais seriam os meios, ao mesmo tempo viáveis e convincentes, para seu entendimento; foi também necessário que confeccionássemos nossos próprios instrumentos, conciliando, inclusive, por meio do auxílio de colegas do 3° ano, os processos ao curso técnico de mecânica. Por fim, nos envolvemos no processo final e mais esperado, que considero ser o de maior aprendizagem oferecido aos alunos que apresentam trabalhos na feira: reunir todo o conhecimento e ideias atribuídos ao tema proposto e transmiti-los ao público da melhor maneira possível, sabendo nos colocar no lugar das pessoas para as quais

> apresentávamos, tornando o conteúdo volúvel, e mais simples ou complexo conforme a demanda dos visitantes. (Registros do aluno de pseudônimo Sol, participante no Episódio 2).

Observamos que alguns alunos participantes que conseguiram expressar-se, como o desse depoimento, não nos deixaram qualquer dúvida de que o desenvolvimento alcançado superou nossas expectativas quanto a essa situação, a qual somente se delineou ao longo dos procedimentos e tornou a última fase da atividade de investigação chamativa a outras. Concordamos com (Ponte; Brocado & Oliveira, 2009, p. 24) quando afirmam que "O grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefa de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho".

Em termos dos relatos e relatórios avaliativos, ao final desse Episódio, cabe destacar que houve ganho em aprendizagens matemáticas, mas também, em relação a suas atitudes positivas quanto aos desenvolvimentos investigativos e de produção criativa, a fim de tornarem a apresentação do Teorema algo "chamativo" e instigador a quem estivesse na Feira.

Como considerações finais

Do ponto de vista da história da matemática, a formação de um fazer matemático histórico, ensejado por jogos culturais tradicionais entre os Guarani e Tupinikim do Espírito Santo, instigou a investigações no campo epistemológico da constituição de planejamento e combinações para as atividades básicas de matematizar.

Diante das observações e das atividades partilhadas, bem como dos rastros históricos obtidos como dados da pesquisa até o momento, acreditamos que uma abordagem de saberes tradicionais na perspectiva de uma história da matemática (ou da história de um matematizar) pode contribuir para uma educação matemática indígena e não indígena com mais significado e proporcionar subsídios de interesse à historicidade dos grupos indígenas locais.

O Episódio 2, que narra a experiência com o Teorema de Pitágoras em uma feira de matemática, partiu de uma ação investigativa da História da Matemática, fomentando a produção de conhecimento e fomentando a criatividade de modo entrelaçado e de igual importância. A iniciativa do estudante Sol, em colaboração com outros, de construir o quebra-cabeça para verificação do Teorema de Pitágoras, ocorrida no decorrer da pesquisa, sinaliza uma etapa no seu processo de construção do conhecimento de demonstrações do Teorema por decomposição de áreas. Essa iniciativa revela ainda a capacidade potencial de Sol para criar uma coisa 'única', nova naquele seu contexto, como propõem Karwowski, Jankovska & Szwajkowski (2017). A ação de pesquisa com articulação dos membros do grupo entre si, inclusive com a professora orientadora, e com colegas de outras turmas foi um campo fértil para o exercício da capacidade de transformação, destacada também por esses autores. Os potes de massa de modelar, talvez restantes de uma fase anterior de escolaridade dos estudantes, associados às chapas de aço da ferramentaria do *campus* ganharam novas potencialidades e significados no universo escolar, com capacidade de propagar, entre os visitantes da exposição, experiências semelhantes de construção e negociação de significados quanto ao Teorema de Pitágoras e suas demonstrações.

Em síntese, apesar de todos os desafios enfrentados nas vivências que apresentamos, discutimos, apontamos como resultado - poder unir teorias e ideias científicas ao analisar potencialidades e contribuições da História da Matemática em práticas docentes do ensino da matemática escolar, envolvendo a investigação e a criatividade em metodologias híbridas e contextos de diferentes culturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, A. M. (2003). A história dos jogos e a constituição da cultura lúdica. *Revista Linhas*, 4, n.1. Acesso em 05 de abril de 2020, disponível em http://www.revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1203

Barbin, E. (2006) Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement , *Tréma*, 26 , 2006, 20-28.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática: La educación matemática desde uma perspectiva cultural.* Barcelona, Espãna: Pidós Ibérica.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática.* São Paulo: Edgar Blucher.

Brasil. (1996). Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União. Brasília, DF, v. 134, n. 248, p. 27833-841, 23 dez. 1996.

Brasil MEC. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil IBGE. (2013). O Brasil indígena. *Distribuição Espacial da População Indígena*. Brasil: Fundação Nacional do Índio. (Folder) Acesso em 05 de abril de 2020, disponível em http://www.funai.gov.br/arquivos/conteudo/ascom/2013/img/12-Dez/encarte_censo_indigena_02%20B.pdf

Brasil MEC. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

Brasil MS (2019). *Saúde indígena: análise da situação de saúde no SasiSUS*. Brasília: Ministério da Saúde. Acesso em 05 de abril de 2019, disponível em http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/saude_indigena_analise_situacao_sasisus.pdf

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* Tradução Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blüche, USP.

Burke, P. (2005). *O que é história cultural?* (S. G. Paula, Trad.) Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Carvalho, M. L. (2018, agosto). *Depoimento: Mauro Luiz Carvalho (Guarani)*. Depoimento concedido a C. A. C. A. Lorenzoni. Aracruz. Mimeografado.

Coutinho, L. F. (2009). *Mehinaku: Desing gráfico de um jogo de tabuleiro.* Monografia (Monografia em Desenho Industrial), FAAP - Fundação Armando Álvares Penteado, São Paulo. Acesso em 25 de dezembro de 2018, disponível em https://issuu.com/lfbaroni/docs/mehinaku

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica.

Decreto nº 6040, de 07 de fevereiro de 2007. (07 de fevereiro de 2007). Institui a Política Nacional de Desenvolvimento Sustentável dos Povos e Comunidades Tradicionais. *Diário Oficial da União*. Recuperado a partir de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2007/decreto/d6040.htm

Diegues, A. C.; Arruda, R. S. V. (Orgs). (2001). Saberes *tradicionais e biodiversidade no Brasil*. Brasília: Ministério do Meio Ambiente; São Paulo: USP.

Fernandes, M. (2009). *Poesia Matemática.* Rio de Janeiro: Desiderata.

Ferreira, M. K. L. (1998). *Madikauku: os dez dedos das mãos, matemática e povos indígenas no Brasil.* Brasília: MEC.

Ferreira, M. B., Vinha, M., & Souza, A. F. (2008). Jogos de tabuleiro: um percurso em etnias. *Revista Brasileira de Ciência e Movimento*, 16 (1), pp. 47-55.

Fleming, V., Vidor, K., & Cukor, G. (Diretores). (1939). *O Mágico de Oz* [Filme Cinematográfico]. Título Original: The Wizard of Oz. Warner Bros.

G1 RS. (03 de setembro de 2015). *Jogos Farroupilhas: conheça as regras do Jogo do Osso*. Acesso em 01 de abril de 2020, disponível em http://g1.globo.com/rs/rio-grande-do-sul/semana-farroupilha/2015/noticia/2015/09/jogos-farroupilhas-conheca-regras-do-jogo-do-osso.html

Gardeño, A. J. D. (2000). *El legado de las Matemáticas: De Euclides a Newton, los gênios a través de sus libros*. Sevilla: Consejería de Cultura.

Gerlovina, Z. (2011). *Eureka! Unraveling the mystery behind creativity.* Switzerland: Springer International Publishing.

Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 96.

Grando, B. S. (2010). *Jogos e culturas indígenas: Possibilidades para a educação intercultural.* Cuiabá: EdUFMT.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, v.71, n. 3, p. 235-261.

Karwowski, M.; Jankowska, D. M.; Szwajkowski , W. *Creativity, Imagination, and Early Mathematics Education*. In: Leikin, R. Sriraman, B. (eds.). (2017). *Creativity and Giftedness.* Switzerland: Springer International Publishing .

Kline, M. (1999). *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Lima, M. d., & Barreto, A. (2005). *O Jogo da Onça e Outras Brincadeiras Indígenas.* São Paulo: Panda Books.

Lorenzoni, C. A. (2014). Os Guarani do Espírito Santo: Um estudo de motivos gráficos da cestaria. In: S. Nobre, F. Bertato, & L. Saraiva (Ed.), *6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática* (pp. 889-909). São João del Rei: Sociedade Brasileira de História da Matemática - SBHMat.

Lorenzoni, C. A., & Sad, L. A. (2018). História da Matemática e o "fazer matemática" na Educação Básica. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática, Ano 4. v. 1*, pp. 75-89.

Magalhães, D. R. (2007). *Concepções, crenças e atitudes dos educadores tupinikim frente à matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Educação, Vitória.

Mendes, I. (2009). Atividades históricas para o ensino de Trigonometria. In: Miguel, A. et al. *História da Matemática em atividades didáticas*. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física.

Millán, G. P. (2012). *Los Juegos de mesa: Creación y producción.* Dissertação de Mestrado, Universidad de Granada, Granada, España.

Mlodinow, L. (2011). *O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas.* Rio de Janeiro: Zahar.

Nascimento, A. C. (2004). *Escola indígena: Palco das diferenças.* Campo Grande: UCDB.

Onstad, T. (December de 2017). Is the Mathematics We See the Mathematics They Do? *Journal of Mathematics and Culture, 11*, pp. 133-159.

Perera, C. S., Oliveras, A. F., & Oliveras, M. (2016). Play in Scientific and Mathematical Non-Formal Education: Bagh Chal, a Tigers-and-Goats Game. In: Z. Bekirogullari (Ed.), *The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS: 4th Annual International Conference on Cognitive - Social, and Behavioural Sciences. VIII*, pp. 178-191. UK: Future Academy. doi:http://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2016.05.19

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, p. 93-169.

Ponte, J. P, Brocardo, J.; Oliveira, H. (2013). *Investigações Matemáticas na sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Portal das Missões (2019, 02 janeiro). *Tava ou o Jogo do Osso*. [Site]. Recuperado a partir de http://www.portaldasmissoes.com.br/site/view/id/1450/status/success

Portal das Missões (2019, 04 janeiro). *Tava ou o Jogo do Osso*. [Site]. Recuperado a partir de http://www.portaldasmissoes.com.br/site/view/id/1450/tava-ou-jogo-do-osso.html

Puente, F. B., Visintini , G. F., Souza , R. A., & Lorenzoni , C. C. (2019). Pitágoras e o Espantalho: Entre teoremas e equívocos. *Anais da 8ª semana da Matemática* (pp. 68 - 71). Vitória: Ifes - Vitória.

Radford, L. (2011). *Cognição Matemática: História, antropologia e epistemologia*. São Paulo: Livraria da Física.

Radford, L. Furinghetti, F., & Katz, V. (2007). The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 107-110.

Rogers, L. ; Pope, S. (2019). Tools and strategies for the history of mathematics in the classroom. In: Curtis, F. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 39 (2), June 2019.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Silva, C. M., & Lorenzoni, C. C. (janeiro/dezembro de 2002). O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. *História & Educação Matemática*, pp. 111-122.

Silva, V. (2016). *Etnologia indígena: Revitalização da identidade cultural e linguística tupinikim do Espírito Santo*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Linguística, Instituto de Letras, Universidade de Brasília, Brasília.

Singh, S. (2013). *Os Segredos Matemáticos dos Simpsons.* Rio de Janeiro: Record.

Stewart, I. (2013). *Dezessete equações que mudaram o mundo.* Rio de Janeiro: Zahar.

Viana, C. R. (1995). *Matemática e Histórias: algumas relações e implicações pedagógicas*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo, São Paulo.

Vinha, M. (2010). Jogo de tabuleiro como prática educativa intercultural. In: B. S. Grando (Ed.), *Jogos e culturas indígenas: possibilidades para a educação intercultural* (p. 27). Cuiabá: EdUFMT.

Vygotski, L. S. (1995). *Obras Escogidas: problemas del desarrollo de la psique*. Madrid: Visor, 1995. T. III

Zaslavsky, C. (Maio de 1989). Integrating Math with the Study of Cultural Traditions. *ISGEm Newsletter, 4 (2)*. Acesso em 01 de novembro de 2017, disponível em https://web.nmsu.edu/~pscott/isgem42.htm

Autores

Ligia Arantes Sad
Doutora em Educação Matemática; (UNESP - Rio Claro, São Paulo - Brasil); Área de investigação: Educação; Linha de investigação: Educação Matemática e História da Matemática. Professora do Curso de Pós-Graduação de Educação em Ciências e Matemática (EDUCIMAT), IFES - Vila Velha e Professora da Coordenadoria de Matemática (COMAT) do Ifes- Vitória, ES/Brasil. Integrante do Grupo de pesquisas em História da Matemática e Saberes tradicionais (GHMat). Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1714140036102231. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2758-8380. E-mail: ligia.sad@ifes.edu.br

Claudia Alessandra C. de Arujo Lorenzoni
Doutora em Educação (PUC – Rio e Janeiro, RJ/Brasil; Área de investigação: Educação; Linha de investigação: Educação Matemática e História da Matemática. Professora da Coordenadoria de Matemática (COMAT) do IFES- Vitória/ES (Brasil). Integrante do Grupo de pesquisas em História da Matemática e Saberes tradicionais (GHMat). Mais informações no Currículo Lattes: http://Lattes.cnpq.br/8159438057989251. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7690-9646. E-mail: claudia.araujo@ifes.edu.br

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p240-265.id840

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES EN MANUALES DE HISTORIA DE MATEMÁTICAS

Iran Abreu Mendes[1]
iamendes1@gmail.com

Mônica Suelen Ferreira de Moraes[2]
monicamoraes@uft.edu.br
[1]Universidade Federal do Pará (UFPA)
[2]Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Recibido: 18/12/2019 **Aceptado:** 16/02/2020

Resumen

Los estudios históricos muestran que el desarrollo epistemológico del cálculo diferencial e integral siguió una trayectoria larga e irregular y, en el sentido más formal, se formó a partir del siglo XVII. Actualmente, el concepto de límite se considera un concepto fundamental en la enseñanza del cálculo, ya que la base conceptual de este conocimiento tratado en los manuales de cálculo aborda este tema, parece casi siempre definido en términos del límite. En este artículo, presentamos los resultados de un estudio sobre los supuestos obstáculos epistemológicos en el desarrollo del concepto de límite a partir de la historia de los manuales de matemáticas, con miras a superarlo en el proceso de formación de estas ideas. Como ya se mencionó, el corte tomado para el análisis estará en el estudio de los obstáculos epistemológicos del límite de función en algunos manuales de historia de las matemáticas, enfocándose en los conceptos establecidos por d'Alembert, Cauchy y Weierstrass, enfatizando los aspectos dinámicos que aparecieron como un obstáculo epistemológico para formalización de este concepto estático.
Palabras clave: Historia de las matemáticas. Obstáculo epistemológico. Cálculo Límite de funciones.

EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES ON THE FUNCTION LIMIT CONCEPT IN MATHEMATICS HISTORY MANUALS

Abstract

Historical studies show that the epistemological development of Differential and Integral Calculus followed a long, irregular trajectory and, in the most formal sense, was shaped from the 17th century. Currently, the concept of limit is considered a fundamental concept in the teaching of Calculus, since the conceptual basis of this knowledge dealt with in Calculus manuals addresses this subject, it seems almost always defined in terms of the limit. In this article, we present the results of a study on the supposed epistemological obstacles in the development of the concept of limit from the history of mathematics manuals, with a view to overcoming it in the process of forming these ideas. As already mentioned, the cut taken for analysis will be in the study of the epistemological obstacles of function limit in some history

of mathematics manuals, focusing on the concepts established by d'Alembert, Cauchy and Weierstrass, emphasizing the dynamic aspects that appeared as an epistemological obstacle to formalization of this static concept.
***Keywords*:** History of Mathematics. Epistemological obstacle. Calculus. Function Limit.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS SOBRE O CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO EM MANUAIS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Resumo

Estudos históricos mostram que o desenvolvimento epistemológico do Cálculo Diferencial e Integral seguiu uma trajetoria long, irregular e, no sentido mais formal, foi moldado a partir do século XVII. Atualmente, o conceito de limite é considerado conceito fundamental no ensino de Cálculo, visto que a base conceitual desse conhecimento tratado nos manuais de Cálculo abordam esse assunto, parece quase sempre definida em termos do limite. Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo sobre os supostos obstáculos epistemológicos no desenvolvimento do conceito de limite a partir dos manuais de história da matemática, com um olhar para a sua superação no processo de formação dessas ideias. Conforme já mencionado, o recorte tomado para análise será no estudo dos obstáculos epistemológicos de limite de função em alguns manuais de história da matemática, focando os conceitos estabelecidos por d'Alembert, Cauchy e Weierstrass, enfatizando os aspectos dinâmicos que figuraram como obstáculo epistemológico à formalização deste conceito estático.
***Palavras-chave*:** História da Matemática. Obstáculo epistemológico. Cálculo. Limite de função.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo é fruto de uma pesquisa mais ampla que está em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC) em parceria com o Grupo Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Este trabalho se identifica com a linha de pesquisa História da Matemática em três dimensões do GPSEM, na qual desenvolve estudos e pesquisas relacionados à História da Matemática em suas dimensões epistemológicas, pedagógicas e patrimoniais.

Sabemos que nos cursos de Matemática do ensino superior há um alto índice de reprovação e desistência da disciplina de Cálculo, a qual está presente no currículo de cursos de graduação, tais como engenharia, física, administração, computação, entre outros. Sabemos ainda que muitas dessas dificuldades de aprendizagem estão relacionadas com o entendimento da noção de limite. Com isso, direcionamos a temática dessa pesquisa para o âmbito do Cálculo, particularmente para limite de função de uma variável real[1].

Os conceitos que deram início ao desenvolvimento epistemológico do Cálculo envolvendo as relações conceituais entre limite, derivada e integral, levaram séculos para serem formulados e aceitos no pensamento matemático hegemônico ao longo da história. Vários foram os entraves desde o pensamento antigo grego de separar o discreto e o contínuo, motivado pelo "horror ao infinito", até à invenção e formalização do Cálculo como conhecemos atualmente.

Nos remetemos a esses entraves como obstáculos epistemológicos, no sentido de Bachelard (1996), pois foram conflitos que ocorreram ao longo do desenvolvimento histórico de alguns conceitos matemáticos entre o conhecimento antigo e o novo, possibilitando a criação do Cálculo. Ressaltamos, porém, que esses imaginados obstáculos epistemológicos surgidos no desenvolvimento do Cálculo foram sendo superados na medida em que os desafios epistêmicos foram vencidos a cada resposta alcançada na aventura da criação matemática. Igualmente, destamos que Bachelard (1996) institui a noção de obstáculo epistemológico no contexto do desenvolvimento da ciência, no concerne à produção de conhecimento, não para os processos de aprendizagem.

Entretanto, foi no âmbito dos processos de ensino e aprendizagem da matemática que Brousseau (1997) apresentou uma reformulação do conceito de obstáculo epistemológico, mantendo a ideia do conflito de conhecimentos de estados inferiores, que funcionavam em determinado contexto, mas que em situações de um estado superior, já se configura como um obstáculo epistemológico.

Diante desta problemática anunciamos as seguintes perguntas de pesquisa: **como autores dos manuais de história da matemática tratam dos obstáculos epistemológicos e de sua superação no desenvolvimento das ideias de limite de função na perspectiva de Bachelard? Caso esteja evidenciada tal abordagem, como podemos identificar potencialidades para a superação dos obstáculos epistemológicos para o ensino de limite de função a partir da perspectiva de Brousseau?**

[1] A função de uma variável real será tratada no decorrer desse artigo somente pelo termo função.

Com base nas questões estabelecidas anteriormente, nosso objetivo é **apresentar um estudo dos obstáculos epistemológicos no desenvolvimento do conceito de limite de função a partir dos manuais de história da matemática com um olhar para a sua superação no processo de formação do conceito e de que modo podemos utilizá-los para potencializar uma abordagem de ensino do tema.**

Para tanto, dentre os obstáculos epistemológicos conhecidos sobre este conceito, optamos por enfatizar os aspectos dinâmicos presente na ideia de limite proposta por Newton e o discreto presente no desenvolvimento do trabalho do Leibniz, com o olhar para a superação desses entraves na formalização do conceito de limite, no sentido de Bachelard (1996). Dessa forma procuramos trazer contribuições para o ensino de Matemática, pelo enfoque na exploração epistemológica das informações históricas do conceito de limite, apontando possibilidades de superação das dificuldades conceituais e didáticos do processo em suas ações de ensino nesta temática. Para começar, precisamos primeiramente tratar sobre o que tomamos como obstáculo epistemológico.

2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Inicialmente esclarecemos que tomaremos dois aspectos conceituais relativos à expressão obstáculo epistemológico, uma vez que o embasamento teórico deste artigo permeia a noção de obstáculo epistemológico apresentada por Bachelard (1996) com relação ao desenvolvimento epistemológico de conceitos científicos ao longo da história e a compreensão de Brousseau (1983; 1986; 1997), que transporta essa noção de Bachelard para o âmbito do ensino de matemática.

Segundo Bachelard (1996), a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada mediante o desenvolvimento histórico do pensamento científico, sendo que é ao aprofundarmos a noção de obstáculo epistemológico que conferimos pleno valor espiritual à história deste pensamento. Assim, alguns dos principais obstáculos epistemológicos abordados por Bachelard (1996), que não só causam a estagnação da construção do pensamento científico, mas também contribuem para o seu retrocesso são: experiência primeira; conhecimento geral; obstáculo verbal; conhecimento unitário e pragmático; obstáculo substancialista; obstáculo animista; obstáculos do conhecimento quantitativo.

Com base no exposto no parágrafo anterior, é importante dar destaque aos obstáculos experiência primeira e conhecimento geral, pois para Bachelard (1996) o primeiro obstáculo a ser superado na formação do espírito científico é a experiência primeira, que não constitui uma base segura, haja vista que é colocada antes e acima da crítica, um elemento necessariamente integrante do espírito científico. A respeito do conhecimento geral como obstáculo para o conhecimento científico, Bachelard (1996) expõe que a ciência do geral é uma suspensão da experiência, um fracasso do empirismo inventivo, podendo o espírito científico se enganar ao estar atraído pelo universal.

De outro lado, Brousseau (1986; 1997), embasado em Bachelard, afirma que os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados ao longo da história da matemática, quando se observa as dificuldades que os matemáticos encontraram, para a compreensão e utilização desses conceitos, pois esse tipo de obstáculo é constitutivo do próprio conhecimento. É assim que para Brousseau (1986) um obstáculo epistemológico é sempre um conhecimento e não um estado de ausência de conhecimento. Nesse sentido, ainda que os obstáculos possam ser detectados entre as dificuldades, estas deverão ser sempre reformuladas a fim de serem caracterizadas como conhecimentos propriamente ditos. O obstáculo deve possuir tanto um domínio no qual ele se revele pertinente, válido e eficaz, como também um domínio no qual esse mesmo conhecimento se revele inadaptado, falso ou ineficaz e, portanto, uma fonte de erros. O obstáculo é um tipo de conhecimento que oferece uma resistência que deve ser identificada, atestada e explicada.

Para identificação desses obstáculos, Brousseau (1989) propõe um método de pesquisa e indica que devemos encontrar erros sistemáticos e concepções em torno das quais esses erros se agrupam. Em seguida, encontrar obstáculos na história da matemática, e confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos que se manifestam no ato da aprendizagem.

Bachelard (1996, p. 28) afirma que “a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro”, nesse sentido, para ele na matemática não há obstáculos epistemológicos. Entendemos que não há obstáculos epistemológicos na matemática porque eles vêm sendo superados ao longo do seu próprio desenvolvimento. Neste sentido, o que estamos denominando de obstáculos epistemológicos, corroborando com as ideias de Bachelard (1996), referem-se às dificuldades enfrentadas e superadas no desenvolvimento dos conceitos matemáticos como é o caso da noção de limite, foco deste artigo.

Sobre esse posicionamento, Asimov (1996) afirma que na matemática, diferentemente de outras ciências, não há correção significativa, só extensão. Cada matemático acrescenta algo ao que já está posto, com uma base sólida e funcional. Também entendemos que a matemática não apresenta crise no seu desenvolvimento, não há ruptura que represnete uma modificação extrema, ou seja, mudança de paradigma, no sentido de Thomas Kuhn (2011), que negue o anterior. Esse ponto de vista fortalece a premissa de que a matemática em si não apresenta obstáculos epistemológicos em conceitos já formalizados, pois para desenvolvê-lo, já ocorreu o processo de superação desses obstáculos epistemológicos.

Schubring (2018) também levanta uma reflexão sobre a existência de obstáculos epistemológicos em matemática, questionando se os números negativos podem ser tomados como exemplo de obstáculos epistemológicos. Schubring (2018) apresenta uma análise sobre o desenvolvimento histórico desses números questionando o conceito de obstáculo epistemológico dado como uma "sonolência" individual, considerando que as escolhas realizadas ao longo do desenvolvimento deste conceito foram feitas com pleno conhecimento das epistemologias concorrentes.

Nossa perspectiva de utilização do conceito de obstáculo epistemológico se aproxima da proposta de Schubring (2018) que assume que as reflexões de Bachelard (1996) podem ser usadas para esclarecer as dificuldades dentro dos desenvolvimentos conceituais. Schubring (2018) defende que precisamos estudar os conceitos matemáticos como foram desenvolvidos considerando a época e a cultura na qual se situam.

Nossa intenção não é de reduzir a história como fonte para identificar erros cometidos no passado por matemáticos ao desenvolverem determinados conceitos, mas sim, identificar obstáculos superados ao longo do desenvolvimento histórico do conceito de limite de função, mais especificamente os aspectos dinâmicos deste conceito, analisando as formas de superação ocorridas no contexto do desenvolvimento histórico, com vistas a reflextir sobre as possibilidades de tomar essas formas de superação como potencial aliado para as ações de ensino na atualidade. Cabe-nos, entretanto, verificar como tais obstáculos apareceram ao longo do desenvolvimento histórico do conceito de limite de uma função.

Antes de adentrarmos nessa parte da discussão é preciso refletir que talvez o processo de aparecimento e superação de tais obstáculos epistemológicos tenham desafiado a curiosidade e criatividade dos matemáticos que se dedicaram a responder as questões desafiadoras que foram surgindo ao longo dos tempos e espaços. Não significa, porém, afirmar ou negar que a invenção exerceu um papel importante na criação matemática, pois embora não seja suficiente, atualmente podemos refletir e admitir que foi contributiva pelo menos no que se refere à experiência criativa e sua sistematização que conduziu à elaboração teórica de conceitos e princípios matemáticos.

Assim é possível destacar que criatividade está no coração do desenvolvimento conceitual em busca da superação desses obstáculos epistemológicos concernentes ao desenvolvimento do conceito de limite, que se mostra como um exemplo perfeito para uma discussão sobre a arte criativa na produção matemática em todos os tempos e espaços nos quais se estabelece a cultura humana. Neste sentido, a história mostra o quanto os matemáticos foram impulsionados por uma simples pergunta: **e se?** É realmente um momento em que uma dinâmica criativa completa pode surgir através da curiosidade, como o fez Arquimedes em seu tempo, assim como Newton, Leibniz, d'Alembert, Cauchy e Weiertrass, conforme trataremos a seguir.

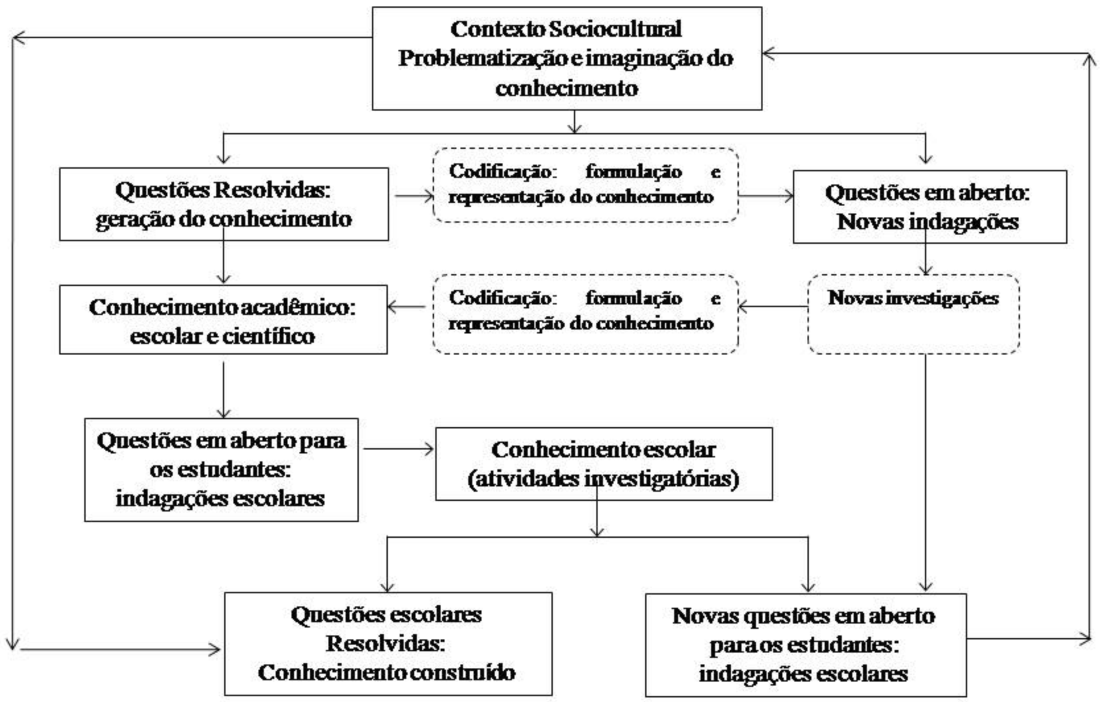
Antes, porém, consideramos a relevância de um destaque sobre o que Abraham Moles (1957; 1970; 2007), estabelece em sua obra sobre o processo de criação intelectual, quando estabelece que é a partir de um ângulo filosófico e científico, que se caracteriza o conceito de criatividade como uma atitude do espírito para reorganizar os elementos do campo de percepção de uma maneira original e susceptível de dar lugar a operações em qualquier campo fenomenal, como é o caso do desenvolvimento epistemológico do Cálculo, mas específicamente, do conceito de limite de uma função.

A respeito da superação dos desafios caracterizados como obstáculo epistemológico ao desenvolvimento da Matemática, Mendes (2015) apresenta seu ciclo de problematização, imaginação, formulação e representação do conhecimento (figura 01), no qual assevera que

> (...) esse conhecimento construído se origina de problematizacões estabelecidas na interacão sociedade, cognicão e cultura, na tentativa de encontrar solucões para as situacões problemáticas surgidas no contexto. As respostas encontradas são configuradas sob dois aspectos: questões resolvidas e questões em aberto. As questões resolvidas originam-se das respostas as problematizacoões surgidas. Na medida em que tais respostas sao codificadas,visando a sua comunicacão e também a

> sua utilizacão na busca de respostas acerca de situacões problemáticas similares, quase sempre originam novas questões (questões em aberto). As questões em aberto, por sua vez, constituem-se em fontes provocadoras para novos estudos, transformando-se assim em um processo cíclico de producão do conhecimento (Mendes, 2015, p.98).

Figura 01. Ciclo de problematização, imaginação, formulação e representação do conhecimento.



Fonte: Mendes (2015)

O ciclo proposto por Mendes (2015) explicita encaminhamentos processuais para que sejam desenvolvidas ações investigativas em história da Matemática para o ensino tomando como princípios e métodos, os movimentos de superação das dificuldades encontradas nas formulaç~eos conceituais e de modo elas se apresnetam para os estudantes, conforme a organização programática da matemática escolar e de sua institucionalizaão em componentes curriculares, manuais escolares ou livros didáticos. É nesta direção que abordaremos a seguir aspectos concernentes aos obstáculos epistemológicos no desenvolvimento do conceito de limite.

3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

Para analisar os aspectos dinâmicos do conceito de limite, com o olhar para a superação dos obstáculos epistemológicos, precisamos analisar as ideias apresentadas por matemáticos que trouxeram esse aspecto ao longo de seu desenvolvimento, bem como o de quem os ajudou a superá-lo.

Neste sentido, iniciamos examinando como a noção de limite ganhou forma a partir da “invenção” do Cálculo. Nesta seção apresentaremos, então, a noção de limite desenvolvidos nos trabalhos de Isaac Newton (1643 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), de modo a fazer uma contextualização dos aspectos mais específicos tratados nesse processo, para em seguida, centrar-nos nas ideias de limite apresentadas por Jean Le Rond d’Alembert (1717-1783), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Wieirstrass (1815 - 1897).

Dentre os manuais de História da Matemática analisados, Boyer (1996), (1992), Eves (2011), Bos (1985) e Roque (2018), somente foi apresentada a definição do conceito de limite, pós Newton e Leibniz, posta por d’Alembert, Cauchy e Weierstrass, por isso a ênfase dada para esses três matemáticos neste artigo. Os manuais consultados são obras traduzidas para o português muito utilizadas em disciplinas de História da Matemática na graduação em matemática no Brasil.

Carl Benjamim Boyer (1906 - 1976) se dedicou à História da Matemática e contribuiu para a profissionalização desse campo de saber. Boyer (1996) objetivou em sua obra “História da Matemática” apresentar esta história com fidelidade não só para com a exatidão matemática, mas também para com a perspectiva e detalhes históricos, fazendo um arranjo cronológico com mais ênfase a elementos históricos. A primeira versão, em inglês, foi publicada em 1968 e conforme a corrente dominante da época, percebemos que o foco do autor está mais na matemática do que nos matemáticos, pois, nesta altura, considerava-se que os detalhes biográficos têm menos influência no desenvolvimento dos conceitos abordados.

A obra “Cálculo” da série Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula, publicada originalmente em inglês em 1969, foi escrita por Boyer (1992) para auxiliar o ensino de Cálculo a partir de uma perspectiva histórica, como material didático. Apresenta uma primeira parte que descreve de modo geral a história do Cálculo e, na segunda parte, são oferecidas “cápsulas” evidenciando episódios mais específicos desta história.

A obra “Introdução à história da matemática”, de Howard Eves (1911 - 2004), foi publicada 1953. Eves (2011) tenta, neste livro, introduzir a história da matemática aos alunos de graduação dos cursos superiores de matemática. Por este motivo, além da narrativa histórica, o autor apresenta em cada capítulo exercícios e temas a serem discutidos, com o objetivo de motivar os estudantes para a pesquisa na área. Eves (2011) escreveu seu livro como um professor de matemática com interesse em história, mantendo a organização textual cronologicamente. A obra ainda apresenta panoramas culturais escritos por seu filho, Jamie Eves, com o intuito de mostrar um aprofundamento do cenário cultural das várias eras e épocas da história da matemática.

O "Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo" foi publicado em 5 unidades por Margaret Eleanor Baron (?) e Henk Jan Maarten Bos (1940), em 1974, originalmente em inglês. Os autores tem por objetivo com essa obra tratar de aspectos importantes para o desenvolvimento do cálculo, tais como o conceito de integração, de diferenciação, o teorema fundamental do cálculo, o desenvolvimento de notações e símbolos, o conceito de função, de quantidades infinitamente pequenas, indivisíveis, quantidades divisíveis *ad inifitum*, e, por fim o abandono dos infinitésimos e a determinação do conceito de limite como o conceito fundamental do cálculo. Nos limitamos a analisar apenas a Unidade 4, que aborda os fundamentos do cálculo do século XVIII e um pequeno resumo dos principais progressos do cálculo no século XIX. Os autores têm uma preocupação pedagógica nesta obra em apresentar questões em meio aos vários capítulos presentes em cada unidade que nem sempre se limitam a consulta da obra em si. Também há a preocupação de trazer as respostas.

Em uma obra bem mais recente que as anteriores, Tatiana Roque (1970) publica, em 2018, o livro "História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas", partindo dos modos como a História da Matemática já foi escrita para recontar essa história. A autora inicia cada capítulo do livro com um relato da visão convencional sobre o conteúdo em questão e em seguida, apresenta uma contextualização mais ampla que leve em conta fatores culturais ou filosóficos, explicitando as relações intrínsecas entre as práticas matemáticas e seu contexto.

3.1 O conceito de limite por Newton e Leibniz

Até o fim do século XVII, já se tinham feito muitas integrações, muitas cubaturas, quadraturas, processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas haviam sido construídas, a ideia de limite já fora concebida e o teorema fundamental reconhecido no âmbito do desenvolvimento do Cálculo. Eves (2011), aponta que "faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria" (p. 435).

Por volta de 1666, Isaac Newton (1643 - 1727) sintetizou um estudo baseado no que ele chamava de "método de fluxões", no qual as noções de movimento desempenharam um papel central e significativo. O primeiro livro no qual Newton delineia seu cálculo foi o *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, publicado em 1711, onde o autor descreve a extensão do uso da palavra "análise", argumentando que os algoritmos matemáticos que lidam com processos infinitos são tão respeitáveis quanto aqueles que se aplicam à álgebra ordinária, concedendo assim um espaço considerável ao método das "séries infinitas". Boyer (1959) enfatiza que a contribuição de Newton está no reconhecimento de que tudo isso constitui parte de uma nova análise: a aplicação de processos infinitos ao estudo geral de funções.

Para Baron e Bos (1985), três ideias fundamentaram a invenção do Cálculo por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716): seu interesse pelo simbolismo e pela notação vinculada à sua ideia de uma linguagem simbólica geral; o reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas; e, o uso de um triângulo característico para deduzir transformações gerais de áreas.

Boyer (1959) destaca que o elemento essencial na invenção do cálculo por Leibniz, foi o reconhecimento, em 1676, de que também estava construindo uma análise nova e universal. Em seus primeiros artigos publicados, Leibniz expôs que seu novo método não apresentava impedimentos para funções irracionais ou transcendentes.

Newton e Leibniz chegaram ao Cálculo através de caminhos diferentes. Não só é diferente a linguagem com que ambos expressaram as ideias fundamentais do Cálculo, mas também em termos de concepção pode-se verificar uma diferença grande entre os seus trabalhos. Tanto Newton quanto Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo. Mas as maneiras de ver o Cálculo eram distintas.

A compreensão do significado dessa situação levou cada um deles a desenvolver uma linguagem, uma lógica e um simbolismo para a nova matéria, conforme explica Boyer (1992).

No entanto, nenhum dos dois “estavam em condições de apresentar uma fundamentação lógica convincente” (p. 21). Boyer (1992) aponta que Newton chegou mais próximo disso, quando descreveu sua ideia de “primeira e última razões”.

Usando notações modernas, Boyer (1959) parafraseia a formulação de Newton descrevendo y como a razão das quantidades “evanescentes” Δy e Δt. Newton esclarece que “por razão última das quantidades evanescentes deve-se entender a razão das quantidades, não antes de desaparecerem, nem depois, mas com as quais elas desaparecem” (p. 21).

Fazendo alusão aos fundamentos do novo conhecimento, Newton refere-se por vezes aos infinitesimais, outras aos limites, e ainda, à uma intuição física básica, sendo esta última abordagem a mais adotada posteriormente. Por outro lado, Leibniz e seus seguidores basearam o desenvolvimento da teoria sobre os diferenciais infinitamente pequenos, de primeira e segunda ordem.

Boyer (1959) mostra que, de modo geral, podemos dizer que Newton baseou seu Cálculo em noções de continuidade, enquanto Leibniz tomou como base a ideia discreta das mônadas. Ambas as maneiras de abordar o problema mostraram-se igualmente úteis, pois, enquanto não estava estabelecida a noção de limites, as ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos surgiram como tentativas de esquematizar as primeiras impressões sensíveis quanto à variação.

Isso explica por que o Cálculo, nos estágios iniciais do seu desenvolvimento, estava cercado de conceitos de geometria do movimento, e com explicações de indivisíveis e infinitamente pequenos, pois estas ideias eram sugeridas pela intuição e experiência de continuidade.

Segundo Boyer (1996), Newton trabalhava com quantidades variáveis com um significado baseado na noção de movimento contínuo, as considerando a partir do movimento contínuo de pontos, retas e planos. Ele não considerava as variáveis como agregados de elementos infinitesimais.

Ao longo de seu trabalho, Newton fez referência aos infinitésimos, mas foi removendo até chegar a considerar que quantidades matemáticas não deveriam ser constituídas por momentos ou partes muito pequenas, mas sim como descritas pelo movimento contínuo. Newton sentia-se incomodado em interpretar suas proposições em termos de infinitesimais, preferindo usar velocidades, que também chamava de movimentos, mutações ou fluxões de quantidades. Assim, Newton refere-se ao seu Cálculo como o *Método das Fluxões*.

Já Leibniz tem outra maneira de encarar as coisas. Para Leibniz, a visualização do Cálculo se dá de forma estática, considerando as variáveis como percorrendo sequências de valores infinitamente próximos. No seu Cálculo há pouco uso de conceitos de movimento.

Conforme Baron e Bos (1985, p. 70), Leibniz entendia como necessários os infinitésimos, e construía sobre eles analogias, buscando uma visualização do Cálculo através de considerações discretas, através do diferencial: "A diferencial de uma variável y é a diferença (dy) entre dois valores consecutivos de y em uma sequência de números infinitamente próximos".

As concepções de Leibniz, quanto ao discreto, e a de Newton, quanto ao contínuo, recaíram na teoria do Cálculo, que posteriormente define melhor o que eram os números reais e a ideia de limite. Portanto, vemos que ambas as abordagens de Newton e Leibniz são caminhos a invenção do Cálculo.

O Cálculo foi um grande instrumento matemático descoberto no século XVII, pois se mostrou notavelmente eficiente para atacar diversos problemas não resolvidos em tempos anteriores. Com isso, diversos pesquisadores da época foram atraídos a utilizá-lo, mesmo que de modo despreocupado com os seus fundamentos, até porque para a concepção matemática da época, o rigor utilizado satisfazia. Segue-se para os séculos XVIII e XIX a tarefa de melhor fundamentar o Cálculo, conforme o que se entendia por rigor em cada época, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes de outros ramos da matemática.

3.2 O conceito de limite por d'Alembert, Cauchy e Weierstrass

Apresentaremos as concepções de limite tratadas por d'Alembert, Cauchy e Weierstrass a partir de manuais de História da Matemática, Boyer (1996), (1992), Eves (2011), Bos (1985) e Roque (2018), de maneira integrada, buscando compreender como a noção de obstáculo epistemológico pode ser observada nas descrições feitas por esses autores.

O primeiro matemático a destacarmos nesta análise é Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783). Ele considerava que a epistemologia do Cálculo estava fundada na ideia de limite. Segundo Eves (2011), para d'Alembert era preciso desenvolver uma teoria dos limites bem estruturada para colocar em bases firmes os fundamentos da análise. A respeito da maneira como d'Alembert concebia o conceito de limite, Thomas L. Hankins (1989) informa que

> (...) na representação geométrica de quantidades infinitesimais, o diferencial desempenha um papel essencial. No entanto, quando se trata de escrever seus artigos matemáticos para a Enciclopédia, ele tem um conceito muito avançado da derivada. Nos seus artigos "Diferencial", "Fluxão" e "Limites", ele insiste que apenas existem derivadas e que os diferenciais de primeira ordem não têm significado real (Hankins, 1989, p. 188).

Para reiterar mais ainda a afirmação de Hankins (1989, idem) mencionamos a seguir um trecho do artigo "Différenttiel", escrito por d'Alembert (Encyclopédie, IV, p. 987):

> ... não existem quantidades infinitamente pequenas de primeira ordem no cálculo diferencial ... As quantidades que se chama assim são xensadas divididas por outras quantidades supostamente infinitamente pequenas, e ... neste afirmam que marcam não quantidades infinitamente pequenas, nem mesmo frações cujo numerador e denominador são infinitamente pequenos, mas o limite de uma razão de duas quantidades finitas. O mesmo vale para segundas diferenças e para outras de ordem superior.

Seguindo neste mesmo raciocínio, ainda no artigo "différenttiel", d'Alembert afirmou que "a diferenciação de equações consiste simplesmente em achar os limites da razão de diferenças finitas de duas variáveis na equação", assumindo que "uma quantidade é alguma coisa ou é nada", opondo-se ao ponto de vista de Leibniz e Euler, excluindo a noção de diferenciais como grandezas infinitamente pequenas (Boyer, 1996, p. 311).

Segundo Boyer (1996), a expressão "primeira a última razão" de Newton foi interpretada por d'Alembert como um limite em vez de uma primeira ou última razão de duas quantidades que estão apenas surgindo. Para d'Alembert,

> uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (Baron e Bos, 1985, p. 28).

Boyer (1996) apresenta essa definição da seguinte maneira: "chamou quantidade o limite de uma segunda quantidade [variável] se a segunda pode se aproximar da primeira de mais perto que por qualquer quantidade dada (sem coincidir com ela)" (p. 311). Eves (2011) não apresenta a definição de limite posta por d'Alembert.

Esta compreensão de limite foi apresentada no verbete “Limite”, de 1765, e conforme as narrativas de Bos (2018) e Roque (2018), d’Alembert afirma que a quantidade não pode ultrapassar seu limite nem atingi-lo; o limite sempre se aproxima, chegando cada vez mais perto da quantidade, mas difere sempre dela tão pouco quanto se queira.

Para Boyer (1996), a imprecisão nessa definição foi removida nas obras de matemáticos do século dezenove. Nesta última afirmação, mais uma vez Boyer (1996) não considera o ferramental matemático ou ausência dele na época de d’Alembert criticando a falta de rigor ao enunciar o seu conceito de limite.

Podemos considerar que há um obstáculo epistemológico na associação da passagem ao limite com um movimento físico, quando no momento de “aproximar-se tanto quanto se queira” ou “se aproxima chegando cada vez mais perto da quantidade”, enquanto a noção de limite é entendida formalmente como “estática”.

Segundo Roque (2018), d’Alembert afirmava, que o uso das quantidades infinitamente pequenas pode abreviar as demonstrações, mas que ainda assim elas não devem ser aceitas, já que é preciso deduzir as propriedades das curvas com “todo o rigor” necessário. Sem os infinitésimos, d’Alembert definiu infinitamente grande em termos de limites. Prosseguiu definindo quantidades infinitamente grandes de ordem superior de modo parecido ao utilizado atualmente ao tratarmos de ordens de infinito em relação a funções. Boyer (1996) afirma que d’Alembert negava o infinito atual, pois pensava em grandezas geométricas e não na teoria dos conjuntos proposta um século depois.

Podemos evidenciar um obstáculo epistemológico neste contexto, dado que a presença da noção de infinitamente pequeno dificultou a noção de limite, mas ao mesmo tempo o infinitesimal também foi um fator de progresso uma vez que a noção de limite foi desenvolvida em parte na reação contra o infinitamente pequeno.

Uma das desvantagens apontadas por Baron (1985) no conceito de limite de d’Alembert é a afirmação de que a variável não pode alcançar seu limite. Entendemos o pressuposto de que as variáveis são contínuas em seus domínios e não ultrapassam certos valores. Nesse sentido, o conceito de limite toca na questão da continuidade referente ao conceito de variável. Sem uma explicação mais sólida sobre isso, o conceito de limite não foi bem aceito.

As terminologias utilizadas para conceituar limite até aqui dão a ideia de movimento no tempo, a variável deve aumentar ou diminuir com relação ao seu limite, mas não deve oscilar, nem voltar, se remetendo a uma noção geométrica da diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante, se manifestando como mais um obstáculo epistemológico a ser superado posteriormente. Ao considerar as variáveis como crescentes ou decrescentes, d'Alembert remete-se à ideia clara de limite como uma fronteira, pois só pode estar situado na fronteira do domínio da variável.

Roque (2018) esclarece que o desenvolvimento das ideias fundamentais do Cálculo não se deu somente no interior da matemática. Durante os séculos XVII e XVIII, as discussões acerca de sua natureza e legitimidade dos métodos infinitesimais se inseriam em um domínio amplo que incluía além da matemática, a filosofia e a física. Bos (1985) salienta que não havia uma distinção clara entre a análise e campos da física matemática. Até neste ponto, o Cálculo lidava principalmente com variáveis, até se desenvolver a noção de função pela utilização desta noção nos diversos campos das ciências naturais, e se entender a ideia de o Cálculo operava com funções.

Faremos um breve comentário de como os autores dos manuais abordam as contribuições de Leonhard Euler (1707 - 1783) para o desenvolvimento do Cálculo, por mais que não tenha uma formulação para a noção de limite por ser determinante a conceituação e função apresentada por este matemático.

Conforme Boyer (1996), Euler tornou o cálculo diferencial e o método dos fluxos parte da "análise", o estudo de processos infinitos, com fundamental importância para a ideia de função definida por ele como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes" (p. 306), tornando o cálculo em um campo de estudos primariamente geométrico.

Não foi explicitado por Euler o que ele chamara de expressão analítica, para Bos (1985), mas pareciam incluir expressões algébricas e expressões que envolviam funções elementares transcendentais. Numa posterior explicação de Euler, chamou de função "qualquer variável que dependa de outra de tal modo que, quando a segunda varia, a primeira também varia" (Bos, 1985, p. 36).

Boyer (1996) considera ingênua a atitude de Euler somente considerar funções bem comportadas. Entendemos esse julgamento feito por Boyer (1996) advindo de um olhar do hoje para o passado, deixando de valorizar os feitos de Euler pelo o que havia disponível na época. Bos (1985) esclarece que Euler supunha que as funções, de modo geral, fossem bem comportadas, pois tinham as mesmas propriedades que as expressões analíticas mais comuns. Essa suposição remonta a "problemas" de continuidade e diferenciabilidade.

Conforme Bos (1985), Euler afirmou em 1755, em seu livro sobre cálculo, que quantidades infinitamente pequenas não existiam, argumentando que as quantidades menores que qualquer quantidade finita são iguais a zero. Entretanto, para Euler os zeros podem ter uma razão finita. Assumia que diferenciais são símbolos para quantidades que são zero, mas, no entanto, são qualitativamente diferentes.

Entre as abordagens de Euler, Roque (2011) observa que a operacionalização algébrica do cálculo de diferenças leibniziano é justificado com argumentos mecânicos, como o da possibilidade de dividir a matéria infinitamente, e teve uma intensa recepção no período da hegemonia do método analítico.

Bos (1985) faz uma reflexão sobre como "pensavam" os matemáticos anteriores a Cauchy sobre a fundamentação do Cálculo. Afirma que os matemáticos supunham que poderiam resolver este "problema" com um argumento profundo e inteligente, a ser posto no início dos livros de Cálculo e tudo que fora estudado estava "correto". Nesta reflexão, podemos perceber como o autor considera o conhecimento matemático anterior como um obstáculo para a produção do conhecimento novo. Bos (1985) ainda considera que o problema só seria resolvido a partir do desenvolvimento do rigor (fazendo alusão ao rigor do século XIX) na definição dos conceitos básicos da análise.

O segundo matemático a ser destacado neste trabalho é Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) que teve como motivação para o desenvolvimento de definições mais precisas dos conceitos no âmbito do Cálculo, segundo Boyer (1996), o estudo de variáveis reais e variáveis complexas que não eram possíveis de serem representadas em duas dimensões. Roque (2018) já apresenta como motivação a preocupação didática na maneira como Cauchy propôs reorganizar a análise de modo a explicar melhor seus conceitos básicos.

O principal objetivo dos livros de Cauchy, segundo Bos (1985), seria reconciliar o rigor, da análise, com um entendimento mais simples sobre as quantidades infinitamente pequenas.

Para Cauchy, a variável é uma quantidade numérica indeterminada que inclui todos os valores determinados, sem exceção. As variáveis de Cauchy passavam por vários valores diferentes, mas não atingiam, necessariamente, todos os valores, isto é, elas podiam ser limitadas a um dado intervalo (Roque, 2018).

De acordo com Roque (2018), Cauchy definia função a partir da distinção entre variáveis independentes e dependentes: "quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente essas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de 'variável independente'" (p. 332). E as quantidades, expressas por meio da variável independente, são chamadas de funções desta variável.

Cauchy tornou fundamental o conceito de limite de d'Alembert dando-lhe um caráter aritmético mais preciso, dispensando assim a geometria e infinitésimos ou velocidades: "quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite dos outros todos (Boyer, 1996, p. 355). Boyer (1992) não considera essa definição aceitável comparado ao que conhecemos como limite atualmente, por não esclarecer os papéis das variáveis depende e independente, assumindo mais uma vez o olhar para a história com referências a atualidade.

Bos (1985) chama atenção para o conceito de variável de Cauchy ainda sugerir aumento ou decréscimos contínuos, apresentando um conceito de limite muito parecido com o de d'Alembert, sem excluir a possibilidade da variável alcançar o seu limite, e se utilizando das vantagens da utilização da função e não de variáveis.

Boyer (1996) enfatiza ainda que Cauchy definiu o infinitésimo como uma variável dependente ao passo que outros o entendiam como um número fixo muito pequeno: "diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente de modo a convergir ao limite zero" (p. 355), muito próximo da definição de continuidade que utilizamos hoje. Assim, os conceitos de função e limite de função eram fundamentais no Cálculo proposto por Cauchy.

Ainda sobre o infinitamente pequeno, Cauchy não considera uma quantidade infinitamente pequena como zero, nem como um quantidade constante menor do que qualquer quantidade finita, mas sim como variável que se aproxima de zero (BOS, 1985).

Com Cauchy o limite se dissocia da ideia de quantidades infinitamente pequenas, como também fornece os elementos necessários para que essas quantidades se separem do aspecto metafísico presente até então. No entanto, conforme Boyer (1992) esta mesma noção de limite, encontra-se associado ainda a ideias intuitivas como valores sucessivos aproximar-se indefinidamente, e diferença tão pequena quanto se queira. Dessa forma, verificamos a presença de ideias de movimento que se caracterizam como obstáculo na definição de limite de Cauchy.

Percebemos um outro obstáculo epistemológico na definição de limite de Cauchy ligada a falta de simbologia adequada, pois ele não deixou clara a dependência entre a vizinhança do ponto em que se calcula o limite e o da proximidade do ponto que é o limite.

Para Roque (2018), ao procurarmos na obra de Cauchy antecedentes das noções modernas em análise, podemos nos deparar com erros que frustrarão nossas expectativas. Concordarmos com a autora ao afirmar que poderia ser mais proveitoso ver Cauchy como alguém que buscava um tipo de rigor que já não era o do século XVIII, fundado na algebrização, mas que também não era o rigor desenvolvido no século XIX.

Eves (2011) cita as contribuições de Cauchy, em 1821, para o Cálculo ao definir então continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos do conceito de limite, enfatizando que Cauchy não havia atingido o verdadeiro cerne das dificuldades na procura de uma fundamentação sólida para a análise, pois a teoria dos limites fora construída embasada em uma noção simples de número real. Eves (2011) não cita as definições dadas por Cauchy, nem aprofunda o assunto.

A noção de limite refere-se a funções cujos valores são pontos e não subconjuntos de um espaço topológico. O termo "diferença" que aparece de diferentes maneiras nas definições de limite deve ser entendido como determinado pela topologia do espaço. Se atualmente a ideia de limite está intimamente relacionada com a operação de fechamento topológico, a intuição geométrica, em algumas situações, influência o pensamento do mais próximo estar associado a fronteira do conjunto. Entendemos essa situação advinda de um obstáculo de cunho geométrico que só poderá ser superado com um conceito bem formado de número real.

Uma das grandes dificuldades da história do conceito de limite, compreendida também como obstáculo epistemológico, nesta altura, era de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar a "grandeza", mas sim os números. A noção de limite precisava destes obstáculos para que pudesse passar de um estágio embrionário para outro de sua construção. O aparecimento do conceito geral de função foi um ponto decisivo que permitiu no século XIX uma clara articulação da noção de limite livre da intuição geométrica e física.

Com a noção de limite formulada, Karl Weierstrass (1815 - 1897) formaliza o Cálculo, introduzindo a linguagem dos Épsilons (ε) e Deltas (δ). No tópico denominado "a aritmetização da análise", Boyer (1996) cita as contribuições de Weierstrass para o conceito de limite. Weierstrass tentou separar o Cálculo da geometria e baseá-lo no conceito de número. Percebeu que para fazer isso, era necessário dar uma definição de número irracional independente do conceito de limite. Então, Weierstrass decidiu a questão da existência do limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como número ou limite, corrigindo o erro lógico de Cauchy. Boyer (1996), nesta obra, não apresenta a definição formal de limite dada por Weierstrass.

O problema básico a ser resolvido concernente ao rigor em análise, segundo Bos (1985), estava relacionado ao conceito que quantidade, assumida essencialmente como geométrico até o século XVIII. Ao retirar desse conceito todas as conotações geométricas e tomar quantidade como número real, foi possível formalizar a análise.

Boyer (1992, p. 27), nesta outra obra, evidencia a definição do conceito de limite apresentada por Weierstrass: "diz-se que L é um limite da função $f(x)$ para o valor $x = a$ se, dado qualquer número positivo ε, existe um número positivo δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para qualquer x que verifique $0 < |x - a| < \delta$. Nesta definição, é a função que tem um limite, não a variável. Percebemos que Boyer (1992) enaltece a beleza matemática desta definição, bem como a resolução das lacunas lógicas que ela, juntamente com o desenvolvimento do formalismo de outros conceitos à época resolvem no âmbito da matemática.

Assim, segundo Eves (2011), Weierstrass defendeu um programa, a aritmetização da análise, no qual o sistema dos números reais fosse rigoroso e hoje a análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais. Eves (2011) e Roque (2018) não apresentam a definição de limite de Weierstrass. Eves (2011) comenta de forma genérica a contribuição de Weierstrass para a formalização deste conceito e Roque (2018) foca no desenvolvimento do conceito de rigor desta época.

Ao observar os modos de apresentação do desenvolvimento do conceito de limite a luz de d'Alembert, Cauchy e Wieirstrass, percebemos, principalmente em Boyer (1996, 1992) e Eves (2011) frases que remetem ao julgamento do passado com os olhos do presente. Roque (2018) é mais cuidadosa e crítica a este modo de analisar a história.

De modo geral, nesta análise percebemos o aspecto dinâmico como obstáculo epistemológico muito presente no conceito de limite até Weierstrass, que se deve, em grande parte, a aproximação dos conceitos matemáticos com outras áreas do conhecimento, que utiliza a matemática como ferramenta de interpretação de fenômenos, permanecendo, até Cauchy, a questão de saber se uma grandeza variável atingiu o seu limite ou não.

Em seguida, temos os obstáculos relacionados à dificuldade de abstrair da geometria e da cinemática os elementos necessários para se trabalhar com números. Os obstáculos epistemológicos estavam ligados à interpretação geométrica das grandezas, à interpretação dinâmica do conceito de variável, e, às interpretações metafísicas dos conceitos de continuidade. Temos ainda os obstáculos relativos à noção de função que enfatiza a concepção de contínuo, nesse contexto, de Leibniz até Cauchy.

4 REFLEXÕES SOBRE O TEMA E DESDOBRAMENTOS FUTUROS

Consideramos o estudo sobre o conceito de obstáculo epistemológico um desafio para o educador matemático, no sentido de se pensar sobre a natureza da matemática e como esse conhecimento se desenvolveu epistemologicamente. Talvez esse desafio seja uma das chaves de superação das dificuldades conceituais e didáticas de muitos professores de matemática em quaisquer níveis de ensino. Por essa reflexão consideramos que este tipo de desafio poderá proporcionar investimentos acadêmcios em busca de contribuições para uma compreensão mais ampla sobre o tipo de conhecimento que o professor de matemática deve desenvolver ao aceitar a tarefa de ensinar.

Neste artigo nos preocupamos em entender como as narrativas dos autores de manuais de História da Matemática nos possibilitam refletir sobre os obstáculos epistemológicos inerentes ao desenvolvimento das ideias de limite de função na perspectiva de Bachelard. Percebemos a possibilidade de refletir sobre esta temática e nos debruçamos na análise de alguns manuais de História da Matemática muito utilizados no Brasil, Boyer (1992; 1996), Eves (2011), Bos (1985) e Roque (2018), com o objetivo de apresentar um estudo dos obstáculos epistemológicos no desenvolvimento do conceito de limite de função a partir dos referidos manuais com o olhar para a sua superação no processo de formação do conceito.

Embora matematicamente, toda a noção de limite esteja contida na sua definição em $\mathcal{E}$ e δ, existe uma lacuna entre o conceito (no sentido intuitivo) de limite, e a definição da noção de limite. Esta lacuna é proveniente do próprio conceito e ao modo que podemos defini-lo. O aspecto dinâmico não é desenvolvido pela definição, que é estática.

Não é incomum o conceito intuitivo de limite e a sua definição formal serem compreendidas de maneira independente. É possível internalizar da definição o suficiente para lidar com a maioria dos exercícios que possamos encontrar durante um estudo a nível de graduação sobre o assunto, sem adquirir necessariamente o conceito intuitivo de limite. Por outro lado, também é possível compreender uma série de aspectos fundamentais do conceito de limite (por exemplo, aproximação), sem entender a definição em $\mathcal{E}$ e δ.

Há muita discussão sobre se considerar obstáculos epistemológicos encontrados na história de determinado conceito resistentes nos alunos da atualidade. Não temos essa interpretação determinante da utilização pedagógica do estudo dos obstáculos epistemológicos para o ensino de matemática, mas entendemos que pode ser usado para esclarecer as dificuldades dentro dos desenvolvimentos conceituais. Por isso, a preocupação, no contexto deste trabalho, de compreender como podemos identificar potencialidades para a superação dos obstáculos epistemológicos para o ensino de limite de função, a partir da perspectiva de Brousseau.

Observando os obstáculos evidenciados neste trabalho, propomos que se faça um estudo histórico do desenvolvimento desse conceito. Este estudo, orientado pelo professor, possibilita ao aluno uma visão mais ampla e localizada em termos sócio-histórico-cultural da construção do conceito de limite e dos entraves encontrados em seu desenvolvimento.

O estudo histórico pode se iniciar com a tarefa, para os estudantes, de uma pesquisa quanto ao desenvolvimento do conceito de limite. Essa tarefa pode ser dividida entre grupos de alunos, com temas pré-estabelecidos. São sugestões: Invenção do Cálculo, Cálculo de Newton, Cálculo de Leibniz, Conceito de limite de d’Alembert, Conceito de limite de d’Alembert, Formalização do conceito de limite etc. Estes temas sugeridos estão focados no estudo das definições de alguns matemáticos quanto ao conceito de limite com o objetivo de possibilitar uma discussão entre as concepções de limite estudados e os conceitos até então compreendidos pelos alunos.

A partir de então, sugerimos uma discussão das dificuldades que os matemáticos tiveram pra se chegar à definição formal de limite, se essas dificuldades são as mesmas que os alunos encontram nas definições construídas por eles, observando os obstáculos que precisavam ser transpostos.

As possíveis dificuldades que podem emergir nos diálogos entre os alunos, ou até mesmo podem ser provocadas por reflexões provocadas pelo professor, podem ser associadas aos obstáculos identificados na análise dos conceitos de limite de d'Alembert, Cauchy e Weierstrass. Quais as suas aproximações e diferenças com o modo que estudamos hoje? O que faltava, matematicamente, ser desenvolvido para que uma definição se aproximasse mais da outra?

Dando ênfase aos aspectos dinâmicos do conceito de limite, pode ser realizada uma discussão das características de movimento presente na noção intuitiva de limite a partir do contexto histórico do qual se originou, estabelecendo também uma discussão quanto as grandezas atingirem ou não o seu limite. Ressaltamos ainda a importância de se ater no ensino de Cálculo o método geométrico aliado ao método aritmético/algébrico, por cada um proporcionar as interpretações necessárias para a apreensão do conceito de limite.

Outra possível discussão pode ser feita em torno das dificuldades encontradas historicamente de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar a "grandeza", mas sim os números, chegando assim, na definição formal de limite. O que ε significa na definição de limite de função? O que δ significa na definição de limite de função? Qual o significado da relação entre ε e δ na definição formal de limite de função? Por que devemos buscá-la? São perguntas que podem ser feitas nesta discussão.

Entendemos que os apontamentos dados possibilitam seguir um norte no ensino de limite a partir de "onde o aluno está", por via do diálogo dos estudantes entre os mesmos e com o professor, permitindo que as compreensões do aluno não se transformem em obstáculos para sua aprendizagem, mas sim, o propulsor para a construção de uma nova compreensão mais sólida mediada pelo professor.

Em termos de aprofundamento teórico para o professor, entendemos que o estudo dos obstáculos epistemológicos superados ao longo do desenvolvimento histórico do conceito de limite proporcione uma visão mais geral do Cálculo e, ao mesmo tempo, mais específica no sentido de possibilitar a criação de ferramentas didáticas mais eficientes para o ensino deste conceito.

REFERÊNCIAS

Asimov, I. (1996). Prefácio. *In:* Boyer, C. B. *História da matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico*. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Editora Contraponto.

Baron, M. E.; BOS, Henk Jan Maarten. (1985). Newton e Leibniz (Unidade 3). Trad. Rudolf Maier. *In:* Baron, M. E. & Bos, H. J. M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Bos, H. J. M. (1985). O Cálculo do século XVIII: fundamentos (Unidade 4). Trad. José Matoso Miranda Mendes. *In:* Baron, M. E. & Bos, H. J. M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Boyer, C. B. (1959). *The history of calculus and its conceptual development*. New York: Dover publications.

Boyer, C. B. (1992). *Cálculo*. Trad. Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Editora Atual, (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions *4*(2), 164-198.

Brousseau, G (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, *7*(2), 33-116.

Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. *In:* Bednarz, N., & Garnier, C. (Eds). *Construction des savoirs:* obstacles et conflits. Montréal: Cirade, p. 277-285.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics:* didactique des mathématiques, 1970-1990. Mathematics Education Library: Kluwer Academic Publishers.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Hankins, Thomas L. (1989). Jean d'Alembert: Homme de Science. In: *Jean d'Alembert Savant et Philosophe*: portrait à plusieurs voix. Paris: Éditions des Archives contemporaines, p. 188-205.

Mendes, I. A. (2015). *História da Matemática no Ensino*: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física. (Coleção História da matemática para Professores).

Moles, A. (2007). *A criação científica*. São Paulo: Perspectiva. (Coleção Estudos – Filosofia da Ciência).

Moles, A. (1957). *La création scientifique*. Genève: Kister, (1ª reimpressão, 1998).

Moles, A., & Caude, R. (1970). *Créativité et méthodes d'innovation das l'entreprise*. Paris: Fayard-Mame.

Kuhn, T. S. (1962). *Estrutura das Revoluções Científicas*. 11. ed. Tradução Beatriz Viana Boeira e Nelson Boeira. Rio de Janeiro: Perspectiva, 2011. (Coleção Debates, 115).

Roque, T. (2018). *História da matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar.

Schubring, G. (2018). *Os números negativos:* exemplos de obstáculos epistemológicos? São Paulo: Editora Livraria da Física. (Série história da matemática para professores).

Autores:

Iran Abreu Mendes

Bolsista Produtividade em Pesquisa Nível 1C do CNPq. Pós-doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro (2008). Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2001) e Mestrado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (1997). Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1983). Atualmente é professor Titular do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (IEMCI), e pesquisador do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Tem experiência no ensino de Cálculo, Geometria Analítica e Euclidiana, História da Matemática, História da Educação Matemática, Didática da Matemática e Fundamentos Epistemológicos da Matemática. Desenvolve pesquisas sobre: Epistemologia da Matemática, História da Matemática, História da Educação Matemática, História para o Ensino de Matemática, Práticas Socioculturais e Educação Matemática, Diversidade Cultural e Educação Matemática. Líder do Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM/UFPA). Mais informacões no Currículo Lattes: http://Lattes.cnpq.br/4490674057492872. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7910-1602. URL: http://www.iranmendes.com. E-mail: iamendes1@gmail.com

Mônica Suelen Ferreira de Moraes

Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/IEMCI/UFPA). Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA-2010). Professora da Universidade Federal do Tocantins (UFT/Arraias). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática na Formação de Professores (GEPEMFOR) e do Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM). Desenvolve pesquisas em epistemologia da matemática, história da matemática e formação de professores. Mais informações no Currículo Lattes: http://Lattes.cnpq.br/8488999128970916. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8806-2027. E-mail: monicamoraes@uft.edu.br.

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p266-284.id841

UNA PROPUESTA PARA EL USO DE HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: SOBRE LA POTENCIALIDAD DIDÁCTICA DE LOS TEXTOS HISTÓRICOS Y EL DESARROLLO DE CONCEPTOS

João Cláudio Brandemberg
brand@ufpa.br
Universidade Federal do Pará

Recibido: 19/02/2019 **Aceptado:** 17/02/2020

Resumen

El uso de aspectos históricos relacionados con la enseñanza del contenido matemático en contextos escolares y (o) académicos se establece en la importancia del conocimiento sobre el desarrollo histórico de los conceptos y (o) en la viabilidad de usar textos matemáticos históricos en el contexto del aula. Es importante y urgente (re) discutir el potencial didáctico de estos textos para implementar una propuesta de enseñanza de contenido matemático que utilice problemas de naturaleza histórica, provenientes de dichos textos, seleccionados y adaptados para promover una mayor aproximación, contextualización y aportando más significado a los conceptos estudiados, presentados en actividades problemáticas e interactivas. Una contextualización que permite la relación de las estructuras conceptuales involucradas en el desarrollo histórico de los contenidos matemáticos, produciendo una fuerte conexión entre el conocimiento actual y el producido históricamente, lo que lleva al alumno a comprender una matemática que está constituida por problemas en los contextos más diversos de la cultura humana.

***Palabras clave*:** Historia de las matematicas. Potencialidades didácticas de textos históricos. Desarrollo de conceptos. Enseñanza de las matematicas.

A PROPOSAL FOR THE USE OF HISTORY IN TEACHING MATHEMATICS: ON THE DIDACTIC POTENTIALITY OF HISTORICAL TEXTS AND THE DEVELOPMENT OF CONCEPTS

Abstract

The use of historical aspects related to the teaching of mathematical content in school and (or) academic contexts is established in the importance of knowledge about the historical development of concepts and (or) in the feasibility of using historical mathematical texts in the classroom context. It is important and urgent to (re) discuss the didactic potential of these texts in order to implement a proposal of teaching mathematical content that uses problems of historical nature, coming from such texts, selected and adapted in order to promote greater approximation, contextualization and bringing more meaning to the concepts studied, presented in problematized and interactive activities. A contextualization that allows the relationship of the conceptual structures involved in the historical development of mathematical contents, producing a strong connection between current and historically

produced knowledge, leading the student to understand a mathematics that is constituted by problematizations in the most diverse contexts of human culture.
Keywords: History of Mathematics. Didactic potentialities of historical texts. Concept development. Mathematics teaching.

UMA PROPOSTA PARA O USO DA HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: SOBRE A POTENCIALIDADE DIDÁTICA DE TEXTOS HISTÓRICOS E O DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS

Resumo
A utilização de aspectos históricos relacionados ao ensino de conteúdos matemáticos nos contextos escolar e (ou) acadêmico se institui na importância do conhecimento acerca do desenvolvimento histórico de conceitos e (ou) na viabilização do uso de textos históricos de matemática no contexto de sala de aula. Se faz importante e urgente uma (re) discussão sobre as potencialidades didáticas destes textos de forma a implementar uma proposta de ensino de conteúdos matemáticos que utilize problemas de cunho histórico, oriundos de tais textos, selecionados e adaptados de forma a promover maior aproximação, contextualização e trazendo mais significado aos conceitos estudados, apresentados em atividades problematizadas e interativas. Uma contextualização que permita o relacionamento das estruturas conceituais envolvidas, no desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, produzindo forte ligação entre o conhecimento atual e o historicamente produzido, levando o estudante a compreensão de uma Matemática que se constitui das problematizações nos mais diversos contextos da cultura humana.
***Palavras-chave*:** História da Matemática. Potencialidades didáticas de textos históricos. Desenvolvimento de conceitos. Ensino de Matemática.

Introdução

Uma discussão sobre o papel da história no ensino de matemática se faz recorrente nas últimas décadas, como podemos observar nos apontamentos presentes em Fauvel e van Maanem (2000) e reapresentados nas últimas duas décadas por autores como Miguel (1993), Miguel (1997), Mendes (2009), Mendes (2015), Mendes e Chaquiam (2016) e Brandemberg (2017a).

Tais autores vêm buscando, e realizando, uma forma de implementação do uso da história da matemática como componente metodológica para o Ensino de Matemática, trazendo extratos de textos históricos na produção de atividades com problemas de cunho histórico em uma proposta didática ou discutindo o processo de desenvolvimento de determinados conceitos matemáticos.

Em nosso texto, partindo de um estudo bibliográfico referenciado, apresentamos algumas pesquisas que tratam do tema, no intuito de produzir uma proposição sobre o uso de livros textos históricos de conteúdo matemático no contexto de sala de aula.

Assim, objetivamos uma proposta para o uso da história no ensino de matemática a partir da efetivação do uso de atividades (problemas) de cunho histórico, selecionadas e adaptadas de textos históricos para situações de ensino, nos contextos acadêmico ou escolar, tornando a História da Matemática uma forte componente do processo.

A busca por um referencial teórico pessoal

Em acordo com Fauvel e van Maanem (2000), o que discutimos, inicialmente aqui, são os argumentos favoráveis ao uso da história como componente metodológica no Ensino de Matemática visando minimizar algumas objeções, de ordens práticas e filosóficas, inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de conteúdos.

Fauvel e van Maanem (2000) destacam cinco pontos nos quais o ensino de Matemática pode ser aprimorado a partir do uso de uma componente histórica, como descrevemos a seguir, a saber: *facilita* o aprendizado de conteúdos matemáticos, *promove* o desenvolvimento dos pontos de vista sobre a natureza da atividade matemática, *amplia* o conhecimento prévio dos professores, *incentiva* o gosto pela Matemática e *assume* uma visão da Matemática como empreendimento cultural humano.

São esses aspectos relacionados ao uso da história da matemática como componente metodológica que devem ser considerados e trabalhados. O aspecto facilitador se institui das possibilidades de resolução de problemas matemáticos utilizando mais de um método, dos desenvolvidos historicamente, que permitem o uso, a adequação e a comparação das estratégias de resolução quando confrontados. O aspecto promotor se estabelece das possibilidades que a história nos traz de transitarmos, via conteúdos (objetos, processos) matemáticos, entre os universos acadêmico, escolar e cotidiano do conhecimento matemático.

Uma ampliação dos conhecimentos matemáticos de professores e alunos se dá, mediante ao uso da história da matemática, com a oportunidade de se apropriar de novos enunciados, usos e aplicações dos conceitos (processos, conteúdos) matemáticos e com essa interação garantir, impulsionar ou estimular o gosto pela Matemática. Assim, estudar matemática se torna agradável, em um processo de redescoberta e observação do desenvolvimento dos processos (conteúdos, conceitos) matemáticos em uma concepção que lhes permitam visualizar a matemática em seus aspectos culturais, promovendo um aprimoramento de seus conhecimentos.

Em acordo com Mendes (2015), quando pensamos em um uso da história da matemática como componente metodológica promotora do conhecimento, uma forma efetiva de promover tal aprimoramento, é pautar o processo de aprendizagem em uma abordagem partindo da apresentação (e produção) de atividades matemáticas inspiradas pela História.

Para Mendes (2015), como professores, devemos tomar um posicionamento que permita, a partir do diálogo (dialética), a inclusão de elementos desenvolvidos ao longo da história para efetivar a compreensão de determinados conceitos trabalhados em sala de aula.

Para Mendes (2015) e Brandemberg (2017a), uma forma de realizar essa prática é a elaboração de atividades de cunho histórico como as que nomeamos a seguir:

i – Apresentar aspectos do desenvolvimento histórico epistemológico do conceito de função: representação analítica, tabelas, diagramas e gráficos.

ii – A obtenção da área sobre a curva $f(x) = x^2$ quando $0 \leq x \leq 1$, considerando o método de aproximação utilizado pelos gregos para quadraturas.

iii – Atividades práticas com o Teorema de Pitágoras

iv – Estudando problemas do papiro de Rhind.

v – O método de exaustão de Eudoxo-Arquimedes e a quadratura do círculo.

Com a realização dessas atividades (ou outras de mesmo tipo) os estudantes podem, e devem exercitar na prática a elaboração e a discussão de mais atividades de cunho histórico.

Atividades que em sua estrutura, sejam elaboradas com os seguintes elementos: um tema e objetivos bem definidos ligados a obtenção do conhecimento matemático direcionado a um determinado conceito (ou mais de um).

> Devemos enfatizar que as atividades perpassam ao simples encaminhamento passo a passo e mecanizado. Devem sim, ser conectadas aos aspectos cotidianos, escolares e acadêmicos da cultura matemática. Uma das implicações deste processo é a discussão a partir dos erros e acertos produzidos na busca de respostas que podem encaminhar a novos desafios na resolução de problemas que ampliem e

> multipliquem os caminhos ou estratégias criativas de resolução que levem a novas fronteiras do conhecimento matemático (Brandemberg, 2017a, p. 28).

Podemos, então, considerar como uma atividade de cunho histórico, por exemplo: um fragmento textual, relacionado a uma antologia grega, datado do ano 500, que inicialmente se caracteriza como um problema de adivinhas (lúdico) e que nos nos fornece uma ideia sobre a idade e algumas características da vida de Diofanto de Alexandria (200-284), o qual relatamos em uma tradução obtida a partir de outra realizada por Moritz Cantor (1829-1920) e citada por van der Waerden (1975, p. 278), como segue:

"Nesta tumba jaz Diofanto. É maravilhoso! Podemos contar o tempo da sua vida. Deus o presenteou com a graça de ser um menino por um sexto de sua vida e adicionando um duodécimo a isto, surgiu-lhe a barba. Uma sétima parte depois, ele se casou, e cinco anos depois nasceu seu filho. Pobre criança; ao atingir metade da idade do pai ele sucumbiu ao destino. Depois de enfrentar sua dor por mais quatro anos, terminou sua missão na terra".

De onde concluímos, após a realização de algum cálculo algébrico, que Diofanto viveu por 84 anos. (Heath, 1964).

Mendes (2009a) e Mendes (2009b), sugere um modelo para trabalhar com atividades de cunho histórico. Sua apresentação considera uma forma sequencial onde devem ser organizadas etapas de ensino visando as metas previstas em um planejamento pedagógico. As informações históricas devem conduzir o aluno a uma reconstrução de aspectos conceituais relevantes para o aprender matemática. Além disso, tais informações nos permitem acesso ao momento histórico em que foram produzidas.

Segundo Mendes (2009a, p. 120-124), um roteiro para apresentação de atividades estruturadas deve ter o seguinte formato:

I – **O nome da atividade** – Indica o tema central e o conteúdo que se pretende estudar.

II – **Os objetivos da atividade** – Deixar claro as principais finalidades da realização da atividade visando à construção do conhecimento matemático.

III – **O conteúdo de cunho histórico** – Funciona como elemento motivador e gerador do conhecimento matemático, visando esclarecer alguns questionamentos dos estudantes sobre o conteúdo estudado, além de possibilitar a comparação das estratégias de resolução de problemas em momentos históricos distintos.

IV – **O material utilizado** – Deve ser obtido, apresentado e utilizado no desenvolvimento da atividade.

V – **A operacionalização da atividade** – Esclarece os procedimentos metodológicos que nortearão o desenvolvimento da atividade em suas fases, que vão da manipulação dos materiais, a comunicação (representação) oral (simbólica), até a abstração.

VI – **Os desafios propostos na atividade** – A atividade deve ser atrativa e desafiadora para provocar o interesse dos estudantes. Os desafios geralmente estão presentes em textos históricos ou mesmo em livros de história da Matemática. O importante de um desafio é desenvolver no estudante um espírito investigador do conhecimento matemático.

VII – **O exercício de sistematização e formalização do conhecimento** – Toda atividade deve apresentar uma sequência de ações que levem o estudante a formalização das ideias matemáticas construídas ao longo do processo.

VIII – **Atividades complementares** – podem ser sugeridas pelo professor e/ou pelos estudantes a partir da realização da atividade desenvolvida em sala de aula.

A título de exemplo, seguindo o roteiro de Mendes (2009), apresentamos a seguir uma atividade relacionada a matemática islâmica, mais precisamente a obra de Al-Khwarizmi (780-850).

Título:

Um problema de Al-Khwarizmi, do século IX, que nos remete a resolução de uma equação do segundo grau.

Objetivos:

- Estudar o método histórico de resolução apresentado;
- Discutir a técnica geométrica de completamento de quadrados;
- Observar a representação retórica na apresentação da solução;
- Comparar as estratégias de resolução do problema.

O conteúdo:

Apresentar um texto sobre Al-Khwarizmi e sua obra com ênfase nos problemas que nos remetem a resolução de equações do segundo grau (de preferência em língua materna). Por exemplo, extratos do texto A History of Algebra de B. L. van der Waerden, Springer-Verlag, 1985.

O material utilizado:

Produção de um texto contendo o conteúdo citado anteriormente, que deve ser apresentado aos alunos. Textos complementares sobre história da Matemática (livros, artigos, revistas, textos digitais).

Operacionalização:

Inicialmente é feita a reprodução do texto para leitura (traduzido e ou adaptado de fonte original) e discussão em grupo (pode ser individual, porém reduz a discussão inicial). Os problemas podem ser apresentados somente com o enunciado e com a solução retórica característica da época (ou os alunos recebem o material completo e são orientados a tentar resolver o problema no formato “antigo”).

Os desafios:

O texto apresentado traz como desafio inicial a proposta de obter a solução de um problema escrito em linguagem materna, que requer do estudante a interpretação do problema que se apresenta em uma tradução da tradução de um texto histórico. Esta dificuldade na leitura inicial deve provocar no estudante a necessidade de elaborar uma escrita mais coloquial ou mais formal, adequando o problema a sua prática escolar.

Sistematização e formalização:

A atividade proposta com a apresentação do texto de cunho histórico produzido se conforma em uma leitura e estudo de problemas que apresentam a resolução de uma equação do segundo grau para sua solução. Os estudantes devem buscar entender a solução retórica (do tipo receita) apresentada, e buscar fazer sua representação a partir da resolução dos problemas contidos na atividade. Em seguida os estudantes resolvem os problemas com a utilização da notação moderna. Desta forma, é possível comparar as estratégias de resolução e valorizar o trabalho dos estudiosos matemáticos na produção do conhecimento.

Atividades complementares:

Neste tema, a possibilidade de elaboração de atividades complementares é muito fértil. O professor e os alunos podem buscar conhecer métodos de resolução de equações em momentos anteriores (antiguidade) ou mesmo em momentos posteriores (renascimento italiano).

Ainda, segundo Mendes (2015, p. 257-258), devemos atentar ao projeto a ser desenvolvido. Uma preocupação que nos permita obter explicações a respeito dos modos de investigar, compreender e explicar a construção histórica dos conteúdos, tomando os cuidados necessários ao uso da história da matemática como componente metodológica, isso nos permitirá garantir o foco nossas decisões e tornar o trabalho mais efetivo e menos desgastante. Assim, é necessário considerarmos questões básicas, visando os resultados esperados. A saber,

- O que se pretende fazer ou investigar? (Qual conteúdo ou conceito matemático considerar?);
- Por quê? (Se refere a justificativa do tema);
- Para que? (Se refere aos objetivos);
- Como? (Se refere ao método de abordagem, a partir da História da Matemática);
- Com quem? (Se refere às pessoas envolvidas no processo);
- Com o que? (Se refere aos recursos materiais necessários ao processo);
- A quem? (Se refere a clientela a quem se destina o trabalho);
- Quando? (Se refere ao cronograma);
- Onde (procurar)? (Se refere ao local de execução e especialmente as fontes de pesquisa a serem tomadas) (Mendes, 2015).

Com estes direcionamentos, devemos buscar esclarecer o que, de fato, o uso da História da Matemática como componente metodológica, considerando as potencialidades didáticas do uso de textos históricos pode trazer de luz aos aspectos do desenvolvimento de conteúdos matemáticos, sua importância, sobre o trabalho dos matemáticos que contribuíram para este desenvolvimento e o processo de ensino em sala de aula.

Na busca de determinar os temas a serem selecionados precisamos ser cuidadosos, no sentido de adaptar as atividades as necessidades do currículo escolar e ao nível cognitivo dos estudantes.

Em acordo com Mendes (2015, p. 291) e Brandemberg (2017a, p. 28) essa adaptação (escolha) pode ser realizada considerando alguns aspectos relacionados ao uso da história em sala de aula, a saber:

i) Atividades manipulativas extraídas diretamente da história da matemática.
ii) Atividades manipulativas adaptadas da história da matemática.
iii) Desenvolvimento de projetos de investigação temática.
iv) Investigação de problemas históricos.
v) Estudos de textos históricos adaptados de fontes primárias.

vi) Estudos de textos históricos extraídos de fontes primárias.

Vemos em nossa forma de buscar materiais históricos sobre o desenvolvimento de conceitos (conteúdos) matemáticos, com vistas a discutir aspectos didáticos destes conteúdos, estudar suas formas e contextos de produção, para trazer maiores informações em uma descrição, mesmo que macro, dos conteúdos presentes nos textos em estudo, considerando aspectos da influência sociocultural de sua produção, com especial atenção ao seu desenvolvimento e ao seu ensino. Outrossim, consideramos realizar uma análise mais micro de conteúdos selecionados dos textos históricos com vistas a discutir suas potencialidades didáticas para o ensino.

Inferimos com esta ação possibilitar uma " simplificação" do conteúdo matemático em estudo, em uma combinação de aspectos teóricos e práticos de sua produção, para obter maior clareza e precisão, tornando o seu entendimento mais fácil e garantindo suas aplicações.

No que segue, apresentamos alguns resultados que tratam do uso da história da matemática no ensino de conteúdos matemáticos, sendo através da discussão de potencialidades didáticas do desenvolvimento de conceitos, da elaboração de atividades de cunho histórico ou de uma mescla (amálgama, tessitura) destas ações no contexto de sala de aula ou mesmo em propostas teóricas. (Brandemberg, 2018)

Sobre experiências realizadas

Em uma abordagem que considera o desenvolvimento de conceitos matemáticos, temos que Mendes (2001), Brandemberg e Mendes (2005), Mendes (2015) e Brandemberg (2017a) discutem conceitos da Aritmética, da Álgebra, da Trigonometria e do Cálculo; onde tais conceitos são apresentados, buscando esclarecer sua importância e significado, mesmo que de forma não linear, a partir da discussão de conceitos elementares obtidos em estágios anteriores de seu desenvolvimento histórico.

Com relação ao uso de textos históricos no processo temos nos trabalhos desenvolvidos por Serrão e Brandemberg (2014), Lopes (2016), Brandemberg (2017b), Guimarães Filho (2018) e Sousa (2019) discussões a respeito do uso da história em procedimentos (processos, métodos, tecnologias) de ensino, que permitam aos estudantes uma aprendizagem com significado dos conteúdos, e os levam a considerar e analisar potenciais didáticos nos textos históricos, objetos de suas pesquisas.

Vejamos, então, uma apresentação descritiva de tais resultados:

Mendes (2001), nos traz em seu texto reflexões sobre o uso da história da matemática no ensino, a partir de suas experiências com estudantes, argumentando que o uso da história em processos de ensino de conteúdos matemáticos é efetivo.

Brandemberg e Mendes (2005) nos apresentam processos de resolução de problemas de cunho histórico a partir de exemplos particulares, coletados em fontes originais, e querendo proporcionar aos estudantes, o contato com os métodos utilizados e as dificuldades características de cada época, para resolver estes problemas; criando possibilidades de comparação das estratégias de resolução antigas com as atuais, identificando suas vantagens e desvantagens. No texto do artigo, tratam de problemas de aritmética sobre o conceito de números perfeitos, uma discussão de sistemas lineares e um problema sobre proporcionalidade, onde discutem o método da falsa posição.

Serrão e Brandemberg (2014) nos trazem os resultados de sua pesquisa cujo foco foi investigar problemas matemáticos da antiguidade, visando localizar problemas clássicos e suas possíveis formalizações e representações, ao longo da história, de modo a podermos compreender seus elementos e compará-los. Realizam uma investigação e estudo de equações a partir da obra Aritmética de Diofanto, do século III, que lhes permite selecionar problemas de cunho histórico em um processo de integração, visando oferecer aos professores da educação básica, apontamentos e sugestões para a exploração deste tipo de problemas como meio de superação de dificuldades de aprendizagem em sala de aula. Uma vez que propõe que com a utilização da história da matemática, se promove uma integração da Matemática do passado com a Matemática dos dias atuais oportunizando uma forma de tratamento dos conteúdos e conhecimentos matemáticos contextualizados.

A pesquisa de Lopes (2016) nos apresenta algumas ideias e métodos emergentes do texto *Aritimética Infinitorum* de John Wallis (1616-1703), apontando o seu potencial pedagógico para o ensino de conceitos matemáticos em uma perspectiva de melhorar o entendimento de estudantes em um curso de formação de professores.

Brandemberg (2017b) em seu artigo realiza uma introdução ao trabalho do matemático jesuíta alemão Christoph Clavius (1538-1612) partindo de uma leitura dos capítulos iniciais de seu livro *Epitome Arthmeticae Practicae* (1614), onde, são descritos aspectos das operações elementares apresentadas, seu estudo e a importância da aritmética no início do século XVII.

Nos descreve Clavius, como um professor, que além de sua contribuição teórica para a matemática, foi um de seus maiores promotores. Com relação à importância de seu trabalho relacionada ao ensino de aritmética, considera o início de um novo estágio no desenvolvimento de notações e algoritmos. Trata-se de uma aritmética prática, para ser empregada, inicialmente, nas transações comerciais, uma representação de receitas e despesas por uma lista de números e suas operações de adição e subtração para indicar os acréscimos e as retiradas e esclarecendo o porquê destas circunstancias, principalmente, na prestação de contas, tanto na esfera pública quanto na privada. Uma ferramenta indispensável para o cálculo de impostos, evitando e reconhecendo possíveis fraudes. Com seu texto ele deseja proporcionar aos leitores as vantagens do conhecimento aritmético. Enfim, seu trabalho se faz importante na sistematização e divulgação do conhecimento matemático produzido em seu tempo.

Guimarães Filho (2018) nos brinda com um relatório de pesquisa evidenciando que o matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, contribuiu significativamente para a comunidade matemática de sua época, despertando atenção de pessoas importantes desse período como o rei Frederico II, e que a seu convite Fibonacci participou de um torneio matemático, o qual, teve como seguimento a construção de sua importante obra denominada *Liber Quadratorum*. Guimarães Filho questiona: quais são as potencialidades didático/pedagógicas que podem ser evidenciadas a partir das proposições enunciadas e de suas demonstrações que podem ser usadas em sala de aula para efetivar o ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos? Para responder este questionamento, objetiva analisar os problemas contidos no *Liber Quadratorum,* visando maior entendimento dos conceitos, provendo um material em português e buscando identificar possíveis potenciais didático/pedagógicos. Para tanto, busca materiais que garantam o estudo e a produção de um texto base para a construção do material em português referente a doze proposições contidas no *Liber Quadratorum*, que versam sobre a relação de sequências de números ímpares consecutivos e números quadrados realiza um passeio pelo período vivenciado por este importante personagem, que foi professor e escreveu sobre a matemática, destacando. sua influência para o desenvolvimento e divulgação dos métodos algorítmicos da matemática árabe na Europa no início do século XIII. Finalizando ele constrói uma base para que possa apontar as potencialidades didático/pedagógicas do livro de Fibonacci. Assim, foi possível responder aos questionamentos e apontar potencialidades como: construção de diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas, atividades de potenciação, principalmente de quadrados, atividades com raiz quadrada, entre outros descritos neste relatório. Desta forma, trabalhar o *Liber Quadratorum* para fins explicitamente pedagógicos.

Sousa (2019) nos apresenta seu texto, que ele descreve, como uma pesquisa que teve por finalidade identificar, segundo Miguel (1993) e Miguel (1997), potencialidades pedagógicas da história da matemática presentes nos conteúdos apresentados no livro texto de Lazare Carnot (1753-1823): Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal (1797). As potencialidades pedagógicas foram relacionadas por meio de uma adequação/transposição para se entender os percursos percorridos até a atual forma de ensinar o Cálculo. Leituras cientificas relevantes sustentam sua pesquisa e possibilitam sua fundamentação teórica, revelando a influência de livros texto de Cálculo no ensino. Realizou uma tradução da edição de 1798 e de trechos da edição de 1813, originalmente em francês. Tomando como um de seus objetivos pesquisar a vida e obra de Carnot em seus contextos sociocultural e acadêmico ele busca entender os conteúdos elencados e suas relações com os conteúdos trabalhados no Cálculo atualmente, com vistas a verificar as potencialidades pedagógicas do texto referentes ao conteúdo Derivadas e seu ensino. Evidencia que a história da matemática encontrada no livro de Carnot apresenta potencialidades pedagógicas para seu uso no ensino de Cálculo Diferencial.

A apresentação e discussão de pesquisas como as que relacionamos anteriormente nos permitem condições necessárias para considerarmos uma discussão teórica sobre as potencialidades do uso da História da Matemática no ensino. Uma discussão em que de início, nos apoiamos nos resultados trazidos pelas pesquisas elencadas e que institui das considerações teóricas de autores como Miguel (1993 e 1999) e Mendes (2009a e 2015), como descrevemos a seguir.

Sobre as potencialidades pedagógicas do uso de textos históricos para o Ensino de Matemática

De posse do exposto e das discussões anteriores consideramos as discussões presentes em Mendes (2009a) e as orientações para os professores em Mendes (2015) que os conteúdos a serem trabalhados em sala de aula devem considerar os aspectos do seu desenvolvimento histórico-epistemológico. Nesta linha, Mendes (2015) toma tópicos selecionados, inicialmente ligados a conceitos trigonométricos, diretamente extraídos da História da Matemática ou adaptados, e Brandemberg (2017a) direciona o foco para o estudo de textos clássicos produzidos ao longo da história.

> [...]do estudo de textos clássicos como: o "Traité des Substitutions et des Équations Algébriques" de JORDAN (1957), o "Reflexions sur la Résolution Algébrique des Équations" de LAGRANGE (1771), o "Disquisitiones Arithmeticae" de GAUSS (1801), o "Volständige Anleitung zur Algebra" de EULER (1770), o "Líber Abaci" de FIBONACCI (1202), o "Ars Magna" de CARDANO (1545) ou o "Al - Jabr" de AL Khowarizmi (século IX); e do que denominamos de estudo da evolução (ou desenvolvimento de conceitos). (Brandemberg, 2017a, p. 20-21).

Tais inserções teóricas se soerguem das assertivas que o conhecimento matemático extraído ou oriundo dos conteúdos presentes em textos históricos nos permitem formatos de aprendizagem, como a comparação de estratégias de resolução de problemas, que garantem da percepção do desenvolvimento conceitual e dos aportes epistemológicos dos conceitos em estudo, bem como das facilidades, visíveis, das resoluções atuais. Assim, como professores, vamos além da beleza dos processos de resolução históricos e tentamos garantir uma aprendizagem que se preocupa com as experiências anteriores, acadêmicas, escolares ou do cotidiano, de nossos alunos. (Brandemberg, 2017a).

Como vimos Brandemberg e Mendes (2005, p. 4) afirmam que o contato dos estudantes com as tecnologias e métodos utilizados e as dificuldades inerentes a resolução de problemas em cada época, oportuniza o reconhecimento de uma Matemática que se faz historicamente como uma produção de cunho sociocultural humano.

Assim, tomando os aportes de Fauvel e van Maanem (2000), Miguel (1997) e Mendes (2015), argumentamos em favor do uso da história como componente metodológica para o ensino de matemática, e das discussões levantadas em Miguel (1993) e Mendes (2009a), apontamos para o potencial didático de textos históricos a partir do estudo e análise de textos clássicos, como os elencados na seção anterior e outros que podem ser trabalhados.

Em acordo com Miguel (1993, p. 12) o uso da história como componente metodológico " adicional" é potencialmente rico ao se promover e repensar questões relativas ao ensino de matemática. Uma preocupação presente no ensino de matemática desde o século

XVIII, com vistas a facilitar a tarefa de estudantes iniciantes (calouros), e se constituindo na primeira forma de relação entre a história e a educação matemática. Assim, trazendo argumentos que reforçam as potencialidades pedagógicas da História da Matemática em práticas efetivas de ensino e aprendizagem da matemática.

Nossa concepção do uso da história se configura na dimensão didático-metodológica, buscando a proposição de um método para o ensino de conteúdos matemáticos. Numa linha de como o conhecimento matemático se produz (desenvolve), se ensina e se aprende.

Para Miguel (1993, p.32) a história se configura em um instrumento desta compreensão e avaliação dos conteúdos e que pode se configurar em um instrumento de transformação, permitindo ao professor se superar e reorientar suas ações pedagógicas.

Nessa linha, Mendes (2009b, p. 104) e Mendes (2015, p. 290), considerando a importância do uso da história no ensino, propõe sugestões de ação docente (didáticas) aos professores, cabendo ao professor tomar para si o direcionamento (orientação) das atividades a serem executadas.

Desta forma, em consonância com nosso referencial, nesta seção buscamos conceituar o que consideramos potenciais didáticos a serem explorados no ensino a partir do estudo de textos históricos de matemática. Para tal, faz-se necessário delinear o que nos surge como um potencial didático.

Tomamos, inicialmente, como um conceito de potencial didático, considerarmos os processos pelos quais são assimilados os conhecimentos e as experiências acumulados pela prática social da humanidade, criando um conjunto de condições metodológicas e organizativas para viabilização do ensino dos conteúdos, ou mesmo imagens parciais (aspectos) de tais processos, que possam ser integralizadas a partir dos textos históricos em análise.

Assim, entendemos como potencial didático, as qualidades ou fatores positivos que viabilizem a prática docente, em nosso estudo, todas as possibilidades de uso das informações contidas nos textos históricos admissíveis de uma transposição didática, com a função de operacionalizar o ensino de matemática.

A transposição didática aqui mencionada alude a constituição do saber escolar ou acadêmico, já que a educação escolar ou acadêmica não se limita apenas em fazer uma seleção de saberes que estão disponíveis na cultura em algum momento histórico, e sim em transformá-los em saberes possíveis de serem ensinados e aprendidos. Um processo que faz com que os objetos do saber matemático erudito se transformem em saberes a ensinar, inscritos no projeto de ensino, e depois em saberes de ensino (Mendes e Chaquiam, 2016).

Consoante a Miguel (1997) e Mendes (2001), um texto histórico de matemática, além de proporcionar elementos motivadores ao estudante, constitui-se em uma fonte de atividades de cunho histórico que podem ser adequadas ao ensino de conteúdos matemáticos e garantindo elementos que permitam a formalização de conceitos. A utilização de um texto histórico se converte em um instrumento de verificação do desenvolvimento epistemológico dos conteúdos matemáticos que deve promover uma aprendizagem matemática mais abrangente e com significado.

Assim, uma abordagem metodológica como a que recomendamos, utilizando a História da Matemática dos conteúdos presentes nos textos históricos como componente metodológica, tem como finalidade principal dar um significado contextual aos conteúdos abordados nos cursos de Matemática e, além disso, servir como elemento de motivação para o desenvolvimento conceitual do aluno.

Uma proposição para o Uso da História no ensino de Matemática

Percebemos com o exposto, anteriormente, que os problemas presentes nos textos históricos são detentores de potenciais para o ensino de matemática. Assim, estes textos nos possibilitam propor, a partir de seus extratos, questões-problemas que promovam as habilidades exigidas, atualmente, pelo currículo de ensino em cursos de matemática. (Guimarães Filho e Brandemberg, 2017).

Desta forma, uma exploração "criativa" dos conteúdos extraídos de textos matemáticos históricos, pode nos trazer contribuições didático-pedagógicas para o ensino.

Queremos nesta seção elencar possíveis potenciais didáticos a serem explorados em textos históricos, como os que vimos apresentando.

Neste sentido, buscamos em Miguel (1997), argumentos favoráveis ou que reforçam as potencialidades do uso de um texto histórico de matemática em uma proposição de ensino.

Apontamos, então, como exemplificação, algumas potencialidades a serem exploradas, nos contextos de ensino, a partir do conteúdo de um texto histórico particular, o texto referenciado em Clavius (2012). A saber o conteúdo matemático presente nos capítulos do *Epitome Arithmeticae Practicae* (1614):

- Permite a construção de diversas formas de tratar as operações de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de números inteiros ou fracionários, a partir da descrição dos algoritmos e da notação apresentada;

- Garante a produção de atividades envolvendo os métodos de verificação de resultados operatórios (na primeira parte do texto) e envolvendo métodos de resolução de problemas que envolvem proporcionalidade (segunda parte do texto);

- Discute aspectos da história da humanidade, a partir da investigação da vida e da obra de um matemático: Christoph Clavius (1538-1612,) (o autor do texto);

- Possibilita estudar a evolução da linguagem matemática (no campo da Aritmética). (Brandemberg, 2017b).

Entendemos que as potencialidades elencadas se harmonizam aos argumentos que discutimos, bem como, pertencem ao tipo de argumento histórico-epistemológico, característico da utilização de um texto histórico para o ensino.

Desse modo, o professor terá a oportunidade e os mecanismos necessários para propor situações que possam conduzir os alunos a uma redescoberta do conhecimento através dos problemas históricos investigados, na perspectiva de construir sua aprendizagem por meio da aquisição de conhecimentos e da redescoberta de princípios e métodos. (Mendes, 2015).

Dessa maneira, para que a História da Matemática seja considerada um elemento (recurso) didático para o ensino de matemática é importante que as abordagens históricas utilizadas em sala de aula estejam vinculadas ao conteúdo a ser estudado, procurando encontrar justificativas, para a importância e a necessidade de ensino do mesmo, motivando, ativando e aguçando a curiosidade dos estudantes.

Nesse direcionamento, nossa proposição pedagógica, a partir do uso de textos históricos, pode ser tomada como um aliado didático-pedagógico no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos em sala de aula.

Entendemos que tais potenciais didático-pedagógicos se multiplicam se considerarmos a diversidade dos lugares onde se ensina e aprende (produz) matemática. Temos uma diversificação de situações de ensino em práticas que vão além da sala de aula, considerando as interações que compõem o cenário acadêmico-escolar-sociocultural da atuação do educador (matemático), que considera a utilização de textos históricos no ensino propiciar maior visualização dos aspectos do desenvolvimento histórico e sociocultural de uma matemática que vem se constituindo nos contextos das práticas sociais. (Brandemberg, 2018).

Uma Matemática "culturalmente inovadora" que transforma e produz tecnologias em novas práticas didático-pedagógicas que permitem a ampliação em processos educativos.

Considerações

De nossas discussões a respeito dos textos históricos, podemos afirmar que se trata de um produto que pode ser trabalhado como material de ensino de matemática nas escolas para ensinar conteúdos de aritmética, álgebra ou cálculo, visando proporcionar aos estudantes, "novas" formas de resolver problemas em suas práticas cotidiana, acadêmica e escolar. Destarte, os textos se constituem em um material didático-pedagógico.

Assim, de suas escritas, podemos inferir as possibilidades de argumentação e uso dos conteúdos matemáticos presentes, que nos permite considerar extratos destes conteúdos para uma abordagem introdutória em aulas de matemática.

A elaboração, apresentação, discussão e resolução de atividades de cunho histórico, envolvendo problemas práticos, diversificados, deve nos permitir em época de discussão educativa voltada para a postura de um cidadão consciente de sua participação efetiva na sociedade, maior identificação com as problematizações do século XXI.

Desta forma, incentivamos um ensino de conteúdos matemáticos que considere a exploração de aspectos metodológicos, resgatados de fontes históricas, na configuração de atividades de resolução de problemas a serem trabalhadas de forma objetiva com nossos estudantes e que considere o uso de textos históricos como elementos de destaque nos processos de ensino.

Igualmente, uma maior atenção aos problemas matemáticos, apresentados nestes textos, sejam elementares ou de nível médio, como vimos, podem nos dar maior consistência para alcançar conhecimentos mais avançados.

Como vimos discutindo, abordagens desenvolvidas que tomaram o uso da História da Matemática no ensino, apontam a importância do conhecimento do desenvolvimento histórico de conceitos matemáticos que permita o ensino de conteúdos matemáticos em seus aspectos aritméticos, algébricos, geométricos e analíticos.

REFERÊNCIAS

Brandemberg, J. C. (2017a) História e Ensino de Matemática. **Revista Exitus (online);** Volume 7, Número 2, 16-30. UFOPA.

Brandemberg, J. C. (2017b) Uma Introdução ao Christophori Clavii *Epitome Arithmeticae Practicae* (1614). **BOCEHM (online);** Volume 4, Número 112, 81-92. UECE.

Brandemberg, J. C. (2018) História e Ensino de Matemática: uma abordagem partindo do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conteúdos. Belém. **Anais do V SIPEMAT**.

Brandemberg, J. C. e Mendes, I. A. (2005) Problemas Históricos e Ensino de Matemática**. Anais do III EPAEM – Encontro Paraense de Educação Matemática.** Belém.

Clavius, C. (2012) **Christophori Clavii Epitome Arithmeticae Practicae (1614).** Reprint by Kessinger publishing, USA.

Fauvel, J. e Van Maanem, J. (2000) **History in mathematics education**. EUA: Kluwer academic publishers.

Guimarães Filho, J. S. e Brandemberg, J. C. (2017) Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática. **Revista de Educação Matemática e Cultura** – REMATEC/Ano 12/n. 26, 71 – 85.

Lopes, G. L. O. (2016) Contribuições dos Métodos de John Wallis em sua obra Aritmetica infinitorum para professors de Matemática. **Anais do X ENEM**. São Paulo.

Heath, T. L. (1964) **Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra.** New York: DOVER.

Mendes, I. A. (2001) O **Uso da história no ensino da Matemática reflexões teóricas e experiências**. Belém, PA: Eduepa.

Mendes, I. A. (2009a) Atividades históricas para o ensino da Trigonometria. Em Miguel, A. et al, **História da Matemática em Atividades Didáticas**. Segunda edição. São Paulo, SP: Livraria da Física.

Mendes, I. A. (2009b) **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna.

Mendes, I. A. (2015) **História da Matemática no Ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas.** São Paulo, SP: Livraria da Física.

Mendes, I. A. e Chaquiam, M. (2016) **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém, PA: SBHMat.

Miguel, A. (1993) **Três Estudos Sobre História e Educação Matemática.** Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

Miguel, A. (1997) As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké,** Campinas, v. 5, n. 8, p.73-105.

Serrão M.M. e Brandemberg, J. C. (2014) Problemas Matemáticos da Antiguidade como Estratégia para o Ensino de Equações no 9º ano da Educação Básica. **Rematec,** Natal, ano 9/n.16/ p. 130 – 147.

Sousa, F. S. (2019) **Potencialidades pedagógicas do livro *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* de Lazare Carnot para o ensino de Cálculo Diferencial**. Dissertação de Mestrado. PPGECM/IEMCI/UFPA.

Van Der Waerden, B. L. (1975) **Science Awakening I.** EUA: Kluwer.

Autor:

João Cláudio Brandemberg

Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2009). Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1998). Graduação em licenciatura plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1992). Atualmente é Professor Associado III da Universidade Federal do Pará e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra, atuando nos seguintes temas: Educação, Pensamento matemático avançado, Imagem conceitual, História da Matemática, Ensino de Álgebra. Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/3873561463033176. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550. E-mail: brand@ufpa.br.

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p285-316.id842

DUPLICACIÓN DEL CUADRADO Y EL VOLUMEN DE SÓLIDOS EN EL CÓDICE ATLÁNTICO DE LEONARDO DA VINCI: UN ESTUDIO DE LA HOJA 100r

Jeová Pereira Martins
Jeovapereira80@outlook.com
Universidade Federal do Pará

Recibido: 19/12/2019 **Aceptado:** 17/02/2020

Resumen

En este artículo son presentados resultados parciales de una investigación que tomó como base epistemológica los estudios sobre fuentes históricas textuales discutidos por Barros (2004), en este caso, el Códice Atlántico de Leonardo da Vinci con foco en el uso de la historia para la enseñanza de la Matemática. El objetivo central fue interpretar las imágenes representadas en la hoja 100r en busca de las relaciones geométricas que puedan emerger, con el fin de movilizarlas para las aulas de matemática (enseñanza de la geometría) en la Educación Básica, por medio de la problematización de los dibujos y anotaciones en la hoja. El material fue una copia impresa del manuscrito de Da Vinci que contienen 111 hojas e dibujos y anotaciones dentro de las cuales, en este artículo, analizamos la hoja 100r en la cual Leonardo presenta dos temas centrales: la duplicación del cuadrado y las relaciones entre los volúmenes de sólidos. La investigación documental realizada tuvo como fundamentos para la interpretación del lenguaje registrado en la hoja estudiada, elementos de la semiótica de C. S. Peirce a partir de Santaella (1995, 2012). Los resultados apuntan para la posibilidad del establecimiento de relaciones entre la geometría reflejada en el Códice Atlántico de Leonardo da Vinci y la geometría de la Educación Básica con foco en la elaboración de actividades de enseñanza a partir de la problematización (Miguel & Mendes, 2010) de la geometría histórica identificada en el Códice Atlántico.
Palabras clave: Historia de las matemáticas, Enseñanza de las matemáticas, Geometría, Leonardo da Vinci.

DUPLICATION OF THE SQUARE AND THE VOLUME OF SOLIDS IN LEONARDO DA VINCI'S ATLANTIC CODEX: A STUDY OF THE 100r SHEET

Abstract

This article presents partial results of a wider research whose epistemological foundations were the studies on historical text sources discussed by Barros (2004), and which was based on Leonardo da Vinci's Atlantic Codex, focusing on History for the teaching of Mathematics. The main objective was to interpret the images presented on leaf 100r, aiming to find possible geometric relations, and mobilize them during mathematics classes – namely, in geometry lessons – both in Elementary and High School, problematizing the drawings and notes in the

aforementioned leaf. Our source was a printed copy of Da Vinci's manuscript containing 1119 leaves of drawings and notes. Among these is leaf 100r, which we analyze in this article. In it, Leonardo presents two central themes: the duplication of the square and the relations between solid volumes. The documented research we accomplished based the interpretation of the language used in leaf 100r on some elements of C. S. Peirce's semiotics, as defined by Santaella (1995, 2012). The results point out the possibility of establishing relations between the geometry we find on Leonardo da Vinci's Atlantic Codex and the geometry studied at the Elementary and High School level, focusing on the elaboration of teaching activities based on the problematization (Miguel & Mendes, 2010) of the historical geometry one finds on the Atlantic Codex.
Keywords: History of Mathematics, Mathematics teaching, geometry, Leonardo da Vinci.

A DUPLICAÇÃO DO QUADRADO E O VOLUME DE SÓLIDOS NO CÓDICE ATLÂNTICO DE LEONARDO DA VINCI: UM ESTUDO DA FOLHA 100r

Resumo

O presente artigo apresenta resultados parciais de uma pesquisa mais ampla, que tomou como base epistemológica os estudos sobre fontes históricas textuais discutidos por Barros (2004), concretizado no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, com foco no uso na história para o ensino de Matemática. O objetivo central foi interpretar imagens representadas na folha 100r em busca de relações geométricas que possam emergir, a fim de mobilizá-las para as aulas de matemática (ensino de geometria) na Educação Básica, por meio da problematização dos desenhos e anotações da folha. O material empírico foi uma cópia impressa do manuscrito de Da Vinci que contém 1119 folhas de desenhos e anotações dentre os quais, neste artigo, analisamos a folha 100r na qual Leonardo apresenta dois temas centrais: a duplicação do quadrado e as relações entre volumes de sólidos. A pesquisa documental realizada tomou como fundamentos para a interpretação da linguagem registrada na folha em estudo, elementos da semiótica de C. S. Peirce a partir de Santaella (1995, 2012). Os resultados apontam para a possibilidade do estabelecimento de relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e a geometria da Educação Básica com foco na elaboração de atividades de ensino a partir da problematização (MIGUEL & MENDES, 2010) da geometria histórica identificada no Códice Atlântico.
***Palavras-chave*:** História da Matemática, Ensino da matemática, Geometria, Leonardo da Vinci.

Introdução

O presente artigo apresenta resultados e reflexões parciais sobre uma pesquisa mais ampla cujo objeto de estudo é o Códice Atlântico, um manuscrito de Leonardo da Vinci (1452 – 1519) com desenhos e anotações sobre estudos por ele realizados ao longo de mais de 40 anos, sobre temas como ciência dos pesos, anatomia, óptica, balística, arquitetura e geometria. Em nosso trabalho esse manuscrito é uma fonte textual histórica tomado como objeto de estudo segundo a perspectiva da fonte como "discurso", ou seja, como portadoras de informações em si, cujo texto (no sentido ampliado) é abordado qualitativamente na busca por informações que estão submersas em suas camadas complexas, não apenas na superfície (BARROS, 2004, p. 135).

Adentrar essa camadas foi possível a partir de uma interpretação dos desenhos e anotações de Leonardo (o texto) embasada em elementos da Semiótica de C. S. Peirce (1839-1914) entendida como uma ciência que toma como objeto de estudo a linguagem em todas as suas formas e se interessa em revelar como tais linguagens e se organizam para produzirem significações e sentidos no pensamento do observador que passa por uma experiência, ou seja, que tem contato com um determinado tipo de linguagem, aqui de forma específica, a linguagem imagética e textual registrada por Leonardo da Vinci no papel, nas folhas do Códice Atlântico (SANTAELLA, 1995).

A interpretação dessa linguagem foi mediada por uma "arqueologia" (BARROS, 2004, p. 32) que buscou pequenos indícios no texto de Leonardo e os reuniu em um todo que evidenciou aspectos históricos da matemática, pois se trata de um manuscrito do século XV que, além de conter uma matemática do passado, contém, também, os fundamentos dessa matemática que remetem a Grécia antiga, como por exemplo, a folha 100r cujo conteúdo se relaciona com proposições de Os elementos de Euclides (300 a.C.). Essa matemática histórica será mobilizada para o ensino de geometria da Educação Básica, por meio de atividades de Ensino no formato de problematizações segundo Miguel e Mendes (2010).

Em síntese, o que defendemos aqui é que: a interpretação dos desenhos e anotações de Leonardo trazem à tona uma geometria do passado (histórica) que pode ser posta em correspondência com a geometria escolar (atual) por meio de problematizações, indagações provoquem o estabelecimento de relações. Esse movimento que relaciona: a história da matemática, os desenhos de Leonardo, a geometria escolar e o ensino de geometria, é o que poderá contribuir para que o ensino seja praticado da maneira mais eficiente possível, ou seja, que os estudantes apreendam os temas de geometria ensinados e formulem seus conceitos sobre tais temas.

Dessa forma, nosso objetivo é mobilizar a geometria que emerge da interpretação da folha 100r para o ensino de geometria na Educação Básica, por meio da problematização dos desenhos e anotações da folha. Essa mobilização de elementos históricos para o ensino de matemática, uma das características deste trabalho, é uma linha de pensamento que vem permeando pesquisas brasileiras em História da Matemática, pois há um número significativo de estudos em História da Matemática com foco no ensino, por isso, tais trabalhos foram categorizados por Mendes (2015) na tendência história da matemática para o ensino. Portanto, o trabalho que fizemos com a folha 100r do Códice Atlântico tem esse cunho histórico.

O Códice Atlântico é formado por 1119 folhas (em torno de 1750 fragmentos) que tratam de anotações de Leonardo reunidas em um único volume por Pompeo Leoni no final do século XVI em Milão e que passou por processos de restauração e de reorganização até chegar ao formato atual que se encontra na Biblioteca Ambrosiana de Milão. Recebe o nome de Códice Atlântico por se tratar de um manuscrito (*códex*) em folhas no formato atlântico, ou seja, de dimensões 65cm x 44cm e pela inscrição que aparece na capa da encadernação original do século XVI.

> DISEGNI DI MACHINE ET / DELLE ARTI SECRETI . ET ALTRE COSE / DI LEONARDO DA VINCI / RACOLTI DA/ POMPEO LOE / NI (Desenhos de máquinas e de artes secretas e outras coisas de Leonardo da Vinci recompilados por Pompeo Leoni (Sànchez & Almarza, 2008, p. 6-7).

Dentre as edições do Códice Atlântico produzidas pelo mundo a da Editora Fólio de Barcelona (em fac-símili) contém todas as 1119 folhas em 20 volumes com descrição, transcrições e os aparatos críticos de Algusto Marinoni. Desta edição foi organizada uma edição brasileira, que conta com 10 volumes que contemplam as 602 primeiras folhas do Códice Atlântico as quais tomamos como objeto de um estudo exploratório inicial para que se conhecesse o conteúdo das folhas e a partir daí se decidisse qual a melhor forma de se interpretar tal conteúdo.

Cada volume da edição do Códice que estudamos, contém um bloco de folhas de Leonardo (o volume 1, por exemplo, contém as folhas de 1 a 72) todas com reto (frente) e verso (rv) e, ao final desse bloco, páginas com um aparato crítico (referente a cada folha) que contém a descrição em português, a transcrição das anotações de Leonardo feita por Algusto Marinoni[1] em italiano e algumas notas explicativas (Sànchez & Almarza, 2008).

O aparato crítico mencionado foi fundamental para a interpretação que fizemos dos desenhos e anotações de Leonardo da Vinci, mas, como não foi feito com objetivos

[1] Nas décadas de 1960 e 1970, ocorreu um processo restauro do Códice Atlântico que implicou na desencadernação do velho Códice e reencadernação em 12 volumes com os desenhos aos quais se acrescentaram outros 12 volumes de transcrições e aparatos críticos de Algusto Marinoni.

relacionados a geometria e/ou seu ensino, naturalmente, foi necessária a elaboração de um instrumento de leitura para guiar o olhar e o pensamento sobre a folha com o propósito de atingir o objetivo proposto. Esse instrumento (Quadro A), consiste em um grupo de questões que representam algumas das quais ocorreram em meu pensamento quando olhei para a folha pela primeira vez e ocorrem toda vez que repito essa experiência, ou seja, essas questões são uma tentativa de materializar as interrogações que surgiram no meu pensamento quando me deparei com as folhas do Códice Atlântico particularmente a 100r. Mas é necessário esclarecer mais sobre isso!

Entendo como experiência o ato de olhar para os desenhos de Leonardo e, tal ato, causa algum tipo de impressão ou desequilíbrio no pensamento, provoca a criação de imagens mentais, signos que por sua vez criam significados no pensamento. O processo de significação mobiliza, também, conhecimentos do observador que auxiliam na interpretação e busca de significação para o que está sendo captado pelo olhar. Esse processo de significação, a semiose, ocorre no pensamento de quem observa os desenhos, que por sua vez são a materialização da semiose ocorrida no pensamento de quem os fez, Leonardo da Vinci (Santaella, 1995).

O que entendemos é que para que se interprete os desenhos de Leonardo, precisa se considerar que: os desenhos são produto da mente de Leonardo, fruto do processo de significação ocorrido no seu pensamento (semiose) a partir de suas experiências como artista e estudioso das Ciências. Tal processo é mediado pelas pressões internas (características da atividade artística e científica) e externas (fatores culturais e sociais) (Santaella, 1995) e por uma maneira de pensar característica de Leonardo, o pensamento por analogia, ou seja, a busca incessante por elementos que pudessem fundamentar sua arte e justificar a sua maneira de ser artista (Isaacson, 2017).

Por isso Leonardo estudava: ótica, em busca de melhor representar os efeitos da luz em seus quadros, com isso foi o pioneiro na técnica do sfumato; anatomia, para pintar corpos "perfeitos" e representar cada traço como pele, nervos ossos, veias, olhos e outras partes do corpo; e geometria para imprimir em suas pinturas a ideia de movimento. Essas pinturas eram chamadas de pintura psicológica pois transmitiam a sensação de sentimentos como dor, angustia, solidão, alegria, tristeza e sofrimentos e isso exigia do pintor que retratasse os corpos com músculos, braços, pernas, contorcidos, em movimento no plano e a solução para esse problema foi encontrada por Leonardo na geometria, pois, retratar os músculos em movimento, era alterar a sua forma mas manter seu volume e isso é o que ocorre na geometria que estuda a conservação do volume dos corpos. Um sólido geométrico pode ter sua forma alterada, mas seu volume mantido. Uma pirâmide pode ser transformada em um cubo de mesmo volume, assim como um cilindro pode ser transformado em um cone e vice-versa e isso foi mobilizado por Leonardo para a sua arte. Essas foram algumas das analogias que Leonardo fez entre as ciências e sua arte e que caracterizam a maneira de pensar desse Artista (Isaacson, 2017).

Assim, os desenhos de Leonardo ligados a geometria foram feitos no momento em que ele estudava, investigava a geometria em busca de analogias para sua atividade artística. Essa investigação (experimental) emitia resultados que eram por vezes parciais, incompletos ou conclusivos, mas de todo modo, eram as conclusões tiradas por Leonardo dos seus estudos que eram registradas, anotadas no suporte, o papel, na maioria dos casos por meio de desenhos, pois era a ferramenta que ele dominava como artista (Santaella, 1995, 2012).

Todos esses fatores precisam ser levados em consideração para a interpretação dos desenhos de Leonardo. Foram eles nos auxiliaram no método de interpretação dos desenhos e que consideramos para a elaboração do instrumento de leitura dos desenhos (quadro A) que é um "dispositivo de indagação" com o objetivo de desvendar as particularidades da linguagem, textual e imagética contida nas folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci aqui particularmente, a folha 100r (Santaella, 1995).

Quadro A: Instrumento de interpretação dos desenhos

Impressões iniciais	Que impressões a folha com desenhos de Leonardo lhe causa? Você acha que ela trata de que? Ela lhe remete a algo familiar? O que ela lhe lembra? Que traços você identifica na folha? Qual o seu conteúdo? Há desenhos e textos na folha? Você consegue ler o texto? Você os reconhece os desenhos?
Visão geral	A folha tem uma pequena descrição! Essa descrição fala dos temas abordados na folha? São desenhos geométricos? Maquinas de guerra? Maquinas para voar? Estudos sobre Luz e sombra? Maquinas para o trabalho? Maquinas para submergir? Projetos arquitetônicos? Desenhos sobre perspectiva? Projetos hidráulicos? Desenhos sobre anatomia?
Motivações e fundamentos	O que teria levado Leonardo a realizar esses estudos e fazer essas anotações? Por que Leonardo utilizava o desenho em seus estudos? A folha faz referência a alguma fonte como um estudioso da época, um livro ou algum trabalho específico em circulação na época? É possível ter acesso a essa fonte? As folhas que não citam nenhuma fonte têm algum conteúdo que remete a alguma fonte da época? Essa fonte trata matemática ou de geometria? Qual a relação dela com o conteúdo da

	folha?
Visão matemática	Dentre os desenhos da folha há algum que remeta a matemática? A descrição da folha fala de algum tema da matemática? Que matemática é refletida em cada desenho observado? São cálculos aritméticos? Desenhos de geometria? Trigonometria? Sequências numéricas? Ou outro tipo de matemática?
Visão geométrica	Dentre os desenhos sobre geometria, a que geometria se relacionam? Ponto, reta, plano, circunferência, círculo, figuras geométricas planas, sólidos geométricos, quadratura do círculo, quadratura do retângulo, duplicação do cubo, duplicação do quadrado?
Detalhamento	Todo o desenho da folha reflete algum objeto da geometria ou somente uma parte ou desenho específico? Qual seria essa parte ou partes?
Possíveis relações com a geometria escolar	A geometria identificada nos desenhos selecionados tem relação com a geometria escolar? Quais seriam essas relações? Que geometria escolar pode ser mobilizada a partir da "geometria de Leonardo"? Os livros didáticos de matemática contemplam essa geometria? E os documentos curriculares?
Possibilidades para o ensino	Como possível mobilizar a "geometria de Leonardo" para o ensino? Que temas de geometria podem ser ensinados na Educação Básica a partir dos desenhos geométricos de Leonardo da Vinci? Como elaborar atividades de ensino a partir dos desenhos e anotações de Leonardo?
Orientações ao professor	Que esclarecimentos, sobre o estudo feito com o desenho do Códice Atlântico, poderão auxiliar o professor na implementação da proposta em suas aulas de geometria?

Fonte: Elaboração do autor

Todas essas questões serviram de guia para a interpretação dos desenhos da folha em estudo, mas além de guiar o olhar e o pensamento, elas também auxiliaram na explicação e na escrita deste texto que relata os resultados dessa interpretação. Assim, o texto que produzimos é a síntese das respostas de todas essas questões (do quadro A) e de outras que ocorreram no pensamento no momento da leitura dos desenhos e não pudemos captar e materializar na escrita.

Além das questões acima mencionadas, para o estudo da folha 100r seguimos alguns procedimentos práticos que consistiram em:

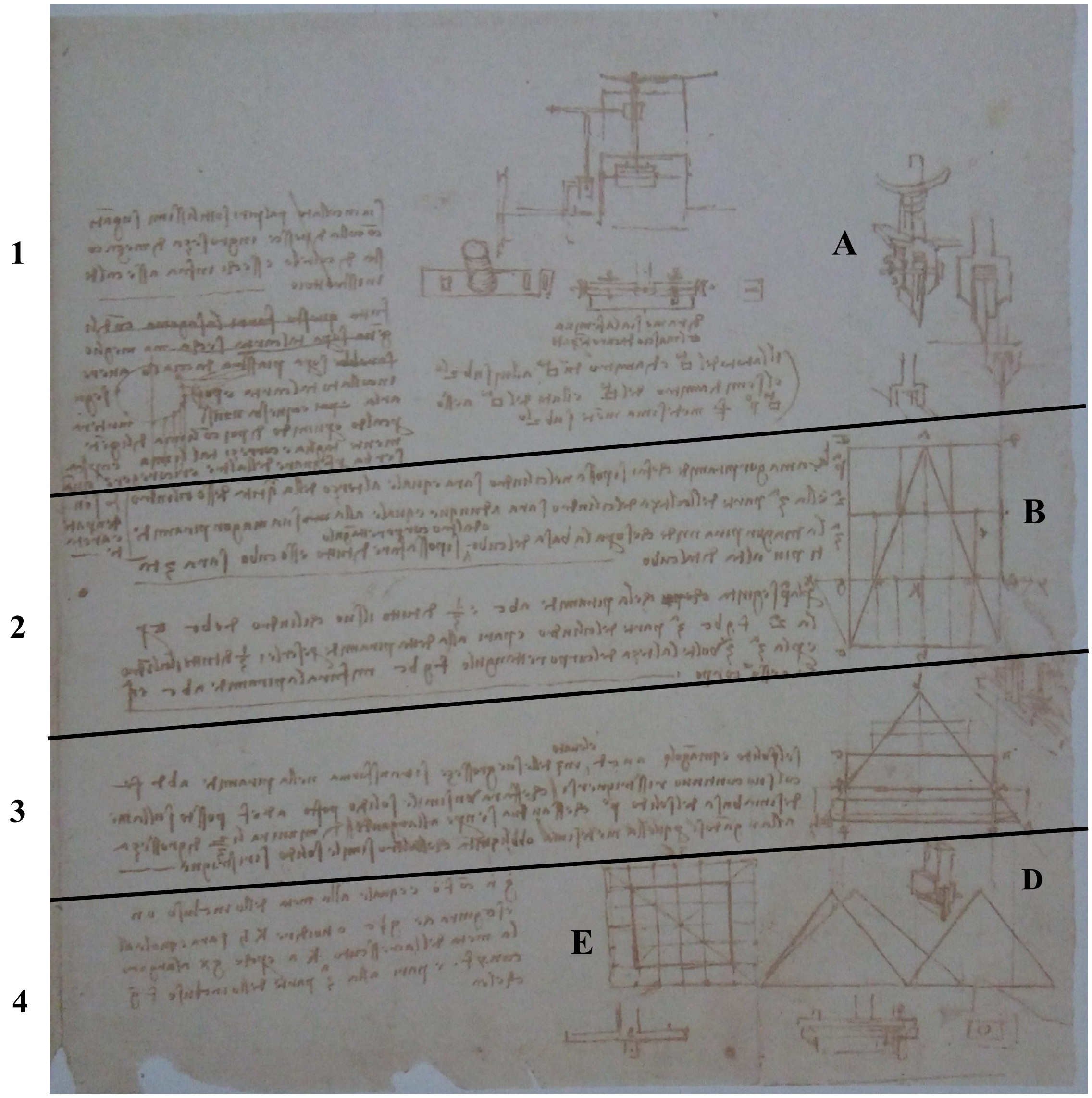
- ✓ Descrição da folha com foco na geometria;
- ✓ Marcações sobre a folha para melhor explicar o seu conteúdo;
- ✓ Tradução da transcrição do texto de Leonardo, para verificar a relação do texto escrito com o desenho;
- ✓ Elaboramos de desenhos a partir dos de Leonardo para facilitar o entendimento dos leitores e;
- ✓ Explicação do conteúdo de geometria da folha relacionando-o com a geometria escolar Educação Básica.

1) Uma interpretação da folha 100r do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci

O estudo de áreas de figuras geométricas planas e do volume de sólidos, são temas aos quais Leonardo dedicou boa parte de seu tempo ao longo de anos. Esses estudos foram registrados por meio de desenhos e anotações como os da folha 100r do Códice Atlântico. Nela há dois temas predominantes: a construção de uma máquina de corte e a geometria, está última objeto de estudo neste texto. É possível que esses temas tenham relação pois o formato da lâmina de corte pode ter influência na sua eficiência, no entanto, em nosso estudo, não iremos considerar a possibilidade de correlação entre os temas, pois para atingir nosso objetivo, é suficiente considerarmos as possíveis relações entre os desenhos geométricos e as anotações de Leonardo na folha.

O verso da folha 100r não é legível, por isso, consideramos os desenhos do reto (figura 1) sobre o qual fizemos algumas marcações: três retas que dividem a folha em quatro partes indicadas pelos números 1, 2, 3 e 4 e as letras A, B, C e D que destacam 4 desenhos. Neste texto aprofundaremos somente o estudo da parte (2), considerando o texto e o desenho (B), e a parte 4 da qual consideramos apenas o desenho (E) por não encontrarmos correlação deste com o texto o que, vale ressaltar, é uma característica das anotações de Leonardo, pois ele fazia anotações de diferentes temas na mesma folha, ou seja, nem sempre há correlação entre as partes da folha como os desenhos e os textos escritos.

Figura 1: Folha 100r



Fonte: Sànchez & Almarza, 2008.

Na parte superior da folha (1) há um grupo de desenhos que se referem a construção de um escopro (A) que é um instrumento para corte, geralmente, utilizado no entalhe de materiais como madeira, pedra, mármore e metais, que pode ter sido pensado por Leonardo para ser utilizado em atividades como as de escultor, por exemplo, que era uma das artes praticadas na época. Além dos desenhos o texto que está próximo deles orienta sobre o procedimento de construção da ferramenta, como no trecho "faça este desenho em papel seco e cole sobre uma chapa de aço para marcá-la e depois cortá-la" (Da Vinci, apud Sànchez & Almarza, 2008, p. 208).

Abaixo do primeiro grupo de desenhos e anotações, do lado direito da folha, é possível observar a presença de quatro desenhos geométricos predominantes: (B) um triângulo inscrito em um retângulo subdividido em três porções retangulares e cada uma destas divididas em seis porções retangulares totalizado 18 porções que compõem área do retângulo; C) um triangulo com retângulos horizontais sobrepostos; (D) um grupo de três triângulos que se interceptam e; (E) um conjunto de dois quadrados concêntricos subdivididos em quadrados menores, um com 36 e outro com 16 porções quadradas. Os desenhos destacados estão na figura 1 que retrata a folha em estudo.

Como já mencionamos, a folha tem como temas a medição de áreas e volumes, mas essa medição não ocorre de maneira isolada que seria a apresentação de um determinado ente geométrico seguida do cálculo referente a sua área ou volume (no caso dos sólidos), Leonardo tem como foco, na folha, a duplicação do quadrado por meio de seus lados e diagonais e a relação entre prisma e pirâmide e entre cilindro e cone por meio dos volumes. Leonardo discute essas relações, fundamentado principalmente em Os elementos de Euclides, fato que detectamos por meio da tradução de suas anotações, em algumas das quais Leonardo faz enunciados equivalentes a algumas proposições de Os elementos.

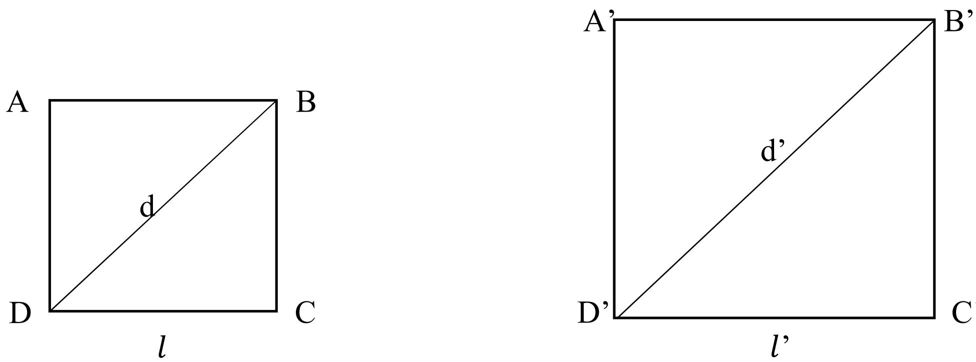
Inicialmente destacamos a parte 2 da folha cujo texto trata da duplicação do quadrado que ocorre por uma relação entre lado e diagonal. É explicitada por Leonardo quando ele anota “o lado de um quadrado é o diâmetro de um quadrado subduplo e a metade do diâmetro do quadrado é o lado do quadrado a esse primeiro também subduplo”[2]. Ressaltamos que o diâmetro a que Leonardo se refere é a diagonal do quadrado e a palavra subduplo denota um quadrado com metade da área de outro quadrado dado. Leonardo não demostrou esse enunciado o que nos levou a fazê-lo (Leonardo, Apud. Sanchez & Almarza, 2008, p. 208).

Poderemos expressar essa relação da seguinte maneira: 1) Dado um quadrado A de lado l, portanto, com área l^2. Sua diagonal será o lado de um quadrado B cuja área é o dobro da área do quadrado A, como consequência; 2) a medida da diagonal do quadrado B terá o dobro da medida do lado do quadrado A, ou seja, a semidiagonal do quadrado B tem medida igual ao lado do quadrado A, o que pode ser demostrado a partir dos quadrados ABCD e A’B’C’D’ da figura 2.

---

[2] Il lato del quadrato è diamitro d'un quadrato a lui subduplo. E'l semidiamitro del quadrato é 'I lato del quadrato a esso quadrato primo medesimamente subduplo.

Figura 2: Quadrados ABCD e A'B'C'D'



Fonte: Elaborado pelo autor

Façamos primeiro a prova da afirmativa 1!

Considere o lado de ABCD é l. Como a área de um quadrado é medida pelo lado ao quadrado, a área de ABCD é $s_1 = l^2$. Já a diagonal d pode ser determinada pelo teorema de Pitágoras, uma vez que $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow d = \sqrt{2l^2} \rightarrow d = l\sqrt{2}$. Agora, considere o quadrado A'B'C'D' e suponha que seu lado l' tenha mesma medida da diagonal do quadrado ABCD, $l' = l\sqrt{2}$, assim, a área de A'B'C'D' será $s_2 = (l\sqrt{2})^2 \rightarrow s_2 = 2l^2$ e, como $s_1 = l^2$, conclui-se que $s_2 = 2s_1$.

Façamos, agora, a prova da afirmativa 2!

Agora precisamos mostrar que a diagonal de A'B'C'D' é o dobro do lado de ABCD. Novamente pelo teorema de Pitágoras $d'^2 = l'^2 + l'^2 \rightarrow d' = l'\sqrt{2}$, mas $l' = l\sqrt{2}$, então $d' = l\sqrt{2}\,.\sqrt{2} \rightarrow d' = l\sqrt{4} \rightarrow d' = 2l$ ou $l = \frac{d'}{2}$.

Como provamos as afirmações 1 e 2, fica provado que um quadrado com lado igual a diagonal de um quadrado dado, terá área igual ao dobro da área do primeiro. Vale ressaltar que a duplicação do quadrado é um problema que remete a antiguidade grega e foi resolvido geometricamente, nesse período, de forma semelhante a que fizemos aqui, ou seja, pela construção de um quadrado com lado sobre a diagonal do quadrado que se deseja duplicar.

Esse problema antigo, faz parte da história da matemática e caracteriza parte de seu desenvolvimento na Grécia antiga. Ele foi trazido à tona pelos desenhos e anotações de Leonardo na folha 100r, ou seja, a discussão do problema foi disparada pelo estudo e interpretação do desenho que revelou uma geometria histórica. O que defendemos neste trabalho é que esse movimento que relaciona: a história da matemática, os desenhos de Leonardo, a geometria escolar e o ensino de geometria, é o que poderá contribuir para que o ensino seja praticado da maneira mais eficiente possível, ou seja, que os estudantes apreendam os temas de geometria ensinados e formulem seus conceitos sobre tais temas.

A princípio a duplicação do quadrado não tem relação com o estudo sobre volume feito na folha, porém, a duplicação do quadrado se relaciona com a duplicação do cubo, outro problema da Grécia antiga, cujas tentativas de resolução se utilizaram da solução da duplicação do quadrado. Ocorre que Leonardo ao estudar a conservação de volumes dos sólidos geométricos se deparou (em algum momento) com a duplicação do cubo e, por consequência com a duplicação do quadrado. Quando tentou demostrar (na folha 100r) a relação entre volume dos sólidos, lançou mão do que tinha conhecimento, para fazer tal demonstração, que se encontra (2) cujas anotações estão ao lado do desenho (B) do triângulo inscrito no retângulo, e serão estudadas a partir daqui (Isaacson, 2017).

Observamos que Leonardo organiza o texto por um procedimento com características de uma demonstração matemática uma vez que parte de algo já válido para provar o que pretende. O faz por meio de um procedimento lógico que consiste em três enunciados e uma conclusão organizados em 4 parágrafos, três com os enunciados que Leonardo identifica (primeira, segunda, terceira) e uma conclusão que sintetiza as três e as relaciona com o desenho ao lado. Estudaremos primeiro os três enunciados:

> Primeira. A maior pirâmide que pode ser feita no cilindro será igual a um terço da quantidade do cilindro; Segunda. E a terça parte da altura do cilindro será, portanto, igual a sua maior pirâmide; Terceira. A pirâmide maior, sobre a base do cubo ou de outro corpo retangular, poderá ser transformada em um cubo cuja altura é a teça parte da altura da pirâmide (Da Vinci, Apud Sànchez & Almarza, 2008, p. 208)[3].

A primeira afirmação causa um estranhamento, inicialmente, pois, a relação conhecida se estabelece entre os volumes da pirâmide e de um prisma de mesma base e não entre pirâmide e cilindro. Para esclarecer tal situação consultamos duas edições em português de Os elementos de Euclides, Euclides (1944, 2009)[4]. Em Euclides (1944, p. 126) a definição XVIII do Livro XI afirma que "Pirâmide cônica é uma figura sólida, que fica formada pela revolução

[3] Prima. La maggior piramide che far si possa nel cilindro, sarà equale al terzo della quantitá d'esso cilindro; Seconda. E la terza parte dell'ealtezza del cilindro sarà adunque equale alla sua maggior pirâmide; Terza. La maggior piramide, che sopra la basa del cubo o d'altro corpo rettangulo si possa fare di tutto esso cubo, sarà tre tanti più alta di tal cubo.

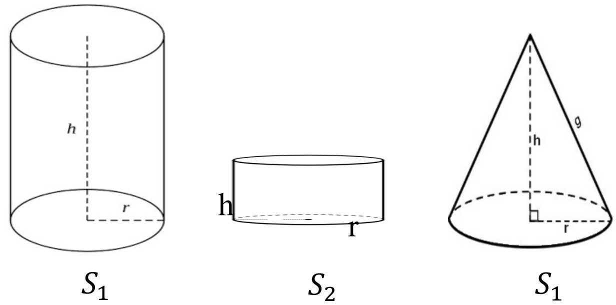
[4] A de 1944 foi traduzida por Frederico Commandino e a de 2009 foi traduzida por Irineu Bicudo.

inteira de um triângulo retângulo ao redor de um lado daqueles, que compreendem o ângulo reto [...]". Sabemos que a revolução completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos gera um cone, ou seja, o que é chamado de pirâmide cônica é o que se conhece como cone, atualmente. Isso pode ser comprovado por Euclides (2009, p. 482) no qual há a definição de cone cuja essência é a mesma da Euclides (1944), porém o termo *pirâmide cônica* não é usado, mas sim a palavra *cone*. Assim entendemos que ao mencionar o termo pirâmide na primeira afirmação, Leonardo não se refere a pirâmide e sim a pirâmide cônica, ou seja, ao cone cujo volume tem relação com o volume do cilindro.

Destacamos que o fato de Leonardo usar o termo pirâmide onde seria cone, pode ter ocorrido por dois fatores: por ser o termo "pirâmide cônica" o usual na época (como encontramos em Euclides (1944)) ou, por problemas relacionados a tradução de Os elementos de Euclides do grego ou do latim para a sua língua materna pois, a primeira edição impressa foi publicada, em Veneza (em latim) no ano de 1482 e pode ter sido adquirida por Leonardo, assim como outra edição de 1509 do frade italiano Luca Pacioli (1447-1517) com quem Leonardo conviveu na corte de Ludovico Sforza em Milão no período de 1496 a 1499 e com quem aprendeu geometria (Isaacson, 2017).

Assim, concluímos que quando Leonardo escreve "a maior pirâmide que pode ser feita no cilindro" ele se refere ao cone como o conhecemos atualmente. Dessa forma, nosso entendimento é que a relação que ele pretendia estabelecer na primeira afirmação é aquela entre os volumes do cilindro e do cone que, constam em Os elementos de Euclides na proposição 10 do Livro XII: "Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual" (Euclides, 2009, p. 543). Como se segue.

Figura 3: Relação entre cilindro e cone



Fonte: Elaborado pelo autor

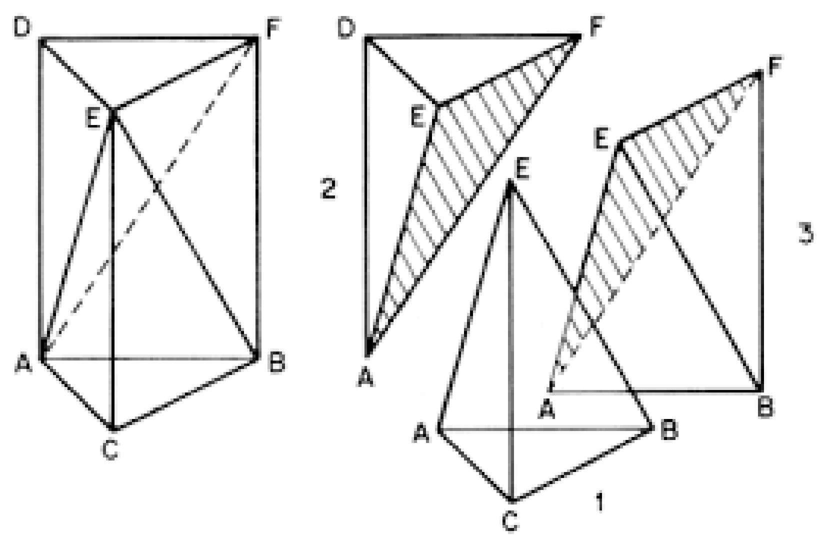
Considere os cilindros S_1, S_2 e o cone S_3 com mesmo raio ($r_1 = r_2 = r_3$), cujas alturas são h_1, h_2 *e* h_3 e volumes são V_1, V_2 *e* V_3. Considere que a altura de S_2 é a terça parte da altura de S_1, ou seja, $h_2 = \frac{h_1}{3}$. Como o volume do cilindro é o produto da área da base pela altura, ou seja, $V_1 = A_b.h \rightarrow V_1 = \pi.{r_1}^2.h_1$. Da mesma forma, $V_2 = \pi.{r_2}^2.h_2$. Mas $h_2 = \frac{h_1}{3}$, logo, $V_2 = \pi.{r_1}^2.\frac{h_1}{3}$ que é equivalente a $V_2 = \frac{1}{3}\,\pi.{r_1}^2.h_1$, mas $\pi.{r_1}^2.h_1 = V_1$, portanto, $V_2 = \frac{1}{3}\,v_1$. Sabe-se, ainda que o volume do cone é a terça parte do volume do cilindro $V_3 = \frac{1}{3}\,v_1$, mas como $V_2 = \frac{1}{3}\,v_1$, $V_3 = V_2$. Desta última relação pode-se afirmar, então que o volume de um cone é equivalente ao de um cilindro com mesma base e altura igual a terça parte do cone. Mas esta última relação é exatamente o que foi observado por Leonardo ne segundo enunciado “E a terça parte da altura do cilindro será, portanto, igual a sua maior pirâmide”.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio Leonardo estende a relação entre cilindro e cone para os sólidos, pirâmide e prisma, quando na terceira afirmação anota “a pirâmide maior, sobre a base do cubo ou de outro corpo retangular, poderá ser transformada em um cubo cuja altura é a teça parte da altura da pirâmide”, ou seja, uma pirâmide tem volume equivalente ao de um cubo com um terço de sua altura desde que a pirâmide e o cubo tenham a mesma base.

Essa afirmação feita por Leonardo na folha 100r do códice atlântico, possivelmente, tem como fundamento o Livro XII de Os elementos cuja proposição VII é “Todo prisma, tendo um triângulo como base, é dividido em três pirâmides iguais entre si, tendo triângulos como bases” (Euclides, 2009, P. 539). Dessa forma, uma pirâmide com mesma base e altura de um dado prisma tem volume igual a terça parte do prisma, ou ainda, se o prisma for dividido em três partes de mesmo volume, cada um deles (prismas com um terço da altura do primeiro) terá volume equivalente ao da pirâmide em estudo. Essa relação é estendida para prismas e pirâmides que tenham bases diferentes dos triângulos, pois “[...] é evidente que toda pirâmide é uma terça parte do prisma que tem a mesma base com ela e igual altura [...]” o que também é feito por Leonardo na terceira afirmação (Euclides, 2009, p. 540).

Em Os elementos (2009, p. 539) a demonstração dessa relação é feita a partir de um desenho que retrata um prisma de base triangular que é seccionado de forma a originas as três pirâmides de mesmo volume. De forma análoga, essa demonstração é encontrada em alguns livros didáticos de matemática do Ensino Médio na Educação Básica visto que nem todos demostram essa relação e somente a apresentam de forma direta. O desenho mencionado é semelhante ao da figura 4 no qual a secção do prisma ABCDEF origina as pirâmides DEFA, ABCE e AEBF.

Figura 4: relação entre volume do prisma e da pirâmide



Fonte: Google imagens

Façamos tal demonstração, com o objetivo de reafirmar o que já foi provado por Euclides e fazer a conexão com os livros didáticos de matemática da Educação Básica uma vez que temos como foco o ensino de geometria nesse nível de ensino. Assim, demostraremos a partir de Euclides (2009, p 539-540) e Paiva (2015, p. 218-219).

Considere o prisma ABCDEF (figura 4) cujas bases são os triângulos DEF e ABC (congruentes) e cujas faces laterais são os quadriláteros ADFB, ACED e CBFE. Ocorre que cada face do prisma possui uma diagonal que divide cada uma delas em dois triângulos congruentes entre si. Assim, temos que: a diagonal AE de ACED originas os triângulos AEC e AED (congruentes); a diagonal BE origina os triângulos BEC e BEF (congruentes) e a diagonal AF origina os triângulos ABF e ADF (congruentes).

Considere, ainda que a secção desse prisma conforme, dá origem a três pirâmides ABCE (1), DEFA (2), e ABEF (3) todas de base triangular (figura 4). Precisamos provar que as pirâmides em estudo possuem o mesmo volume. Para essa prova, tomaremos como princípio a propriedade P_1 segundo a qual, duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases de mesma área têm o mesmo volume.

Pirâmides 1 e 2: As pirâmides ABCE (1) e DEFA (2) têm como bases DEF e ABC que são congruentes por serem as bases do prisma ABCDEF. Mas os seguimentos CE e AD têm mesma medida já que são os lados paralelos do quadrilátero ACED e como são as alturas relativas as bases de (1) e (2), as pirâmides têm mesma altura.

Assim, Como (1) e (2) têm bases congruentes e mesma altura, por P1, têm o mesmo volume.

Pirâmides 2 e 3: Com já mencionamos a diagonal AF do quadrilátero ABFD origina os triângulos ABF e ADF que são congruentes e são as bases das pirâmides 2 e 3. Mas as alturas das pirâmides em estudo, são iguais à distância do ponto E até o plano que contém o quadrilátero ABFD.

Assim, as pirâmides 2 e 3 têm bases congruentes e mesma altura, portanto, por P_1 têm mesmo volume.

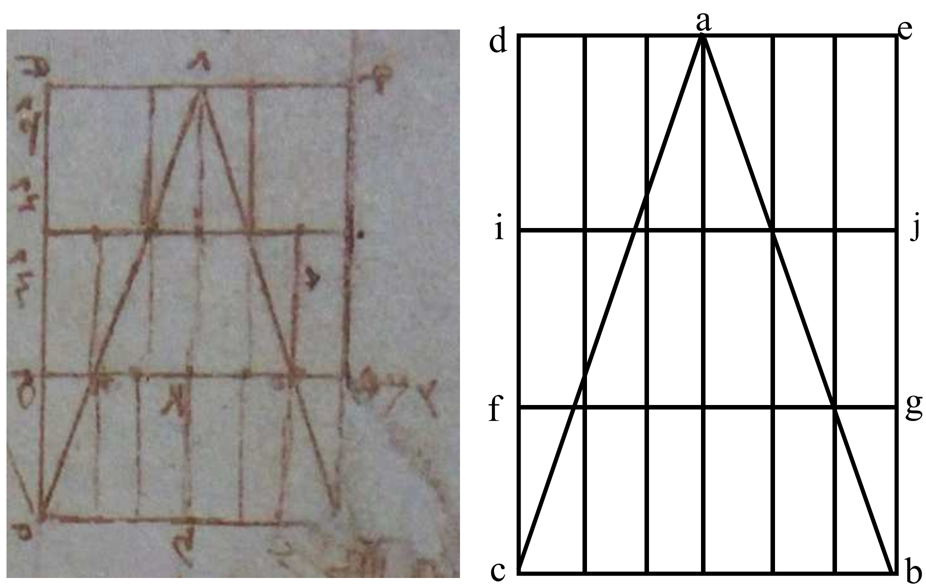
Portanto, como a pirâmide (1) tem mesmo volume que a pirâmide (2) e a pirâmide (2) tem mesmo volume que a pirâmide (3), conclui-se que (1) e (3) tem mesmo volume. Logo as três pirâmides têm mesmo volume. Como elas foram originadas a partir da divisão de um prisma, cada uma delas terá volume equivalente a terça parte do volume do prisma.

Sendo S_b a área da base do prisma ABCDEF e h sua altura, o volume do prisma V será $V = S_b . h$. Considerando o que foi demonstrado anteriormente, o volume da pirâmide V_p será $V_p = \frac{1}{3} . S_b . h$.

A essa altura o leitor deste texto pode estar se perguntando sobre o desenho B da folha 100r que está ao lado das três afirmações que acabamos de discutir. Não o mencionamos anteriormente pelo fato de que tal desenho não é mobilizado por Leonardo nas afirmações discutidas o que só é feito por ele no quarto momento no qual sintetiza o conteúdo das afirmações e as relaciona com o desenho B. Assim, retomaremos o desenho para fazer a discussão do trecho de anotações mencionado.

Para melhor interpretar o desenho, fizemos um modelo que expressa com clareza as ideias do desenho de Leonardo tendo vista que, por se tratar de um desenho do século XV, possui algumas partes apagadas. As letras *a, b, c, d, e, f* e *g* representam pontos e estão na forma minúscula por ser assim que Leonardo as utilizou em seus desenhos, mas no texto usaremos a notação atual para evitar confundi-las com o texto em si. Incluímos *i* e *j* para que a interpretação e a explicação, que faremos a partir do texto de Leonardo, sejam mais claras.

Figura 5: triângulo inscrito no retângulo



Fonte: Adaptado de Sànchez e Almarza, 2008.

É possível observar que para cada afirmação feita anteriormente[5], Leonardo expressa uma consequência e a relaciona com o desenho, dessa forma, o desenho é a parte geométrica que compõe essa tentativa de demonstração ou verificação das definições e proposições de Os elementos de Euclides já mencionadas anteriormente.

A partir do desenho inferimos que o retângulo é a seção de um cilindro e de um prisma quadrangular, já o triangulo é a secção de uma pirâmide, cuja base coincide com a base do prisma, e de um cone cuja base coincide coma base de cilindro. Portanto, Leonardo tenta demostrar graficamente as proposições referidas por meio de uma superfície plana, ou seja,

[5] Citação da página 12.

por meio das secções da pirâmide, do prisma, do cilindro e do cone (Sànchez & Almarza, 2008).

A partir do desenho é possível constatar que Leonardo dividiu o retângulo maior DEBC em três retângulos menores FGBC, IJGF e DEJI e cada um destes em 6 retângulos menores que tomaremos como uma unidade de área (1u.a.), ou seja, cada um dos três retângulos, como FGBC por exemplo, tem área 6u.a. e o retângulo DEBC tem área 18u.a. É possível constatar, ainda, que os dois lados do triangulo ABC diferentes da base passam sobre as diagonais dos retângulos que tomamos como 1u.a. por isso tais diagonais dividem estes em duas partes de $\frac{1}{2}$ u.a. cada. Assim, é possível estabelecer a relação entre as áreas do triângulo ABC e do retângulo DEBC.

Observe o desenho, partindo da base CB do retângulo. No retângulo FGBC, pode-se inferir que o triangulo ABC ocupa 5u. a. (4u.a. mais duas metades 1u.a.). No retângulo IJGF o triangulo ocupa 2 u.a. mais duas metades 1u.a. que totaliza 3 u.a. e no retângulo DEJI, ABC ocupa duas metades do retângulo tomado como unidade de área, totalizando 1u.a. Por tanto, o triangulo ABC ocupa, no total, 9u.a. que corresponde à metade da área total do retângulo DEBC que é de 18u.a.

Vamos verificar, agora, a correlação da nossa interpretação com o que Leonardo fez na folha 100r. Em sua conclusão Leonardo diz que:

> Pela primeira, a pirâmide a b c é um terço de todo o seu cilindro d e b c; pela segunda, f g b c, terça parte do cilindro, é igual à referida pirâmide, por ser um terço de todo o cilindro e; pela terceira, três vezes a altura do corpo retangular f g b c, mede a altura da pirâmide a b c, igual a esse corpo (Sànchez & Almarza, 2008, p. 208).[6]

A primeira parte na qual Leonardo diz que a pirâmide ABC é $\frac{1}{3}$ do cilindro DEBC não converge com nossa interpretação, pois nela ABC tem 9u.a. e DEBC, 18u.a., ou seja, ABC é $\frac{1}{2}$ de DEBC. Em seguida, ele fala que o retângulo FGBC é a terça parte do cilindro DEBC, o que converge com o que fizemos, pois FGBC mede 6u.a. e DEBC 18u.a. Na terceira parte da conclusão Leonardo diz que a altura da pirâmide ABC é o triplo da altura de FGBC, o que é provado pelo desenho, mas afirma também que ABC é igual a FGBC o que não converge com nossa interpretação na qual ABC tem 9u.a. e FGBC 6u.a.

[6] Per la prima seguita che la piramide a b c è un terzo di tutto il suo chilindro d e b c; e per la seconda f g b c, terza parte del cilindro, è pari alla detta piramide, per esser lei un terzo di tutto il cilindro. E per la terza tre volte l'alteza del corpo rettangulo f g b c misura la piramide a b c, equale a esso corpo.

As convergências e divergências entre a interpretação dos desenhos de Leonardo e aquilo que está na folha registrado por ele, não têm a intenção apontar falhas no seu trabalho ou minimizar sua importância, pois temos que considerar que Leonardo viveu nos séculos XV e XVI, portanto em outra época, com outra cultura e organização social e com outra matemática em circulação, ou seja, em condições de vida que não são as mesmas da contemporaneidade. Além disso, temos que levar em consideração os objetivos de Leonardo em fazer esses estudos. Dessa forma, as convergências e divergências apontadas, são elementos que podem ser utilizados na elaboração de atividades de ensino ou em discussões durante as aulas de geometria sobre o seu processo de desenvolvimento histórico.

O que queremos enfatizar é o procedimento que Leonardo segue, principalmente nessa parte específica da folha (2) na qual ele consegue completar uma linha de raciocínio, pois, ele define uma base teórica (Os elementos), anuncia o que vai tomar como válido, que são as três afirmações (primeira, segunda e terceira) e constrói a prova por meio de argumentos escritos e de um desenho que se relaciona com tais argumentos elaborados a partir do que ele tem como válido. A importância de tal procedimento está nas semelhanças que tem com a construção da própria matemática, por exemplo, a geometria de Os elementos, a qual parte de algo que já é válido, definições, postulados e noções comuns, para anunciar e provar as proposições.

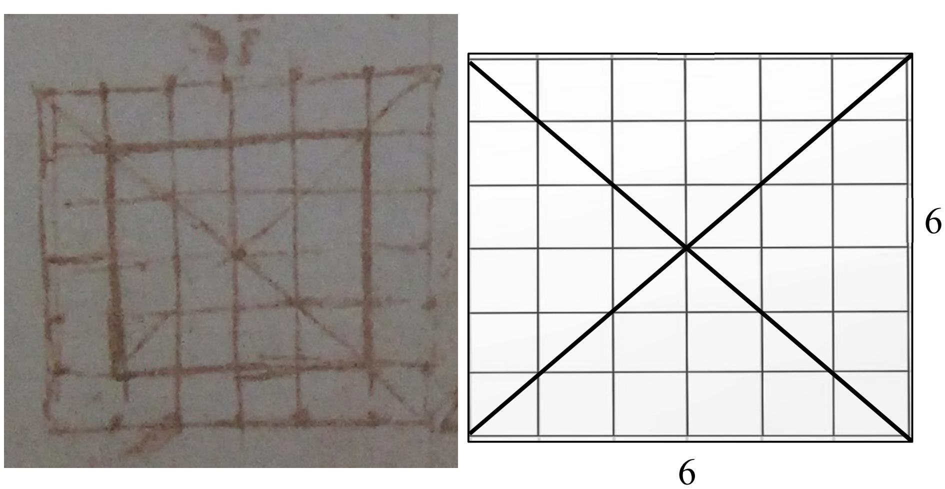
Outro aspecto importante que destacamos são as incoerências ou divergências percebidas na demonstração de Leonardo quando ele utiliza figuras planas (seções dos sólidos), por exemplo, para provar algo relacionado a sólidos geométricos e chega a resultados que não provam totalmente o que ele pretendia. Novamente, um aspecto que pode ser relacionado ao desenvolvimento da matemática, visto que, esse corpo de conhecimento sólido e reconhecido na atualidade, passou por muitas tentativas e erros até chegar ao formato atual. O que queremos dizer é que tentativas, acertos e erros foram (e são) fatores primordiais para o desenvolvimento da matemática e inclusive responsáveis por gerar uma parte significativa da matemática de forma não intencional, mas como resultado de tentativas de solução de problemas matemáticos como os famosos problemas da antiguidade grega cujas tentativas de solução se estenderam por 2000 anos e geraram conhecimentos matemáticos como aqueles relacionados as cônicas, por exemplo.

Essa conclusão a que chegamos, poderá ser tema de discussão entre os estudantes da Educação Básica, mais precisamente do Ensino Médio já que esse assunto, geralmente, faz parte daqueles a serem ensinados nesse Nível. A discussão a que nos referimos, disparada pelos desenhos de Leonardo que refletem uma matemática histórica, poderá ter como mediadora a relação entre a geometria euclidiana de Os elementos e a geometria escolar do livro didático de matemática. Isso poderá fazer com que os estudantes compreendam as origens históricas da geometria que estudam na Escola Básica e passem a ter uma visão mais completa dessa geometria que não estará mais isolada (no livro didático) do seu contexto histórico.

Passemos ao estudo do desenho D que está na parte 4 da folha 100r (figura 1). O quadrado que estudaremos (figura 6) foi dividido em 36 quadrados pequenos com o número 36 acima escrito ao contrário, como já se sabe da escrita de Leonardo. O fato de o quadrado maior ser composto por 36 quadradinhos pode ser relacionado à obtenção da fórmula para cálculo de área do mesmo, pois, a base do quadrado é composta por 6 quadradinhos, assim como a altura e o produto da base pela altura é 6x6 = 36 que é exatamente o número total de quadradinhos que corresponde a área do quadrado. Assim, cada quadrado menor seria uma unidade de área 1u.a. como se constatar na figura 6.

Para que se compreenda a relação que estabelecemos, colocamos o desenho de Leonardo novamente ao lado de um esquema que possibilita o estabelecimento de relações com os temas de geometria da educação Básica.

Figura 6: desenho D da folha 100 r



$$l^2 + l^2 = d^2$$

$$2l^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Fonte: Adaptado de Sànchez e Almarza, 2008

O método que foi utilizado por Leonardo ao dividir o quadrado em quadrados menores, é o mesmo utilizado no ensino de geometria da Educação Básica e que está retratado no quadrado da direita, pois como se sabe, a fórmula para cálculo da área do quadrado é o produto da base pela altura $A = b\,.\,h$ e como em um quadrado a base tem mesma medida da altura, a fórmula pode se $A = l^2$ r sendo l o lado do quadrado. Dessa forma, o desenho de Leonardo pode ser relacionado ao estudo de área do quadrado que se dá no Ensino Fundamental maior (6º ao 9º ano) (BRASIL, 2018).

Além da medição de área, o desenho em discussão remete a outra relação contida no estudo do quadrado que é aquela entre o lado e a diagonal (já evidenciada neste texto) que aliás é um tema recorrente nos desenhos de Leonardo contidos no Códice Atlântico e em outros manuscritos seus como o Códice Windsor Essa relação é tema de estudo no 1º ano do Ensino Médio, quando se estuda a geometria plana e no 2º ano no estudo de prismas, uma vez que a diagonal de um prisma de base quadrada é obtida a partir da diagonal da sua base. A relação é feita por meio do teorema de Pitágoras, pois a diagonal do quadrado determina dois triângulos retângulo cuja hipotenusa é d e os catetos têm medida a (Sànchez & Almarza, 2008).

Observe (na figura 6) que o desenho original possui o traçado das duas diagonais do quadrado, de forma semelhante ao que fizemos. Com a aplicação do teorema de Pitágoras, chegamos à relação entre lado e diagonal. Como o quadrado de Leonardo tem lado 6 (a = 6), podemos calcular a medida da sua diagonal que seria $d = 6\,\sqrt{2}$.

Dessa forma, o desenho contido na folha 100r do Códice Atlântico, contém elementos que remetem à geometria da Educação Básica, pois tratam de temas que foram estudados por Leonardo (nos séculos XV e XVI) e continuam a ser tema de estudo atualmente na sala de aula de matemática da Educação Básica. Isso reflete o potencial desses desenhos para o ensino de geometria e a possibilidade de sua utilização para a elaboração de atividade de ensino de geometria.

A geometria plana refletida na folha 100r remete à temas de Geometria ensinados na Educação Básica dentre os quais destacamos: prisma, pirâmide, cilindro e cone, triângulo, retângulo, quadrado, medição de áreas, e outros como duplicação do quadrado e a relação entre volumes, triangulo retângulo e teorema de Pitágoras. São temas que fazem parte da geometria do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e Ensino Médio.

Assim, o estudo da Geometria no Educação Básica pode reduzir-se a aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume, por exemplo. Outros recursos como a equivalência de áreas, que já se pratica há milhares de anos por povos como os gregos antigos e mesopotâmios, possibilita transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com área equivalente. Os gregos chamavam esse método de fazer a quadratura de uma figura e propomos sua utilização no ensino de geometria na Educação Básica por meio dos estudos dos desenhos do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci (BRASIL, 2018, p. 270-271).

Dessa forma, o estudo dos temas de geometria que fazem parte do currículo da Educação Básica poderão ser ensinados por meio de desenhos contidos em manuscritos antigos como os que contém o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, pois tais desenhos, mesmo não tendo sido feitos ou pensados para esse fim, têm em sua constituição, elementos que remetem ou refletem a geometria desse Nível de Ensino.

A exemplo disso, a demonstração da relação entre volume da pirâmide e do prisma, discutida neste texto, e o procedimento de Leonardo em sua demonstração, poderão ser discutidos nas aula com o objetivo de levar o estudante a desenvolver a habilidade de argumentar logicamente, ou seja, propor ideias, a partir de algo já provado e encadeá-las com foco na prova pretendida, que é uma mostra do funcionamento da matemática com ciência que pode ser objeto estudo no Ensino Médio como possibilidade de proporcionar aos estudantes conhecer um pouco sobre a epistemologia da matemática, de forma específica de uma prova em geometria, mas que pode ser estendida a outras áreas como a álgebra, por exemplo.

O que queremos dizer é que tanto o processo de demonstração quanto o estabelecimento de relações entre os sólidos que discutimos, poderá desenvolver nos estudantes do Ensino Médio habilidades e raciocínio mais complexos comparados aqueles desenvolvidos na atividade de conhecer os sólidos separadamente e ser informado sobre a existência do teorema, somente (que também é necessário). Isso caracteriza o aprofundamento das ideias sobre geometria adquiridas no Ensino Fundamental e, por tanto, a ampliação dos conhecimentos adquiridos pelo estudante o que poderá contribuir para que ele, diante de uma situação problema, tenha a sua disposição, um leque de possibilidades que lhe permita selecionar a melhor e mais eficiente para tal solução (BRASIL, 2007).

Mas como fazer as possíveis relações entre os desenhos de Leonardo e a geometria da Educação Básica (evidenciadas neste texto) emergirem nas aulas de matemática desse nível de ensino? Por meio da interpretação e da problematização desses desenhos com foco no ensino, ou seja, pela elaboração de atividades de ensino que mobilizem a geometria dos desenhos e as conecte a geometria escolar.

2. Problematizações para as aulas de Matemática na Educação Básica

Nossa proposta é que os desenhos de Leonardo sejam interpretados e problematizados. As problematizações se materializam em atividades de ensino propostas para serem desenvolvidas em sala de aula (e para além dela) envolvendo a geometria dos desenhos de Leonardo conectadas a geometria escolar. Aqui tomaremos como fundamento as "Unidades Básicas de Problematização", UBP, propostas por Miguel e Mendes (2010, p 386). Segundo os autores,

> Uma UBP nada mais é do que um flash discursivo memoralistico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade (ou desejo) que teria se manifestado a um ou mais integrantes de uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história (tradução livre).

A UBP, como o próprio nome define, é uma unidade que serve de base para a problematização que são os questionamentos elaborados. A partir da descrição da prática sociocultural, da sua análise e identificação elementos que se deseja estudar é que se deve problematizar, por meio de diferentes questões que levem o estudante a praticar uma ação na direção do conhecimento a ser aprendido. Esse processo é o que leva o estudante a ter contato com o objeto de estudo que neste caso são os temas da geometria plana e espacial da Educação Básica (Miguel & Mendes, 2010).

A prática sociocultural em estudo aqui é a atividade artística de um dos mais respeitados pintores de todos os tempos, Leonardo da Vinci, cuja atividade não se resumia a elaboração de pinturas, mas na busca por analogias que fundamentassem sua arte. Tais analogias eram buscadas nas ciências, principalmente na matemática.

Em suma uma UBP é materializada por um texto sucinto e claro que descreve uma prática sociocultural, preservando seus aspectos históricos e técnicos, bem como a autoria de tais técnicas. Essa prática histórica é recriada por esse relato e conectada, por meio de uma série de questionamentos propostos pelo professor, a práticas da atualidade presentes no contexto escolar. Esses questionamentos são postos pelo professor aos seus alunos, de forma a instigá-los na busca por soluções criativas.

Essas atividades poderão ser trabalhadas em grupos de 3 ou 4 alunos. Elas irão levar os alunos a investigar, pesquisar sobre os temas em estudo e os resultados de cada grupo podem ser partilhados com os demais em momento no qual eles poderão discutir sobre os resultados obtidos. Cabe ao professor conduzir a discussão com foco no objetivo a ser atingido.

Vejamos as atividades no formato de UBP sobre os desenhos de Leonardo da Vinci.

Problematização 1: Leonardo da Vinci, seu tempo, sua obra e a matemática por ele estudada.

Objetivos: Conhecer Leonardo e sua obra. Relacionar a geometria "de Leonardo" aquela da Escola Básica.

Leonardo da Vinci, famoso pintor renascentista, nasceu em 15 de abril de 1452 na cidade de Vinci na região da toscana na Itália. Filho ilegítimo de Ser Piero da Vinci (tabelião em Florença) com uma camponesa chamada Caterina, foi criado pelos avós no lugar onde nasceu. Após sua morte em 23 de abril de 1519 em Amboise na França, seus estudos e anotações foram herdados por seu amigo Francesco Melzi. Tais anotações constituíam uma coleção com cerca de 13.000 páginas das quais, atualmente, conhece-se o paradeiro de mais ou menos 7000, boa parte delas reunidas em Códices em bibliotecas da Itália e de outros Países (Isaacson, 2017; White, 2002).

Dentre essas coleções, está o Códice Atlântico[7] que reúne estudos e desenhos de diferentes áreas de conhecimento pelas quais Leonardo transitava com excelência. O referido Códice é formado por 1119 folhas com anotações de Leonardo reunidas em um único volume por Pompeo Leoni no final do século XVI em Milão e reúne uma coleção de documentos que abarcam praticamente toda a vida artística e científica de Leonardo, produzidos por ele no período de 1478 a 1519 (41 anos, aproximadamente). Contém estudos e apontamentos práticos e teóricos sobre temas como: arquitetura, arte da guerra, mecânica, astronomia, hidráulica, óptica, anatomia, botânica, zoologia, estudos sobre o voo, estudos sobre a água, textos literários, anotações autobiográfica, perspectiva, aritmética e geometria (Isaacson, 2017; Bagni & D'amore, 2012).

a) O que você sabe sobre o período do renascimento? Porque esse período tem esse nome? Pesquise e cite algumas características desse período histórico!

b) Você já havia escutado falar em Leonardo da Vinci? O que você sabe sobre ele?

[7] O Códice Atlântico é a maior coleção de desenhos e estudos de Leonardo da Vinci.

c) Na sua opinião Leonardo da Vinci é considerado um dos maiores pintores de do renascimento e de todos os tempos? Por quê?

d) Você conhece alguma pintura famosa de Leonardo da Vinci? Quais?

e) Você sabia que Leonardo, havia feito estudos sobre alguns temas científicos além de ter sido pintor? Qual dentre os temas que ele estudou lhe chama mais a atenção? Escolha um deles e pesquise sobre ele!

f) Você sabe algo sobre o Códice Atlântico? Já havia ouvido falar nesse manuscrito? Vamos conhece-lo um pouco?

g) Faça uma busca na internet com o tema "Códice Atlântico" e selecione "imagens". Você deverá encontrar imagens das folhas do Códice. Que folhas você encontrou? Quais lhe chamam mais atenção e por quê?

h) Há dentre essas folha alguma que lhe lembra algo que você estudou nas aulas de matemática? Mostre essas folhas e diga, o que elas têm a ver com a matemática que você estudou?

i) Agora me fale uma coisa, quais dessas folhas selecionadas por você tem relação com a geometria que você conhece? Que elementos ou assuntos de geometria você consegue identificar nas imagens?

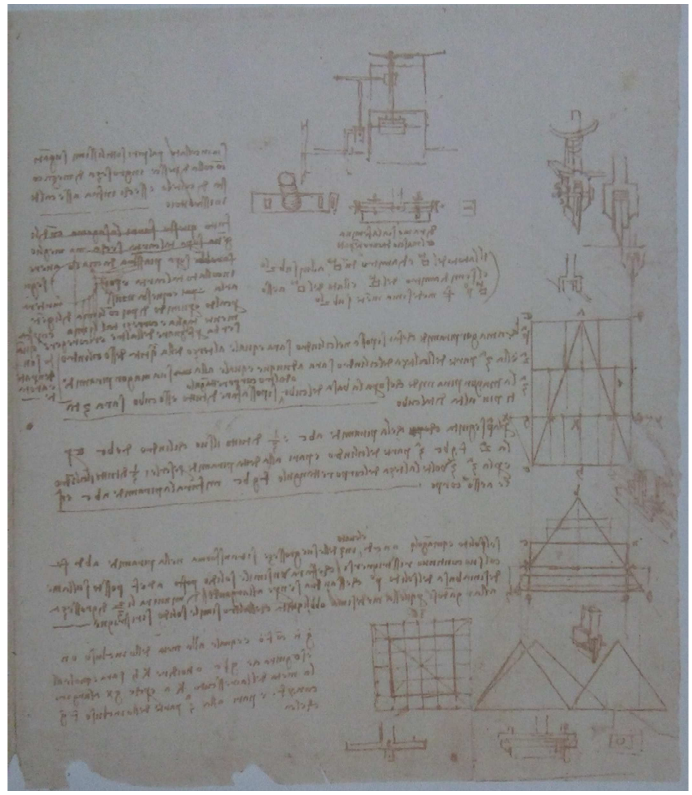
j) o livro didático que você está usando atualmente tem os conteúdos de geometria que você encontrou nas folhas do Códice Atlântico? Quais?

k) O que você achou desta atividade? Que aprendizados você obteve com ela?

Problematização 2: a geometria da folha 100r do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci

Objetivos: Investigar que geometria está refletida na folha 100r do Códice Atlântico. Estabelecer relações entre essa geometria e aquela estudada na Educação Básica.

Como já foi dito anteriormente Leonardo fez estudos em algumas áreas como óptica, arquitetura, hidráulica e geometria. Esses estudos foram registrados por ele em milhares de folhas que contém anotações e desenhos e que hoje se encontrem em coleções pelo mundo todo em Bibliotecas, Museus e em propriedades particulares. Uma dessas coleções é o Códice Atlântico que reúne mais de mil dessas folhas com temas variados.



A folha 100r é uma dentre as folhas do referido Códice que trata principalmente de dois temas: a construção de uma espécie de lâmina, como um formão, para corte ou entalhe de madeira, mármore e outros materiais, possivelmente foi pensada por Leonardo para a utilização em atividades como a escultura por exemplo. Além desse tema, há desenhos na folha que tratam da geometria e algumas anotações feitas por Leonardo nas quais ele fala sobre os desenhos e sobre outras coisas que não têm relação direta com os desenhos. Veja a folha!

Dentre as anotações de Leonardo há algumas que se referem a diagonal do quadrado e ao volume de sólidos geométricos. Sabemos que é difícil ler o que está escrito na folha, por isso, essa leitura já foi feita por um pesquisador Italiano chamado Algusto Marinoni que transcreveu as anotações de Leonardo. A partir dessa transcrição, fizemos uma tradução para que você tivesse acesso ao conteúdo da folha. Em uma dessa anotações Leonardo se refere a uma relação entre quadrados e nas outras ele fala sobre pirâmides, cones, cilindros e prismas para propor uma relação entre esses sólidos geométricos. Os trechos estão traduzidos a seguir e estão escritos ao lado do primeiro desenho geométrico da folha que é o aquele que tem um triangulo inscrito em um retângulo dividido em linhas horizontais e verticais.

Bloco 1 de questões: Aspectos gerais e geométricos

a) Observe a folha 100r! O que ela lhe provoca? Quando você olha para ela que lembranças ou sentimentos você tem?

b) O fácil entender o que Leonardo fez na folha? Os desenhos são compreensíveis?

c) destaque um desenho que lhe chamou mais atenção! O que é interessante nesse desenho e por que?

d) Quais dos desenhos da folha lhe lembram aqueles das aulas de geometria? Que geometria você reconhece nesses desenhos?

e) Considere os seguinte elementos de geometria: ponto, reta, ângulo, seguimento de reta, horizontal, vertical, diagonal, triângulo, triângulo retângulo, triângulo equilátero, triangulo isósceles, retângulo, quadrado, circulo, circunferência, esfera, cilindro, cone, prisma e pirâmide. Agora observe a folha! Faça marcações e anotações na folha e em outro papel e diga: quais desses elementos de geometria você identifica na folha 100r?

Bloco 2 de questões: Geometria Plana

f) Há algum desenho na folha que lhe remete a medição de área de figuras geométricas planas? Que desenho é esse? Como a medição da área dessa figura pode ser feita, considerando o desenho de Leonardo? E considerando a fórmula para medição de área? Os resultados encontrados são os mesmos?

g) Você sabe o que é um quadrado? E um retângulo? Qual a diferença entre eles? Como é possível calcular a diagonal de um quadrado ou de um retângulo?

h) Dentre os desenhos de Leonardo há um que lembra mais um quadrado, qual é? Olhe para ele e o desenhe em seu caderno. Considerando o que Leonardo, qual a área e a diagonal desse quadrado?

i) Em uma de suas anotações, Leonardo escreve que "o **lado** de um **quadrado** é a **diagonal** de um **quadrado subduplo** e a **metade da diagonal** do quadrado é o lado do quadrado a esse primeiro também subduplo". Perceba que foram destacadas algumas palavras na frase de Leonardo. Dentre elas há alguma que você não conhece? Qual seria o significado dessas palavras que você não conhece?

j) A anotação de Leonardo acima trata de uma relação entre quadrados. Como você descreveria essa relação?

k) O que seria um quadrado subduplo? E um quadrado duplo?

l) Essa anotação de Leonardo se refere a área ou ao perímetro do quadrado? Ou a ambos?

m) desenhe dois quadrados em seu caderno e diga: o que significa, afinal, essa relação entre quadrados a qual Leonardo se refere?

Bloco 3 de questões: Geometria espacial

i) Você já estudou geometria espacial? Do que ela trata?

k) Pirâmide, prisma, cilindro e cone são sólidos geométricos! Você conhece esses sólidos? Faça desenhos ou anotações e diga, o que é cada um deles para você?

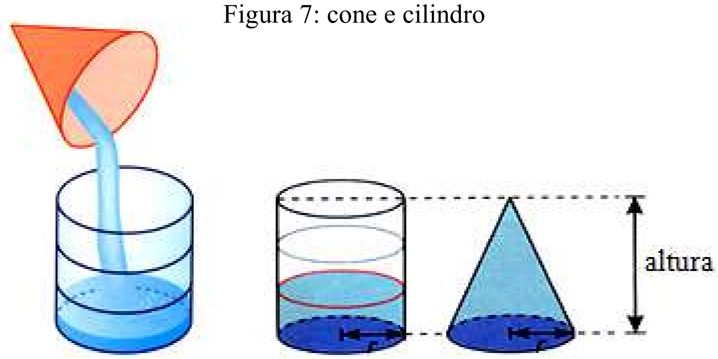
l) Os sólidos geométricos têm características que os difere das figuras geométrica planas, que características são essas?

m) Como é calculado o volumes dos sólidos geométricos mencionados no item k?

n) Dentre as anotações na folha 100r, Leonardo faz três que se referem aos sólidos geométricos a primeira é "o maior cone que pode ser feito no cilindro será igual a um terço da quantidade do cilindro". Analise essa afirmação! Ela pode ser comprovada geometricamente? Estude a geometria do cilindro e do cone e diga: como essa relação pode ser feita?

o) A figura (7)[8] retrata um recipiente de forma cilíndrica que possui três marcações que o dividem em três partes de mesmo volume, cada uma com um terço do volume do cilindro inicial. Essas partes são cilindros que têm altura igual a um terço da altura do cilindro inicial. Esse recipiente recebe um volume de líquido até atingir a altura da primeira faixa, ou seja, até encher o cilindro B. Observe a figura e diga: qual a relação entre ela e as anotações de Leonardo dos itens *n* e *p*?

Figura 7: cone e cilindro



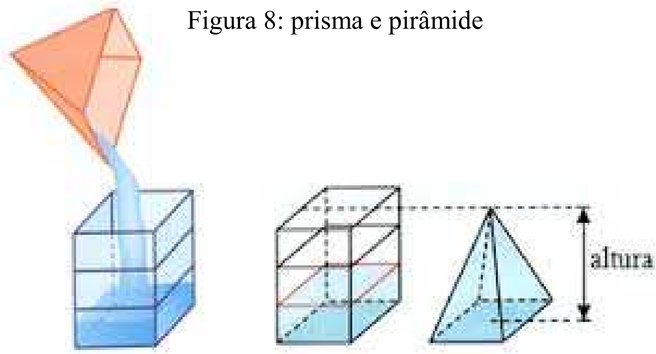
p) A segunda afirmação de Leonardo é "E a terça parte da altura do cilindro será, portanto, igual a seu maior cone". Essa afirmação tem relação com a primeira? Que relação é essa? Explique, como essa relação pode ser feita?

q) Na terceira anotação Leonardo escreve: A pirâmide maior, sobre a base do cubo ou de outro corpo retangular, tem volume igual a terça parte desse corpo". Quando Leonardo fala "corpo retangular" ele se refere aos prismas. Analise essa afirmação de acordo com a geometria da pirâmide e do prisma e diga: como ela pode ser demostrada?

[8] Fonte das figuras 7 e 8: https://escolaeducacao.com.br/geometria-espacial. Acesso em 25/03/2020.

r) Considere a figura 8. Ela apresenta dois prismas retangulares e uma pirâmide de base retangular. Ao que essa figura lhe remete? Faça uma descrição da figura! Por que os prismas têm faixas horizontais? Essa faixar são para ornamentar o prisma? Essa figura tem alguma relação com a anotação de Leonardo do item *q*? Que relações podem ser estabelecidas?

Figura 8: prisma e pirâmide



s) As anotações destacadas anteriormente foram feitas por Leonardo da Vinci a partir de estudos feitos por eles em obras de matemática como Os elementos de Euclides. Você conhece essa obra? Do que ela trata? Tente verificar em Os elementos se as anotações de Leonardo têm relação com o seu conteúdo.

t) O que você achou desta atividade? Que aprendizados você obteve com ela?

3. Reflexões

Para iniciar o final, destaco as contribuições que este trabalho teve para a minha formação, pois entendo que ao terminar um trabalho somos outro e melhor do ponto de vista do ato de aprender. Parece estranho porque quando se faz um texto acadêmico para comunicar o resultado de uma investigação, se faz para o outro, para o leitor que é quem você quer atingir, mas não só para ele, pois a trabalho de feitura do texto atinge que o faz, o modifica e o terna melhor do ponto de vista do aprendizado. Escrever um texto não é tarefa simples, exige concentração, dedicação e muito energia para conseguir comunicar o que se pretende, no meu entender relatar os resultados é mais complexo do que a própria investigação. Por isso, a escrita deste texto exigiu bastante de minha cognição, me fez pensar, refletir, avançar e recuar, duvidar, mas também afirmar e isso é o aprender e por isso eu aprendi com o trabalho que fiz.

Destaco, ainda a importância deste trabalho para o campo de estudos e pesquisas em Educação Matemática, pois julgo ser uma é uma contribuição importante e inovadora, pois em um recente levantamento que fiz (que será publicado oportunamente) não encontrei no Brasil, trabalhos que tomem o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci com foco no ensino de geometria. Além desse aspecto a relevância do trabalho para o campo encontra-se em ser um trabalho que se preocupa com o ensino de matemática, que é um dos pilares de fundação desse campo.

As contribuições para a formação de professores de matemática, também se destacam, pois neste trabalho, nos preocupamos em apresentar uma interpretação dos desenhos de Leonardo, mas também em dizer ao professor da Educação Básica como ele poderá utilizar essa interpretação para ensinar geometria para seus alunos. As atividades que elaboramos são sugestões que poderão ser adaptadas pelo professor ao seu contexto de forma a otimizar sua eficácia. A partir delas, o professor poderá elaborar a sua atividade da forma que julgar mais conveniente, pois nosso proposito com as atividades e fornecer uma proposta uma possibilidade e não um modelo a ser seguido à risca.

As relações que estabelecemos com a geometria escolar quando mencionamos os documentos curriculares oficias e o livro didático de matemática, poderão contribuir com o ensino, na perspectiva de complementação e não de substituição do documento e livros. Nossa proposta é que a interpretação dos desenhos e anotações de Leonardo bem como as atividades a serem elaboradas a partir dessa interpretação, poderão complementar o modo como os documentos oficiais e livros didáticos apresentam e orientam o ensino de geometria na Educação Básica.

Esperamos contribuir com a formação de todos aqueles que lerem este texto, se não pela utilização imediata da proposta e de seus resultados, mas pelo fato de, a partir dessa leitura, pensarem e repensarem sua prática docente objetivando sua inovação, complementação e/ou ressignificação. De forma especial, esperamos atender as expectativas dos professores de matemática da Educação Básica, por uma metodologia que promova o aprendizado que desejam para seus alunos com nossa proposta metodológica para o ensino de geometria. Contando com adequação das atividades propostas para outros conteúdos matemáticos, outros níveis de ensino e, porque não, para outras disciplinas do currículo escolar.

Como já foi mencionado, este trabalho faz parte de uma investigação mais ampla e apresenta resultados parciais que serão complementados com outras publicações que aprofundarão o tema devido sua amplitude e relevância para o campo de pesquisa.

Referências

Bagni, G. T.; D'amore, B (2012). *Leonardo e a matemática* – São Paulo, SP. Editora Livraria da Física.

Barros, J. A. (2004). *O campo da história*: especialidades e abordagens. Petrópolis, RJ: Vozes.

Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*.

Brasil (2007) Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+):* Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias.

Euclides (2009). *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo, Editora da UNESP.

Euclides (1944). *Os elementos*. Tradução Frederico Commandino, São Paulo: Edições Cultura.

Isaacson, W. (2017). *Leonardo da Vinci*. Tradução de André Czarnobai. 1. Ed. – Rio de Janeiro: Intrínseca.

Mendes, I. A. (2012b). Pesquisas em história da Educação Matemática no Brasil em três dimensões. *Quipu*, vol. 14, núm. 1. pp. 69-92. janeiro-abril de 2012.

Mendes, I. A. (2010) *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil*: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010. Projeto de pesquisa (Bolsa produtividade CNPq). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Impresso.

Mendes, I. A. (2015). *História da matemática no ensino*: entre trajetórias profissionais epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Miguel, A.; Mendes, I. A. (2010) Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. In: *ZDM Mathematics Education*. v. 42. p. 381 – 392.

Paiva, M. (2015). *Matemática.* 3 ed. – São Paulo: Moderna.

Sánchez, J. L. Almarza, M. B. (2008). *O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci* (vol. 2) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio.

Santaella, L. (2012). *Leitura de Imagens*. São Paulo: Editora Melhoramentos.

Santaella, L. (1995). *O que é semiótica?* 14 ed. São Paulo: Brasiliense.

White, M. (2002). *Leonardo o primeiro cientista*. 4 ed. – Rio de Janeiro, RJ. Record.

Autor:

Jeová Pereira Martins

Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (2017). Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará UFPA (2018-2021). Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2004). Especialização em Matemática no Ensino Básico, pela Faculdade Integrada Brasil Amazônia (FIBRA/PA, 2016). Integrante do Grupo de Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM/UFPA). Professor de Matemática da Educação Básica a partir de 2004, atuando desde 2008 em Escolas Públicas do Estado do Pará (Pará/Brasil). Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/3909598558519646. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7151-8136. E-mail: Jeovapereira80@outlook.com

DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p317-332.id843

LA DISCIPLINA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD FEDERAL DEL TRIÁNGULO MINERO: UN BREVE INFORME

Mônica de Cássia Siqueira Martines
monicasiqueiramartines@gmail.com
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Recibido: 22/12/2019 **Aceptado:** 22/02/2020

Resumen

Este artículo describe los resultados de un experimento que involucró la enseñanza y la investigación en la disciplina de Historia de las Matemáticas, impartido por el autor en la Universidad Federal de Triângulo Mineiro (UFTM) desde el comienzo de la oferta del Grado en Matemáticas en esa institución de educación superior. En este sentido, presentamos el formato de las clases y evaluaciones que se realizan para el tema del estudio que originó este artículo. La investigación desarrollada fue del tipo cualitativo, en particular un estudio de caso, ya que la experiencia descrita y explicada se centra en la preocupación por los aspectos de la realidad del aula de una sola situación específica. Los resultados muestran la necesidad de reflexión constante, diálogo y posibles cambios en la didáctica en el aula, ya que los estudiantes, cada día, son diferentes en un mundo globalizado e informatizado. También revelan la necesidad de invitar a los estudiantes a asumir el papel de protagonistas, de modo que las formas de evaluación para cada clase puedan modificarse.
Palabras clave: Historia de las matemáticas; Evaluación; Formación inicial de profesores de matemáticas.

THE DISCIPLINE HISTORY OF MATHEMATICS AT THE FEDERAL UNIVERSITY OF THE MINING TRIANGLE: A BRIEF REPORT

Abstract

This article describes the results of an experiment that involved teaching and research in the History of Mathematics discipline, taught by the author at the Federal University of Triângulo Mineiro (UFTM) since the beginning of the offer of the Degree in Mathematics at that institution of higher education. In this sense, we present the format of the classes and assessments that are carried out for the subject of the study that originated this article. The research developed was of the qualitative type, particularly a case study, since the experience described and explained is centered on the concern with aspects of the classroom reality of a single specific situation. The results show the need for constant reflection, dialogue and possible change in the didactics in the classroom, since the students, each day, are different in a globalized and computerized world. They also reveal the need to invite students to assume the role of protagonists, so that the forms of assessment for each class can be modified.
Keywords: History of Mathematics; Evaluation; Initial training of mathematics teachers.

A DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO: UM BREVE RELATO

Resumo

Este artigo descreve os resultados de uma experiência que envolveu ensino e pesquisa na disciplina História da Matemática, ministrada pela autora na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM) desde o início da oferta do curso de Licenciatura em Matemática na referida instituição de ensino superior. Neste sentido apresentamos o formato das aulas e avaliações que são realizadas para a disciplina foco do estudo que originou este artigo. A pesquisa desenvolvida foi do tipo qualitativa, particularmente um estudo de caso, uma vez que a experiência descrita e explicada está centrada na preocupação com os aspectos da realidade da sala de aula de uma única situação especifica. Os resultados mostram a necessidade de constante reflexão, diálogo e possível alteração na didática em sala de aula, visto que os(as) alunos(as), a cada dia, se mostram diferentes perante um mundo globalizado e informatizado. Revelam, também, a necessidade de convidar os(as) alunos(as) a assumirem o papel de protagonistas, fazendo com que as formas de avaliação de cada turma possam ser modificadas.
***Palavras-chave*:** História da Matemática; Avaliação; Formação inicial de professores de matemática.

Introdução

Este trabalho tem por objetivo apresentar um breve relato sobre a disciplina de História da Matemática ministrada pela autora na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM) e sobre a forma como essa disciplina vem sendo ministrada e avaliada.

A disciplina História da Matemática faz parte da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM desde sua implantação em 2009. A disciplina foi "concebida" com 60h/a de aula teórica presencial e mais 15h/a de atividade prática como componente curricular (APC) que poderia ser realizada a distância com acompanhamento via plataforma *Moodle*.

Para que a disciplina fosse estruturada, foi observada a legislação então em vigor PARECER CNE/CES 1.302/2001 o qual orientou para melhorias e transformações na formação do Bacharel e do Licenciado em Matemática. Para ambos os cursos, nesse parecer, foi definido um rol de disciplinas a serem oferecidas. Para a licenciatura, em específico, foram descritas as disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica. Também ficou estabelecido que:

> A parte comum deve ainda incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) *conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.* (BARRETO, OLIVEIRA & BEZERRA, 2002, p. 6, grifo da autora)

Dessa maneira, a disciplina História da Matemática foi incluída na grade curricular como obrigatória no curso de Licenciatura em Matemática da UFTM.

Os objetivos da disciplina foram definidos seguindo as orientações de Nobre (2012, p.510), os quais foram incorporados ao plano de ensino:

> OBJETIVOS GERAIS: Proporcionar ao aluno condições de: Desenvolver sua capacidade de formulação e interpretação de situações matemáticas; Desenvolver seu espírito crítico e criativo; Perceber e compreender o relacionamento entre as diversas áreas da Matemática apresentadas ao longo do Curso. Organizar, comparar e aplicar os conhecimentos adquiridos. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Contrapor-se à perversão formalista de reinterpretar logicamente, segundo a ordem das razões, a gênese real dos conceitos, segundo a ordem das ideias; Mostrar que a Matemática formalizada é precedida por uma Matemática informal e quase empírica (sem caráter científico, baseada na experiência), que não se desenvolve como uma sequência inexorável de teoremas acumulados estabelecidos além de toda a dúvida, mas por uma dialética própria, pelo jogo das conjecturas através da especulação, da crítica e da dinâmica dos interesses práticos e teóricos. Mostrar que existe uma ligação muito forte entre o desenvolvimento social e o desenvolvimento da Matemática. (SIQUEIRA MARTINES, 2012)

Assim como os objetivos, a ementa proposta para a disciplina, também foi baseada em Nobre (2012, p.520), para ficar em consonância aos objetivos apresentados, é constituída pelo estudo da Matemática na Antiguidade, Matemática no Mundo Grego, Matemática nos países Árabes, na Índia e na China e Matemática na Europa.

A primeira oferta da disciplina ocorreu no segundo semestre de 2012. No referido ano, e nos anos subsequentes, foi proposto aos(às) alunos(as), aulas expositivas e dialogadas. As aulas dialogadas foram propostas para que houvesse maior interação entre professora e alunos(as) e, assim, dialogando, chegamos às atividades avaliativas das aulas teóricas e das aulas de APC da seguinte maneira:

- ✓ duas avaliações individuais,

- ✓ um trabalho,
- ✓ um seminário.

Através destas atividades é esperado que o discente e, futuro professor, possa refletir sobre a Matemática que irá ensinar, respondendo a alguns dos "por quês" da Matemática.

1. Desenvolvimento

Visando atingir os objetivos gerais da disciplina descritos anteriormente, semestralmente, são propostas duas avaliações individuais. Ambas as avaliações, são constituídas por cinco questões do tipo dissertativas, que se baseiam na resolução de exercícios, tais como o exercício 36 proposto por Nobre (2012, p. 519) "Discorra sobre os temas: Binômio de Newton, Triângulo de Pascal e Relações de Stifel. Faça uma análise histórica deste tema comparando a época à qual cada um viveu."

Essas avaliações são solicitadas pensando na formação do(a) aluno(a), uma vez que durante as aulas expositivas e dialogadas, questões assim são apresentadas, e os(as) alunos(as) são conduzidos a resolverem as mesmas usando as técnicas de cada povo apresentado e discutido, vivenciando o processo criativo da matemática, mostrando que as fórmulas não "caem do céu". Quando penso em avaliação para a formação do(a) aluno(a) penso, e vivencio em minha prática, que este ainda não está preparado para se responsabilizar pela própria aprendizagem, ainda é necessário que façamos avaliações para exigirmos que estudem, que reflitam, que problematizem, que exponham a opinião baseada na ciência. Como evidenciado por Gaspar (2003, p.39),

> Em um curso de formação de professores deve-se criar um ambiente que coloque em prática métodos e técnicas pedagógicas que levem os alunos a vivenciarem o processo criativo inerente à matemática levando em conta o nível de escolaridade do aluno. Que esses futuros professores tenham uma consciência crítica e renovadora da relação pedagógica tradicional e que seja problematizada e questionada a transmissão dogmática dos saberes matemáticos. (GASPAR, 2003, p.39)

Para alcançar um dos objetivos específicos da disciplina "Contrapor-se à perversão formalista de reinterpretar logicamente, segundo a ordem das razões, a gênese real dos conceitos, segundo a ordem das ideias", foi proposta uma avaliação para as aulas de atividades práticas curriculares (APC). Sugeri a apresentação de um trabalho com atividades que correlacionassem a disciplina História da Matemática e a Educação Básica.

Ao longo de cada semestre letivo são sugeridas leituras e, posteriores discussões em sala de aula virtual, via *Moodle,* de textos sobre o uso da História da Matemática como recurso pedagógico.

Segundo Mendes (2008, p.41),

> Para efetivarmos um ensino-aprendizagem significativo em matemática, é necessário utilizarmos as atividades históricas, buscarmos no material histórico existente todas as informações úteis à condução da nossa ação docente e somente a partir daí orientar os estudantes à realização de atividades. (MENDES, 2008, p.41)

Nas aulas de APC, esse caráter é reafirmado aos discentes, ou seja, é indicado aos mesmos que busquem os materiais históricos existentes em diversos locais: biblioteca física, biblioteca digital (Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, Gállica, etc.), sites como *Mac Tutor* ou da Revista Brasileira de História da Matemática, entre outros. Ao mesmo tempo em que fazem a procura por esse tipo de material, se torna necessário discutir as fontes que podem ser usadas para realizar as atividades.

De acordo com Nobre (2004, p. 541) "o papel do historiador é sempre estar atento à origem das informações que recebe e à diversidade dos caminhos que levaram à concepção do fato histórico consumado." Os discentes são alertados sobre o trabalho do historiador que interpreta os documentos que dispõe, nesse sentido, torna-se interessante buscarem por mais de um autor sobre o mesmo assunto, para que possam analisar e obterem maior propriedade sobre o assunto a ser tratado.

Ao longo dos semestres letivos de ofertas do curso, essa atividade foi sendo monitorada e alterada. Hoje, em cada semestre é indicado um ano (série) para se trabalhar a História da Matemática como recurso pedagógico. O conteúdo pode ser escolhido pelo licenciando, desde que esteja em acordo ao ano solicitado e comprovado pelo documento oficial do estado de Minas Gerais, hoje é o Currículo Referência de Minas Gerais, documento aprovado em 2019, já em acordo com as Base Nacional Comum Curricular (BNCC), até o segundo semestre de 2018, usávamos o Conteúdo Básico Comum (CBC) - Matemática. Como é uma atividade da disciplina a mesma é avaliada pela apresentação e pelo trabalho escrito.

Na apresentação do trabalho, o licenciando deve conduzir a atividade escolhida como se estivesse trabalhando com os(as) alunos(as) da educação básica. Todas as atividades programadas devem ser aplicadas aos demais colegas de turma. Para o trabalho escrito, os discentes são incentivados a seguir as normas da ABNT, escrevendo um plano de aula completo, inclusive com atividades usando a História da Matemática como recurso pedagógico no item desenvolvimento do plano de ensino.

As atividades usando a História da matemática como recurso pedagógico devem ser conduzidas de modo que o(a) aluno(a) resgate o processo histórico da construção dos tópicos matemáticos escolhidos a serem abordados em sala de aula (MENDES, 2008, p.42).

Aos graduandos é requerido refletir sobre como cada tema escolhido foi sendo moldado ao longo dos séculos, percebendo a Matemática como "uma ciência desenvolvida pela humanidade, passível de erros e construída a partir de muitas tentativas em solucionar problemas cotidianos." (LOPES & FERREIRA, 2013, p. 78).

Para que os(as) alunos(as) consigam elaborar o material usando a História da Matemática como recurso pedagógico, esse trabalho é a última tarefa a ser cobrada no semestre, na última semana de aula da disciplina, após as atividades na plataforma Moodle terem sido completadas. Nessa plataforma são indicados textos, dissertações de mestrado e de doutorado em que a Tendência Metodológica História da Matemática é usada em sala de aula. Também nessa plataforma são criadas ferramentas para diálogos sobre o assunto. Todas as atividades disponibilizadas na plataforma devem ser realizadas ao longo do semestre letivo.

Para alcançar outro objetivo "Mostrar que existe uma ligação muito forte entre o desenvolvimento social e o desenvolvimento da Matemática.", a partir do segundo semestre de 2013 indiquei aos(às) alunos(as) apresentar um seminário. Neste seminário os(as) alunos(as) deveriam relatar:

i. um resultado matemático proposto por um(a) cientista do século determinado pela professora;
ii. a época em que esse(a) cientista viveu contextualizando o assunto tratado;
iii. um breve estudo sobre a vida deste(a) cientista;
iv. um estudo sobre o resultado matemático estudado. Compreendendo a matemática presente na obra e, se possível, relacionando com a matemática atual.

No referido ano, o século sugerido para efetuarem o seminário foi o século XV. Para encontrarem os(as) cientistas que viveram nesse período, foi indicado o site Mac Tutor[1], principalmente a aba "*Chronology Index*" que, em uma busca primária, resultou em 13 cientistas que contribuíram para a Matemática ao longo do século sugerido, como exemplificado na figura 1.

Figura 1: Cientistas do século XV

1411
Al-Kashi writes *Compendium of the Science of Astronomy*.

1424
Al-Kashi writes *Treatise on the Circumference* giving a remarkably good approximation to π in both sexagesimal and de

1427
Al-Kashi completes *The Key to Arithmetic* containing work of great depth on decimal fractions. It applies arithmetical an

1434
Alberti studies the representation of 3-dimensional objects and writes the first general treatise *Della Pictura* on the laws

1437
Ulugh Beg publishes his star catalogue *Zij-i Sultani*. It contains trigonometric tables correct to eight decimal places base

1450
Nicholas of Cusa studies geometry and logic. He contributes to the study of infinity, studying the infinitely large and the

About 1470
Chuquet writes *Triparty en la science des nombres*, the earliest French algebra book.

1472
Peurbach publishes *Theoricae Novae Planetarum* (*New Theory of the Planets*). He uses Ptolemy's epicycle theory of the

1474
Regiomontanus publishes his *Ephemerides*, astronomical tables for the years 1475 to 1506 AD, and proposes a method f

1475
Regiomontanus publishes *De triangulis planis et sphaericis* (*Concerning Plane and Spherical Triangles*), which studies

1482
Campanus of Novara's edition of Euclid's *Elements* becomes the first mathematics book to be printed.

1489
Widman writes an arithmetic book in German which contains the first appearance of + and - signs.

1494
Pacioli publishes *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* which is a review of the whole of
geometry.

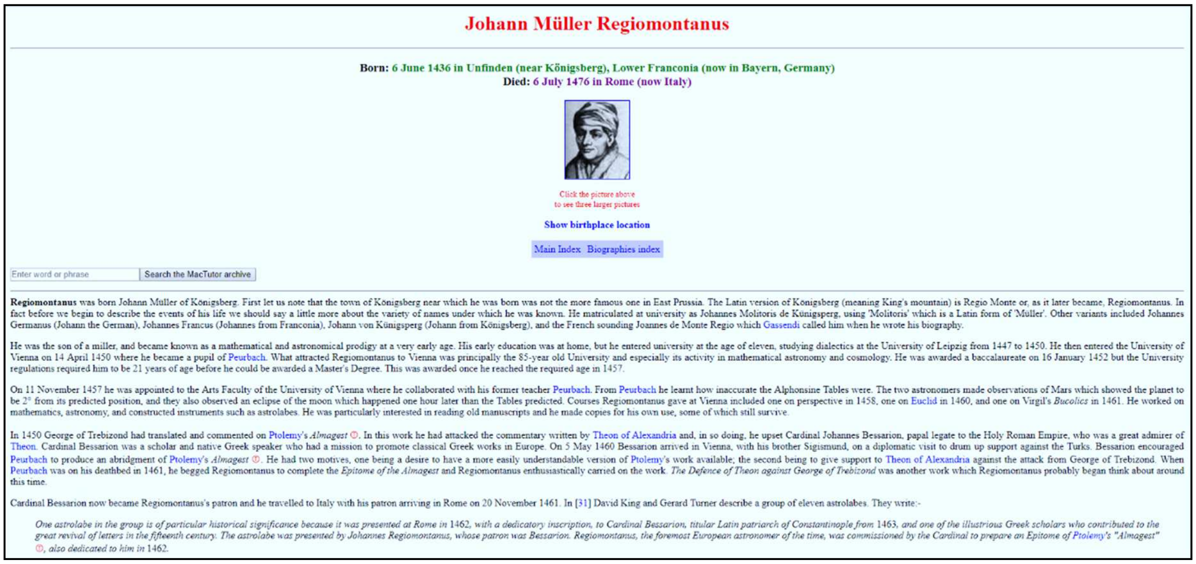
Fonte 1: Mac Tutor. Disponível em: http://wwwhistory.mcs.stand.ac.uk/Chronology/1300_1500.html

Foi explicado aos(às) alunos(as) que no próprio site *Mac Tutor*, há possibilidade de investigar a biografia e os resultados científicos do autor escolhido. Como por exemplo, poderíamos escolher *Regiomontanus*, que na lista aparece com dois trabalhos distintos. Ao

[1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

clicar em um dos nomes, abrirá outra janela, que remeterá a biografia completa. Como na figura 2.

Figura 2: Biografia Completa de Regiomontano



Johann Müller Regiomontanus

Born: 6 June 1436 in Unfinden (near Königsberg), Lower Franconia (now in Bayern, Germany)
Died: 6 July 1476 in Rome (now Italy)

Click the picture above
to see three larger pictures

Show birthplace location

Main Index Biographies index

Enter word or phrase | Search the MacTutor archive

Regiomontanus was born Johann Müller of Königsberg. First let us note that the town of Königsberg near which he was born was not the more famous one in East Prussia. The Latin version of Königsberg (meaning King's mountain) is Regio Monte or, as it later became, Regiomontanus. In fact before we begin to describe the events of his life we should say a little more about the variety of names under which he was known. He matriculated at university as Johannes Molitoris de Künigsperg, using 'Molitoris' which is a Latin form of 'Müller'. Other variants included Johannes Germanus (Johann the German), Johannes Francus (Johannes from Franconia), Johann von Künigsperg (Johann from Königsberg), and the French sounding Joannes de Monte Regio which Gassendi called him when he wrote his biography.

He was the son of a miller, and became known as a mathematical and astronomical prodigy at a very early age. His early education was at home, but he entered university at the age of eleven, studying dialectics at the University of Leipzig from 1447 to 1450. He then entered the University of Vienna on 14 April 1450 where he became a pupil of Peurbach. What attracted Regiomontanus to Vienna was principally the 85-year old University and especially its activity in mathematical astronomy and cosmology. He was awarded a baccalaureate on 16 January 1452 but the University regulations required him to be 21 years of age before he could be awarded a Master's Degree. This was awarded once he reached the required age in 1457.

On 11 November 1457 he was appointed to the Arts Faculty of the University of Vienna where he collaborated with his former teacher Peurbach. From Peurbach he learnt how inaccurate the Alphonsine Tables were. The two astronomers made observations of Mars which showed the planet to be 2° from its predicted position, and they also observed an eclipse of the moon which happened one hour later than the Tables predicted. Courses Regiomontanus gave at Vienna included one on perspective in 1458, one on Euclid in 1460, and one on Virgil's *Bucolics* in 1461. He worked on mathematics, astronomy, and constructed instruments such as astrolabes. He was particularly interested in reading old manuscripts and he made copies for his own use, some of which still survive.

In 1450 George of Trebizond had translated and commented on Ptolemy's *Almagest*. In this work he had attacked the commentary written by Theon of Alexandria and, in so doing, he upset Cardinal Johannes Bessarion, papal legate to the Holy Roman Empire, who was a great admirer of Theon. Cardinal Bessarion was a scholar and native Greek speaker who had a mission to promote classical Greek works in Europe. On 5 May 1460 Bessarion arrived in Vienna, with his brother Sigismund, on a diplomatic visit to drum up support against the Turks. Bessarion encouraged Peurbach to produce an abridgment of Ptolemy's *Almagest*. He had two motives, one being a desire to have a more easily understandable version of Ptolemy's work available; the second being to give support to Theon of Alexandria against the attack from George of Trebizond. When Peurbach was on his deathbed in 1461, he begged Regiomontanus to complete the *Epitome of the Almagest* and Regiomontanus enthusiastically carried on the work. *The Defence of Theon against George of Trebizond* was another work which Regiomontanus probably began think about around this time.

Cardinal Bessarion now became Regiomontanus's patron and he travelled to Italy with his patron arriving in Rome on 20 November 1461. In [31] David King and Gerard Turner describe a group of eleven astrolabes. They write:-

> *One astrolabe in the group is of particular historical significance because it was presented at Rome in 1462, with a dedicatory inscription, to Cardinal Bessarion, titular Latin patriarch of Constantinople from 1463, and one of the illustrious Greek scholars who contributed to the great revival of letters in the fifteenth century. The astrolabe was presented by Johannes Regiomontanus, whose patron was Bessarion. Regiomontanus, the foremost European astronomer of the time, was commissioned by the Cardinal to prepare an Epitome of Ptolemy's "Almagest", also dedicated to him in 1462.*

Fonte 2: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Regiomontanus.html

Esse seminário deve ser apresentado em sala de aula e deve ser entregue um trabalho escrito. O principal é que o(a) aluno(a) deve mostrar o conteúdo matemático usando a matemática da época. Ele pode até usar a matemática atual para compreender o que o cientista escolhido estava fazendo, mas para apresentar ele deve usar a matemática que o cientista usou, além de contextualizar a situação dada: qual o problema a ser resolvido? Como foi resolvido? É válido para qualquer tipo de problema dessa natureza? São algumas das perguntas que o(a) aluno(a) deve responder.

Alguns Resultados

Até o ano de 2019 foram apresentados cerca de 40 trabalhos e seminários. Na tabela 1 pode ser verificado o ano da Educação Básica (Ensino Fundamental (EF) ou Ensino Médio (EM)) para a realização do Trabalho e o século especificado para cada semestre letivo na realização do Seminário.

Tabela 1: Especificação de anos e séculos

Ano	Trabalho	Seminário
2012 2	livre	-
2013 1	livre	-
2013 2	livre	Século XV
2014 1	livre	Século XV
2014 2	livre	Século XVI
2015 1	9º ano do EF	Século X
2015 2	9º ano do EF	Século X
2016 1	3º ano do EM	Século XIII
2016 2	6º ano do EF	Século XVIII
2017 1	9º ano do EF	Século V
2017 2	7º ano do EF	Século XVII
2018 1	9º ano do EF	Século X
2018 2	1º ano do EM	Século XI
2019 1	3º ano do EM	Século XII
2019 2	8º ano do EF	Século VI

Fonte 3: Planos de ensino 2012 – 2019

Dos seminários realizados desde 2012 a 2019 na UFTM, os(as) alunos(as) relataram algumas dificuldades, entre elas, a mais pertinente é falta de bibliografia em português.

Os livros sobre História da Matemática disponíveis na biblioteca da universidade, são de coleções não atuais. E autores de livros de História da Matemática do século XX contrastam com as ideias dos(as) autores(as) deste tipo de livro do século XXI.

Quando esse fato ocorre, os(as) alunos(as) buscam as fontes originais e, esperam encontrar textos escritos em inglês, por julgarem de fácil tradução. Nem sempre o conseguem. Em muitos dos trabalhos apresentados, os(as) alunos(as) se esforçam por utilizarem as fontes primárias que encontram nos sites, levando em consideração o que foi discutido em sala de aula sobre as interpretações dos historiadores. Relatam as dificuldades e as enfrentam.

As dificuldades aparecem principalmente para realizarem o Seminário, uma vez que precisam saber como o(a) cientista efetuou os cálculos, usando a matemática da época em que viveram. Na figura 3 é possível verificar um dos relatos dos(as) alunos(as) a esse respeito.

Conclusões Finais

Podemos perceber durante a pesquisa para o desenvolvimento do trabalho o quanto foi trabalhoso e difícil encontrar as fontes originais do teorema do matemático Al-Biruni, por ser tratar do século XI. Além de que, as fontes originais são muitas vezes modificadas e traduzidas de diferentes formas.

Para a escolha desse matemático fizemos uma busca sobre outros matemáticos do século XI entretanto não obtivemos sucesso na pesquisa e encontramos o matemático Al-Biruni o qual conseguimos coletar mais informações sobre sua vida e suas contribuições para a ciência. ?

Figura 3: Depoimento presente no trabalho escrito sobre o Seminário solicitado em 2018 2
Fonte 4: Trabalho escrito por Silva e Faquim, 2018 2

Outro relato sobre as dificuldades encontradas:

Figura 4: Depoimento presente no trabalho escrito sobre o Seminário solicitado em 2018 1

No processo de desenvolvimento do trabalho encontramos algumas dificuldades, devido a falta de informação sobre a vida do matemático Abu Kamil, principalmente para encontrar trabalhos realizados por ele. Após encontrar um resultado desenvolvido por ele, tivemos a dificuldade de entender o método matemático utilizado, pelo fato do artigo encontrado ser em outro idioma, e houve a dificuldade em relação a linguagem matemática utilizada pelo autor na época.

Esse trabalho nos proporcionou uma visão de como era tratada a matemática no século X, especificamente no mundo árabe, nos mostrando a importância desses matemáticos no desenvolvimento da matemática, nos mostrando que esse desenvolvimento não aconteceu somente na Europa.

Fonte 4: Trabalho escrito por Dias e Cândido, 2018 1

Ainda sobre os seminários, apesar das dificuldades enumeradas, os(as) alunos(as) fazem um excelente trabalho. Apresentam o(a) cientista escolhido, respeitando a época solicitada, contextualizam esse(a) cientista, apresentam o problema e a sua solução, mesmo quando o documento encontrado precisa de tradução. A qualidade tem sido tão boa que os(as) alunos(as) são convidados a publicar seus trabalhos na semana acadêmica da matemática da

UFTM (SEMAT - UFTM), como podem ser vistos nos anais do evento e representado aqui como figura 5. No evento ocorrido em 2018 foram aceitos cinco trabalhos na área de História da Matemática para apresentação oral, destes, três são decorrentes da disciplina, os outros dois são de alunos de iniciação científica.

Figura 5: Sumário dos Anais da IX SEMAT UFTM

COMUNICAÇÕES ORAIS

- A MEDIDA DO "RAIO" E DA "CIRCUNFERÊNCIA" TERRESTRE POR AL-BIRUNI-----------**07-15**
- A CATENÁRIA: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA--**16-23**
- UM OLHAR SOBRE A PROP. XXXII DE JAMES GREGORY-------------------------------------**24-32**
- FILÓSOFO DO SÉCULO XI – OMAR KHAYYAM ---**33-40**
- ANÁLISE DOS TRABALHOS DO ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), ENTRE 2010 E 2016, REFERENTE AO USO DE TECNOLOGIAS COMO RECURSO PARA A PRÁTICA DOCENTE, NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA --**41-48**
- EXPERIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE ALUNOS JOVENS E ADULTOS: um estudo nos GT18 e GT19 da ANPEd ---**49-56**
- MATEMÁTICA CHINESA DO SÉCULO XI: UM BREVE RECORTE SOBRE JIA XIAN E O MÉTODO ADITIVO-MULIPLICATIVO PARA EXTRAÇÕES DE RAIZ --------------------------**57-64**
- PRODUTOS NOTÁVEIS E QUADRILÁTEROS: UMA EXPERIÊNCIA A PARTIR DO PIBIB/UFTM ---**63-72**
- AL-BIRUNI E A DEMONSTRAÇÃO DE UM DE SEUS TEOREMAS-----------------------------**73-79**
- A IMPORTÂNCIA DOS JOGOS MATEMÁTICOS NO ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL ---**80-88**
- RELAÇÃO ENTRE IMAGEM E ESCRITA PARA AS CIÊNCIAS EXATAS. ---------------------**89-96**
- O PIBID E OS PROFESSORES SUPERVISORES DE MATEMÁTICA NOS TRABALHOS PUBLICADOS NA ANPED DE 2010 A 2017 --**97-103**

ANAIS da VII Semana da Matemática da UFTM - Evento realizado de 17 a 21/10/2016

Fonte 2: Anais da IX SEMAT - UFTM

Em relação aos trabalhos sobre História da Matemática em sala de aula, alguns deles não são originais, os(as) alunos(as) procuram trabalhos prontos e os reinterpretam de modo excelente. Outros aproveitam a oportunidade e demonstram a criatividade. Como exemplo, posso citar a turma do segundo semestre de 2019 (2019 2). Foram apresentados cinco trabalhos, uma vez que foi compactuado realizar essa atividade em grupo. Destes, dois apresentaram o conteúdo usando a História da Matemática aliando com a tendência Jogos. Um deles desenvolveu a atividade em sala de aula propondo dois grandes grupos: Babilônios e Egípcios. O grupo dos Babilônios só poderia resolver os problemas apresentados usando as técnicas dessa civilização e o grupo dos Egípcios só poderia resolver os problemas usando as técnicas egípcias. Ganharia pontos o grupo que resolvesse o problema usando a técnica adequada.

Na sala de aula da UFTM os(as) alunos(as) já haviam aprendido sobre essas civilizações, o autor do trabalho, Pimenta (2019), disse que "na sala de aula da educação básica essas técnicas deveriam ser ensinadas antes de ir para o jogo". Os demais alunos o questionaram, uma vez que agindo dessa maneira, não estaria usando a História da Matemática para ensinar o conteúdo. O autor refletiu e se propôs a usar a História da Matemática para ensinar sobre as civilizações e suas contribuições à Matemática e, depois, aplicaria o jogo. Um problema apresentado foi o seguinte: Qual o resultado da soma de 1.133 com 455? Outro problema foi: Qual a área de um trapézio reto de altura 2cm, base menor 4cm, base maior 5cm? Ao final, o(a) aluno(a) que apresentou este trabalho resolveu as questões usando as técnicas de ambos os povos.

Para que os trabalhos usando a História da Matemática pudessem ser de melhor qualidade uma disciplina específica para abordar essa tendência seria necessária. Como uma sugestão dada a mim pelos(as) alunos(as) da disciplina. Ainda assim, se dizem à vontade para preparar uma aula usando essa tendência metodológica.

Pensando nas aulas presenciais, nas avaliações individuais dadas, após dez anos de prática em sala de aula do ensino superior e, visando atingir os objetivos da disciplina, percebi que minha postura deve ser diferente nos próximos semestres, uma vez que o diálogo não vem acontecendo como gostaria.

A aula dialogada proposta no plano de ensino deveria ocorrer sempre, mas os(as) alunos(as) estão acostumados em "receber" a informação e não se movimentam a procura dela, o que se torna contraditório em nossa sociedade, já que temos acesso aos avanços da tecnologia, e nossos(as) alunos(as) a usam constantemente nos processos das práticas sociais, precisamos apenas os educar para usarem essa tecnologia a fim de adquirir conhecimento o que corrobora com Cerqueira (2006).

> A concepção de sociedade discutida aqui é, portanto, a sociedade que pressupõe a igualdade de oportunidades, de chances entre todos os indivíduos, na qual a educação exerce a importante tarefa de propiciar os instrumentos capazes de colocar os indivíduos em situação de competição pelos privilégios que a sociedade democrática permite alcançar. Imaginamos que praticar essa democracia no espaço escolar é contribuir para a formação de crianças, jovens e adultos para a ética e a cidadania dando-lhes oportunidades de se sentirem proprietários do trabalho que executam. Assim, acreditamos nas possibilidades de termos escolas que desde cedo preparam os seus cidadãos para ter voz ativa, sendo dono de opiniões, pontos de vista; que participem de debates, discussões; que possam cumprir seus deveres e lutarem por seus direitos com autonomia; que possam conquistar sua liberdade de ir e vir agindo na participação das práticas sociais existentes, com dignidade. (CERQUEIRA, 2006, p.31)

Dessa forma, para que o diálogo entre quem aprende e quem ensina esteja mais presente nas aulas, decidi propor a metodologia da sala de aula invertida, isso a partir de 2019 2. Na aula dialogada é que poderei observar como o(a) aluno(a), futuro(a) professor(a), expõe suas ideias, defende seus argumentos, participa de sua formação e de seu colega. Acredito que através dessa metodologia, onde é proposto aos(às) alunos(as) que estudem em casa sobre um tema escolhido e, já definido no cronograma de aulas disponibilizado pela instituição, em que são orientados a usarem todas as ferramentas possíveis: os livros indicados na bibliografia, livros adquiridos em pdf, nos sites sobre História e/ou História da Matemática e nos slides de aulas sobre os temas que são disponibilizados a todos(as), a aula seja melhor aproveitada a fim de que na aula combinada, possamos conversar sobre o assunto pré-definido, realizarmos atividades de resolução de exercícios e compartilhar as dúvidas, tanto minhas quanto a deles. Nesse sentido, me colocarei como mediadora do conhecimento e proponente de atividades que possam causar, provocar a busca pelo conhecimento.

Como essa metodologia foi colocada em prática somente no último semestre ainda não tenho dados suficientes para analisar, a reflexão constante sobre as aulas poderá me direcionar ao caminho mais adequado perante a turma com a qual trabalho.

Considerações Finais

Ao longo dos anos tenho refletido sobre as atividades propostas nas aulas da disciplina História da Matemática da UFTM e tenho aprendido muito com os(as) discentes que elaboram as atividades, vejo o protagonismo deles(as), principalmente para realizar os seminários sobre os(as) cientistas e, na realização das atividades dos trabalhos para desenvolver algum conteúdo em sala de aula. Nesse sentido, venho propondo novas formas de abordagem da disciplina, como a metodologia da sala de aula invertida, que foi proposta em 2019 2 e em 2020 1, como uma resposta à essa postura dos(as) discentes.

A disciplina História da Matemática é ampla e devemos trabalhar com a compreensão da História da Matemática, da História da Matemática no ensino e do campo de pesquisa da História da Matemática e, temos pouco tempo para conversarmos sobre cada um dos campos.

Para resolver esse problema, os(as) alunos(as) indicam que o curso poderia ofertar a disciplina de História da Matemática em três momentos: uma no segundo período do curso, com uma parte de introdução à História da Matemática, trabalhando a História desde os tempos remotos até os Gregos, passando pelos Babilônios e Egípcios, uma no último período do curso, como no modelo que está em vigor, abarcando o período após os Gregos até a atualidade e, uma terceira que poderia ser ofertada não como obrigatória, mas como eletiva ao curso, com abordagem em ensino dos conteúdos matemáticos na educação básica usando a História da Matemática. Esses comentários normalmente aparecem no último dia de aula da disciplina, onde solicito que os(as) alunos(as) a avaliem ao longo do semestre e solicito que indiquem melhorias. Nesses diálogos aparecem os argumentos de que essas mudanças não são fáceis de serem realizadas e mesmo que a fizéssemos vem a pergunta: não iremos precisar de outra(s) disciplina(s)? Uma ou duas ou três disciplinas não irão conseguir satisfazer todos os anseios? Precisamos continuar a estudar e a pesquisar sempre. Somos professores pesquisadores e, para tanto, se torna necessário sermos parceiros(as), um(a) apoiando o(a) outro(a), em qualquer ambiente.

Ser professora me orgulha muito, pensar sobre a forma de lecionar esta disciplina, e as demais, vem sendo refletida e alterada conforme os resultados nas atividades propostas em sala de aula. Esse movimento dinâmico compactua com a História da Matemática e de seu ensino. Não há uma forma “pronta e acabada” para a lecionar. Vamos moldando a aula conforme conhecemos nossos(as) alunos(as).

Referências

BARRETO, F. C. de S., OLIVEIRA, C. A. S. de & BEZERRA, R. C. F. B. (2002) *CNE/CES 1.302/2001***.** Despacho do Ministro em 4/3/2002, publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002, Seção 1, p. 15.

CERQUEIRA, T. C. S. (2006) *O professor em sala de aula: Reflexão sobre os estilos de aprendizagem e a escuta sensível*. Psic, 7 (1) 29-38. Vetor Editora.

GASPAR, M. T. de J. (2003) *Aspectos do desenvolvimento do Pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. (Dissertação de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Brasil, São Paulo: Rio Claro).

LOPES, L. S. & FERREIRA, A. L. (2013) A. *Um olhar sobre a história nas aulas de matemática.* Abakós, 2 (1) 75 – 88. Brasil, Minas Gerais: Belo Horizonte.

MENDES, I. A. (2008) *Tendências metodológicas no ensino de matemática.* Brasil, Pará, Belém: EdUFPA.

NOBRE, S. (2004) *Leitura crítica da história: Reflexões sobre a história da matemática*. Ciência e educação, 10 (3), 531-543.

NOBRE, S. (2012) *A disciplina acadêmica "História da Matemática" na formação de profissionais em matemática*. Educ. Matem. Pesq., 14 (3), 507-524.

O'Connor, J.J. & Robertson, E.F. (2015). *Chronology for 1300 to 1500*. Mac Tutor. Disponível em: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Chronology/1300_1500.html Acesso em 10 de mar de 2019.

SILVA, G. R. B. & FAQUIM, L.C.B. (2018) *Al-Biruni e a demonstração de um de seus teoremas.* Anais IX SEMAT, 73-79. Brasil, Minas Gerais: Uberaba. Disponível em https://sistemas.uftm.edu.br/integrado/?to=N29zTFVkdGh2bjcyeC9odGFlSlRIRGthNjZ1VWY5Z1N1blFtdTJLUnFmbDdkU0V1YzVvZEtjbkZhTyt2UFBaeXRFSnpFbEMweitJNWV6NXR3RWZBVGE2T2dYMityc3JqbVp5UitkT3Z4LzFiNFNtNHdwU2ZNRTQ0R3RCVURjenluR0hnVzE4Ynd2T0psYkdwZFJUeHRpTXBUQmVDVFNyM1FZZFM1Mzd4VHpENFlBTHp0MTlFRmdndkdMVU15VDNx&secret=uftm

SIQUEIRA MARTINES, M. C. (2012-2019) *Plano de Ensino da disciplina História da Matemática*. UFTM. Disponível em https://siscad.uftm.edu.br/titan.php?toSection=1&toAction=view&itemId=45276&page=1&pesq0=&pesq1=&disciplinaCodigo=25030000667

Autora

Mônica de Cássia Siqueira Martines

Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Rio Claro, 2014). Mestrado em Educação Matemática pela Universidade

Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Rio Claro, 2009). Licenciatura em Matemática (1999). Atualmente é professora adjunta da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Tem experiência na área de História da Matemática. Mais informações no Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/6625047361725116. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3143-9206.E-mail: monicasiqueiramartines@gmail.com

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma

NORMAS PARA LA PRESENTACIÓN DE ARTÍCULOS

Ámbito de PARADIGMA

PARADIGMA es una publicación periódica ARBITRADA por el sistema doble ciego. Fue evaluada en Mayo de 2005 por el FONACIT, siendo considerada como la Mejor Revista Venezolana del área de Humanidades (ver http://www.fonacit.gov.ve/programas.asp?id=35)

Está INDIZADA en CLASE, LATINDEX, IRESIE, CREDI-OEI, OPSU, CERPE, FONACIT y se mantiene en canje con más de 140 instituciones venezolanas, latinas y europeas. Entre sus objetivos se propone contribuir a identificar y delimitar problemas de investigación en el ámbito educativo especialmente en el área de la formación de docentes; además, aspira orientar a los cursantes de los diferentes programas de postgrado en educación en cuanto al diseño de las investigaciones que deben realizar como requerimiento de grado; también espera contribuir a la divulgación de las innovaciones educativas ensayadas por los docentes que se desempeñan en los diferentes niveles y modalidades del sistema educativo nacional e internacional; con ello, desea contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación que brindan tanto los docentes de la UPEL como los de otras instituciones educativas nacionales e internacionales. De este modo, PARADIGMA contribuye a proyectar las experiencias de los docentes venezolanos y de otros países en diferentes campos de su quehacer profesional, constituyendo una vía a través de la cual, docentes de muy variadas instituciones puedan compartir tanto inquietudes diversas como planteamientos teóricos y metodológicos contribuyendo así a crear un espacio en donde los miembros de la comunidad educativa latina, ibérica, norteamericana y europea puedan realizar un fructífero intercambio en torno a esfuerzos de teorización, experiencias, innovaciones y resultados de investigaciones.

Admisión de Artículos

Los trabajos que se envíen a la Revista PARADIGMA deben tener una extensión de un mínimo de 12 a un máximo de 30 cuartillas por una sola cara, a espacio y medio (1 ½) en letra fuente Times New Roman o similar de 12 ptos.

Las Ilustraciones (gráficos y tablas) deben ser las mínimas indispensables; sin color y en formato JPG,

Los trabajos deben remitirse en formato impreso en un original y tres (3) copias (éstas últimas no deben incluir la identificación de los autores).

Además, anexar un disco contentivo de una versión electrónica del trabajo editada en Word for Windows 6.0 ó superior a la siguiente dirección:

Revista PARADIGMA

Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA (CIEP). Apartado Postal 514.
Zona Postal: 2101. Telfax: 00 + 58+ 243+ 2417866

http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/

También deben ser enviados por correo electrónico dos versiones, uno con identificación y otro sin identificar, a las siguientes direcciones email:

revistaparadigma.web@gmail.com

La primera página debe contener el título del trabajo, el nombre del(los) autor(es), la institución a la cual pertenece, un resumen con una extensión entre 150 a 200 palabras y al menos tres descriptores o palabras clave; todo ello escrito en el idioma original de los autores, en castellano y en inglés.

El resumen en el caso de trabajos de campo, debe incluir propósito, metodología, síntesis de los resultados y conclusión. Para los estudios teóricos, debe contemplar objetivos del trabajo, principales aspectos teóricos analizados y conclusiones.

La estructura interna del manuscrito debe ajustarse a los estándares habituales (introducción, método, resultados, conclusiones y recomendaciones)

La autoría de los trabajos no debe excederse de cuatro, entre autores y coautores; si es superior, sólo aparecerán en la revista los primeros cuatro.

También, por cada autor anexar un párrafo de no más de 50 palabras donde se indique: título académico que posee, lugar de trabajo, área del conocimiento donde investiga, línea de investigación, e-mail, teléfono, dirección postal.

Asimismo, debe enviar una carta al Consejo Editorial donde conste que el trabajo presentado es inédito, se manifieste la voluntad del autor de publicarlo en PARADIGMA y se detallará explícitamente que no ha sido enviado a ninguna otra publicación.

El Consejo Editorial someterá los trabajos al arbitraje de por lo menos dos expertos en el área específica mediante el procedimiento de “doble ciego”. El juicio emitido por los árbitros será notificado a los autores. El Consejo Editorial se reserva el derecho de introducir las modificaciones que considere pertinentes en aspectos formales.

Artículos no solicitados por el Consejo Editorial

Serán seleccionados según su oportunidad e interés para la Revista, pudiendo ser publicados en el número que lo estime conveniente el Consejo Editorial. En caso de aceptación, le comunicará al autor/a o autores/as de cada uno de ellos el volumen y número de la Revista en que aparecerá publicado. En caso de rechazo, no se devolverá el original.

Derecho a Réplica

Se invita a los lectores a ejercer el derecho a réplica sobre los materiales publicados en esta revista. Para ello, pueden enviar sus observaciones a través de correspondencias o de artículos dirigidos al Consejo Editorial. Éstos podrán ser publicados según criterio de este Consejo y siguiendo el proceso de arbitraje.

Aspectos formales

- No Justificar el margen derecho del texto y no dividir palabras al final de una línea. Sangrar cada párrafo entre 5 ó 7 espacios.
- Escribir un “título corto” (las primera palabras del título del trabajo) y el número de página en la parte superior derecha de cada una de las páginas del trabajo.

Ejemplo:

Métodos Etnográficos 7

- Las tablas, gráficos o cuadros deberán reducirse al mínimo, y, en todo caso, se presentarán en hojas aparte, indicando el lugar exacto donde vayan a ir ubicados.
- La Revista PARADIGMA adopta básicamente el sistema de normas de publicación y de citas propuesto por la A.P.A. (American Psychological Association, 2001) Publication Manual (5ª ed.) y los contenidos

en el Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales de la UPEL. (2004)

- Para citar las ideas de otras personas en el texto, conviene tener en cuenta lo siguiente:
  - Todas las citas irán incorporadas en el texto, no a pie de página ni notas al final. Utilizar el sistema de autor, año. Si se citan exactamente las palabras de un autor, éstas deben ir entre comillas (“ ”) y se incluirá el número de la página.

    Ejemplo:

    “Los métodos etnográficos han sido introducidos en la investigación educativa por la vía de la Sociología Fenomenológica” (González, 1997, p.17).
  - Cuando se utilice una paráfrasis de alguna idea, debe darse el crédito del autor

    Ejemplo:

    De acuerdo con González (1997), fue la Sociología Fenomenológica, la vía de ingreso de los métodos etnográficos en la investigación de ámbito educacional.

Referencias

- La bibliografía, llamada Referencias en estos trabajos, es su última parte. En éstas han de incluirse todos los trabajos que han sido citados realmente y sólo los que hayan sido invocados en el texto.

  Las citas se organizan alfabéticamente por el apellido del autor. El párrafo que contiene cada una de las referencias, se sangra con “Sangría Francesa”, como se muestra en el ejemplo:

Villegas, M. (1997). Una propuesta de Orientación Cogestionaria en Educación Preescolar. *Paradigma, XVIII* (2)**,** 123-162.

- Poner en mayúscula sólo la inicial de la palabra primera del título de un libro o artículo (o la inicial de la palabra primera después de un dos puntos o punto y coma en un título), así como también los nombres propios.
- Los títulos de las revistas normalmente llevan en mayúscula la primera letra de cada palabra.
- La estructura de las citas es la siguiente (prestar atención a los signos de puntuación):

  Para libros: Apellidos, Inicial del nombre. (Año). **Título del libro**. Ciudad de publicación: Editorial.

  Para revistas: Apellidos, Inicial del nombre. (Año). Titulo del artículo. *Título de la Revista, volumen* (número), páginas.

  Para capítulos de libros: Apellidos, Inicial del nombre. (Año). Título del capítulo. En Inicial del nombre, Apellido (Editor-es), *Título del libro*, (páginas). Ciudad de publicación: Editorial.

Libros escritos por uno o varios autores

Ruiz B., C. (1998). *Instrumentos de Investigación Educativa***.** Barquisimeto (Venezuela): Ediciones CIDEG, S.A.

Libros editados (recopilación de ensayos)

Rojas M., C. (1993). (Ed). *Filosofía en la Medicina*. Valencia (Venezuela): Universidad de Carabobo: Ediciones del Rectorado.

Capítulos contenidos en libros editados

Estaba, E. y Rodríguez, Ma. & Otros (1994). Agenda para la Reforma Educativa: una propuesta para la discusión. En E. Estaba y E. Alvarado (Coord*). Reforma Educativa: la prioridad nacional*. (Cap I: 9-48). Caracas: CINTERPLAN.

Artículos de revistas

Ruíz B., C. (1993-96). Neurociencia y Educación. *Paradigma, XIV-XVII(*1-2), 90-108.

Artículos de periódico, semanal, o similares

Linares, Y. (1990, Febrero 27). En pos del sueño de Bolívar. *El Nacional, C-1.*

Documentos de la base de datos ERIC

Liston, Daniel P., & Zeichner, Kenneth M. (1988). *Critical pedagogy and teacher education* [CD-ROM]. Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Association. (Documento ERIC n. ED295937).

Documentos en Línea:

Villegas, M. y González, F. (2003). *La investigación financiada en educación superior. El caso de una institución de formación docente.* Disponible en http://www.conedsup.unsl.edu.ar/Download_trabajos/Trabajos/Eje_1_Politicas_de_educacion_superior/ Consulta: 07/11/2003.

Para más información sobre la realización de trabajos y su adecuación a la normativa APA, puede consultarse:

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Investigación y Postgrado (2004). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Caracas: FEDUPEL.

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma

INSTRUCCIONES A LOS ÁRBITROS

La Revista Paradigma somete a proceso de arbitraje, todos los manuscritos que le son consignados por autores, venezolanos o de otras nacionalidades, antes de decidir cuáles de ellos serán incluidos en alguna de sus ediciones. El sistema aplicado es el que se denomina “doble ciego”, es decir el(os) autor(es) no conoce(n) los árbitros de su(s) manuscrito(s) y éstos no conocen a su autor.

Los árbitros, revisores o réferis son personas especialistas en diversos ámbitos asociados a la temática que pública la Revista Paradigma, seleccionados por su probado nivel de competencia en la investigación. Son los encargados de evaluar la calidad y pertinencia de los artículos que solicitan ser publicados en la revista. Ellos, cumplen así, función de asesores del Consejo Editorial, que es el responsable último de las decisiones sobre la admisión o no de los manuscritos. Con su ayuda se asegura la pertinencia de los trabajos a ser publicados, lo cual facilita sostener la calidad de la revista.

Para ello, los árbitros deben realizar evaluaciones constructivas que permitan a los autores hacer las mejoras adecuadas que garanticen la exactitud y el rigor de los trabajos que solicitan la admisión en la revista. En ese particular, se sugiere argumentar los juicios y sustentarlos lo mayor posible a fin de facilitar la toma de las decisiones pertinentes, tanto por el Consejo Editorial de la Revista como por sus autores. En consecuencia, éstas deben abarcar un análisis de las virtudes y deficiencias del estudio, sugerencias encaminadas a hacerlo más completo o pertinente, y preguntas específicas que los autores deben contestar para que su estudio goce de mayor aceptación y utilidad entre los lectores a los que va dirigido. A continuación, se señalan los aspectos básicos a considerar

Los aspectos que deben ser tenidos en cuenta por los árbitros en la revisión de cada manuscrito son los siguientes: relevancia del tema, originalidad, rigor metodológico, claridad y precisión del lenguaje, coherencia, y apego a las normas.

Relevancia del Tema: alude al grado de importancia que tiene el tema abordado, tanto por su actualidad en el área, como por el aporte que el mismo hace, bien sea en el plano filosófico, teórico, metodológico y/o práctico.

Originalidad: destaca la forma particular como el (la) autor(a) o los autores integra(n) todo su pensamiento en el desarrollo del trabajo.

Rigor metodológico: expresa, tanto el apropiado empleo del método que es inherente al estudio del tema abordado, como el grado de profundidad de la indagación realizada.

Claridad y precisión del lenguaje: se relaciona con el apropiado uso gramatical y de la terminología referente al tema considerado.

Coherencia: se refiere, tanto a la apropiada concatenación de los elementos que integran la estructura del trabajo, como al uso consistente de un determinado estilo de redacción, a lo largo de todo el trabajo.

Apego a las normas: tiene que ver con el acatamiento de las normas que la Revista señala, para la presentación de escritos científicos en el área de conocimiento en que se ubica el trabajo en consideración.

Algunas preguntas que pueden ayudar a la revisión del contenido y forma son los siguientes

Contenido:

1. Hasta donde Ud. conoce el tema, ¿el trabajo constituye un aporte a lo que ha sido publicado antes?
2. ¿Son los métodos y procedimientos apropiados para el estudio y están suficientemente claros como para permitir la evaluación adecuada de los datos obtenidos?
3. Los resultados presentados por el autor ¿se derivan lógicamente de los datos u observaciones? ¿son coherentes con los objetivos o propósito del trabajo?
4. La discusión ¿está debidamente referida a lo encontrado en el trabajo?
5. ¿Están las conclusiones justificadas y bien fundamentadas y son lógicamente consistentes?
6. ¿Las referencias consultadas son actualizadas, pertinentes y completas?

Forma:

1. El título ¿es conciso y describe apropiadamente el contenido del trabajo?
2. El resumen ¿refleja apropiadamente el trabajo realizado en cuanto a objetivos, métodos, resultados y conclusiones?
3. ¿Presenta una estructura adecuada a su naturaleza?
4. ¿Es el manuscrito conciso? De no serlo, ¿cómo se podría mejorar?
5. ¿Podría sugerir cambios que eliminen ambigüedades y/o aclaren el significado del texto?
6. ¿Son todas las tablas y figuras relevantes y necesarias; están adecuadamente preparadas?
7. ¿La estructura y el contenido atiende las normas para la publicación de la Revista?

Con base en su revisión, los árbitros han de preparar un informe el cual debe remitirse al Consejo Editorial de la Revista Paradigma, a la mayor brevedad posible, dicho informe, contentivo de su juicio debe estar en concordancia con los criterios señalados, tanto respecto a las distintas partes del trabajo (Resumen, Introducción, Revisión Teórico, Metodología, Resultados, Discusión y Conclusiones, Implicaciones Prácticas, Referencias), como en relación con su totalidad (Introducción, Desarrollo del Trabajo, Conclusiones), destacando sus fortalezas y/o carencias; sobre la base de los juicios formulados. Así mismo, el árbitro debe expresar su recomendación, en términos de alguna de las tres opciones: aceptar sin modificación alguna; devolver al autor para que realice modificaciones parciales o totales; rechazar y no publicar.

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
REVISTA ARBITRADA E INDIZADA

La Revista PARADIGMA es una publicación periódica semestral, **arbitrada**, producida en el Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP), que está certificada por la Scientific Electronic Library Online (Scielo Venezuela) http://www.scielo.org.ve/revistas/pdg/eaboutj.htm y aparece indizada internacionalmente en:

- La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI, ESPAÑA) es un organismo internacional de carácter gubernamental para la cooperación entre los países iberoamericanos en el campo de la educación, la ciencia, la tecnología y la cultura en el contexto del desarrollo integral, la democracia y la integración regional. http://www.campus-oei.org/ve7.htm; www.campus-oei.org/n2732.htm
- El servidor *Educación Matemática* de "una empresa docente" (Colombia). Sitio web apoyado por la UNESCO, TEXAS INSTRUMENTS, CDM de Colombia y la Fundación Compartir. http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/public.html .
- LA BIBLIOTECA DEL CENTRO MORIN (Italia). La Biblioteca del Centro Morin contiene circa 7500 volumi (quasi tutti registrati e consultabili in Internet) e riceve o scambia 78 riviste italiane e straniere orientate alla didattica della matematica e delle scienze, alla ricerca didattica e pedagogica, ed alla filosofia (epistemologia) di tali discipline. http://www.filippin.it/morin/biblioteca/
- IRESIE/ Centro de Estudios sobre la Universidad/ Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM-CESU). Cuyo objetivo es apoyar las labores de investigación, docencia, planeación y administración de la comunidad académica del campo educativo, facilitándoles el acceso oportuno a información especializada sobre educación publicada en revistas científicas y técnicas, principalmente en idioma español y portugués. Para lograr este objetivo: se localiza, recopila, procesa y difunde información seleccionada de 650 títulos de revistas. http://www.unam.mx/cesu/iresie/
- **CLASE (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades)**, es una base de datos bibliográfica creada en 1975 en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). La base de datos se actualiza diariamente y más de 10 mil registros son agregados cada año. Las revistas incluidas en **CLASE** cumplen con criterios de selección y son analizadas por un equipo multidisciplinario Web http://132.248.9.1:8991/F/LY5MXNYYN6BY1T5R3L5EF5DY813NLX1JVG9JBUQQYK4TECGM5Y-00789?func=file&file_name=base-info
- **LATINDEX** (SISTEMA REGIONAL DE INFORMACIÓN EN LÍNEA PARA REVISTAS CIENTÍFICAS DE AMÉRICA LATINA, EL CARIBE, ESPAÑA Y PORTUGAL), sirve también a la comunidad internacional (organismos y/o personas) interesada en los contenidos, temas y acciones relacionados con la ciencia y la información científica en la región. Disemina

información bibliográfica sobre las publicaciones científicas seriadas producidas en la región. http://www.latindex.unam.mx/latindex/busquedas1/latin.html

- **DIALNET** es un portal de difusión de la producción científica hispana. http://dialnet.unirioja.es/
- En el plano nacional, sus artículos son analizados y reseñados en:
- El Portal Venezuela Innovadora es un sitio promovido por el Gobierno de la República Bolivariana de Venezuela, a través del Ministerio de Ciencia y Tecnología (MCT) y del Centro Nacional de Tecnologías de Información (CNTI); su objetivo es difundir información acerca de las actividades que en el ámbito de la ciencia, la tecnología y la innovación se realizan en Venezuela y en otras partes del mundo. http://www.venezuelainnovadora. gov.ve/ publicacion_101.html.
- El Observatorio Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (OCTI) es un programa coordinado por la Dirección General de Prospección y Planificación del Ministerio de Ciencia y Tecnología de Venezuela. Los objetivos del OCTI apuntan a identificar y estudiar los actores del Sistema (académicos, empresariales, gubernamentales, sociedad civil e internacionales), las relaciones existentes entre ellos, la inversión en actividades de ciencia, tecnología e innovación, las áreas, disciplinas, especialidades y líneas de investigación desarrolladas, la producción científica y técnica, y lo que es más importante, con el fin de analizar e interpretar la realidad venezolana en estos ámbitos, de tal forma que se tomen decisiones de política pública con mayores y mejores insumos. www.octi.gov.ve/revistas/
- El Centro de Información y Documentación en Educación Superior CNU-OPSU (Venezuela). http://cenides.cnu.gov.ve/
- En el Boletín Informativo de Investigaciones Educativas que publica el CERPE, entre otras instituciones especializadas en información educativa.

De igual manera, cada una de las ediciones de la Revista PARADIGMA es intercambiada con otras producciones generadas en diferentes centros de información y documentación, nacionales e internacionales, y mantiene un sistema de canje con más de 140 instituciones venezolanas, latinoamericanas y europeas.

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma

PLANILLA PARA CANJE

Las instituciones interesadas en establecer canje con la Revista PARADIGMA pueden solicitarlo llenando la siguiente planilla y enviándola al Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP) a la siguiente dirección:

Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)

Apartado Postal 514, Código Postal 2101

Maracay, edo. Aragua, Venezuela

Telef: (0058243) 2417866

e-mail: revistaparadigmaupel@gmail.com, revistaparadigmaupel@yahoo.es

Nombre de la institución:

Departamento o unidad:

Dirección postal: ____

Ciudad: ____

Estado o provincia: ____

País: ___________________________________ Código Postal: ________________________

Correo Electrónico: ____

Teléfonos: _________________________________ Fax: ___________________________________

Nombre de publicación(es) que ofrece en canje:

Sugerencias:

____

____

____

PLANILLA DE SUSCRIPCIÓN REVISTA PARADIGMA

Deseo suscribirme a la Revista PARADIGMA por un año:

Nombre y apellido: ____

Cédula de Identidad: ______________________ Profesión: ________________

Institución:

____

Departamento u oficina: ______________________________________

Dirección:

____

_________________________ Teléfono: _________________________

Ciudad: ____________________ Estado: ___________________________

País: ________________________________

Suscripción anual: Nacional: Bs. 200,oo, Internacional: $ 150,00

Precio por unidad: Nacional: Bs. 50,oo, Internacional: $ 50,00

Depósito en Efectivo Nº ____________________________________

Fecha: __________________ Por Bs.: __________________________

Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
Apartado Postal 514, Código Postal 2101
Maracay, edo. Aragua, Venezuela
Telef: (0058243) 2417866
e-mail: revistaparadigmaupel@gmail.com, revistaparadigmaupel@yahoo.es

PARADIGMA
Revista Semestral
Volumen XLI Nº Extra 1, Abril de 2020

ÁRBITROS

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA
Depósito Legal pp.80-0213 ISSN Nº 1011-2251

Volumen XLI Nº Extra 1, Abril de 2020

OBJETIVOS DE LA REVISTA PARADIGMA

- Contribuir a identificar y delimitar problemas de investigación em el ámbito educativo, especialmente en el área de la formación de docentes.

- Orientar a los cursantes de los diferentes programas de Postgrado en Eduación en cuanto al diseño de las investigaciones que deben realizar como requerimiento de grado

- Divulgar las innovaciones educativas ensayadas por los docentes que se desempeñan en los diferentes niveles y modalidades del sistema educativo venezolano e iberoamericano

- Impulsar el mejoramiento de la calidad de la educación que imparten tanto los docentes de la UPEL como los de otras instituciones educativas nacionales.

- Contribuir a proyectar las experiencias de los docentes venezolanos y de otros países iberoamericanos en diferentes campos de su quehacer profesional.

El Consejo Editorial no se solidariza con las ideas expresadas por los autores, ni se responsabiliza del contenido de las mismas.