UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGOGICO DE MARACAY
Centro de Investigaciones Educacionales
PARADIGMA
CIEP

Enero de 2022

DOSSIER

XIII Workshop de Verão em Matemática

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília

08 a 12 de Fevereiro, 2021

Educação Matemática

ISSN: 1011-2251

ISSN: 2665-0126

Paradigma

PARADIGMA, Vol. LXIII.
Edición Temática Nro 1

Prácticas de Formación, Enseñanza y Aprendizaje en Educación Matemática en la Contemporaneidad

VOLUMEN LXIII, Edición Temática Nro. 1
ENERO de 2022

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

Raúl López Sayago
Rector

Doris Pérez
Vicerrectora de Docencia

Moraima Esteves
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

María Teresa Centeno
Vicerrectora de Extensión

Nilva Liuval de Tovar
Secretaria

Eladio Gideón
Director Decano (E)

Sorsirée Ortega
Subdirectora de Docencia (E)

Francisca Fumero
Subdirectora de Investigación y Postgrado

Lubisay Hernández
Subdirector de Extensión (E)

Eladio Gideón
Secretario (E)

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054
10.37618 1011-2251 **E -** 2665-0126
Volumen XLIII, Edición Temática Nro. 1; enero de 2022

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054

10.37618 1011-2251 **E -** 2665-0126

Volumen XLIII, Edición Temática Nro. 1; enero de 2022

La Revista **PARADIGMA** es una publicación semestral arbitrada, producida en el Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP) indizada en el **IRESIE, CREDI-OEI, CEDAL, FEUSP, LATINO, BIBLO, DIALNET, CLASE, LATINDEX y REDUC**.
Certificada por la Scientific Electronic Library Online (Scielo Venezuela);
http://www.scielo.org.ve/revistas/pdg/eaboutj.htm
Acreditada por el Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (FONACIT)

Edición y Dirección de Producción
Fredy González

Diseño, Producción Gráfica y Apoyo Técnico
Angélica María Martínez
Luis Andrés Castillo

Canje, Distribución y Publicidad
Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
Apartado Postal 514, CP 2101, Telf: (+58243) 2417866
e-mail: revistaparadigmaupel@gmail.com, revistaparadigmaupel@yahoo.es,
Maracay, Estado Aragua, Venezuela.

HECHO EN VENEZUELA

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054
10.37618 1011-2251 E - 2665-0126
Volumen XLIII, Edición Temática Nro. 1; enero de 2022
Prácticas de Formación, Enseñanza y Aprendizaje en Educación Matemática en la Contemporaneidad

CONTENIDO

Volumen XLIII – Edición Temática Nº 1, enero de 2022
Prácticas de Formación, Enseñanza y Aprendizaje en Educación Matemática en la Contemporaneidad

EDITORIAL

Alessandro Jacques Ribeiro, Raquel Carneiro Dörr, Regina da Silva Pina Neves
Editor(as) Convidado(as)

A necessidade de adaptação ao novo contexto educacional, que vem ocorrendo desde o ano de 2020 com a predominância do uso dos chamados ensinos remoto e híbrido nas práticas discentes e docentes em Matemática em todos os níveis educacionais, tem fomentado ações individuais ou coletivas que estão transformando a situação pandêmica em um momento ímpar para o aprendizado e para a produção de conhecimento.

Nesse momento de adaptações e reformulações, ampliam-se ações que (re)significam a aula de Matemática e as relações de ensinar e aprender, produzindo novas experiências educativas. Muitas dessas experiências estão sendo construídas a partir de vivências, tecnologias e atividades que já vinham sendo utilizadas por grupos de educadores matemáticos em situações de ensino presencial ou remoto, mas que agora têm a possibilidade de alcançar mais visibilidade e serem disseminadas entre a comunidade de pesquisadores e educadores matemáticos. Ademais, muitas dessas experiências têm trazido à tona indagações acerca dos processos formativos de professores e futuros professores, das noções de aprendizagem vigentes, das práticas avaliativas, das políticas públicas para a formação, entre outras.

Com o intuito de apresentar estudos acerca de alguns desses temas e de outros que têm feito parte do cotidiano das salas de aula de Matemática, bem como socializar as produções decorrentes dessas experiências, a Revista Paradigma apresenta nessa publicação a Edição Temática intitulada Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade.

Esta Edição Temática é composta por duas partes. A primeira delas contém artigos cujas abordagens contemplam situações de formação inicial e continuada, de licenciandos e licenciados em matemática e pedagogia. De modo especial, alguns autores discutem a colaboração em espaços formais e não formais, destacando as ações de sujeitos com propósitos comuns, que se apoiam mutualmente, comprometidos em construir respostas às demandas escolares e sociais da atualidade. Nota-se, igualmente, a ampliação das investigações sobre as abordagens exploratórias no ensino da Matemática valendo-se do uso de tarefas exploratórias em diferentes práticas formativas.

A segunda parte apresenta investigações selecionadas entre as atividades que aconteceram no âmbito do XIII Workshop de Verão em Matemática da Universidade de Brasília , na Sessão de Educação Matemática, realizado em modo remoto, entre os dias 8 e 12 de fevereiro de 2021.

Desta forma, a segunda parte inicia-se com a abordagem de dois tópicos contemporâneos. O primeiro deles invoca a atenção da comunidade de educadores matemáticos para um resgate em seus currículos de discussões e ações com uso da investigação matemática levando em conta os significados sócio-ecológicos locais.

Em seguida, apresentamos pela primeira vez à comunidade de educadores matemáticos ibero-americanos as origens, o desenvolvimento e um exemplo de aplicação da concepção de Aprendizagem Dialógica que tem foco nos registros escritos dos estudantes e que vem sendo trabalhada na Europa, especialmente em países de língua alemã. Nesse artigo, o autor, um dos idealizadores da concepção didático-metodológica dialógica e investigativa, narra como uma parceria entre docentes de diferentes áreas de conhecimento, tendo em comum a busca por ações que favoreçam a aprendizagem, pode trazer benefícios não somente para seus respectivos campos de conhecimento, mas também para outros.

Buscou-se também nessa edição, trazer investigações relacionadas às questões de aprendizagens no Ensino Superior aliadas à formação de futuros professores de Matemática., assim como estudos que contemplem a temática da História da Educação Matemática em diferentes referenciais teóricos.

Do ponto de vista das áreas ou objetos matemáticos especificados e usados nas atividades ou tarefas ilustradas nos artigos das duas partes, temos entre eles: Geometria, Frações, Processos Algébricos de Contagem, Interpretação de Gráficos e Trigonometria.

Como esperado, temos ainda exemplos importantes de práticas de salas de aula de Matemática realizadas em situações de ensinos remotos. Juntando-se a esses assuntos atuais e instigadores, essa edição presenteia os leitores e pesquisadores com artigos e relatos de investigações e estudos acerca das adaptações do Lesson Study a contextos brasileiros e seu emprego na formação de professores, especialmente, na formação inicial do mesmo modo que se discute o desenvolvimento e o estímulo ao pensamento crítico e criativo, entre outros.

Agradecemos ao Conselho Editorial da Revista Paradigma pela oportunidade de podermos contribuir com a publicação científica neste importante canal e convidamos a todos os interessados nas temáticas abordadas nesta Edição Temática a conhecerem os diversos artigos e aproveitarem a leitura deles, possibilitando assim a divulgação e circulação de novas ideias produzidas no âmbito da comunidade ibero-americana de Educação Matemática.

Editor(as) Convidado(as)

Alessandro Jacques Ribeiro.
Licenciado en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). Máster en Educación Matemática (2001) por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). Doctor en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). Realizó dos pasantías posdoctorales: en Rutgers, The State University of New Jersey, Estados Unidos; en el Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa, Portugal (IE-UL). Actualmente es profesor del Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-UL). Tiene experiencia en las áreas de Educación Matemáticas y formación de profesores que enseñan matemáticas.
Correo electrónico: a.ribeiro@ie.ulisboa.pt
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9647-0274

Raquel Carneiro Dörr.
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV).
Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV).
Mestre em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB).
Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB).
Tem experiência em Matemática e Educação Matemática.
Correo electrónico: raqueldorr@unb.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6453-7032

Regina da Silva Pina Neves
Licenciada e especialista em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Mestre em Educação e Doutora em Psicologia pela Universidade de Brasília (UnB). Atualmente é professora adjunta da Universidade de Brasília (UnB). Tem experiência profissional na Educação Básica, no Ensino Superior e na pós-graduação. Desenvolve pesquisas em Educação Matemática na área de formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.
Correo electrónico: reginapina@mat.unb.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7952-9665

PROCESOS DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN UNA TAREA EXPLORATORIA

Loryane Santos de Oliveira
lory19.1996@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5618-3315
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Cornélio Procópio, PR, Brasil.

Eliane Maria de Oliveira Araman
eliane.araman@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1808-2599
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Londrina, PR Brasil.

André Luis Trevisan
andreluistrevisan@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8732-1912
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Londrina, PR, Brasil.

Recibido: 31/mayo/2021 **Aceptado:** 30/octubre/2021

Resumen

Este trabajo pretende analizar e identificar los procesos de razonamiento matemático y sus aportaciones al aprendizaje de las matemáticas. Para componer la base teórica de esta investigación, se realizaron estudios basados en diferentes autores sobre qué es el razonamiento matemático, sus aspectos estructurales y sus procesos, así como su relevancia para el aprendizaje de las matemáticas. Se trata de una investigación cualitativa interpretativa, realizada mediante la aplicación de una tarea exploratoria en una clase de 1º de bachillerato de una escuela privada del estado de Paraná, Brasil. La tarea aplicada fue resuelta por 30 alumnos, organizados en grupos de tres miembros y constituidos por preguntas que instigan el razonamiento, proporcionando una comunicación constructiva entre profesor y alumnos. Se realizaron grabaciones de audio de los momentos de resolución de la tarea por parte de los alumnos, y componen el corpus de análisis de esta investigación. Como uno de los principales resultados, destacamos la presencia, de forma más evidente, de la elaboración de conjeturas y el intento de validarlas a partir de evidencias empíricas, uso de ejemplos genéricos y, en algunos momentos con la ayuda de la autoridad externa del profesor. Se destaca aquí el papel de las intervenciones del profesor en el grupo, en los que los cuestionamientos fueron acciones fundamentales para el desarrollo del razonamiento, apoyando el trabajo del alumno y resistiendo la entrega de indicaciones para el desarrollo de la resolución.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas. Razonamiento matemático. Procesos de razonamiento. Tareas de exploración.

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM UMA TAREFA EXPLORATÓRIA

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo analisar e identificar os processos de raciocínio matemático e suas contribuições para a aprendizagem da Matemática. Para compor o aporte teórico desta pesquisa, foram realizados estudos pautados em diferentes autores sobre o que é raciocínio matemático, seus aspectos estruturais e seus processos, bem como sua relevância para a aprendizagem matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter interpretativo, realizada por meio da aplicação de uma tarefa exploratória em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola privada no estado do Paraná, Brasil. A tarefa aplicada foi resolvida por 30 estudantes, organizados em grupos com três integrantes e constituída por questões que instigassem o raciocínio, proporcionando uma comunicação construtiva entre professor e alunos. Foram realizadas gravações de áudios dos momentos de resolução da tarefa pelos alunos, que compõem o corpus de análise desta pesquisa. Como um dos resultados principais, destacamos a presença, de forma mais evidente, da elaboração de conjecturas e a tentativa de validá-las a partir de evidências empíricas, utilização de exemplos genéricos e, em alguns momentos com o auxílio de autoridade externa da professora. Destaca-se também o papel das intervenções da professora no grupo, na qual os questionamentos foram ações fundamentais para que houvesse desenvolvimento do raciocínio, apoiando o trabalho dos alunos e resistindo ao fornecimento de indicações para o desenvolvimento da resolução.

Palavras chave: Ensino de Matemática**.** Raciocínio Matemático. Processos de Raciocínio.Tarefas Exploratórias.

MATHEMATICAL REASONING PROCESSES IN AN EXPLORATORY TASK

Abstract

The present work aims to analyze and identify the processes of mathematical reasoning and its contributions to the learning of mathematics. To compose the theoretical basis of this research, studies were conducted based on different authors about what is mathematical reasoning, its structural aspects and processes, as well as its relevance to mathematical learning. This is an interpretative qualitative research, carried out through the application of an exploratory task in a first year high school class in a private school in the state of Paraná, Brazil. The applied task was solved by 30 students, organized in groups of three and constituted by questions that instigate reasoning, providing a constructive communication between teacher and students. We made audio recordings of the students solving the task and make up the corpus of analysis of this research. As one of the main results, we highlight the presence, in a more evident way, the preparation of conjectures and the attempt to validate them based on empirical implications, use of generic examples and, at times with the aid of external authority of the teacher. Here, the role of the teacher's interventions in the group is highlighted, in which the questions were fundamental actions for the development of reasoning, supporting the student's work and resisting the provision of indications for the development of the resolution.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematical Reasoning. Reasoning Processes. Exploratory Tasks.

Introdução

O pensamento do ser humano é constituído por aspectos complexos e irregulares. Diversos autores discorrem sobre o que se entende por raciocinar matematicamente, considerado um aspecto fundamental para a aprendizagem matemática, sendo necessário o incentivo ao seu desenvolvimento ao longo de todo processo de escolarização, iniciando desde os primeiros anos escolares (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA- PEREIRA; PONTE, 2018; STYLIANIDES, 2009).

Comprender realmente o que se entende por raciocinar matematicamente e saber quais ações e práticas pedagógicas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático são questões relevantes no âmbito das práticas de formação, de ensino e de aprendizagem em Educação Matemática na contemporaneidade. As tarefas de investigação e exploração constituem uma das possibilidades para o trabalho em sala de aula com a disciplina de Matemática, e são tidas como potencializadoras no desenvolvimento do raciocínio matemático (PONTE, 2005; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020).

Embora o desenvolvimento do raciocínio seja um dos grandes objetivos do ensino da disciplina de Matemática (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017), estratégias para promoção desse raciocínio, no âmbito da sala de aula, são ainda pouco investigadas (BRODIE, 2010). No intuito de contribuir nessa direção, o presente trabalho tem como objetivo analisar a discussão de um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio durante a resolução de uma tarefa exploratória e identificar processos de raciocínio matemático mobilizados. Para isso, num primeiro momento, destacamos alguns estudos a respeito dos processos de raciocínio matemático, analisando as diversas definições pela visão de diferentes autores. Após, destacamos alguns processos que compõem o ensino e a aprendizagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático, destacando alguns deles. De posse dos dados (a transcrição da discussão do grupo de alunos em análise), analisamos e discutimos os processos mobilizados.

Referencial Teórico

Embora sejam diversas as perspectivas sobre o raciocínio matemático, ele diz respeito tanto à aspectos lógicos, quanto intuitivos, incluindo formulações, consecuções e validação de conclusões. Oliveira (2008, p. 3) usa a expressão raciocínio matemático para referir “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)".

De modo similar, para Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), o raciocínio matemático é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo, que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". Também para Stylianides (2009) o raciocínio matemático é como um procedimento de inferência, que utiliza informações já conhecidas para obter novos conhecimentos e novas conclusões.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) dizem que o raciocínio matemático inclui conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar, refutar caso necessário, desenvolver e avaliar argumentos, baseando- se em um processo evolutivo. De acordo com Morais, Serrazina e Ponte (2018 p. 556) "alunos de diferentes anos escolares podem se envolver em processos de raciocínio matemático".

Jeannote e Kieran (2017) identificaram oito processos de raciocínio matemático, sendo alguns deles relativos por semelhanças e diferenças (conjecturar, comparar, classificar, identificar padrões e generalizar), e aqueles relativos à validação (justificar, provar e demonstrar), além de exemplificar (este dando suporte aos outros processos). Destacaremos aqui alguns deles, considerando a natureza da tarefa proposta aos alunos investigados, e os dados em análise.

O processo de conjecturar envolve formular uma hipótese acerca de uma relação matemática geral, baseando-se em evidências incompletas. Para Lannin, Ellis e Elliot, (2011) as conjecturas são constituídas por relações matemáticas que desenvolvem afirmações com a finalidade de serem verdadeiras, mas que são desconhecidas. Para Morais, Serrazina e Ponte (2018, p.555), conjecturar consiste em "um processo que envolve raciocínio sobre relações matemáticas, desenvolvendo declarações, nomeadas como conjecturas, que requer maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não verdadeiras". Para Jeannote e Kieran (2017) conjecturar envolve processos ciclícos de: enunciar a conjectura, verificar os casos e exemplos existentes, tentar refutar e encontrar motivos para a conjectura ser verdadeira.

Os alunos desenvolvem conjecturas sobre conceitos e habilidades, sejam elas faladas ou não. Essas suposições exigem exploração e evidências para apoiá-las; com isso, as conjecturas servem de ponto de partida para determinadas atividades matemáticas e o raciocínio matemático (MATA-PEREIRA, 2012).

O processo de validação, segundo Jeannote e Kieran (2017), tem como objetivo alterar valores epistêmicos de narrativas, sendo feita de três formas: justificar, provar e demonstrar. Para as autoras, justificar é um processo de procura de dados, afirmações e suporte para modificar o valor epistêmico. Justificar é um processo social, podendo assumir dois formatos (i) justificar a conjectura que surgiu no processo e (ii) relatar a validade que altera o valor epistêmico.

Apoiada em procedimentos, propriedades e definições, a justificação tanto quanto a generalização são vistas como aspecto central em processo de raciocínio validando matematicamente determinadas afirmações. Cabe ao professor impor situações que promova justificações, enfatizando o "porquê" e redirecionando os alunos ao contexto de determinada situação. Nesse sentido, diversas investigações realizadas em diversos países indicam que "apenas a um nível avançado os alunos reconhecem a necessidade de um raciocínio convincente com base num conjunto de pressupostos explícitos" (GALBRAITH, 1995, p. 412). Assim, promover o raciocínio implica em intervenções que levem os alunos a dar sentido a justificações já existentes, contemplando o poder matemático.

Lannin (2005) apresenta cinco niveís de complexidade das justificações: (i) não justificar; (ii) apelar à autoridade externa; (iii) utilizar evidência empírica; (iv) utilizar de um exemplo genérico e (v) justificar dedutivamente. Em todos esses níveis, a justificação tem como papel validar e compreender resultados, dando legitimidade a atividade matemática, em recorrência disso, pode-se associar o conceito de justificação ao conceito de demonstração, por terem contextos próximos.

Acerca da mobilização desses diferentes processos, a utilização de tarefas exploratórias tem-se mostrado uma escolha pedagógica bastante promissora. Contrapondo a ideia de ensino direto, tem-se o ensino designado por alguns autores de "exploratório", caracterizado pelo fato do professor permitir a descoberta e a construção do conhecimento por conta do aluno. As práticas de ensino exploratório contribuem para a construção de generalizações matemáticas, promovendo aos alunos a descoberta e disseminação de conhecimento (PONTE, 2005). Para tal, explorar tarefas abertas proporcionando momentos de discussões entre grupos, encorajando-os a partilhar suas ideias, incentivando-os a escrever e partilhar as variadas versões do seu raciocínio são fundamentais para a elaboração do conhecimento.

Baxter e Willians (2010) descrevem o ambiente deste tipo de ensino da seguinte forma: apresentam a tarefa aos alunos, os alunos trabalham nesta tarefa enquanto os professores circulam incentivando e questionando o raciocínio, os alunos apresentam suas resoluções para a turma e o professor sistematiza as apresentações. Os mesmos autores afirmam que aulas nas quais são utilizados esses mecanismos, os professores falam menos e os alunos têm mais oportunidades de comunicação.

Assim, o questionamento é uma das ações fundamentais do professor para que haja desenvolvimento do raciocínio, resistindo ao fornecimento de indicações para resoluções, apoiando o trabalho do aluno (BRODIE, 2010). Contudo, o professor não deve deixar os alunos sem qualquer mediação, sejam elas individualmente ou em grupo, pois "não traz necessariamente apoio suficiente para desenvolver o seu raciocínio" (BRODIE, 2010, p.20). A autora salienta também que os alunos devem ser provocados e encorajados à partilhar suas ideias, escrever e realizar comunicações sobre o modo de pensar, incentivando-os à ouvir colegar e construir pensamentos.

Metodologia

Caracterização e contexto da pesquisa

A investigação que deu origem a este artigo assume uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Os participantes foram alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola privada no estado do Paraná, Brasil. A aula desenvolvida com essa turma, na qual ocorreu a coleta de dados, foi planejada coletivamente por estudantes de um Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, na qual o segundo e terceiro autores atuam como docentes permanentes. A professora da turma era mestranda do referido programa, e aula foi desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório.

A tarefa aplicada, cujo enunciado é apresentado a seguir, propunha uma situação envolvendo a variação na velocidade de leitura das páginas de um livro com objetivo de verificar a capacidade de pensar nas variações de uma magnitude conforme outra magnitude também varia.

Tarefa proposta aos alunos: *Um leitor mandou, para uma revista, a seguinte análise de um livro que ele havia acabado de ler, com muitas páginas: "O livro é eletrizante, muito envolvente mesmo! A cada página terminada, mais rápido eu lia a próxima! Não conseguia parar!". Desenhe um gráfico que represente o número n de páginas que esse leitor concluía pelo tempo decorrido t, mas de modo a refletir corretamente a mensagem do leitor à revista. Não se preocupe com detalhes, mas com a tendência geral do gráfico. Explique brevemente como pensou.*

Procedimentos para coleta e análise de dados

Os 30 estudantes da turma foram organizados em 10 grupos com 3 integrantes cada, e em cada grupo foi deixado um gravador para registrar as discussões ao longo da resolução da tarefa. A professora então circulou livremente pela sala, acompanhando o trabalho das equipes e fazendo algumas intervenções, quando julgava necessário. Ao final do tempo combinado para esse trabalho (uma aula de 50 minutos), as equipes entregaram o registro escrito com suas resoluções ao item da tarefa. Após, a professora convidou algumas equipes para compartilhar suas resoluções ao item (a), orquestrando uma discussão coletiva entre os estudantes.

Todos os grupos que resolveram a tarefa foram capazes de mobilizar diferentes processos de raciocínio, estabelecendo algum tipo de conjectura e buscando elementos para validá-la ou refutá-la. Tomou-se por critério para análise, neste artigo, a escolha de um grupo na qual houve um maior envolvimento dos estudantes na "apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados" (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018, p. 399).

Consideramos como material de análise o áudio da equipe e o protocolo escrito entregue ao final, com o esboço do gráfico solicitado. Ao longo da discussão, as equipes elaboraram representações intermediárias, mas que infelizmente não compõem seu protocolo escrito. Como, ao longo da transcrição, os integrantes da equipe remetem a essas representações, os pesquisadores apresentaram algumas hipóteses a respeito delas, quando possível.

Para análise dos áudios, uma das pesquisadoras (primeira autora) inicialmente transcreveu integralmente a discussão da equipe. Houve uma primeira parte da discussão correspondendo ao trabalho autônomo dos alunos e, a certa altura do diálogo, a professora passa a participar. Considerando o objetivo deste trabalho, a partir dessa transcrição inicial, a pesquisadora procurou identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem uma tarefa exploratória. Inicialmente, fez uma identificação inicial, em diálogo com outra pesquisadora do grupo de pesquisa, que também estava explorando essa temática em um outro conjunto de dados. Na continuidade, compartilhou sua categorização inicial com uma estudante de mestrado, que contribuiu com algumas sugestões e ajustes. Por fim, em parceria com a orientadora e o coorientador deste trabalho (segundo e terceiro autores), foram feitos ajustes finais nessa categorização.

A seguir, com base nos processos identificados, seguiu-se uma fase de análise dos mesmos, apresentada na seção seguinte deste artigo. Para tal, as transcrições foram separadas em trechos, na qual uma temática dentro da discussão parecia "iniciar e finalizar", dando origem a um novo foco na continuidade da discussão. A cada um desses trechos atribuiu-se um rótulo, que buscava sintetizar do que se tratava aquele trecho. Finalizando, são realizadas discussões desses dados em articulação com o referencial teórico, apresentadas no capítulo final.

Análises e Resultados

Neste capítulo, são apresentadas as análises realizadas acerca dos processos de raciocínio do grupo, a partir dos trechos no qual a transcrição da discussão foi organizada. Os integrantes da equipe são denominados Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3, numerados conforme sua apresentação no início da gravação.

Inicialmente, os alunos realizam a leitura da tarefa proposta pela professora.

Trecho 1 – Uma primeira leitura da tarefa

[1.1] Aluno 1: Vamos ler ... aquelas responsáveis né.
[1.2] Aluno 2: Vocês querem colocar o nome?
[1.3] Aluno 1: Pode colocar
[1.4] Aluno 2: Aah, depois eu escrevo o nome ...
[1.5] Aluno 1: Quem quer ler?
[1.6] Aluno 3: Eu leio ...
[1.7] Aluno 3: Um leitor mandou para uma revista a seguinte análise de um livro que ele havia acabado de ler com muitas páginas, o livro é eletrizante, muito envolvente mesmo, a cada página terminada mais rápido eu lia a próxima, não conseguia parar. Desenhe um gráfico que represente o número n de páginas que esse leitor concluía pelo tempo decorrido t, mas de modo a refletir corretamente a mensagem do leitor a revista, não se preocupe com detalhes, mas com a tendência geral do gráfico.
[1.8] Aluno 1: ahh, então não precisa de número, só fazer meio que ... função de tempo.

Neste primeiro trecho, observa-se que os alunos iniciaram com a leitura do enunciado, que levou a um primeiro entendimento da situação e a elaboração das primeiras conjecturas apoiadas em conhecimentos prévios. Essas conjecturas, a partir da fala final de A3 em [1.8], incluíram: (i) uma hipótese de que não são necessários valores numéricos para resolver a tarefa e; (ii) que a questão envolvia uma função, na qual uma das variáveis era o tempo.

Trecho 2 – Algumas escolhas na representação inicial

[2.1] Aluno 2: vocês têm régua?
[2.2] Aluno 1: eu tenho ...
[2.3] Aluno 1: deixar pra aluna 2 né, já que ela não ta fazendo nada.
[2.4] Aluno 1: (risos) grupo irresponsável.
[2.5] Aluno 2: tem que desenhar aqui também?
[2.6] Aluno 3: tem que usar rascunho também será? ...
[2.7] Aluno 1: não sei se é obrigado usar ...
[2.8] Aluno 2: é um gráfico assim ...[apresenta algum esboço inicial]
[2.9] Aluno 1: ahhh, não precisa ser grande não ...

A partir do primeiro entendimento do enunciado da tarefa, foram realizadas suposições de como poderiam resolvê-la, questionando o fato de terem que desenhar e usar rascunho. Não há processos de raciocínio explícitos nesse trecho, apenas escolhas feitas para construir o esboço solicitado. Porém, ao mencionar a régua [2.1], Aluno 2 poderia ter elaborado uma conjectura (não explicitada aos demais) de que o gráfico era uma reta. Ou apenas estivesse pensando em utilizá-la para representar os eixos coordenados. De qualquer modo, há um entendimento compartilhado por todos os integrantes do grupo de que um gráfico seria representado em um sistema de dois eixos.

Trecho 3 – É uma reta?

[3.1] Aluno 2: tá, vai ser um gráfico, cada vez ele lia, mais ele ia mais rápido ...
[3.2] Aluno 3: esse é o tempo ... [apontando para um dos eixos]
[3.3] Aluno 2: só isso?
[3.4] Aluno 2: mas daí tem que fazer a reta crescente? Ou ...
[3.5] Aluno 1: não, mas se fosse só pra desenhar isso, era muito fácil.
[3.6] Aluno 2: é, não sei.

Para o Aluno 3, em [3.2], a situação em análise envolvia duas grandezas que se relacionam: o número de páginas e o tempo. Assim, uma das hipóteses que havia sido elaborada no trecho 1 (de que uma das variáveis era o tempo), foi validada pelos alunos com base em evidências empíricas. Dúvidas surgiram diante da resolução da tarefa: “será que é uma reta crescente?”, “mas será que é só pra desenhar isso?”, “se fosse seria facil”. Tais dúvidas levaram a formulação de uma conjectura, de que o gráfico seria uma reta, e de que essa reta era crescente, constiutindo suposições que mais adiante seriam ou não validadas.

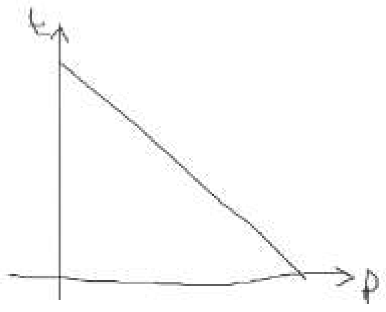
Trecho 4 – Posicionando as variáveis nos eixos

[4.1] Aluno 1: explique brevemente, com atenção ... é o mais difícil de fazer.

[4.2] Aluno 1: não, agora a gente tem que desenhar a reta, porque aqui é o número de páginas certo? Aqui é o tempo, vai ter que fazer assim, não é?[apontando para um dos eixos, faz um esboço].
[4.3] Aluno 2: não, eu acho que é assim [faz outro esboço], porque aqui vai aumentando o número de páginas.
[4.4] Aluno 1: e a cada página que ele lia, mais tempo ... é menor o tempo, não é?
[4.5] Aluno 2: mais rápido eu li, então o tempo vai diminuindo ...
[4.6] Aluno 1: aah, então é assim, decrescente.
[4.7] Aluno 2: é.
[4.8] Aluno 1: então. (risos)

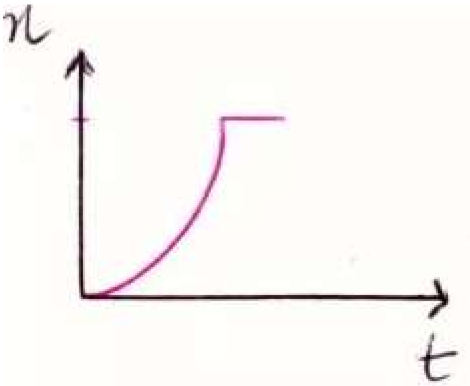
Neste trecho, os alunos discutiram a respeito do posicionamento das variáveis nos eixos do sistema coordenado. Uma conjectura foi elaborada pelo Aluno 1, em [4.2], e em seguida foi refutada e reformulada por Aluno 2 em [4.3], justificando que "vai aumentando o número de páginas". Outra conjectura foi elaborada, com relação à variável tempo: "o tempo vai diminuindo" [4.5]. Logo, "é decrescente" [4.6]. Assim, mostram entender o comportamento do gráfico, que ele varia de forma decrescente, e com isso, tentam validar esse pensamento. Podemos inferir, aqui, que o esboço considerado nesse momento assumiu o tempo de leitura da página como variável independente, e o número da página como variável dependente, de modo que, à medida que o número da página aumentava (avançamos na leitura do livro), o tempo para sua leitura ia diminuindo (um possível esboço é apresentado na Figura 1). Tal gráfico difere daquele elaborado pela maioria das demais equipes, e da possibilidade que havia sido considerada no planejamento da aula (um gráfico no qual o tempo acumulado de leitura do livro crescia à medida que o leitor avançava na leitura – Figura 2).

Figura 1 – Possível gráfico elaborado pela equipe



Fonte: Material do grupo de pesquisa.

Figura 2 - Gráfico que relaciona o número o tempo acumulado e o número de páginas.



Fonte: Material do grupo de pesquisa.

Trecho 5 – Validando o esboço

> *[5.1] Aluno 1: daqui pra cá [possivelmente, de cima para baixo], ta certo, o tempo ta diminuindo, porque é de baixo pra cima o tempo e de lá pra cá [possivelmente, da esquerda para direita], ta certo, e o número de páginas, ta certo!*
> *[5.2] Aluno 1: eu acho, e o que você acha? Aluno 2?*
> *[5.3] Aluno 2: o que você acha?*
> *[5.4] Aluno 2: também acho ...*
> *[5.5] Aluno 1: por que como foi seu pensamento? porque assim ó, vamos supor aqui é ...*
> *[5.6] Aluno 1: o tempo vai diminuindo ...*
> *[5.7] Aluno 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ai aqui a página 1, 2, 3, 4, 5, 6 se o tempo aqui começou no 6, o tempo ta diminuindo, hora que ele chegar aqui, o tempo vai chegar no 0, e o número de páginas vai aumentando, porque quanto mais você vai lendo, mais páginas vai aumentando, então.*
> *[5.8] Aluno 3: faz sentido.*

Inicialmente, os alunos tentaram validar o gráfico utilizando a ideia de que quanto mais se lê, menor é o tempo de leitura das páginas, e asssim as páginas vão aumentando [5.1]. A partir dessa análise, utilizaram uma evidência empírica que o número da página é a variável independente, e o tempo é a dependente variável deste gráfico. Com isso, assumiram que no decorrer da leitura do livro, o tempo de leitura de cada página foi diminuindo, levando a conclusão de que a variável dependente é crescente, e a variável tempo é decrescente. Utilizaram também exemplos numéricos genéricos para complementar sua justificativa, em [5.7]. A representação dessa relação por meio de uma reta não foi justificada, mas apenas "assumida" pela equipe como verdadeira.

Neste trecho, ao elaborarem conjecturas e acreditarem na veracidade das mesmas, os alunos tentaram concluir que seu pensamento estava correto, ou seja, validar essa hipótese. Assim, após o grupo analisar todas as hipóteses, entrar em um consenso e entender que o gráfico se comporta de maneira decrescente, validaram essa informação. A discussão prosseguiu a partir da interação que ocorreu com a professora, solicitando que o grupo explicasse como pensou, conforme trecho transcrito na continuidade.

Trecho 6 – Explicando para professora

[6.1] Professora: o que vocês pensaram meninas?
[6.2] Aluno 2: vai, explica pra ela ... (risos)
[6.3] Aluno 1: eu pensei assim óh! Porque o tempo, ele vai aumentando, só que, aqui no gráfico ... só que aqui, ele vai passando mais rápido a cada página, então aqui a gente vai aumentando o número de páginas que é o tanto que ele vai lendo, e o tempo como vai passando ele vai ter que ir abaixando.
[6.4] Professora: tá, então aqui você colocou no eixo do x o número de páginas.
[6.5] Aluno 1: isso.
[6.6] Professora: aí quando você toca aqui o eixo do x, ele vai chegar no máximo de páginas quando não tem mais tempo, acabou o livro. Só que vocês não estão vendo isso como uma função, o gráfico de vocês ficou uma reta, mas uma função o que que vocês acham que representa esse gráfico? Que função que é essa?
[6.7] Aluno 3: uma função afim?
[6.8] Professora: uma função afim?
[6.9] Aluno 3: do primeiro grau?
[6.10] Professora: então você acha que em um intervalo de tempo ele ta lendo sempre a mesma quantidade de páginas?Não sei, é só pra vocês pensarem, pode ter várias representações, porque ele diz que o livro é eletrizante, cada vez que ele lê, ele quer ler mais, e mais rápido, quando a gente pensa em uma função afim, que é uma reta, a taxa de variação é sempre constante, será que isso é uma função constante?

A partir do pedido de explicação feito pela professora, o Aluno 1 explicou a escolha feita pela equipe [6.3], e justificou o fato do gráfico ser descrecente (o tempo está “abaixando”). A professora, então, questionou o grupo acerca da intersecção do gráfico com o eixo x, fornecendo algumas informações que instigaram o raciocínio, fazendo com que eles, por meio de suas próprias ideias, tentassem verifificar se o pensamento estava correto [6.6 a 6.9].

Os alunos desenharam uma reta e concluíram que era uma função afim. A professora então questionou se eles achavam que em um mesmo intervalo de tempo, lia-se sempre a mesma quantidade de páginas [6.10]. A partir disso, novas conjecturas foram criadas para serem validadas ou invalidadas, conforme trecho a seguir.

Trecho 7 – Não é uma reta?

[7.1] Aluno 1: então não é uma função afim.
[7.2] Professora: não. O que será que é?
[a professora vai atender outra equipe]
[7.3] Aluno 1: vamos ter que fazer assim né, a mesma coisa, só que é só fazer assim

né? [faz algum esboço no papel]
[7.4] Alunos 2, 3: não sei... risos
[7.5] Aluno 1: tipo fazer assim, invés de ser reto, porque ela disse que se for reto, não varia ... se for assim.
[7.6] Aluno 2: e ele ta falando, quanto mais ele lê, mais ele quer ler, então não pode ser uma reta.
[7.7] Aluno 1: quanto mais ele lê, mais ele quer ler?
[7.8] Aluno 2: é quanto mais ele lê, mais...
[7.9] Aluno 1: ta, eu entendi, eu entendi.

Neste trecho, observa-se que os questionamentos anteriores da professora foram fundamentais para a formulação de novas conjecturas. Anteriormente, havia perguntado se eles achavam se em intervalos de tempo iguais seria lida sempre a mesma quantidade de páginas [6.10]. Com isso, a professora forneceu algumas informações, incentivando a explicação, ou seja, guiando e apoiando a maneira de pensar dos alunos, encorajando-os a elaborarem novas conjecturas e buscarem meios para justificá-las. Anteriormente, haviam "assumido", justificar, que a representação era uma função afim (ou função do primeiro grau). Embora tenha instigado os alunos a repensarem esse aspecto, a fala da professora no sentido de confirmar que gráfico não era uma reta foi justificada, em um primeiro momento, a partir de sua autoridade externa [7.2]. Tal fato levou os alunos a elaborem conjecturas sobre como realmente seria então o gráfico, analisando agora com mais cuidado a hipótese, presente no enunciado da tarefa, de que quanto mais o leitor lê, mais ele quer ler.

Trecho 8 – É uma parábola!

[8.1] Aluno 1: então não pode ser reta!
[8.2] Aluno 3: não pode ser reta, porque não é constante.
[8.3] Aluno 3: então e se a gente fizer assim... uma parábola.
[8.4] Aluno 1: é, então.
[8.5] Aluno 2: você ta fazendo uma semi parábola.
[8.6] Aluno 3: semi parábola ... (risos)
[8.7] Aluno 1: então eu acho que é isso ...
[8.8] Aluno 3: mas tem que desenhar ela pra cima ou pra baixo?
[8.9] Aluno 1: não sei.

Em [8.1] e [8.2], os alunos utilizaram evidência empírica para validar a conjectura de que o gráfico não era uma reta, e passaram então a considerar outras possibilidades. O Aluno 3 apresentou um novo esboço, possivelmente parte de uma parábola: "e se a gente fizer assim... uma parábola?" [8.3], ou seja, uma nova conjectura sobre como deveria ser o formato do gráfico. Os alunos possivelmente reconheceram sua representação como uma parábola por se tratar de um dos poucos tipos de curvas que eles conheciam até aquele momento. Entretanto, não houve justificativa que fizesse uso do conceito matemático de parábola. Eles validaram esse formato com base em evidência empírica. A partir surgiram dúvidas referentes à sua concavidade.

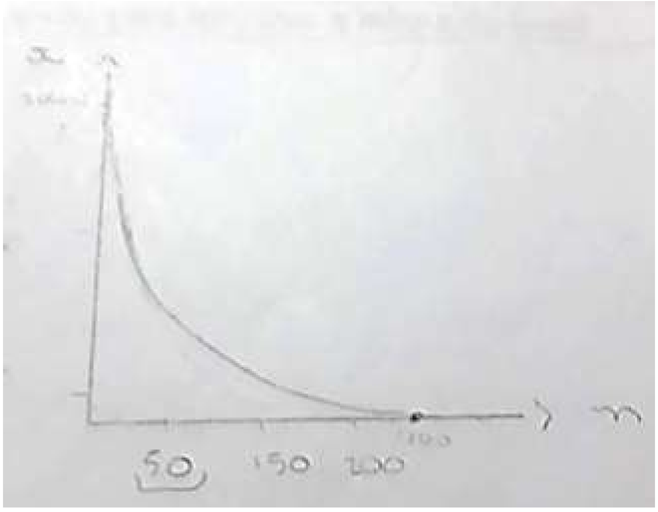
Trecho 9 – Novamente, explicando para professora

> *[9.1] Professora: o que ele ta dizendo?*
> *[9.2] Aluno 1: que quanto mais ele lê, mais rápido ele quer ler, porque o livro é eletrizante ...*
> *[9.3] Professora: então como você desenharia esse gráfico, sem valores? sem você pensar em números, mas pensar nessa velocidade da leitura?*
> *[9.4] Aluno 3: uma parábola?*
> *[9.5] Professora: e como que você vai desenhar essa parábola?*
> *[9.6] Aluno 1: é isso que a gente tava discutindo agora.*
> *[9.7] Aluno 2: a gente tava em dúvida se ela seria pra baixo ou pra cima, mas acho que seria pra cima, porque quanto mais ele lê, mais rápido.*
> *[9.8] Aluno 1: não teria que ser assim [faz um esboço no papel], porque o tempo ele vai diminuindo, porque ele começa a ler mais rápido ... invés de ser assim.*
> *[9.9] Aluno 2: você fala tipo assim?*
> *[9.10] Aluno 1: é, porque o tempo vai passando mais rápido.*
> *[9.11] Aluno 1: então teria que fazer assim.*
> *[9.12] Aluno 2: e o número de páginas vai aumentando porque ele já leu*
> *[9.13] Aluno 3: é.*
> *[9.14] Aluno 1: então eu acho que é assim.*
> *[9.15] Aluno 1: o que você acha aluno 3?*
> *[9.16] Aluno 3: também acho que é assim.*

Neste trecho, em que a professora retornou ao grupo e pediu que expliquem porque modificaram o gráfico, o Aluno 1 apresentou uma justificativa validada no grupo [9.2]. A professora então questionou: “Então como você desenharia esse gráfico, sem valores? Sem você pensar em números, mas pensar nessa velocidade da leitura?” [9.3]. Em [9.4], o Aluno 3 apresentou a nova conjectura do grupo, de que o gráfico seria uma parábola, justificando que o tempo estava passando rápido, e não de maneira constante, mas ainda não entendiam se a convavidade do gráfico seria para baixo ou para cima.

Nos trechos [9.8] a [9.12], o Aluno 1 e Aluno 2 formularam e reformularam conjecturas a respeito da concavidade da curva, e procuraram justificá-las com base em evidência empíricas (“começa a ler mais rápido”, “o tempo vai passando mais rápido”). Baseados no protocolo escrito apresentado pela equipe, e pelo fato de, na continuidade do diálogo, não haver indícios de que o esboço havia sido novamente modificado, inferimos que a representação validada pela equipe nessa etapa do diálogo é a representada na Figura 3.

Figura 3 - Gráfico apresentado no protocolo final da equipe 1



Fonte: material do grupo de pesquisa.

Trecho 10 – “Passando a limpo” o esboço

[10.1] Aluno 2: quer desenhar?
[10.2] Aluno 3: não, pode desenhar
[10.3] Aluno 3: toma aluno 1, desenha você, você desenha mais certinho.
[10.4] Aluno 1: só que tipo, a parábola, não é assim?
[10.5] Aluno 1: é só o tempo, não vai crescer de novo.
[10.6] Aluno 2: mas aqui seria o ponto inicial, não seria?
[10.7] Aluno 1: é, mas tipo ... é assim, ele não vai crescer de novo.
[10.8] Aluno 2: ou pode parar aqui né.
[10.9] Aluno 2: quando acabar o livro.
[10.10] Aluno 1: então, quando ele chegar aqui vai ser 0, daí ele vai acabar.
[10.11] Aluno 2: então isso teria que estar aqui, porque assim é o zero, há não ser que...
[10.11] Aluno 1: não quando ele toca aqui é o zero, daí o tempo é zero, porque ele não ta lendo mais.
[10.12] Aluno 2: é... faz sentido.
[10.13] Aluno 1: fazer sentido faz, só não sei se ta certo.
[10.14] Aluno 2: é né (risos)

Ao “passar a limpo” o esboço feito anteriormente e validado pela equipe, surge um novo aspecto do gráfico, que até esse momento não havia sido discutido pela equipe: os pontos de intersecção da curva (que, para a equipe, foi validada como uma parábola) com os eixos coordenados. Uma conjectura é então explícita: que no ponto na qual a curva interpecta o eixo x (páginas), o tempo de leitura é zero [10.10], com a justificativa de que “ele não está lendo mais” [10.11]. Com base nessa evidência empírica, o grupo validou então essa conjectura.

Trecho 11 – “Eu explico, e vocês escrevem”

[11.1] Aluno 3: eu explico, e vocês escrevem ... não sei explicar
[11.2] Aluno 2: na verdade ela entendeu, você entendeu, não entendeu?
[11.3] Aluno 3: entendi.
[11.4] Aluno 2: então.
[11.5] Aluno 3: ta, mas tem que explicar tipo, o enunciado, ou o gráfico?
[11.6] Aluno 1: não, tem que explicar como que a gente chegou aqui, o nosso pensando, como a gente formulou isso daqui.
[11.7] Aluno 2: é.
[11.8] Aluno 3: ta bom, então é o que a gente falou pra Cássia?
[11.9] Aluno 1: é ... basicamente!
[11.10] Aluno 3: ta, é só explicar isso daí então, que a gente colou a reta [eixo] x *como* n *[páginas], o* t *[tempo] como* y*, que o* t *vai diminuindo, porque vai pra baixo, a gente não colou reta porque não é constante.*
[11.11] Aluno 1: o t *ta aqui porque ele que varia.*
[11.12] Aluno 2: na verdade o número de página também varia, porque vai...
[11.13] Aluno 1: mas ele depende do tempo.
[11.14] Aluno 2: é ... o tempo depende do outro
[11.15] Aluno 3: é.
[11.16] Aluno 2: Ta.
[11.17] Aluno 1: ou se for ao contrário a gente tem que trocar.
[11.18] Aluno 3: e se a gente trocar, o que acontece?

Ao tentar formular uma explicação para ser registrada por escrito para ser entregue à professora, o grupo resgatou algumas escolhas feitas no processo de construção do gráfico, e que refletiram conjecturas que foram validadas ao longo da discussão, como por exemplo: sobre o número da página ter sido representado como variável indepedente, no eixo x, e o tempo de leitura da página no eixo y, como variável dependente [11.10]. Também remeteram ao fato de terem optado por uma curva que não era uma reta, porque “não é constante” (referindo-se ao tempo de leitura).

Nesse trecho, surgiu uma nova conjectura, em [11.17], de que, se os eixos forem invertidos, “algo” tem que ser trocado. “E se a gente trocar, o que acontece?” [11.18]. Esse questionamento fez com que eles pensem em outras hipóteses para a representação da situação.

Trecho 12 – Outra representação

[12.1] Aluno 1: daí é o número de página que vai depender do tempo
[12.2] Aluno 3: não, mas daí ficaria assim?

[12.3] Aluno 1: não, só vai mudar aqui, é o número de páginas que depende do tempo.
[12.4] Aluno 1: calma, aqui seria n, aqui seria o tempo, o tempo.
[12.5] Aluno 2: vai aumentando ...
[12.6] Aluno 1: aqui o número de páginas vai aumentando e o tempo vai diminuindo ...
[12.7] Aluno 1: não é?
[12.8] Aluno 2: é, aqui o tempo ta aumentando, o,1 ,2 ,3, ta aumentando.
[12.9] Aluno 3: não, mas daí aqui teria que começar do ...
[12.10] Aluno 1: não aqui, 1,2,3,4 vai diminuindo, porque o gráfico é assim, certo? [faz um esboço] Ai menos, 1 menos, bla bla bla então se ele ta vindo pra cá, ele vai diminuindo, o número de páginas vai aumentando ...
[12.11] Aluno 2: É ...
[12.12] Aluno 1: então aqui o t diminuiu e o número de páginas aumentou, é a mesma coisa.
[12.13] Aluno 2: É ...

Neste trecho da discussão, reconhece-se uma tentativa de representação da ideia de que, a cada página lida, menor seria o tempo (no caso, o tempo individual de leitura daquela página). Contudo, surgiram novas suposições como, por exemplo, "se for ao contrário a gente tem que trocar", "e se a gente trocar, o que acontece?", ou seja, surgiram outras oportunidades de elaborarem conjecturas e, consequentemente, novas tentativas de validações. Ao analisarem as conjecturas que criaram referentes aos eixos do gráfico, concluíram que se fizessem inversão, o gráfico seria o mesmo [12.12]. Tal conjectura não parece ser matematicamente válida. Entretanto, por não ter acesso aos esboços realizados nesse momento, não foi possível analisar em profundidade esse trecho.

Discussões e considerações finais

A pesquisa que deu origem a este artigo teve como objetivo analisar e identificar processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 1º ano do Ensino Médio ao resolverem uma tarefa exploratória. Consideramos como material de análise aúdios provenientes da discussão realizada por um grupo (com três integrantes). A tarefa trazia uma situação envolvendo a variação na velocidade de leitura das páginas de um livro, com o intuito de verificar a capacidade de pensar de forma articulada em variações de uma grandeza, conforme ocorria a variação de outra.

Para atender ao objetivo do trabalho, foi necessário aprofundar-se nos estudos referentes aos processos de raciocínio matemático, analisando as concepções de diversos autores no que diz respeito aos tipos de raciocínio e suas contribuições para elaboração do conhecimento matemático. De acordo com Jeanotte e Kieran (2017), existem diversos processos de raciocínio, sendo alguns mais comuns no âmbito do trabalho com a disciplina de Matemática na Educação Básica. O presente estudo tinha como um dos propósitos identificar esses processos. Como um dos resultados principais, destacamos a presença, de forma mais evidente, a elaboração de conjecturas e a tentativa de validá-las a partir de evidências empíricas ou em alguns momentos com o auxílio de autoridade externa da professora.

Tais processos de raciocínio matemático foram evidenciados ao longo da análise das discussões do grupo. Realizando a análise, percebemos a busca pelo entendimento da tarefa em um momento inicial em que, por meio de conhecimentos prévios, os alunos elaboraram as primeiras conjecturas sobre o modo que poderiam resolver a tarefa e como poderiam esboçar o gráfico solicitado.

Com base em evidências empíricas, validaram as primeiras conjecturas do grupo, tendo como situação em análise o envolvimento do número de páginas com o tempo, posteriormente, questionando o crescimento do gráfico. Nesse sentido, entenderam a variação do gráfico e o seu comportamento diante da leitura do livro em relação ao tempo, sendo a interação com professora em diversos momentos fundamental para elaboração de algumas hipóteses que foram expressas a partir de novas conjecturas.

Por fim, os alunos do grupo refletiram as conjecturas que foram validadas no decorrer da discussão, como por exemplo, o fato do número de páginas ser representado como variável independente e também, por terem optado por uma parábola e não uma reta (como acreditavam que era), ao perceberem que o tempo de leitura não seria uma constante .

Para Jeannotte e Kieran (2017) o processo de conjecturar envolve etapas cíclicas de enunciar a conjectura, verificar possibilidades e encontrar motivos para serem verdadeiras, o que fica evidente na análise das discussões que ocorrem no grupo. Os momentos de discussão constituíram-se como "oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novos conhecimentos" (PONTE, 2005, p.16).

O fato da tarefa ser aberta permitiu que os alunos partilhassem ideias, formulassem e reformulassem conjecturas. Apoiados em Lannin, Ellis e Elliot (2011), reconhecemos diversos momentos em que houve exploração de relações matemáticas e a elaboração e reelaboração de conjecturas, e a busca por justificá-las e validá-las. Em geral, essa justificação ocorreu a partir da utilização de evidência empírica ou de exemplo genérico, e em alguns momentos com apelo à autoridade externa da professora (LANNIN, 2005).

Destaca-se também o papel das intervenções da professora na análise do grupo. Para Wood (1999) o professor deve explorar essas situações, para que seja desenvolvida a capacidade de argumentação e consequentemente, o raciocínio matemático. Foi essencial que, para estimular o raciocínio do aluno, a professora evitasse fornecer indicações muito específicas, mas foram necessários questionamentos que auxiliassem os alunos em suas reflexões. Assim como diz Brodie (2010), o questionamento é uma das ações fundamentais para que haja desenvolvimento do raciocínio, apoiando o trabalho do aluno e resistindo ao fornecimento de indicações para o desenvolvimento da resolução. No entanto, a autora destaca que não se deve deixar os alunos sem qualquer mediação, sejam elas individuais ou em grupos, e isso ficou evidenciado na interação da professora com o grupo.

Os resultados obtidos por este estudo foram fundamentais para a compreensão de questões pertinentes às práticas educativas, evidenciando o potencial que os processos reconhecidos ao longo da análise têm para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Destaca-se também o quanto é fundamental que sejam propostas aos alunos tarefas desafiadoras, a serem exploradas de modo a fomentar o raciocínio dos alunos, incentivando-os a elaborem conjecturas e buscarem elementos para justificá-las e validá-las.

As tarefas exploratórias (PONTE, 2005) demandam a disponibilidade, em sala de aula “física” (ou por meio de recursos disponíveis no contexto de aulas remotas), de momentos como esses que foram analisados, em que os alunos possam pensar em estratégias e procedimentos para resolução por meio de discussões coletivas mediadas pelo professor. Finalizando, reforça-se a importância da qualidade da tarefa aliada às ações da professora como fator relevante para a ocorrência dos diversos processos de raciocínio aqui evidenciados e, de modo mais amplo, dos processos de ensino e de aprendizagem em Educação Matemática na contemporaneidade.

Referências

Baxter, J. A. & Willians, S. (2010). Social and analytic scaffolding in Middle Scholl Mathematics managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education*, 13, 7-26.

Bogdan, R, C.& Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Portugal: Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer, 1.ed.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, Reston, VA, 88*(5),* 412-417.

Jeanotte, D.& Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 96*(1),* 1-16.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical thinking and learning,* 7, 231-25.

Lannin, J.K.; Elliott, R. & Ellis, A.B. (2011). Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96*(2),* 1-18.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, Rio Claro, 32*(62)*, 781-801.

Mata-Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa.

Morais, C.; Serrazina, L. & Ponte, J. P. (2018). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae*, Canoas, 20*(4)*, 552-570.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática,* 100, 3-9.

Ponte, J. P.; Quaresma, M. & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação Matemática*, Lisboa, 156, 7-11.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.): *O professor e o desenvolvimento curricular*, pp.11-34. Lisboa. APM.

Rodrigues, C.; Menezes, L. & Ponte, J. P. Práticas de discussão em sala de aula de matemática: os casos de dois professores. *Bolema***,** Rio Claro, 12*(61)*, 398-418.

Stylianides, G, J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11*(4)*, 258-288.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, VA, 30*(2)*, 171-191.

Autores:

Loryane Santos de Oliveira
Licenciada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Correio electrônico: lory19.1996@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5618-3315

Eliane Maria de Oliveira Araman
Licenciada em Ciências com habilitação em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores de Londrina. Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. É docente do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Cornélio Procópio e do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT). Realizou estágio pós-doutoral no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Realiza suas pesquisas em História da Matemática na Educação Matemática, em Raciocínio Matemático e seus processos e em Formação de Professores.

Correio electrônico: eliane.araman@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1808-2599

André Luis Trevisan
Licenciada em Matemática, Bacharelado e Mestrado em Matemática Aplicada pela Unicamp. Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. É docente do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina e do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT). Realizou estágio pós-doutoral na Universidade Federal do ABC. Realiza suas pesquisas em Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, em Raciocínio Matemático e seus processos e em Formação de Professores.
Correio electrônico: andreluistrevisan@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8732-1912

Como citar o artigo:
OLIVEIRA, L. S.; ARAMAN, E. M. de O.; TREVISAN, A. L. Procesos de Razonamiento Matemático en una Tarea Exploratoria. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 1-21, janeiro, 2022. DOI: 10.37618

Potencialidades de las prácticas de enseñanza exploratoria en matemáticas para el desarrollo profesional de futuros docentes de matemáticas

Alessandra Senes Marins
alessandra_senes@uvanet.br
https://orcid.org/0000-0003-2274-7386
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)
Sobral, Brasil.
Angela Marta Pereira das Dores Savioli
angelamarta@uel.br
https://orcid.org/0000-0002-5624-6398
Universidade Estadual de Londrina(UEL)
Londrina, Brasil.
Bruno Rodrigo Teixeira
bruno@uel.br
https://orcid.org/0000-0003-0294-4470
Universidade Estadual de Londrina(UEL)
Londrina, Brasil.

Recibido: 13/06/2021 **Aceptado:** 16/11/2021

Resumen

Este artículo presenta parte de los resultados de una investigación doctoral y tuvo como objetivo investigar las potencialidades de prácticas relacionadas con la perspectiva de la enseñanza exploratoria de las matemáticas y organizadas en momentos de planificación y enseñanza para el desarrollo profesional de los futuros docentes de matemáticas. Para ello, se llevó a cabo una acción formativa, basada en la perspectiva del desarrollo profesional docente, y sustentada en el enfoque pedagógico exploratorio de la matemática, con siete estudiantes de licenciatura en matemáticas. Para lograr el objetivo propuesto, se realizó una investigación cualitativa de carácter interpretativo. Analizamos la información relacionada con una entrevista semiestructurada y el cuaderno de bitácora del investigador, las grabaciones de audio utilizadas en las reuniones y los registros de los participantes. La investigación evidenció que algunas prácticas sustentadas en la enseñanza exploratoria de las matemáticas contribuyeron a la formación docente de los participantes de la investigación, a saber: elegir una tarea interesante y desafiante y anticipar sus posibles resoluciones les permitió expresar la necesidad de estudiar en detalle el contenido matemático, preparando por objetivos a la hora de impartir docencia e identificando que es necesario tener en cuenta a los estudiantes a la hora de planificar, para poder monitorearlos de manera más efectiva; el uso de diferentes materiales didácticos les permitió comprender que pueden contribuir al compromiso de los estudiantes en la resolución de la tarea; monitorear el desempeño de la tarea les permitió acceder a los pensamientos de los estudiantes en desarrollo y hacer referencias para guiar y alentar a los estudiantes en sus resoluciones. Además, seleccionar y secuenciar las resoluciones de los estudiantes para proporcionar una cadena lógica de ideas; mantener un clima armonioso para la discusión de ideas matemáticas; y conectar las respuestas de los estudiantes promovió la comprensión de los elementos matemáticos presentes en la tarea, con base en lo hecho y discutido previamente.

Palabras clave: Enseñanza Exploratoria de las Matemáticas. Desarrollo Profesional Docente. Formación del Docente de Matemáticas. Educación Matemática.

Potencialidades de práticas de ensino exploratório de Matemática para o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática

Resumo

Este artigo apresenta parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado e teve como objetivo investigar potencialidades de práticas relacionadas à perspectiva de ensino exploratório de Matemática e organizadas em momentos de planejamento e de ensino para o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática. Para isso, realizou-se uma ação formativa desenvolvida com base na perspectiva de desenvolvimento profissional docente e apoiada na abordagem de ensino exploratório de Matemática, com sete graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática. Para atingir o objetivo proposto foi realizada uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, em que foram analisadas as informações referentes a uma entrevista semiestruturada, ao diário de bordo da pesquisadora, às gravações em áudio utilizadas nos encontros e aos registros dos participantes. Assim, evidenciou-se que algumas práticas apoiadas no ensino exploratório de Matemática contribuíram para a formação docente dos participantes da pesquisa, a saber: escolher uma tarefa interessante e desafiante e antecipar suas possíveis resoluções permitiram-lhes que manifestassem a necessidade de estudar de forma detalhada o conteúdo matemático, preparando-se para direcionamentos no momento de ensino e, também, que identificassem que é preciso considerar os alunos na construção do planejamento, para assim monitorá-los de forma mais efetiva; utilizar diferentes materiais didáticos possibilitou-lhes um entendimento de que podem contribuir para o engajamento dos alunos na resolução da tarefa; monitorar a realização da tarefa, permitiu-lhes acessar o pensamento em desenvolvimento dos alunos, possibilitando fazer encaminhamentos para direcioná-los e incentivá-los em sua resolução; selecionar e sequenciar as resoluções dos alunos, a fim de propiciar um encadeamento lógico das ideias; manter um clima harmonioso para a discussão das ideias matemáticas; e conectar as respostas dos alunos promoveram um entendimento sobre elementos matemáticos presentes na tarefa, a partir do que foi realizado e discutido anteriormente.

Palavras chave: Ensino Exploratório de Matemática. Desenvolvimento Profissional Docente. Formação do Professor de Matemática. Educação Matemática.

Potentialities of Exploratory Mathematics Teaching Practices for the Professional Development of Future Mathematics Teachers

Abstract

This article presents part of the results of a doctoral research and aimed to investigate the potentialities of practices related to the perspective of mathematics exploratory teaching and organized in planning and teaching moments for the professional development of prospective mathematics teachers. To this end, a formative action was carried out, based on the perspective of professional teacher development, and supported by the exploratory teaching approach to mathematics, with seven undergraduate students in a mathematics teaching degree course. To achieve the objective proposed, a qualitative research of an interpretive nature was carried out. The information related to a semi-structured interview and the researcher's logbook, the audio recordings used in the meetings, and the participants' registers were analyzed. The research evidenced that some practices supported by exploratory teaching of mathematics contributed to the teacher education of the research participants, namely: choosing an interesting and challenging task and anticipating its possible resolutions allowed them to express the need to study in detail the mathematical content, preparing for targets at the time of teaching and identifying that it is necessary to

consider students when planning, to monitor them more effectively; using different teaching materials allowed them to understand that they can contribute to the students' engagement in solving the task; monitoring the task performance allowed them to access the students' thoughts in development and make referrals to guide and encourage students in their resolutions. Also, selecting and sequencing the students' resolutions to provide a logical chain of ideas; maintaining a harmonious climate for the discussion of mathematical ideas; and connecting the students' answers promoted an understanding of the mathematical elements present in the task, based on what was done and discussed previously.
Keywords: Exploratory Mathematics Teaching. Teacher Professional Development. Formation of the Mathematics Teacher. Mathematics Education.

Introdução

É comum pensarmos que, para acontecer um "bom" ensino de Matemática, o professor precisa ter uma "boa" formação, seja em sua formação inicial, como em momentos de formação continuada. Entretanto, durante algum tempo, em parte dos cursos de formação (inicial ou continuada) do professor que ensina Matemática essa "boa" formação parecia estar voltada para o conhecimento de conteúdos específicos à Matemática, considerando o professor como mero executor de propostas, deixando de lado discussões sobre competências didáticas, práticas letivas, e sobre o que o professor tem a dizer, suas crenças, concepções, valores, potencialidades e necessidades (PONTE, 2014; FERREIRA, 2003).

Em uma perspectiva de desenvolvimento profissional docente, a formação de um professor não se resume somente a técnicas e teorias aprendidas na graduação, ela é contínua e ampliada na prática, tendo como base a reflexão e a experiência, seja individual ou coletiva (PONTE; OLIVEIRA, 2002). Além disso, seu foco está no desenvolvimento da formação do professor situado em seu campo profissional, ou seja, em sala de aula, e na promoção de um movimento reflexivo sobre sua prática, seus conhecimentos, crenças, proporcionando a ampliação e o aprofundamento de suas qualificações profissionais (MARCELO, 2009; SMITH, 2001; PONTE, 1998, 2014).

Marcelo (2009) traz para a discussão a formação por meio do desenvolvimento profissional com foco na mudança de conhecimentos e crenças. Esse autor entende que essas possíveis transformações podem acontecer quando o sujeito em formação é colocado a vivenciar outras práticas de ensino, as quais podem propiciar evidências que geram resultados na aprendizagem dos seus alunos.

Nesse sentido, uma prática de ensino que oportuniza aos sujeitos em formação planejarem e realizarem ações que possam contribuir para o seu desenvolvimento profissional, pode ser desenvolvida sob a perspectiva do ensino exploratório de Matemática, pois, além de favorecer um ambiente de aprendizagem de interação entre estudantes e professor, exige do docente um planejamento mais detalhado de práticas específicas para a gestão da aula e a promoção da aprendizagem Matemática dos estudantes.

Diante disso, foi realizada uma ação formativa com base em elementos que colaboram para o desenvolvimento profissional docente e apoiada na perspectiva de ensino exploratório de Matemática com sete graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de investigar potencialidades de práticas relacionadas à perspectiva de ensino exploratório de Matemática e organizadas em momentos de planejamento e de ensino para o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática e de responder à seguinte pergunta: que práticas realizadas no processo formativo apoiadas na abordagem de ensino exploratório de Matemática podem contribuir para o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática?

1. Ensino Exploratório de Matemática

O ensino exploratório de Matemática surge como alternativa ao ensino expositivo, que em geral, segue uma ideia de transmissão do conhecimento, em que o foco está na exposição do conteúdo pelo professor e na reprodução de exercícios pelo aluno, de modo que "[...] aprender é sobretudo 'saber como se fazem' todos os tipos de exercícios susceptíveis de saírem em testes ou exames" (PONTE, 2005, p. 13). Em contrapartida, o ensino exploratório assume uma perspectiva dialógica de construção do conhecimento, em que a ênfase do processo de ensino e de aprendizagem está no aluno e não no professor, e "[...] nas condições que favoreçam a participação, individual e coletiva, numa atividade de inquirição" (OLIVEIRA; CARVALHO, 2014, p. 466).

Para que aconteça uma participação efetiva dos alunos, essa perspectiva propõe diferentes práticas a serem realizadas na construção do planejamento e durante o momento de ensino. Primeiramente, é preciso que o professor escolha uma tarefa desafiante para a condução da aula, pois nela está "[...] implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem, mas uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos e se prepare para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula" (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012, p. 256).

Uma aula de ensino exploratório comumente se desenvolve em quatro fases conforme Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), a saber: introdução da tarefa; realização da tarefa; discussão da tarefa; e sistematização das aprendizagens Matemáticas. Além disso, Stein *et al*. (2008) apresentam cinco práticas para facilitar as discussões matemáticas em torno de tarefas exigentes cognitivamente que podem ser utilizadas na elaboração e condução de uma aula sob essa perspectiva, como destaca Canavarro (2011), que são: antecipar; monitorar; selecionar; sequenciar; e conectar as respostas dos alunos.

A prática de *antecipar* possíveis resoluções da tarefa é utilizada antes de aula, durante a construção do planejamento. Após a escolha da tarefa a realização dessa prática permite ao professor um preparo maior para conduzir a sua exploração em sala de aula, tanto em relação ao conhecimento de conceitos matemáticos envolvidos como o de possíveis interpretações, procedimentos, estratégias de resolução para a tarefa (CANAVARRO, 2011; STEIN *et al*., 2008).

A primeira fase de aula é a da *introdução da tarefa*. Nesta, é preciso organizar o trabalho que será desenvolvido pelos alunos, por meio de ações como estabelecer o objetivo da aula, organizar as equipes, esclarecer a dinâmica da aula, entre outras coisas, a fim de garantir que entendam a tarefa e que se envolvam em sua resolução.

A segunda fase é o momento do professor conduzir e apoiar os alunos na *realização da tarefa*. Nesta, a partir de indagações o professor direciona-os a utilizarem conhecimentos prévios, diferentes estratégias, representações e procedimentos para a resolução da tarefa, a fim de não limitar o seu nível de exigência cognitiva (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2014). É também o momento em que a prática de *monitorar* é utilizada, o que permite ao professor identificar o potencial de aprendizagem envolvido nas resoluções dos alunos, dar possíveis encaminhamentos e avaliar o que foi desenvolvido (STEIN *et al*., 2008). Além disso, essa prática possibilita *selecionar* as resoluções que serão apresentadas na terceira fase de aula, como escolher uma que apresenta a estratégia mais utilizada pelos alunos, uma que permita a partir de um erro recorrente esclarecê-lo, resoluções que mostram diferentes estratégias e/ou representações matemáticas, entre outras (CANAVARRO, 2011; STEIN *et al*., 2008), e, assim, conduzir os alunos a organização das ideias que serão apresentadas à turma.

A *discussão da tarefa* é a terceira fase de aula. Depois de *selecionar* as resoluções, é preciso *sequencia-las* com alguma estratégia que permita estabelecer um encadeamento lógico das ideias matemáticas e, assim, maximizar a aprendizagem Matemática dos alunos (STEIN *et al*., 2008). Ademais, o professor tem o papel de conduzir as intervenções e interações dos alunos e promover a qualidade Matemática das argumentações e explicações, com o cuidado de gerir uma discussão das comparações das resoluções e da eficácia Matemática presente nelas (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012).

A quarta e última fase é a de *sistematização das aprendizagens matemáticas*. Nesta, com a colaboração dos alunos, é realizada uma síntese do que ocorreu durante a aula (CYRINO; TEIXEIRA, 2016). Essa sistematização possibilita ao professor *conectar* as ideias apresentadas pelos alunos, convidando-os a "[...] analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta-análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras" (CANAVARRO, 2011, p. 16). Além disso, permite relacionar elementos presentes nas resoluções dos alunos com “representações matemáticas formalizadas, introduzindo ou discutindo conceitos e ideias matemáticas, regras, generalizações, propriedades, entre outros, de acordo com os objetivos que delineou em relação à aprendizagem Matemática dos alunos para aquela aula” (CYRINO; TEIXEIRA, 2016, p. 97).

2. Procedimentos Metodológicos

A pesquisa realizada é de natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994) e de cunho interpretativo conforme Creswell (2010). Foi desenvolvida a partir de uma ação formativa constituída com base em elementos que colaboram para o desenvolvimento profissional docente (MARCELO, 2009; PONTE, 1998, 2014; PONTE; OLIVEIRA, 2002; SMITH, 2001) e realizada em seis encontros, dos quais cinco foram organizados em torno de atividades do ciclo de trabalho do professor, em momentos de planejamento e de ensino. Além disso, a perspectiva de ensino exploratório de Matemática permeou toda essa ação formativa, com seu estudo, reflexão e discussão, necessários para a construção do plano de aula e prática de ensino.

Esse processo formativo foi realizado com um grupo de sete licenciandos de Matemática (P1, P2, P3, P4, P5, P6, e P7) de uma universidade pública da região norte do estado do Ceará, egressos do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Após uma ação formativa, no contexto do PIBID, com o estudo e a aplicação de uma aula desenvolvida sob a perspectiva de ensino exploratório de Matemática, os participantes desta pesquisa manifestaram o desejo de conhecer um pouco mais a respeito dessa abordagem. Como as atividades do PIBID haviam sido encerradas em fevereiro de 2018, foi criado um projeto de extensão para atender essa necessidade. Este artigo descreve parte dos resultados oriundos do trabalho realizado no âmbito desse projeto de extensão.

Esses licenciandos foram organizados em dois grupos para o momento de ensino, Gr 1 com P1, P2, P3, P4 e Gr 2 com P5, P6, e P7, sendo que cada grupo ministrou uma aula desenvolvida sob a perspectiva de ensino exploratório de Matemática em duas turmas da segunda série do Ensino Médio de escolas[1] distintas. Os alunos da Educação Básica, participantes do momento de ensino, também foram codificados (A1, A2, A3, ..., A30), pois alguns registros escritos e gravações em áudio foram utilizados na análise das informações obtidas. No quadro a seguir, apresentamos uma síntese do processo formativo conforme os momentos de planejamento e de ensino e os encontros.

Quadro 1: Quadro Síntese do Processo Formativo

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="4">PLANEJAMENTO</th><th>ENSINO</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th>Encontro 1
24/04/18</th><th>Encontro 2
07/05/18</th><th>Encontro 3
17/05/18</th><th>Encontro 4
04/06/18</th><th>Encontro 5
Aplicação</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Trabalho Presencial</th><th>Discussão</th><td>Apresentação da pesquisa;
Termo de consentimento.</td><td>Discussão de texto.</td><td>Discussão de texto.</td><td>Apresentar e discutir a formalização da 1ª e 2ª fases</td><td rowspan="3">Aula do Gr2 (11/06 - 2º EM - 9h45 - 11h25).

Aula do Gr1 (19/06 - 2º EM - 7h50-9h30).</td></tr>
<tr><th>Trabalho em pares</th><td rowspan="2">Planejamento do processo formativo: datas, temas, grupos.</td><td>Escolha do conteúdo;
Escolha e antecipação de possíveis resoluções da tarefa.</td><td>Discussão das resoluções da tarefa.
Construção do plano de aula, 1ª e 2ª fases.</td><td>Construção do plano de aula, 3 ª e 4 ª fases.</td></tr>
<tr><th>Discussão final</th><td>Apresentação e discussão de possíveis resoluções.</td><td>Discussão sobre práticas planejadas para as duas primeiras fases.</td><td>Discussão sobre práticas planejadas para as duas últimas fases.</td></tr>
<tr><th>Trabalho não</th><th>Individual e/ou coletivo</th><td>Leitura do texto recomendado (CANAVARRO, 2011).</td><td>Organizar as resoluções da tarefa.
Leitura do texto recomendado (CYRINO; TEIXEIRA, 2016).</td><td>Formalizar ações e intenções discutidas nas duas primeiras fases.</td><td>Fechamento do plano de aula e envio aos participantes.</td><td>Reflexão e descrição da aula.</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Oliveira e Carvalho (2014)

Conforme mencionado anteriormente, o processo formativo foi realizado em seis encontros, sendo organizados em três momentos: de planejamento, que contemplaram os quatro primeiros encontros; de ensino, realizado no quinto encontro, com duas aplicações de aula; e de reflexão, que se desenvolveu no último encontro. Neste artigo não apresentamos

[1] Essas escolas são as que os futuros professores participavam do PIBID. E os professores regentes dessas turmas foram ex-supervisores do programa.

o momento de reflexão, pois devido ao número limite de páginas exigido pela revista, optamos em fazer um recorte da pesquisa e mostrar apenas os dois primeiros momentos.

Cada encontro foi desenvolvido levando em conta as especificidades de cada contexto do momento de ensino (as escolas) e anseios e necessidades de cada participante. Dessa forma, em cada encontro, os participantes recebiam tarefas não presenciais, como textos relacionados com a perspectiva de ensino exploratório de Matemática para estudo, como a formalização das ideias discutidas nos encontros presenciais referentes à construção do planejamento, entre outros. E, ainda, e-mails e mensagens pelo aplicativo *WhatsApp* foram utilizadas para marcar os encontros e discutir algumas atividades não presenciais, como a escolha da tarefa Matemática.

Para a coleta de informações utilizamos gravações em áudio (GA), o diário de bordo (DB) da pesquisadora, registros escritos dos participantes elaborados durante os encontros e uma entrevista semiestruturada (ES) realizada no final do processo formativo, a qual aconteceu individualmente. No tópico a seguir, trazemos uma breve descrição e algumas análises das informações que foram obtidas a partir do desenvolvimento dos momentos de planejamento e de ensino desse processo formativo, as quais foram realizadas à luz de aspectos teóricos da perspectiva de ensino exploratório de Matemática.

3. Resultados e Discussões

O *momento de planejamento* do processo formativo foi desenvolvido nos quatro primeiros encontros conforme o Quadro 1 e teve intenção de propiciar aos participantes momentos de estudo, discussão e reflexão sobre práticas visando à elaboração de um plano de aula, a partir de um *framework*[2], o qual foi utilizado no momento de ensino, sob a perspectiva de ensino exploratório de Matemática.

No primeiro encontro foram organizados dois grupos de trabalho e discutidas possíveis datas para o momento de ensino. Além disso, houve um tempo de reflexão e discussão sobre aspectos relativos às práticas referentes ao ensino exploratório vivenciadas em um momento anterior no contexto do PIBID, permitindo, assim, que pudessem ser revistas, reformuladas, reorganizadas, a fim de melhorarmos o desenvolvimento dessa ação formativa. Em seguida, para continuidade da formação, foi proposta uma tarefa não presencial, o estudo do artigo “Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios”, de

[2] Esse *framework* foi elaborado pelo Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática (GEPEFOPEM) da Universidade Estadual de Londrina, com a intenção de apresentar subsídios para a organização e condução de uma aula desenvolvida sob a perspectiva do ensino exploratório.

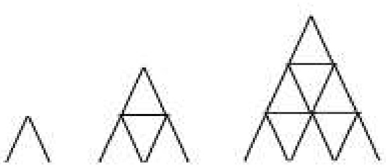
Canavarro (2011). Essa tarefa buscou atender o pedido dos participantes em relação ao estudo de outros textos referentes ao ensino exploratório de Matemática, a fim de contribuir para o direcionamento da construção do plano de aula e das práticas inerentes a essa perspectiva de ensino.

No segundo encontro foi proposto aos sujeitos da pesquisa discutirem a respeito do artigo que ficou para estudo. Logo após, os integrantes se reuniram a fim de escolherem a tarefa e anteciparem suas possíveis resoluções. Em uma discussão anterior, via aplicativo *WhatsApp*, os participantes sugeriram três tarefas que contemplavam o conceito de sequências numéricas (conceito sugerido pelos professores regentes das turmas em que seriam aplicadas a tarefa) e ficaram de resolvê-las de várias maneiras para discuti-las neste encontro, a fim de escolherem apenas uma a ser utilizada no momento de ensino.

Os participantes optaram por escolher uma tarefa (Quadro 2) em que no seu enunciando não estivesse explícito o conteúdo de sua resolução, de modo que poderiam instigar os alunos a resolverem-na de diferentes maneiras. Além disso, fizeram algumas adaptações a fim de levantarem uma discussão no momento de ensino referente à obtenção de uma lei de formação para determinar o número de cartas em qualquer figura.

Quadro 2: Tarefa castelo de cartas

A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente. De acordo com as informações, responda aos seguintes itens:



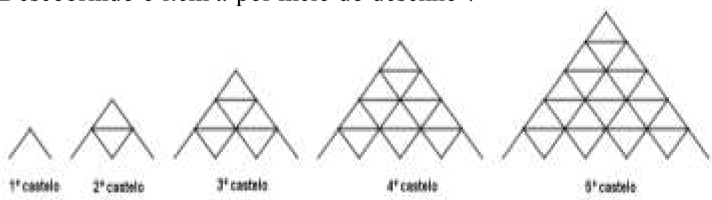
a) Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 5 andares? E de 10 andares?
b) Quantas cartas serão necessárias para construir um castelo com o mesmo número de andares do maior edifício do mundo *Burj Khalifa*, localizado em Dubai, nos Emirados Árabes, com 160 andares?

Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática (2009, adaptada)

Após essa escolha, os participantes anteciparam possíveis resoluções, conforme as práticas de Stein *et al*. (2008), e as socializaram para uma discussão geral. Vejamos as resoluções apresentadas aos itens *a* (Quadro 3) e *b* (Quadro 4), respectivamente.

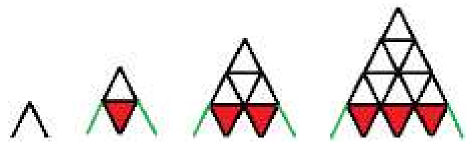
Quadro 3: Resoluções dos participantes para o item *a* da tarefa

Primeira resolução: Descobrindo o item *a* por meio do desenho[3]:



No 1º, 2º, 3º e 4º castelos temos respectivamente, 2, 7, 15, e 26 cartas. No 5º castelo haverá 40 cartas e o 10º com 155 cartas.

Segunda resolução: Para fazer um novo andar em um castelo já construído, precisamos das cartas do castelo anterior mais três cartas para cada novo triângulo formado (em vermelho) e mais duas para os lados (em verde).



Assim, para fazer o castelo de dois andares (C_2), a partir do primeiro, temos: $2 + 1 \cdot 3 + 2 = 7$. Para fazer o castelo de três andares (C_3), a partir do segundo, $7 + 2 \cdot 3 + 2 = 15$, e assim sucessivamente. Vejamos:

$$C_2 = 2 + 1 \cdot 3 + 2 = 7$$
$$C_3 = 7 + 2 \cdot 3 + 2 = 15$$
$$C_4 = 15 + 3 \cdot 3 + 2 = 26$$
$$C_5 = 26 + 4 \cdot 3 + 2 = 40$$
$$\vdots$$
$$C_n = C_{n-1} + (n-1) \cdot 3 + 2$$

Seguindo essa ideia, temos que o castelo com 10 andares terá $C_{10} = 126 + 9 \cdot 3 + 2 = 155$ cartas[4].

Terceira resolução: A partir dos resultados obtidos anteriormente, observa-se que existe um padrão, onde o 2º castelo foi construído com 2 cartas pertencentes ao castelo anterior mais 5 novas cartas, resultando em 2+5=7 cartas. Já o 3º foi construído com as 7 cartas do 2º castelo mais 8 cartas novas, totalizando em 7+8=15 cartas. O 4º castelo é construído com 15 cartas mais um novo andar com 11 novas cartas, resultando em 15+11 = 26 cartas. Temos que, a cada novo castelo construído, aproveitamos a quantidade de cartas do castelo anterior e adicionamos três cartas ao resultado da diferença entre a quantidade de cartas dos dois castelos anteriores. Por exemplo, o 4º castelo é construído com 15 cartas do 3º castelo, mais 11 cartas que é o resultado da diferença entre quantidade de cartas entre do 3º e do 2º castelo, acrescido de três cartas, ou seja,

$$15 + [(15 - 7) + 3] = 26$$
$$C_4 = C_3 + (C_3 - C_2) + 3$$
$$C_5 = C_4 + (C_4 - C_3) + 3$$

Construindo a sequência, teremos:

2 , 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126 , 155

Assim, o castelo com 10 andares terá 155 cartas na sua construção.

Quarta resolução: Podemos reescrever o número de cartas necessárias para construir os castelos da seguinte forma:

1º andar: $1 + 1 = 2$
2º andar: $(1 + 2) + (1 + 2) + 1 = 7$
3º andar: $(1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3) + 3 = 15$
4º andar: $(1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4) + 6 = 26$
5º andar: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 10 = 40$
$$\vdots$$
10º andar: $(1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10) + (1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10) + 45 = 155$

Assim, o número de cartas para construir um castelo de 10 andares é 155 cartas.

[3] Os licenciandos optaram por trazer no planejamento a estratégia de desenhar os castelos, por considerarem que alguns alunos da Educação Básica poderiam utilizá-la na resolução da tarefa, e por isso fizeram apenas os cinco primeiros, para ter uma ideia de como poderiam proceder no momento de ensino.

[4] Os números de cartas dos castelos de 6, 7, 8 e 9 andares foram obtidos nos registros escritos dos licenciandos e, para a descrição do planejamento, optaram por utilizar as reticências para suprimir esses valores.

<u>Quinta resolução</u>: Inicialmente podemos fazer a análise da quantidade de cartas usadas nas primeiras três figuras (F_1, F_2, F_3): $F_1 = 2$; $F_2 = 7$; e $F_3 = 15$. A partir disso, observamos que a diferença entre F_2 e F_1 são de 5 cartas e de F_3 e F_2 são de 8 cartas. Sendo assim, a diferença entre F_4 e F_3 será de 11 cartas. E assim seguirá o padrão de três unidades entre essas diferenças, logo

$$F_2 = 2 + 5 = 7$$
$$F_3 = 7 + 8 = 15$$
$$F_4 = 15 + 11 = 26$$
$$F_5 = 26 + 14 = 40$$
$$\vdots$$
$$F_{10} = 126 + 29 = 155\ cartas.$$

<u>Sexta resolução</u>: Outra maneira de encontrarmos a quantidade de cartas usadas para montar os castelos de 5 e 10 andares é analisando a quantidade de cartas laterais (P_n) e a quantidade de cartas que compõem a base de cada andar (B_n), em uma figura de posição *n*. Observe que as cartas que compõe os lados dos triângulos e não sua base, obedecem à seguinte soma: $P_1 = 2$ cartas; $P_2 = 4 + 2 = 6$; $P_3 = 6 + 4 + 2 = 12$; $P_4 = 8 + 6 + 4 + 2 = 20$; logo

$$P_{10} = 20 + 18 + \cdots + 4 + 2 = 110,$$

pois a quantidade de cartas laterais necessárias para cada figura *n* é determinada pela soma dos elementos da sequência $\{2n\}$ (sequência dos números pares).

Agora contamos a quantidade de cartas necessárias para compor as bases (B_n) de cada triângulo. Vejamos: $B_1 = 0$, não temos cartas que compõem a sua base, pois não formam um triângulo; $B_2 = 1$; $B_3 = 2 + 1 = 3$; $B_4 = 3 + 2 + 1 = 6$; logo

$$B_{10} = 9 + 8 + \cdots + 2 + 1 = 45,$$

pois a quantidade de cartas da base de cada triângulo de uma figura na posição *n* (F_n) é determinada pela soma dos primeiros elementos da sequência $\{n - 1\}$.

Assim, para determinar a quantidade de cartas de F_5 e F_{10} teremos que realizar as seguintes somas:

$$F_5 = (10 + 8 + 6 + 4 + 2) + (4 + 3 + 2 + 1) = 40$$

e

$$F_{10} = (20 + 18 + \cdots + 4 + 2) + (9 + 8 + \cdots + 2 + 1) = 155$$

<u>Sétima resolução:</u> Observando a construção dos andares, percebemos que, na 1ª figura, temos apenas um triângulo incompleto (com 2 cartas), faltando a carta da base. Na 2ª percebemos que há 2 triângulos incompletos e um triângulo completo (com 3 cartas) em cima desses dois. Na 3ª temos 3 triângulos incompletos na base, 2 em cima destes completos e mais 1 em cima. Seguindo esse raciocínio, na 5ª figura teremos 5 triângulos incompletos $(5 \cdot 2 = 10)$ com 10 cartas, mais $4 + 3 + 2 + 1$ triângulos completos $(10 \cdot 3 = 30)$ com 30 cartas, totalizando 40 cartas. Na 10ª figura teremos 10 triângulos incompletos $(10 \cdot 2 = 20)$ com 20 cartas, seguido de $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ triângulos completos $(45 \cdot 3 = 135)$ com 135 cartas, totalizando 155 cartas.

Fonte: Registros dos participantes[5]

Quadro 4: Resoluções dos participantes para o item *b* da tarefa

<u>Resolução 1</u>: Utilizando a fórmula do termo geral (a_n) de uma progressão aritmética (PA) para encontrar a quantidade de cartas laterais do primeiro andar da 160º figura,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$
$$a_{160} = 2 + (160 - 1) \times 2$$
$$a_{160} = 320$$

Assim, conforme a sexta resolução do item *a* (Quadro 3), F_{160}será composta por 160 andares, e cada andar será construído pela soma de elementos da sequência $\{2n\}$, que são as cartas laterais, mais a soma de elementos da sequência $\{n - 1\}$, que são as cartas da base, ou seja, essa adição determinará a quantidade de cartas totais utilizadas na F_{160}. Vejamos,

$$F_{160} = (320 + 318 + 316 + \cdots + 6 + 4 + 2) + (159 + 158 + 157 + \ldots + 1)$$

Utilizando a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA (S_n) para obter a quantidade de cartas necessárias para a construção do 160º castelo, primeiramente encontramos a soma dos pares de 2 a 320:

[5] Nos Quadros 3 e 4, foram realizadas algumas adequações em informações e notações (mantendo a essência das resoluções dos participantes da pesquisa) a partir do diário de bordo da pesquisadora, a fim de auxiliar o leitor na compreensão de algumas resoluções.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
$$S_n = \frac{(2 + 320) \times 160}{2}$$
$$S_n = 25760$$

Em seguida, encontramos a soma de 1 a 159:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$
$$S_n = \frac{(1 + 159) \times 159}{2}$$
$$S_n = 12720$$

Portanto,

$$F_{160} = (320 + 318 + 316 + \cdots + 6 + 4 + 2) + (159 + 158 + 157 + \ldots + 1)$$
$$F_{160} = 25760 + 12720$$
$$F_{160} = 38480 \ cartas.$$

<u>Resolução 2</u>: Partindo da ideia da soma dos *n* primeiros pares $(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)$, mais a soma dos $n - 1$ primeiros naturais $(1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1))$, vejamos

Fazendo a soma dos *n* primeiros pares utilizando a soma dos termos equidistantes,

$$S_{pares} = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)$$
$$S_{pares} = (2 + 2n) \times \frac{n}{2}$$
$$S_{pares} = \frac{2n + 2n^2}{2}$$

De modo análogo, fazemos a soma dos $n - 1$ naturais,

$$S_{naturais} = (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)$$
$$S_{naturais} = \big(1 + (n - 1)\big) \times \frac{(n - 1)}{2}$$
$$S_{naturais} = (n) \times \frac{(n - 1)}{2}$$
$$S_{naturais} = \frac{(n^2 - n)}{2}$$

Assim, a lei de formação que determina a soma de todas as cartas utilizadas para a construção de uma figura *n* (F_n) será igual à soma dos números *n* pares mais a soma dos $n - 1$ naturais,

$$F_n = S_{pares} + S_{naturais}$$
$$F_n = \frac{2n + 2n^2}{2} + \frac{(n^2 - n)}{2}$$
$$F_n = \frac{3n^2 + n}{2}$$

Sendo assim, para determinar o castelo com 160 andares, fazemos

$$F_{160} = \frac{3.160^2 + 160}{2} = 38480$$

<u>Resolução 3</u>: Observamos que a quantidade de cartas a mais necessárias para a construção de um próximo castelo obedece à soma dos elementos da sequência $\{3n - 1\}$, ou seja, 2 + 5 + 8 + 11 + ...+ $3n - 1$.

$$S_1 = 2$$
$$S_2 = 2 + 5 = 7$$
$$S_3 = 2 + 5 + 8 = 15$$
$$S_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$$

E assim por diante. Sendo assim, o primeiro termo da sequência é 2 e a razão é 3 e, se aplicarmos isso na fórmula da soma dos *n* termos de uma PA (S_n), obteremos a lei de formação, vejamos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

como $a_n = a_1 + (n - 1).r$, temos

$$S_n = \frac{\{a_1 + [a_1 + (n - 1).r]\}.n}{2}$$
$$= \frac{\{2 + [2 + (n - 1).3]\}.n}{2}$$

$$= \frac{\{2 + [3n - 1]\}.n}{2}$$
$$= \frac{3n^2 + n}{2}$$
Para $n = 160$, temos
$$S_{160} = \frac{3(160)^2 + 160}{2} = 38480\ cartas$$
Nesta resolução, a notação S_n foi utilizada para determinar a quantidade de cartas utilizadas para a construção de uma figura *n* no lugar de F_n.

Fonte: Registros dos participantes

Diante disso, observamos diferentes resoluções para a tarefa escolhida, nas quais foram utilizadas várias interpretações, estratégias, procedimentos e representações para antecipar possíveis resoluções. No item *a*, percebemos que para encontrar a quantidade de cartas nas figuras de números cinco e dez, esses licenciandos utilizaram: a representação pictórica para contar a quantidade de cartas e também para associar estratégias de construção das figuras com possíveis generalizações para obter a quantidade de cartas; a ideia de recursividade, utilizando a quantidade de cartas do castelo anterior para determinar a quantidade de cartas do próximo; sequências numéricas relacionando a posição da figura com a ideia de recursividade; soma dos elementos de sequências numéricas relacionadas com a posição da figura.

Para resolver o item *b*, os participantes associaram a soma dos elementos da sequência de uma figura em uma posição qualquer com elementos de uma PA, considerando a quantidade de cartas da primeira figura com o primeiro termo a_1 ($a_1 = 2$), a adição de 3 cartas para a construção de uma próxima figura com a razão, $r = 3$, e a soma dos elementos das sequências $\{2n\}$ e $\{n - 1\}$ com a fórmula da soma dos *n* termos de uma PA; obtiveram a fórmula para determinar a quantidade de cartas em uma figura *n* usando a ideia da soma dos termos equidistantes na adição das sequências dos *n* primeiros pares $(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)$, com a dos $\{n - 1\}$ primeiros naturais $(1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1))$; considerando a sequência $\{3n - 1\}$ que determina a quantidade de cartas a serem adicionadas em cada figura e as fórmulas do termo geral e da soma dos *n* termos de uma PA, elaboraram uma lei geral que determina a quantidade de cartas em cada figura *n*.

Essas resoluções foram apresentadas e discutidas nesse segundo encontro, em seguida foram digitadas e enviadas por *e-mail* aos participantes, inclusive aos professores regentes das turmas que posteriormente desenvolveriam o momento de ensino. Além disso, como tarefa não presencial ficou o estudo do artigo "O ensino exploratório e a elaboração de um *framework* para os casos multimídia", de Cyrino e Teixeira (2016). A intenção de propiciar o estudo desse artigo foi o de atender um pedido feito pelos participantes, de detalhar possíveis práticas para conduzir uma aula sob essa perspectiva, fase a fase, em especial aquelas que fomentam discussões.

Sendo assim, percebemos que a prática de antecipar permitiu aos participantes da pesquisa pensarem: em diferentes interpretações, estratégias, procedimentos, representações inerentes à tarefa, e, assim, buscarem entender de forma detalhada o conceito matemático em questão, preparando-se para possíveis direcionamentos no momento de ensino; nos alunos na construção do planejamento, considerando possíveis erros, dificuldades, resoluções mais comuns, perguntas a serem levantadas na realização da tarefa, para, assim, monitorá-los de forma efetiva, criando estratégias de ação para as prováveis dúvidas e caminhos que poderão ser utilizados.

Entendemos que a vivência dessa prática proporcionou aos participantes um norte para a condução da aula, possibilitando-lhes refletirem sobre prováveis resoluções que os alunos poderão desenvolver, erros e acertos, como maneiras de orientá-los em suas resoluções. Vejamos o depoimento de alguns dos licenciandos.

> *P1: [...] é importante antecipar possíveis resoluções. [...] porque o professor tem que pensar nos conhecimentos dos alunos e explorar isso em sala de aula [...]. Nós resolvemos um problema de uma forma, porém, quando chegar lá, o aluno pode resolver de outra e se eu não tiver essa preparação (planejamento) para entender aquilo, então a aula não vai ter um êxito igual esperamos* (ES).
>
> *P3: [...] isso poderá ajudar até mesmo o professor na hora do entendimento do pensamento do aluno, [...] que nos veremos não como professores, mas veremos como um aluno. [...] às vezes quando eu tenho dificuldade com determinado conteúdo, normalmente eu procuro estudar na internet para repassar, mas eu não vejo como o aluno vai entender esse conteúdo, e é isso que precisamos muito, trabalhar com o conhecimento relacionado ao pensamento do aluno [...], quais os meios que ele poderá usar para chegar a uma determinada resolução [...]* (ES).

Diante desses depoimentos, inferimos que esses participantes manifestam um entendimento de que a prática de antecipar possibilita ao professor um preparo para conduzir diferentes ideias matemáticas que podem surgir no desenvolvimento da aula, a fim de direcionar os pensamentos em desenvolvimento dos alunos e fazer possíveis conexões com as ideias matemáticas apresentadas, conforme Canavarro (2011, p. 13),

> Ao antecipar, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática.

Além disso, observamos no depoimento de P3 que realizar essa prática permitiu a esse licenciando se colocar na posição de aluno (STEIN *et al.*, 2008).

O terceiro encontro começou com a discussão do artigo que ficou como tarefa não presencial e, em seguida, com base nas resoluções da tarefa realizadas no encontro anterior, os participantes deram início à construção do *framework*, elaborando suas ações e intenções para as duas primeiras fases de aula.

O quarto encontro iniciou com a discussão sobre práticas que foram planejadas para as duas primeiras fases de aula; após esse momento, começaram a construção e a discussão de ações e intenções para as duas últimas fases de aula, a fim de finalizar esse planejamento. Como tarefa não presencial para os licenciandos ficou a digitalização desse plano de aula (Quadro 5).

Quadro 5: *Framework* utilizado no planejamento do segundo momento de ensino

Etapas	Práticas	Elementos que compõem as práticas
Antes da aula	Antecipar	Objetivo da aula: Proporcionar uma tarefa que promova a construção do conceito de sequências numéricas por meio de diferentes interpretações, estratégias de resolução e representações. Objetivos da tarefa: investigar regularidades na construção dos castelos de cartas; determinar a quantidade de cartas para as próximas figuras; explorar as sequências presentes e soma de seus termos; identificar a relação entre as variáveis e determinar o termo geral. Ações a serem consideradas: • Resolver de várias formas a tarefa, seja de forma mais elementar até a mais complexa; • Fazer uma adaptação da tarefa para torná-la mais desafiante e motivadora para os alunos do 2º ano do Ensino Médio; • Pensar nas principais dificuldades que os alunos poderão ter durante a realização da tarefa; • Definir um tempo de 15 min. para introdução da tarefa, 35 min. para a realização, 25 min. para discussão e 20 min. para a sistematização das aprendizagens matemáticas.
Durante a aula	Propor a tarefa	• Explicar brevemente como se dará a aula, falando um pouco da dinâmica do ensino exploratório, dando um pequeno enfoque em cada uma das quatro fases que o compõe; • Apresentar a tarefa de forma esclarecedora, a fim de facilitar o seu entendimento e obter o engajamento dos alunos em sua resolução; • Organizar a sala em grupos de 3 a 5 participantes dependendo do número de alunos; • Trazer a tarefa em uma folha impressa e distribuir entre os grupos; • Fazer a leitura em bom tom para toda a turma e em seguida fazer questionamentos sobre os objetivos da tarefa; • Trazer palitos de fósforos para a construção dos andares.

	Monitorar	• Instigar os alunos por meio de perguntas motivadoras e questionadoras sobre a resolução da tarefa; • Proporcionar uma interação dentro do grupo sobre possíveis resoluções, a fim de gerar discussões e aprendizagens; • Proporcionar a autonomia dos alunos diante da tarefa; • Desenvolver o pensamento crítico do aluno, por meio de perguntas sobre suas resoluções, de como chegaram a tal conclusão, porque representaram de tal maneira; • Levar em consideração as resoluções certas e erradas pelos alunos; • Não validar, de imediato, as estratégias de resoluções dos alunos; • Averiguar e fazer anotações sobre as resoluções que ajudam a realizar a discussão e identificação dos elementos matemáticos envolvidos na tarefa que facilitam a aprendizagem; • Instigar os alunos a fazerem perguntas tanto para os professores, quanto para os membros dos seus grupos durante a realização da tarefa.
	Selecionar e Sequenciar	• Sequenciar as apresentações de acordo com o seu grau de dificuldade; • Pedir aos grupos para organizarem suas resoluções e escolher um representante para apresentá-la à classe; • Fazer explicarem suas resoluções.
	Discutir as resoluções	• Convidar todos para que participem da discussão, fazendo que prestem atenção na apresentação de cada grupo; • Apresentar as diferentes formas de resoluções e analisá-las junto com os alunos; • Promover a interação entre toda a turma para que juntos possam discutir as resoluções apresentadas durante a discussão da tarefa.
	Sistematizar as aprendizagens	• Criar conexões entre possíveis resoluções e representações encontradas; • Pedir para que anotem os conhecimentos matemáticos adquiridos na sistematização, incentivando-os a conhecerem mais as regras matemáticas; • Falar da importância das ideias matemáticas, regras e generalizações; • Discutir os conhecimentos matemáticos utilizados em cada resolução apresentada, relacionando-os com ideias matemáticas formalizadas.

Fonte: Adaptado de Cyrino e Teixeira (2016, p. 86-87)

Em relação ao momento de planejamento, em seus depoimentos à entrevista semiestruturada, os licenciandos destacaram algumas contribuições para sua formação docente quanto à construção do plano de aula e à condução do processo formativo, conforme os exemplos a seguir.

> *P1: [...] essa troca de experiências, a resolução das tarefas [...] foi um suporte maior para estarmos lá (momento de ensino), [...] nós conseguimos ver outras sequências e até [...] confrontar alguns conhecimentos que nós tínhamos* (ES).

> *P2: [...] a visão que eu basicamente tinha era essa do professor na frente ensinando e os alunos apenas ouvindo, [...] inclusive eu pude perceber na prática como montar um plano de aula que foque não nos meus interesses como professor, mas na visão do aluno, [...] nos auxilia a pensar de outra maneira, que o principal foco na aprendizagem é o aluno* (ES).

> *P7: [...] você entende que se você não planejar você não vai conseguir aplicar uma coisa bem feita e não vai encontrar os resultados esperados. [...] quando você percebe que o aluno está desenvolvendo aquela questão de uma forma, você vê o quão era importante você ter estudado para conseguir auxiliar o aluno, de certa forma, para que ele consiga ir mais a frente* (ES).

Observamos que os encontros de planejamento permitiram a esses participantes manifestarem o entendimento de considerar possíveis pensamentos de seus alunos na construção do plano de aula, como seus interesses, conhecimentos prévios, possíveis erros e dificuldades, deixando evidente o entendimento de que em sala de aula o aluno deve ser o protagonista. E, ainda, os encontros possibilitaram discussões a respeito de diferentes procedimentos, representações, estratégias de resoluções, entre outros, sobre as ideias matemáticas presentes na tarefa.

Nesse sentido, entendemos que o ato de se planejar propiciou um sentimento de segurança e confiança para ministrar uma aula sob a perspectiva de ensino exploratório de Matemática, pois fez esses licenciandos se prepararem "[...] da melhor forma para fazer emergir e aprofundar o conhecimento matemático dos alunos a partir da sua atividade" (OLIVEIRA; CARVALHO, 2014, p. 370).

O *momento de ensino* aconteceu em duas ocasiões diferentes, ministradas pelos grupos 1 e 2 em escolas distintas, conforme o Quadro 1. A seguir, apresentamos uma breve descrição da aula ministrada pelo Gr1[6], algumas análises realizadas sobre o momento de ensino desenvolvido por esse grupo e sobre os depoimentos realizados na entrevista semiestruturada pelos participantes dos dois grupos.

Para dar início à primeira fase da *introdução da tarefa*, após a organização dos grupos de alunos e a explicação sobre a dinâmica da aula, os licenciandos entregaram uma folha com a tarefa impressa para cada aluno, e pediram primeiramente para que lessem individualmente e depois para que um a lesse em voz alta. Em seguida, entregaram palitos de fósforos para cada grupo a fim de que pudessem utilizá-los para construir o quarto e o quinto castelo de cartas e que, a partir disso, levantassem estratégias para a resolução da tarefa. Após verificarem que os estudantes se engajaram na *realização da tarefa*, os licenciandos foram monitorá-los.

Durante a segunda fase, os licenciandos decidiram por monitorarem todos os grupos para ter uma visão geral do andamento da aula. No decorrer dessa fase, foi observado que alguns grupos de alunos estavam com dificuldades para a resolução da tarefa. Diante disso, destacamos uma prática de monitorar do Gr1. O licenciando P3, ao ver um grupo com dificuldades de encontrar o número de cartas da décima figura, levantou alguns

[6] Para o texto não ficar repetitivo com a descrição e análise dos dois momentos de ensino, do Gr1 e Gr2, como as duas aulas foram realizadas utilizando o mesmo planejamento e tarefa, optamos por mostrar apenas parte da descrição e análise das ações que compõe a aula do Gr1.

questionamentos a esse grupo, a fim de direcioná-lo em sua resolução a partir do que havia realizado, vejamos.

> *P3: Esse aqui é o castelo de dois andares certo?*
> *Alunos: Sim.*
> *P3: Para construí-lo vocês utilizaram...*
> *Alunos: o castelo anterior mais 5 cartas.*
> *P3: E para construir o próximo?*
> *Aluno 11:Utilizaria as 2 cartas do primeiro, mais 5 cartas que utilizou a mais no segundo, mais 8 cartas (e aponta para o que escreveu, a saber, castelo 1 : 2, castelo 2 : 2+5, castelo 3 : 2+5+8).*
> *P3: Para eu saber do castelo de 10 andares, eu teria que fazer o quê?*
> *Aluno 11: Somar os andares.*
> *P3: Como?*
> *Aluno 11: 2+ 5+ 8+ 11 + ..., está aumentando de 3 em 3.*
> *P3: Quando uma sequência aumenta gradativamente, podemos chamar do quê?*
> *Aluno 11: Progressão aritmética, é a soma de uma progressão aritmética* (GA e DB).

Assim sendo, observamos que, ao monitorar a resolução de um grupo, P3 pôde ver e ouvir o que os alunos estavam desenvolvendo, suas possíveis dúvidas e estratégias utilizadas, e assim pôde orientá-los a fim de que utilizassem seus conhecimentos prévios para resolver a tarefa. Em relação a essa prática, destacamos alguns depoimentos, incluindo o desse futuro professor.

> *P3: [...] no ensino exploratório, além de ter esse contato entre professor e aluno, ainda o aluno consegue interagir com o grupo, então aqui, além de buscar formar o conhecimento, nós vivemos essa interatividade que é o grande diferencial* (ES).
>
> *P5: [...] como ela dá margem para o aluno resolver de outro jeito [...] que leva a criança a pensar por si mesma, não seguir regras ou padrões. [...] leva os alunos a pensarem mais, a se engajarem mais, [...] nós estamos andando direto nos grupos, falando com eles [...] cada um se sente importante [...]* (ES).
>
> *P7: [...] é da dinâmica da aula, onde o aluno está construindo todo aquele processo de aprendizagem [...], o professor está lá mais como mediador, [...] do início da aplicação, desde a questão do problema em si, até o final faz com que o aluno esteja atento o tempo todo, [...] porque ele se sente desafiado e motivado naquela tarefa, [...] porque ele tem aquele pensamento crítico, uma construção matemática ao invés de ser apenas 'bizu' (procedimento decorado)* (ES).

Observamos, nesses depoimentos que a prática de monitorar proporcionou aos estudantes uma interação entre professor e aluno, e entre seus colegas em sala, possibilitando construir o conhecimento matemático em conjunto a partir do que fizeram (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013). Além disso, esses licenciandos manifestaram o entendimento dos papéis atribuídos aos participantes de uma aula desenvolvida sob a perspectiva de ensino exploratório, do professor como observador e orientador da aprendizagem dos alunos, que os conduziu a pensarem por si mesmos com liberdade e apoio para apresentarem diferentes resoluções, possibilitando que a aprendizagem Matemática faça sentido para eles, e dos estudantes como protagonistas da construção do conhecimento matemático (OLIVEIRA; CARVALHO, 2014; PONTE; QUARESMA, 2015). E ainda, destacaram a participação dos alunos na aula, pois se sentiram desafiados, interessados em resolver a tarefa, possibilitando que discutissem, argumentassem sobre as ideias matemáticas desenvolvidas por eles.

A terceira fase, *discussão da tarefa*, começou com a apresentação de diferentes resoluções pelos grupos de alunos, iniciando-se com a resolução mais simples, na qual construíram os castelos de cartas com os palitos de fósforos disponibilizados pelos licenciandos. Em seguida, optaram pela resolução que trouxe a ideia de recursividade, que utilizou uma estratégia que possibilita generalizar a soma dos termos da sequência para obter a quantidade de cartas necessárias para construir o castelo de 160 andares. E a terceira e última apresentação, trouxe uma ideia que relaciona a quantidade de cartas utilizadas na base de um castelo com o número da sua figura e, para as demais cartas que ficam acima da base relacionaram com o número de triângulos completos que compunham a construção de cada castelo, que pode ser descrito pela sequência dos números triangulares: $1, 3, 6, 10, \dots, \frac{n^2+n}{2}, \dots$.

Diante das práticas de selecionar e sequenciar resoluções para a fase da discussão da tarefa, podemos inferir que esse processo formativo apoiado na perspectiva de ensino exploratório contribuiu para os participantes da pesquisa verem a necessidade de tomar uma decisão sobre escolher quais contribuições podem maximizar a aprendizagem dos alunos, “[...] fazendo uma discussão matematicamente coerente e previsível” (STEIN *et al*., 2008, p. 330).

A última apresentação envolveu grande parte dos alunos em sua discussão. Sendo assim, os licenciandos P1 e P3, com o intuito de aproveitarem as ideias que foram discutidas iniciaram a quarta fase de aula, *sistematização das aprendizagens matemáticas*, levantando questionamentos sobre essa resolução.

P1: Na primeira figura temos quantas cartas na base?
Alunos: 2.
P1: E na segunda?
Alunos: 4.
Aluno 1: Sempre vai ser o dobro.
Alunos: Isso!O dobro.
Aluno 15: Então na figura 160, vamos ter 320 (cartas na base)?
P1: Isso (GA).

P3: Aqui eu posso dizer que essa figura vai ser 3 vezes 1, menos 1? (apontando para o primeiro castelo, pois poderia formar um triângulo, mas falta uma carta). Aqui vai ser quanto? (apontando para o segundo castelo de cartas).

Alunos: 3 vezes 3, menos 2 (pois poderiam ser 3 triângulos completos, mas faltam 2 cartas da base do castelo).
P3: E aqui? (apontando para o terceiro castelo)
Alunos: 3 vezes 6, menos 3.
P3: 1, 3 e 6, vocês sabem que sequência é essa?
Alunos: Não.
P3: É a sequência dos números triangulares. Tipo, o primeiro triângulo é formado por 1, o segundo por 3 (desenha 3 pontos no quadro formando um triângulo), o terceiro por 6 (desenha 6 pontos formando um triângulo), aí 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e 10 e assim vai indo (construindo o quarto triângulo a partir do terceiro, adicionando mais 4 pontos). Então por essa lógica a quarta figura é para ser... 3 vezes 10, menos 4.
A partir disso, P1 continua a explicar.

P1: Os números triangulares eu posso descrever dessa forma (escrevendo no quadro)

$$1$$
$$1+2=3$$
$$1+2+3=6$$
$$1+2+3+4=10$$ (DB e GA).

Em seguida, por meio da soma dos termos extremos, P1 construiu a fórmula que determina a soma dessa sequência, $T_n = \frac{n^2+n}{2}$ e, a partir da discussão de P3, complementou a regularidade observada com a fórmula da soma dos números triangulares no quarto castelo e depois concluiu para o castelo de número 160.

$$C_4 = 3 \cdot 10 - 4 = 26$$
$$C_{160} = 3 \cdot \frac{n^2+n}{2} - 160$$
$$C_{160} = 3 \cdot \frac{160^2+160}{2} - 160$$
$$C_{160} = 38480\ cartas$$ (DB e GA).

Diante desses encaminhamentos, observamos que esses licenciandos se preocuparam em utilizar algumas ideias que foram discutidas na terceira fase a fim de conectar as respostas dos alunos ao mostrar a resolução do item *b*. Nenhum dos grupos de alunos conseguiu resolver esse item; eles tiveram algumas ideias que permitiriam essa resolução, mas que levariam mais tempo para obter a quantidade de cartas no castelo de 160 andares. Sendo assim, a preocupação desses licenciandos era resolver o item *b* a partir do que fora realizado, porque os alunos estavam ansiosos para descobrir a quantidade de cartas, e depois conectar algumas ideias que foram discutidas na terceira fase. E, ainda, a partir das ideias discutidas sobre as sequências dos números triangulares $\left\{\frac{n^2+n}{2}\right\}$ e $\{3n-1\}$, os licenciandos apresentaram à turma a definição de uma sequência.

Nesse sentido, entendemos que ao iniciarem a fase da sistematização das aprendizagens matemáticas utilizando-se de ideias que foram apresentadas pelos alunos anteriormente, esses licenciandos propiciaram aos alunos avaliarem as consequências sobre as diferentes estratégias que surgiram na fase da discussão da tarefa, como a que foi mais eficaz, aquela em que o entendimento tornou-se mais fácil, que a junção de duas pode resultar em uma terceira, entre outras (STEIN *et al.* 2008).

Sobre isso, em seu depoimento, o licenciando P1 destacou que essas duas fases são importantes para contribuir para a aprendizagem dos alunos, pois são as fases que vêm logo após a da realização da tarefa, o que possibilitará entenderem o que fora realizado pelos colegas, além de propiciar outras aprendizagens matemáticas.

> *P1: [...] na discussão é importante o professor controlar muito bem a turma, porque é o momento que os alunos estão lá explorando o que fizeram, todo o trabalho que eles tiveram e que não é um trabalho fácil, percebemos isso na aplicação (momento de ensino), você ver que se trabalharmos com uma tarefa desafiadora eles trabalham muito para resolver [...]. Na sistematização, é importante o professor explorar além do que os alunos já fizeram, [...] como se fosse uma ideia de que existe mais do que os alunos pensaram, até uma forma mais fácil de resolver e de explorar tudo aquilo que ele quer explorar, que seria formalizar aquilo de uma forma mais matemática, explorar as fórmulas através dos exemplos dos alunos* (ES).

Diante disso, trazemos um quadro que sintetiza as práticas de ensino exploratório de Matemática realizadas nesse processo formativo.

Quadro 6: Síntese de práticas de ensino exploratório de Matemática realizadas no desenvolvimento do processo formativo

Fases	Práticas	Ações realizadas mediante as práticas de ensino momento de planejamento
Antes da aula	Escolha da tarefa	- Permitiu pensar na conexão de diferentes interpretações para a tarefa, buscando entender a matemática de uma forma detalhada, ou seja, fazendo o exercício de compreender seus porquês, diferentes estratégias, procedimentos, entre outros, para sua resolução. - Propiciou considerar o nível de conhecimento dos alunos, com seus conhecimentos prévios, com suas possíveis dificuldades, erros, em trazer uma tarefa que seja interessante, que possa desafiá-los e encorajá-los pela busca de sua resolução ao mesmo tempo que proporcionasse novas aprendizagens.
	Antecipar (STEIN *et al.*, 2008)	- Possibilitou pensar sobre diferentes interpretações, estratégias, procedimentos, representações inerentes à tarefa, e assim buscar entender de forma detalhada o conceito matemático em questão, preparando-se para possíveis direcionamentos na tarefa de ensino. - Proporcionou considerar possíveis erros dos alunos, dificuldades, resoluções mais comuns, perguntas a serem levantadas na realização da tarefa, e assim monitorá-los de forma mais efetiva, criando estratégias de ação para as prováveis dúvidas e caminhos que poderão ser utilizados.
Introdução da tarefa	Usar diferentes elementos didáticos	- Viabilizou trazer elementos didáticos que podem contribuir para o engajamento na resolução da tarefa e, consequentemente, na aprendizagem dos alunos, como: a ação de esclarecer a dinâmica da aula; e de utilizar um material manipulável.
Resolução da tarefa	Monitorar (STEIN *et al.*, 2008)	- Permitiu que o licenciando tivesse acesso ao pensamento em desenvolvimento dos alunos, possibilitando fazer encaminhamentos para direcioná-los e incentivá-los em sua resolução, além de promover: a interação entre os colegas e com o professor; a autonomia; o levantamento de perguntas; o desafio cognitivo no decorrer da resolução da tarefa.

	Selecionar e sequenciar (STEIN *et al.*, 2008)	- Oportunizou o entendimento que essas práticas possibilitam compreender quais contribuições dos alunos são propícias para o andamento da discussão da tarefa, a partir de um critério que promova o encadeamento lógico das ideias matemáticas e que direciona os alunos na (re)organização de seus pensamentos, permitindo que se prepararem para a fase da discussão da tarefa.
Discussão da tarefa	Manter um clima harmonioso	- O apoio e incentivo do professor propiciou aos alunos apresentarem suas ideias matemáticas sem constrangimento, o que permitiu que analisassem e discutissem diferenças entre as resoluções, o que possibilitou ao docente fazer uma interação entre o conceito matemático que está sendo trabalhado e questões didático-pedagógicas que afetam o aprendizado dos seus alunos.
Sistematização das aprendizagens matemáticas	Conectar (STEIN *et al.*, 2008)	- Permitiu aproveitar as ideias que foram apresentadas na fase da discussão da tarefa, conectando-as a diferentes ideias discutidas e assim conduzir o aprendizado de modo significativo para os alunos, promovendo um entendimento sobre elementos matemáticos presentes na tarefa, a partir do que foi realizado e discutido anteriormente; - Conduziu o licenciando a formalizar na linguagem matemática as respostas apresentadas pelos estudantes, contribuindo para um entendimento sobre elementos matemáticos presentes no desenvolvimento da aula.

Fonte: Dos autores

Sobre o momento de planejamento podemos destacar que o desenvolvimento desse processo formativo apoiado na perspectiva de ensino exploratório de Matemática permitiu aos seus participantes: manifestarem a necessidade de estudar de forma detalhada o conteúdo matemático em questão, buscando diferentes interpretações, procedimentos, estratégias, representações, possíveis erros e compreensões; evidenciarem que é preciso considerar os alunos na construção do planejamento, seus conhecimentos prévios, suas dificuldades, interesses, possíveis erros, organização de grupos, entre outros aspectos.

Sobre o momento de ensino, observamos que essa participação possibilitou: evidenciarem a compreensão de que a prática de monitorar possibilita ao professor ter um conhecimento do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes; de que, a partir disso, é possível orientá-los para a resolução da tarefa e de que essa prática promove um maior envolvimento e interesse por parte dos estudantes, pelo fato dos professores instigá-los, incentivá-los durante a aula; manifestarem o entendimento de que um ambiente propício para as discussões matemáticas possibilita aos alunos compreenderem o objeto matemático em questão de diferentes maneiras, mantendo o nível de exigência cognitiva da tarefa.

Além disso, os participantes destacaram outros aspectos positivos relativos a essa formação, como:

- a ênfase atribuída ao estudo da perspectiva de ensino, o que promoveu uma reflexão sobre práticas referentes à perspectiva de ensino exploratório de Matemática e a antecipação de algumas na elaboração do *framework* (Quadro 5), o que contribuiu para minimizar os momentos de improvisação no decorrer da aula;

- a participação efetiva dos licenciandos nos encontros, tanto presencial quanto na realização das tarefas e nos momentos de discussões, possibilitando uma maior reflexão e discussão sobre práticas a serem planejadas;
- o envolvimento dos alunos da educação básica no momento de ensino, possibilitando o entendimento de que foi resultado da dinâmica da aula desenvolvida sob a perspectiva de ensino exploratório, a qual promove um ambiente de interação e de diálogo entre alunos e professor, além da busca pelo conhecimento matemático por meio de diferentes interpretações e estratégias desenvolvidas pelos estudantes;
- a formação vivenciada contribuiu para que refletissem sobre a maneira de conduzir uma aula, permitindo que comparassem as práticas realizadas durante a formação com ações relativas ao ensino tradicional, o que promoveu um desejo de inserir esses novos conhecimentos em suas futuras práticas profissionais; e
- o modo como a formadora conduziu o processo formativo, considerando os interesses e necessidades dos participantes no desenvolvimento dos encontros, levantando questionamentos no momento de planejamento para que refletissem sobre práticas a serem utilizadas, construindo esse planejamento junto aos licenciandos e não apenas dizendo o que fazer.

4. Considerações finais

Diante do objetivo proposto, evidenciou-se que algumas práticas apoiadas no ensino exploratório de Matemática contribuíram para a formação docente dos participantes da pesquisa, a saber: ao escolher uma tarefa interessante e desafiante aos alunos; ao antecipar suas possíveis resoluções; ao explicar a dinâmica da aula; ao utilizar diferentes elementos didáticos como um material manipulável; ao monitorar a realização da tarefa; ao selecionar as resoluções a serem discutidas; ao sequenciá-las a fim de propiciar um encadeamento lógico das ideias; ao manter um clima harmonioso para a discussão das ideias matemáticas; e ao conectar as respostas dos alunos.

Após a realização dessa ação formativa, os participantes levantaram o desejo de ministrar uma aula desenvolvida sob a perspectiva de ensino exploratório de Matemática sozinhos, pois assim poderiam surgir outras dificuldades que não tiveram na condução do momento de ensino em grupo, por terem os colegas auxiliando no decorrer da aula.

Outro desdobramento da participação efetiva desses sujeitos foi a manifestação do entendimento de que o desenvolvimento profissional docente acontece por meio da participação ativa em uma ação formativa, colocando em discussão suas necessidades, realidades, conhecimentos, entre outros aspectos, a fim de melhorar suas qualificações profissionais; e de que, quando um processo formativo oportuniza o desenvolvimento de uma prática letiva, este permite intensificar os conhecimentos adquiridos relativos à perspectiva de ensino adotada, pois o mesmo foi vivenciado em uma situação real, não se restringindo apenas ao discurso teórico.

Além disso, a pesquisa realizada nos proporcionou refletir sobre possíveis investigações futuras tomando como base um processo formativo que considere momentos do ciclo de trabalho do professor aliado à abordagem de ensino exploratório de Matemática. Uma ideia é investigar se a utilização desse tipo de formação pode contribuir para a mobilização de elementos associados à identidade profissional docente, um dos aspectos que constituem o desenvolvimento profissional docente que não foi tido como foco nesta investigação. Outra, é se seria possível realizar um processo formativo semelhante a este no âmbito da formação inicial de professores, por exemplo, conduzir o estágio supervisionado levando em conta momentos do ciclo letivo do professor, mediados pela abordagem de ensino exploratório de Matemática, possibilitando aos licenciandos desenvolverem práticas letivas no campo real de trabalho docente, nas escolas, pois programas como o PIBID e a Residência Pedagógica atingem apenas uma parte dos alunos de um curso de licenciatura.

Ademais, a realização desta pesquisa contribuiu para uma reflexão da pesquisadora enquanto formadora de futuros professores de Matemática, sobre práticas que podem contribuir para o desenvolvimento profissional desses licenciandos, como as de: promover o desenvolvimento de uma formação envolvendo momentos do ciclo de trabalho do professor e uma reflexão sobre as atividades realizadas; propiciar momentos de discussão e reflexão sobre diferentes representações, procedimentos, interpretações, possíveis erros e dificuldades relacionadas a um objeto matemático, atrelados a ações letivas; e desenvolver as práticas citadas considerando os sujeitos envolvidos como um todo, permitindo que se posicionem quanto às suas necessidades, anseios e que sejam promovidas suas potencialidades, realizações, tornando-os sujeitos da ação e objetivando o crescimento do seu conhecimento profissional e a formação e afirmação da sua identidade profissional.

Referências

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In: SANTOS, L. (ed.). **Investigação em Educação Matemática 2012:** Práticas de ensino da Matemática. Portalegre: SPIEM, 2012. p 255-266.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In: PONTE, J. P. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 217-233.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: método qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**. Londrina: Eduel, 2016. p. 81-99.

FERREIRA, A. C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de Letras, pp.19-50, 2003.

MARCELO, C. Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. **Sísifo: Revista de Ciências da Educação**, n. 8, p. 7-22, 2009.

OBM. **Provas e Gabaritos**. 2009. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/2Fase_Nivel1_2009.pdf>. Acesso em 30 ago. 2017.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 1-24, out. 2013.

OLIVEIRA, H; CARVALHO, R. Uma experiência de formação em torno do ensino exploratório: do plano à aula. In: PONTE, J. P. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 465-487.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: PROFMAT98, n. 14, 1998, Lisboa. **Actas...**Lisboa: APM, 1998, p. 27-44.

PONTE, J. P. Formação do Professor de Matemática: Perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 343-358.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (ed). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação**, Campinas, v. 11, n. 2, p. 145-163, 2002.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. A. F. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor**. Revista da Faculdade de Educação**, Cáceres,v. 23, n.1, p. 131-150, jan./jun. 2015.

SMITH, M. S. **Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

STEIN, M. K. *et al*. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

Autores:

Alessandra Senes Marins

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Atualmente é docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA).

Correo electrónico: alessandra_senes@uvanet.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2274-7386

Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista(UNESP), Rio Claro-SP, Mestre em Matemática pela Universidade de Campinas (UNICAMP), Doutora em Matemática (Álgebra) pela Universidade de São Paulo (USP), São Paulo-SP. Atualmente é docente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), professora do curso de Matemática da UEL, Habilitações Licenciatura e Bacharelado, e membro do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da UEL.

Correo electrónico: angelamarta@uel.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5624-6398

Bruno Rodrigo Teixeira

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Atualmente é docente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

Correo electrónico: bruno@uel.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0294-4470

Como citar o artigo:

MARINS, A. S.; SAVIOLI, A. M. P. D; TEIXEIRA, B. R. Potencialidades de práticas de ensino exploratório de Matemática para o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 22-48, enero, 2022. DOI: 10.37618

Visualización de formas geométricas: participación de profesores pedagogos

José Carlos Pinto Leivas
leivasjc@ufn.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-6876-1461
Universidade Franciscana (UFN)
Santa Maria, Brasil.

Recibido: 20/junio/2021 **Aceptado:** 20/septiembre/2021

Resumen

Este trabajo presenta una investigación cualitativo-descriptiva que involucra a nueve participantes de una clase en un curso de acción continua para docentes pedagogos a nivel de maestría. El objetivo de la investigación fue proponer actividades que involucren artefactos manuales para investigar cómo estos presentan la visualización de formas geométricas planas en estos artefactos, así como espaciales en sus representaciones figurativas. Los datos se recolectaron a través de tres actividades en un Google Forms, en el que se presentaron cinco imágenes del mundo real con el fin de asociarlas con una única forma geométrica que se acercaba. El primero se refería al polígono cuadrado; el segundo a la región circular y el tercero a uno que no era un prisma. Los resultados mostraron que los individuos no hacen una distinción visual entre polígono y región poligonal; círculo y circunferencia. Finalmente, algunos confunden la imagen de un cubo con no ser un prisma. Se concluye que es necesario desarrollar habilidades visuales con el fin de facilitar la adquisición del desarrollo del pensamiento geométrico, con el fin de analizar las propiedades y relaciones entre dichos objetos.

Palabras clave: Formación continua. Polígonos y regiones poligonales. Representaciones geométricas.

Visualização de formas geométricas: envolvimento de professores pedagogos

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma pesquisa de cunho qualitativo-descritivo envolvendo nove participantes de uma aula em curso de ação continuada para professores pedagogos em nível de mestrado. O objetivo da pesquisa foi propor atividades envolvendo artefatos manuais a fim de investigar como os envolvidos visualizavam formas geométricas planas nesses artefatos bem como espaciais em suas representações figurais. Os dados foram coletados por meio de três atividades em um *Google Forms*, no qual eram apresentadas cinco imagens do mundo real a fim de ser associada uma única forma geométrica que melhor se aproximasse de cada uma delas. A primeira remetia ao polígono quadrado; a segundo à região circular e a terceira a uma forma que não fosse prisma. Os resultados mostraram que os indivíduos não fazem distinção visual entre polígono e região poligonal; círculo e circunferência. Por fim, alguns confundem a imagem de um cubo como não sendo um prisma. Conclui-se ser necessário desenvolver habilidades visuais de modo a proporcionar a aquisição de desenvolvimento de pensamento geométrico, de modo a analisar propriedades e relações entre tais objetos.

Palavras chave: Formação continuada. Polígonos e regiões poligonais. Representações geométricas.

Visualization of geometric shapes: involvement of pedagogue teachers

Abstract
This work presents a qualitative-descriptive research involving nine participants of a class in a continuing action course for teacher pedagogues at master's level. The objective of the research was to propose activities involving manual artifacts in order to investigate how those involved visualized plane geometric shapes in these artifacts as well as spatial ones in their figurative representations. Data were collected through three activities in a Google Forms, in which five images of the real world were presented in order to be associated with a single geometric shape that best came close. The first referred to the square polygon; the second to the circular region and the third to one that was not prism. The results showed that individuals do not make a visual distinction between polygon and polygonal region; circle and circumference. Finally, some mistake the image of a cube as not being a prism. It is concluded that it is necessary to develop visual skills in order to provide the acquisition of geometric thinking development, in order to analyze properties and relationships between such objects.
Keywords: Continuing training. Polygons and polygonal regions. Geometric representations.

Introdução

> Entre nossos alunos, notamos as mesmas diferenças; alguns preferem tratar seus problemas "por análise", outros "por geometria". Os primeiros são incapazes de "ver no espaço", os outros rapidamente se cansam de longos cálculos e ficam perplexos (Poincaré, 1913, p. 212).

Este texto inicia a partir da epígrafe, pois considera-se o dito por Poincaré ao orientar a prática profissional como professor e pesquisador da área de Geometria e dar suma importância ao seu papel no contexto matemático. Inclusive, tem-se defendido essa área do conhecimento como uma 'didática' para o ensino de Matemática como apontado pelo exímio educador matemático Hans Freudenthal. Perceber o espaço que rodeia o indivíduo, associar objetos reais deste espaço e conectá-los com os objetos matemáticos é tarefa que pode ser desenvolvida, principalmente, a partir da imaginação.

Para Gontran Ervynck, de acordo com Tall (2002), a criatividade tem um importante desempenho na formação de pensamento matemático avançado, contribuindo no desenvolvimento de sua teoria. Esta habilidade permite enquadrar conjecturas conforme experiências do indivíduo no contexto da Matemática, além de contribuir na formalização de conteúdo dessa área, ou seja.

Uma segunda habilidade que se invoca, diz respeito à imaginação. Essa, conduz a imagens mentais de objetos, no presente caso, os geométricos, que podem ser encontrados no próprio meio ambiente em que os indivíduos convivem.

> [...] Os alunos podem dar as respostas "certas" pelos motivos errados, enquanto as respostas "erradas" podem ter uma origem racional. Em particular, muitos pesquisadores perceberam que os erros dos alunos muitas vezes são o produto de equívocos causados pelo uso de conhecimentos antigos em um novo contexto onde eles não são mais válidos. Isso leva à hipótese de que o aprendizado pode ser melhorado ajudando os alunos a construir conhecimento em suas próprias mentes em um contexto que é projetado para auxiliar, ou mesmo estimular, essa construção (Tall, 2002, p. 235).

Considera-se a construção do conhecimento ou sua ampliação podendo ser adquirida por processos mentais e, no caso geométrico, compreende-se que habilidades visuais podem e devem ser desenvolvidas pelos professores desde os anos iniciais de escolarização e, principalmente, na formação de professores que ensinam Matemática. No início da escolarização, os professores, em geral pedagogos, necessitam ter um conhecimento matemático/geométrico que lhes permita explorar os recursos que cercam as crianças de modo a formar pensamento geométrico e favorecer-lhes o gosto pela área de Geometria, o que, muitas vezes, não ocorre como apontam estudos e pesquisas do próprio autor.

No desfecho do ensino, a partir do ano 2020 com a COVID-19, dificuldades emergiram para o professor, tanto por não estar presencialmente com seus alunos quanto pela necessidade de utilizar tecnologias e/ou recursos didáticos variados. Isso exige desenvolver imaginação e criatividade na elaboração de atividades que lhe permitam realizar o ensino de forma diferenciada do que estava acostumado. Plataformas, celulares e outros mecanismos foram necessários para os alunos aprenderem os conteúdos e, na Geometria, a aprendizagem concentra-se, em grande parte, na visualização dos recursos disponibilizados pelo professor nos ambientes escolares.

Justifica-se relatar/analisar neste artigo uma pesquisa realizada com professores pedagogos, que atuam na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em uma aula de um curso de formação continuada em nível de mestrado. Neste sentido, teve por objetivo apresentar ao grupo investigado, professores em ação continuada, questões envolvendo imagens de objetos do cotidiano, de modo a verificar se os mesmos associavam formas geométricas envolvidas.

Pressupostos Teóricos

Na direção de embasar o artigo, buscou-se orientações emandas de documentos oficiais brasileiros no quesito ensino de Geometria. Para isso, a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (Brasil, 2017) indica como um dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento na Educação Infantil: "Explorar movimentos, gestos, sons, **formas**, texturas, cores, ‘palavras’, emoções, transformações, relacionamentos, histórias, ‘objetos’, elementos da natureza, na escola e fora dela, ampliando seus saberes sobre a cultura, em suas diversas modalidades: as artes, ‘a escrita’, a ciência e a tecnologia” (p. 38, grifo do autor).

Para alcançar tais metas, o ensino deve levar em conta que “[...] Parte do trabalho do educador é refletir, selecionar, organizar, planejar, mediar e monitorar o conjunto das práticas e interações, garantindo a pluralidade de situações que promovam o desenvolvimento pleno das crianças” (Brasil, 2017, p. 39). Cabe, portanto, em cursos de ação continuada suprir prováveis deficiências na formação inicial, bem como oportunizar situações atualizadas de acordo com o tempo e o espaço em que as crianças vivem e convivem.

No que diz respeito à Educação Infantil, chama-se atenção para os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento (Quadro 1) para ilustrar a relevância do estudo de formas em Geometria desde os primeiros anos de ingresso no ambiente escolar.

Quadro 1 - Objetivos de aprendizagem e desenvolvimento

(EI02TS02).	Crianças de 1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses	Utilizar diferentes materiais, suportes e procedimentos para grafar, explorando cores, texturas, ‘superfícies, planos, formas e volumes’.
(EI03TS02).	Crianças de 4 anos a 5 anos e 11 meses	Expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, ‘criando produções bidimensionais e tridimensionais’.

Fonte: adaptado pelo autor.

Já no primeiro ano do Ensino Fundamental, para a unidade temática Geometria, o referido documento aponta como objetos do conhecimento: “a) Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico; b) Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais (Brasil, 2017, p. 278).

Em termos de habilidades associadas a esses objetos, destaca-se no Quadro 2 as seguintes habilidades:

Quadro 2 - Habilidades geométricas para os Anos Iniciais

(EF01MA13)	Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a 'objetos familiares do mundo físico'.
(EF01MA14)	'Identificar e nomear' figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em **desenho**s apresentados em diferentes disposições ou em 'contornos de faces de sólidos geométricos'.

Fonte: adaptado de Brasil (2017)

Os grifos indicados nos dois quadros conduzem à reflexão sobre a possibilididade e a relevância de incluir Geometria na formação inicial das crianças, sendo este um papel a ser desempenhado pelo professor que atua nesses dois segmentos, com competência, de modo a tornar divertido o aprendizado. Pela experiência do autor do artigo, em geral, não são oportunizadas atividades na formação inicial do professor pedagogo que conduzam à aquisição de conhecimentos e didáticas que favoreçam sua prática profissional.

A pesquisa de Blanco (2014) envolveu habilidades de visualização no ensino de Geometria, relativamente à representações planas de objetos tridimensionais, sendo observadas deficiências cognitivas. A autora comprovou que houve uma baixa porcentagem de respostas corretas em um questionário aplicado sendo que "[...] os principais conflitos detectados estão diretamente associados com a interpretação da representação plana de objetos tridimensionais e a dos diagramas apresentados (habilidades de identificação visual, constância perceptual e reconhecimento das posições e relações espaciais" (Blanco, 2014, p. 11).

Um dos interesses do grupo de investigação no ensino e na aprendizagem do qual participam, na Colômbia, está em "determinar características dos ambientes de aprendizagem para a geometria escolar mediada por artefatos, que promovam o raciocínio e a construção de significados" (Perry, Samper e Camargo, 2020, p. 97). A pesquisa, aqui descrita, vai ao encontro do que indicam as pesquisadoras deste projeto, ao explorar embalagens que estão ao redor das professoras pedagogas participantes da pesquisa.

Ao citar Prieto e Arredondo (2020), elas utilizaram uma atividade formativa para "indicar aquela forma social, corpórea, sensorial e artefactual de trabalho conjunto por meio da qual os futuros professores e seus formadores se implicam mutuamente na busca de respostas para os problemas que orientam suas ações para atingir os objetivos" (p. 6). A isso reafirma-se ser indicado a professores em ação continuada em uma disciplina que tem o objetivo de propor atividades envolvendo artefatos manuais como indicado no parágrafo anterior. Assim, torna-se relevante investigar como os envolvidos visualizam formas planas nesses artefatos, bem como espaciais, em suas representações.

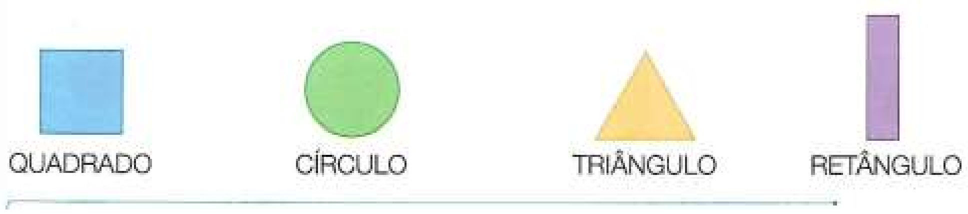
Dobraduras em papel e com dispositivos tecnológicos, os quais favorecem o manuseio de diferentes sistemas de representação, foram explorados por Iglesias e Ortiz (2020, p. 1030) para o "reconhecimento das relações existentes entre os objetos que intervém na construção, bem como na validação do procedimento daquelas construções empregadas". Assim, são utilizados os recursos materiais obtidos por dobraduras e, posteriormente, em softwares de Geometria Dinâmica para "reconhecer e descrever a fundamentação e a relação com axiomas e teoremas da Geometria Euclidiana". Os autores concluem que as atividades com tais objetivos lograram êxito com o grupo investigado e contribuíram para a formação, tanto didática quanto matemática dos futuros professores.

Quanto à habilidade de visualização, Leivas (2009) a tem como ponto crucial em seus processos investigativos, inclusive com a exploração de diversos tipos de dobraduras/tecnologias. Para ele, visualização é "é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (Leivas, 2009, p. 22). Essa habilidade é primordial no desenvolvimento de pensamento geométrico.

Entende-se que a comunicação e/ou a aquisição de um conceito a partir de visualização necessita não se contrapor em momentos futuros, como é o caso dos conceitos de círculo e circunferência. Mesmo hoje, após a introdução por Descartes de leis algébricas para caracterizar objetos geométricos, ainda não é feita a distinção, por exemplo, entre círculo e circunferência. Na medida que o registro figural do primeiro (uma região plana) é dado por uma inequação, o do segundo (uma linha) é dado por uma equação. Segundo Duval (2009), ocorre aprendizagem de um conceito quando há a conversão entre um registro e outro.

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos de um plano de modo que três quaisquer deles não sejam colineares. A união dos segmentos A_1A_2, $A_2A_3....A_nA_1$ é chamada polígono se esses segmentos não têm pontos interiores comuns. A região poligonal é a parte do plano limitada por um polígono. Ao primeiro conceito está associada a grandeza comprimento (perímetro), enquanto ao segundo, a grandeza área. O livro didático, em geral, introduz esses conceitos de forma equivocada ou, ao menos, desenvolve a visualização de objetos conflitantes com os conceitos que se seguirão ao longo da escolaridade. Por exemplo, em um livro de primeiro ano, datado de 2017, aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático, é sugerida atividade de ligar 'cada objeto' (e não sua representação) a uma das figuras que mais se assemelha a ele (Figura 1).

Figura 1 - Imagens que deveriam ser associadas aos objetos

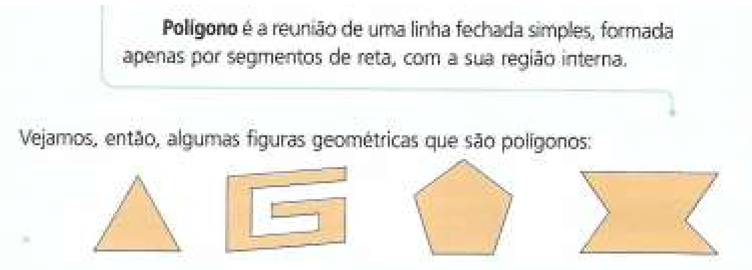


Fonte: adaptado pelo autor.

Percebe-se, inclusive, que todas as figuras estão com seus interiores coloridos/preenchidos, dando a percepção de que o objeto é uma região e não uma linha. Voltando ao Quadro 1, na EI02TS02 é indicado que as crianças devem utilizar diferentes materiais para grafar, entendendo-se aqui o reconhecimento de nomenclatura de figuras planas.

Uma segunda verificação deste tipo de conflito que se percebe no tema polígono/região poligonal, linhas/regiões, consta do volume do sexto ano na unidade polígonos (identificando polígonos), dos mesmos autores. É feita a definição do objeto geométrico polígono e, em seguida, exemplificadas figuras geométricas que são polígonos (Figura 2).

Figura 2 - Regiões ou poligonos



Fonte: da pesquisa

Percebe-se, nessa situação, os autores ilustrando, logo a seguir da definição de polígono, figuras coloridas preenchendo as regiões limitadas por polígonos. Ao observar o Quadro 2 e a EF01MA14 que sinaliza para identificar e nomear figuras planas neste segmento da escolaridade, percebe-se, novamente, uma incompatibilidade com a conversão entre os dois registros, novamente evocando Duval (2009).

Na sequência apresenta-se os pressupostos metodológicos da pesquisa

Pressupostos Metodológicos

Este artigo aborda uma pesquisa de cunho qualitativo, levada a cabo no primeiro semestre do ano de 2021, durante uma aula de uma disciplina de um mestrado profissionalizante na região sul do Brasil em que o autor é o professor titular. Teve por objetivo identificar formas geométricas planas e espaciais visualizadas em imagens fotografadas de objetos retirados do mundo real/concreto. Além disso, as alunas participantes deveriam argumentar sobre suas escolhas e, consequentemente, conectar as imagens às formas do mundo matemático/geométrico. Deste modo, o desenvolvimento da habilidade de visualização estaria preparando os professores para um aperfeiçoamento de suas práticas pedagógicas em Geometria nos primeiros segmentos de escolaridade, onde o papel do professor pedagogo é fundamental para o desenvolvimento das crianças ao longo de sua formação e, consequentemente, do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Participaram da mesma um total de nove estudantes regulares, todas pedagogas e atuando na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A fim de evitar identificações nos processos analíticos das respostas, elas serão nomeadas da seguinte forma: *Ane; Ara; Ela; Eli; Iam; Mem; One; The*; *Uma*.

A coleta de dados foi obtida por meio de um formulário no *Google Form*s e constou de três situações em que estavam representados objetos da vivência das pessoas, como se verá na análise dos dados. Cada uma das questões apresentava cinco representações de objetos e cinco alternativas de respostas, seguindo da escrita de uma justificativa pela escolha feita.

Ao abordar sobre a pesquisa qualitativa, explorando textos e imagens, particularmente, Bauer; Gaskell e Allum (2017) afirmam que “O mundo, como o conhecemos e o experienciado, isto é, o mundo representado e não o mundo em si mesmo, é constituído através de processos de comunicação” (p. 20). Isso é pertinente para a pesquisa aqui apresentada na medida em que os investigados necessitam escolher uma representação de um objeto que se encontra no mundo real, pois lhes são apresentadas imagens fotografadas de tais objetos.

Os autores apontam imagem como sendo um dos meios de serem utilizados na construção de um texto. Os mesmos, ainda, distinguem a pesquisa qualitativa em contraste com a quantitativa, pois a primeira evita números, caso da presente pesquisa e, “lida com interpretações das realidades sociais, e é considerada soft” (p. 23). Nessa direção, as participantes da investigação necessitavam identificar alguma forma geométrica, plana ou espacial, nas imagens representadas dos objetos em apreço.

Ainda sobre imagens fotografadas, Loizos (2017) afirma: “[...] a imagem, com ou sem som, oferece um registro restrito, mas poderoso das ações temporais e dos acontecimentos reais – concretos, materiais” (p.137). Indo mais além, o autor também se refere à imagem (representação de objetos no presente caso) como “[...] ela pode empregar, como dados primários, informação visual que não necessita ser nem em forma de palavras escritas, nem em forma de números [...]” (Loizos, 2017, p. 137). Portanto, alusão a imagens ou a representações de objetos do mundo real vão ao encontro do que Leivas (2009) caracteriza por visualização e proporciona a exploração dos objetos geométricos então representados. Assim, a formação de pensamento geométrico pode ser desenvolvida a partir da exploração desses recursos de fácil obtenção (sucatas do dia a dia no ambiente domiciliar).

Na sequência serão apresentadas as três questões investigativas e as respectivas análises.

Análises e Resultados

> O gênero humano está enfrentando revoluções sem precedentes, todas as nossas antigas narrativas estão ruindo e nenhuma narrativa nova surgiu até agora para substituí-las. (Harari, 2018, p. 319).

A epígrafe é bastante forte, entretanto ela vai direto ao encontro do que se tem visto nos currículos e livros didáticos e, particularmente, nas aulas de Geometria. Refere-se aqui a ela, pois o autor da epígrafe indica: “Então, o que deveríamos estar ensinando? Muitos especialistas em pedagogia alegam que as escolas deveriam passar a ensinar “os quatro Cs” – pensamento crítico, comunicação, colaboração e **criatividade**” (Harari, 2018, p. 323, grifo próprio). O grifo remete à epígrafe no início do artigo e à necessidade de envolver os estudantes no processo, o que se acredita pode ocorrer com atividades similares as apresentadas neste texto.

Para Tall (1991),

> criatividade está preocupada com a forma como as ideias sutis de investigação são construídas na mente humana e uma prova disso é a forma como essas ideias são ordenadas em um desenvolvimento lógico tanto para verificar sua natureza quanto para apresentá-las à aprovação da comunidade matemática (p. xiii).

Portanto, a criatividade é um fator preponderante para o sucesso do professor em suas práticas inovadoras que não constavam de sua formação inicial, o que veio a ser fundamental no período pandêmico da COVID-19.

A primeira questão buscou identificar as instituições em que as nove professoras trabalhavam. Todas elas atuam na região central do estado do Rio Grande do Sul e, apenas uma, na capital do estado. Todas estão envolvidas com o ensino de todas as matérias até o quarto ano do Ensino Fundamental, sendo que uma delas em Escola Indígena.

Tomou-se o cuidado de deixar claro, no início do formulário do *Google Forms*, que ali estava 'uma representação' de um objeto, como segue.

Nas imagens abaixo, fotografadas de objetos do cotidiano, podem ser observadas formas geométricas diversas. Assinale, em cada coleção, a opção mais adequada para o que é solicitado. Justifique sua escolha.

Primeira questão

Esta primeira investigação teve o objetivo de analisar como as participantes distinguiam uma forma geométrica plana de uma espacial nas representações apresentadas, em particular, formas que se assemelhavam a quadrados.

Figura 3 - Imagens de formas quadrangulares

Fonte: arquivo do pesquisador

Há de considerar-se dois aspectos: um é o objeto e outro a sua representação, levando em conta que formas geométricas planas são abstratas no mundo real, pois ninguém pega na mão um quadrado, um triângulo ou um polígono. Por isso, é necessário dar atenção para os termos 'geometria e formas', 'grandezas e medidas'. O *Google Forms* forneceu o seguinte gráfico para as respostas da questão.

Gráfico 1 – Gráfico das respostas da primeira questão

Fonte: dados da pesquisa

O gráfico indica percentual de 44,4% igual para a primeira e a última alternativa, ou seja, tanto uma região poligonal (imagem A) quanto o polígono (imagem E) receberam a mesma identificação como sendo um polígono. Observa-se que na primeira não há um contorno assinalado o que levaria a visualizar uma região, aparentemente quadrada. Na última, é bem definida a imagem contornada em preto, destacando um polígono quadrado na representação. Imagens B e D não receberam nenhuma identificação, até porque visualmente indicam dimensões diferentes das arestas das embalagens. Já a alternativa C recebeu um percentual de 11,1% e pode indicar que a resposta advém do fato de terem observado o contorno da face da embalagem, uma vez que há uma região retirada daquela frontal.

Ao que tudo indica, os resultados desta primeira questão vão ao encontro da pesquisa realizada por Blanco (2014) a respeito de equívocos quanto ao ensino de Geometria, bem como ao livro didático que induz os estudantes a não fazerem distinções entre as representações de objetos geométricos planos em termos de polígono e região poligonal como ilustrado anteriormente.

Quanto às justificativas apresentadas, a maioria indicou sua escolha ser quadrado por parecer ter os quatro lados iguais. Alguns destaques:

Ara: Parece ter todos os lados iguais e é plana (A). Esta participante incluiu de forma adequada a característica de ser figura plana, o que as outras não argumentaram.

Ane: As outras parecem cubos (A). Aqui a participante confundiu um quadrado com um cubo, o que não faz sentido, considerando que estão sendo feitas imagens dos objetos e não o objeto em si mesmo.

Ela: Visivelmente parece ter os 4 lados iguais e os 4 ângulos retos estão mais definidos (A). A participante explora muito bem o aspecto visual para fazer a sua escolha. Entretanto, não se ateve à diferenciação de região para polígono.

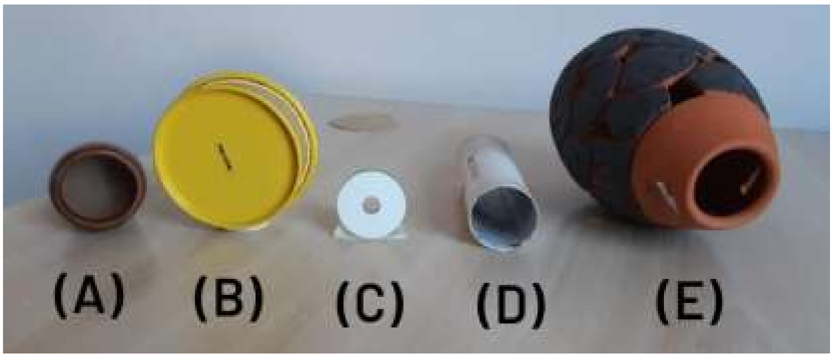
Mem: quando olhei para as imagens foi a letra E que me chamou a atenção, apesar de achar que todas são quadrados (E). Nota-se que foi uma escolha bastante superficial, pois entendeu serem todas de natureza quadrada.

As justificativas apresentadas mostram a real dificuldade existente entre tais indivíduos em identificar um polígono, distinguindo-o de região poligonal. Com isso, argumenta-se a importância da ilustração com o apresentado nos livros didáticos que muitas vezes são o único material no qual o professor apoia-se para o seu ensino. Também, pode ser ancorado em Tall (2002, p. 235): "[...] muitos pesquisadores perceberam que os erros dos alunos muitas vezes são o produto de equívocos causados pelo uso de conhecimentos antigos em um novo contexto onde eles não são mais válidos".

Segunda questão

A segunda questão investigativa teve por objetivo analisar como os participantes da pesquisa identificavam forma geométrica similar a um círculo em um elenco de cinco representações de objetos espaciais existentes no mundo real, possíveis de serem encontrados ao redor destes indivíduos.

Figura 4 - Imagens de formas circulares



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 2: Gráfico das respostas da segunda questão

Fonte: dados da pesquisa

As imagens apresentadas correspondem a objetos vasados em A, D e E, os quais têm sua borda como uma linha circular, ou seja, associados ao elemento geométrico circunferência. No entanto, A e D tiveram o mesmo percentual de indicações, 11,1%, o que corresponde a 1 ocorrência, enquanto E teve 0%. Os outros sete respondentes assinalaram o item C, o que equivale a 77.8%, maioria absoluta.

O item B poderia expressar o conceito de círculo uma vez que está completamente preenchido do mesmo material sem nenhuma abertura, a exemplo das representações indicadas nos livros didáticos. Além disso, poderia indicar uma circunferência pela borda saliente dessa região. No entanto, acredita-se que o fato de ser visualizada uma forma cilíndrica o mesmo não teve nenhuma indicação o que seria bem mais natural do que as alternativas A e D. Pode-se perceber na questão a visualização no sentido apontado por Leivas (2009) como sendo um construto mental. Por sua vez, o item C foi acentuadamente o mais indicado. Pode-se analisar que os indivíduos o assinalaram mais por se assemelhar a uma forma plana do que qualquer outra situação, pois o mesmo apresenta um furo central o que faz com que seja uma região perfurada, portanto, não um círculo. No entender deste autor a resposta mais apropriada seria a letra B, ou seja, a que não teve nenhum indicativo.

Na sequência analisa-se algumas das justificativas apresentadas.

As duas participantes que justificaram a escolha pela representação figural constante da letra A foram:

Mem: Por achar que letra A representa uma figura plana... o círculo.

*The: Acho que é .... P*ortanto, não houve nenhuma fundamentação matemática.

As que seguem justificaram a escolha pela imagem constante em (C).

Ela: Ao meu ver, por ser um objeto plano, fica mais visível como um círculo.

One: *Circunferência*.

Uma: É uma circunferência.

Iam: Me parece ser a imagem com a figura mais plana.

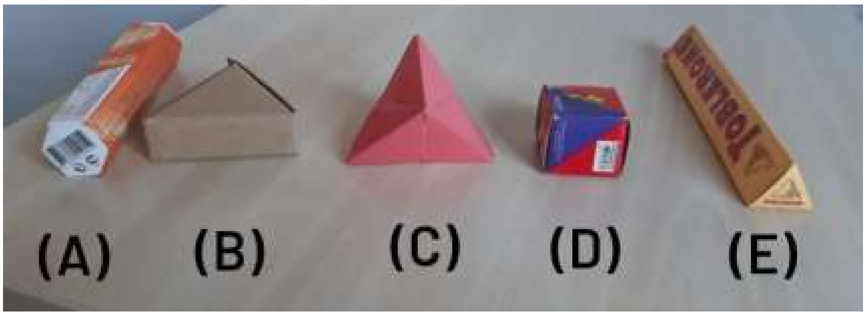
Tanto *One* quanto Uma, justificam ser uma circunferência e, novamente, há o conflito cognitivo entre os conceitos de circunferência e de círculo, muito embora as outras justificativas não permitam decidir sobre isso, ou seja, seria recomendável que indicassem o conceito do objeto geométrico envolvido. Retoma-se a epígrafe apresentada antes: “Então, o que deveríamos estar ensinando? Muitos especialistas em pedagogia alegam que as escolas deveriam passar a ensinar “os quatro Cs” – pensamento crítico, **comunicação**, colaboração e criatividade” (Harari, 2018, p. 323). O grifo é deste autor para assinalar a importância da comunicação entre professor e aluno no sentido de expressar conceitos de forma correta na linguagem matemática/geométrica a fim de não ocasionar concepções errôneas na sequência dos estudos. Percebe-se, nos últimos registros das participantes, que não houve maior preocupação “com a forma como as ideias sutis de investigação são construídas na mente humna [...]”, conforme Tall (1991, p. xiii) indica para a criatividade.

Além disso, ocorre em atividades deste tipo o indicado em habilidades e objetivos preconizados na BNCC (Quadros 1 e 2).

Terceira questão

Nesta terceira e última questão o pesquisador teve por objetivo investigar se os participantes diferenciavam, dentre cinco imagens de objetos do mundo real, aquela que não poderia representar um prisma.

Figura 5 - Imagens representativas de superfícies sólidas



Fonte: do autor

Segue o enunciado da questão e o gráfico obtido das respostas, a partir do *Google Forms*.

Gráfico 3 – Gráfico das respostas da terceira questão

Fonte: dados da pesquisa

De acordo com os dados, percebe-se que nenhum respondente escolheu as alternativas B e E, respectivamente, dois prismas de bases triangulares, muito embora a segunda representação, em geral, não é a indicada em textos com uma base na horizontal e a aresta lateral na vertical.

Ara argumenta sua escolha pelo item (C), pois "*Tem várias faces e arestas*". Foi a única a indicar a resposta correta, embora sua justificativa deixe a desejar, por não se apoiar no conceito, ou seja, a figura escolhida não tem faces paralelas.

Ane justificou sua escolha pela alternativa (A) da seguinte forma: *Tem bases iguais e faces planas*. Acredita-se que a participante se confundiu ao não perceber a indicação de escolher a que NÃO representava prisma ou, talvez, pela base não ser a usual triangular.

Dentre as que justificaram sua escolha pela letra (D), um cubo, aparecem as seguintes:

Uma: Quadrado não é prisma.

Iam: A letra "d" é um cubo.

Ao que tudo indicou nas respostas desta questão, conceitos geométricos, nomenclaturas e elementos de figuras geométricas espaciais não estão evidenciadas no conhecimento do grupo investigado. Novamente, observando o preconizado resumidamente nos Quadros 1 e 2, adaptados da BNCC, não está sendo devidamente trabalhado na formação inicial desses professores pedagogos e eles devem ser os líderes, diga-se de passagem, na formação inicial dos estudantes a fim de desenvolver pensamento geométrico compatível com o preconizado. Isso reitera a pesquisa de Perry, Samper e Camargo (2020) sobre a necessidade de "determinar características dos ambientes de aprendizagem para a geometria escolar mediada por artefatos que promovam o raciocínio e a construção de significados" (p. 97), o que pode vir a ser elemento de inovação na prática profissional desses professores.

Ao que tudo indica, o preconizado pela BNCC, ou seja, "[...] Parte do trabalho do educador é refletir, selecionar, organizar, planejar, mediar e monitorar o conjunto das práticas e interações, garantindo a pluralidade de situações que promovam o desenvolvimento pleno das crianças" (Brasil, 2017, p. 39), ainda não alcançou os investigados. Atividades similares a esta podem contribuir para a prática docente e proporcionar uma melhor aprendizagem dos estudantes.

Reflexões Finais

Neste artigo, foram apresentados resultados de uma pesquisa de cunho qualitativo envolvendo nove professoras pedagogas em uma aula realizada em um curso de mestrado profissional, voltada para esta clientela. Teve-se por objetivo investigar como as envolvidas visualizam formas planas em artefatos, bem como formas espaciais. Foram apresentadas três questões com cinco alternativas cada para a escolha de uma única como resposta e, posteriormente, uma justificativa.

O trabalho ancorou-se em questões como as de Prieto e Arredondo (2020), que indicam a importância de realização de atividades explorando a forma social, corpórea, sensorial e artefactual no trabalho de futuros professores e formadores ao que se acrescenta, professores em ação continuada. Por sua vez, Loizos (2017) indica a relevância de explorar imagens como registro poderoso em ações/acontecimentos reais e, assim, apresentou-se alguns objetos do mundo real para a percepção visual dos indivíduos associarem a formas geométricas.

Em uma primeira coleção desses artefatos foram indicados cinco imagens de objetos com formas quadrangulares e questionado qual deles melhor se assemelhava ao quadrado. Os dados mostraram que os indivíduos se concentraram nas formas que melhor se adequavam a uma região quadrada (primeira representação) e a um quadrado (última representação). Como era solicitado que indicassem o quadrado (um polígono) este estava acentuado na última, particularmente por ter o contorno bem delimitado em cor diferente da região interior o que a visualização permitiria a identificação do que fora soliciado. Assim, a escolha pela alternativa (A) condiz com os pressupostos do autor do artigo a respeito da necessidade de realização de atividades envolvendo visualização a fim de chegar à conceitualização de formas geométricas;

Os resultados a respeito da identificação de um círculo na segunda questão, levaram a maioria absoluta em identifica a imagem de uma 'espécie' de círculo por se diferenciar das demais, uma vez que representava um disco – DVD. Porém, esse tinha um furo circular na região interna e, assim, não poderia ser o círculo. Três outras imagens eram de objetos abertos na parte frontal em formato circular. A que mais se assemelhava à uma região circular (círculo) seria a segunda imagem, a qual não obteve nenhuma incidência. Deste modo, intui-se, ainda, que a percepção do mundo como o conhecemos a partir dos objetos reais, concretos, não é suficiente para permitir a identificação de um ente geométrico, indo ao dito por Bauer, Gaskell e Allum (2017). É necessário, assim, evocar a visualização do conceito como construto mental, segundo o autor do artigo e não somente a percepção de uma representação não fiel do objeto geométrico.

Na finalização, com a terceira questão, buscava-se a identificação de uma imagem que remetesse a um não prisma. No entanto, a maioria absoluta a associou a um cubo. Provavelmente isso tenha ocorrido em virtude da vista frontal ser constituída por duas cores, uma vez que foi produzida por dobraduras, muito embora algumas justificativas indicassem a figura como de um cubo.

Por fim, conclui-se haver necessidade de outras atividades que conduzam professores em formação inicial ou continuada para desenvolver visualização e estudar o tema geometria e formas para que possam ser desenvolvidas na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A este respeito, a atividade serviu para o professor dar continuidade às suas aulas com o grupo, em particular fundamentando sobre a Teoria de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, o que veio a ocorrer na sequência dos trabalhos. Além disso, outras pesquisas, conferências, acrescentam a este artigo possibilidades de atividades que podem proporcionar desenvolvimento de pensamento geométrico. Lutz e Leivas (2021) são organizadores do e-book "Abordagens metodológicas para o ensino de geometria"[1], enquanto que Bettin, Lima e Leivas (2021) investigam sobre percepção espacial de estudantes de um nono ano do Ensino Fundamental e de professores em ação continuada.

Espera-se com isto possibilitar novos experimentos e criação de atividades similares em Geometria.

Referências

Bauer, M.W.; Gaskell, G.; Allum, N.C. (2015). Qualidade, quantidade e interesses do conhecimento : evitando confuões. In: Bauer, M.W.; Gaskell, G.(org.) *Pesquisa*

[1] https://g3pgeo.wixsite.com/gepgeo

Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático.13a. ed. Petrópolis: Vozes, 2. reimpressão, p. 17-36.

Bettin, A. D. H., Lima, A.F., Leivas, J.C.P. (2021). Percepción del espacio: una investigación con estudiantes de los últimos anõs de una escuela pública y profesores en educación contínua. *Revista Paradigma*. V. XLII; Nro. Extra 3, setembro de 2021. pp. 340-364.

Blanco, T. F. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometria. In: *IX FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA*. Quepos, Puntarenas, Costa Rica 12 al 14 de junio de 2014, p. 1-21.

Brasil (2017). *Educação é a Base*, Ministério da Educação Secretaria da Educação Básica. Brasília.

Camargo, L.; Perry, P.; Samper, C. (2020). Mediación semiótica potencial y real del enunciado de tareas geométricas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, Septiembre-Diciembre 2020, Volumen 12, N°3, 96-108.

DuvalL, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física.

Harari, Y.N. (2018). trad. Geiger P. *21 lições para o século 21*. São Paulo: Compania da Letras, 1 ed.

Iglesias, M.; Ortiz, J. (2020). Doblado de Papel y Software de Geometría Dinámica. Una Experiencia con Futuros Profesores de Matemática *Revista Paradigma*, Vol. XLI, junio de 2020 / 1004-1032. Disponível em: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article>. Acesso em 03 jun. 2021.

Leivas, J.C.P. (2009*). Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da Abordagem geométrica no currículo de Cursos de Licenciatura de Matemática.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná: Curitiba, 294p.

Loizos, P. (2015). Vídeo, filme e fotografias como documento de pesquisa. In: Bauer, M.W.; Gaskell, G.(org.) *Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático*.13a. ed. Petrópolis: Vozes, 2. reimpressão, p. 137-155.

Lutz, M.R.; Leivas, J.C.P. (2021). (org.). *Abordagens Metodológicas para o Ensino de Geometria* / Mauricio Ramos Lutz e José Carlos Pinto Leivas (Org.) [edição eletrônica] Santa Maria: GEPGEO, Porto Alegre: Mundo Acadêmico. Acesso livre em https://g3pgeo.wixsite.com/gepgeo.

Poincaré, H. (1913). *The Foundations of Science* (translated by Halsted G.B.). The Science Press**.**

Prietto G., J. L.; Arredondo, E. H.; (2020). Aprendizaje de las construcciones euclidianas con GeoGebra: elementos de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas. *Revista Paradigma*, Vol. XLI, Nro. 2, diciembre de 2020 / 356-380. Disponível em: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article>. Acesso em 04 jun. 2021.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (2002). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics Education Library*, NEW YORK: Kluwer Academic Publishers, v. 11.

Autor:

José Carlos Pinto Leivas

Graduado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas. Tem especialização em Matemática na área de Análise pela Universidade Federal de Pelotas. Mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina. Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Atualmente é Professor da Universidade Franciscana (UFN),Santa Maria, RS. Editor da Revista Vidya.

Diretor Regional da SBEMRS 2018-2021

Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO

Correo electrónico: leivasjc@ufn.edu.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

Como citar o artigo:

LEIVAS, J. C. P. Visualização de formas geométricas: envolvimento de professores pedagogos. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 49-67, enero, 2022. DOI: 10.37618

Estudio de aula en la formación inicial del profesorado en Matemáticas: creación de un tercer espacio de formación

Ana Maria Porto Nascimento
ana.nascimento@ufob.edu.br
http://orcid.org/0000-0003-2048-5554
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)
Barreiras, Brasil.
Edmo Fernandes Carvalho
edmo.carvalho@ufob.edu.br
http://orcid.org/0000-0002-6959-2652
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)
Barreiras, Brasil.
Priscila Santos Ramos
priscilasr@ufob.edu.br
http://orcid.org/0000-0003-3394-764X
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)
Barreiras, Brasil.

Recibido: 30/06/2021 **Aceptado:** 08/12/2021

Resumen

En este artículo pretendemos discutir el estudio en el aula como tercer espacio formativo en un contexto de formación inicial para profesores de matemáticas. Para la realización de la investigación se utilizaron las nociones teóricas de proceso de Estudio de Lecciones y espacios formativos híbridos, como terceros espacios formativos, alternativos a los convencionales. En la investigación participaron 20 estudiantes del curso de Matemáticas de una universidad federal de la región occidental de Bahía y tres formadores de docentes. La producción de datos se basó en la observación en el aula, que se acercó a un estudio en el aula con la participación efectiva de los futuros profesores. El aspecto principal que caracterizó el estudio de clase como tercer espacio formativo fue la recolección de conocimientos prácticos a partir del análisis de una clase en la que se asumió el rol de alumno y observador al mismo tiempo, lo que significó una nueva oportunidad de aprendizaje para los futuros docentes en formación, en la medida que, los acercó a un espacio más equitativo entre todos los colaboradores de la investigación.

Palabras clave: Formación del profesorado. Estudio de aula. Tercer espacio formativo.

Estudo de aula na formação docente inicial em Matemática: criação de um terceiro espaço formativo

Resumo

Neste artigo, temos o objetivo de discutir o estudo de aula como terceiro espaço formativo num contexto de formação inicial de professores de matemática. Para realização da pesquisa utilizamos as noções teóricas de processo de Lesson Study e Espaços formativos híbridos, como terceiros espaços formativos, alternativos aos convencionais. Participaram da pesquisa 20 licenciandos do curso de Matemática de uma universidade federal da região oeste da Bahia e três professores formadores. A produção dos dados foi baseada na observação de

aula, o que se aproximou de um estudo de aula com participação efetiva dos futuros professores. O principal aspecto que caracterizou o estudo de aula como terceiro espaço formativo foi a reunião do conhecimento prático de analisar uma aula em que se assumiu ao mesmo tempo o papel de estudante e observador, o que significou uma nova oportunidade de aprendizagem para os futuros professores em formação, a medida em que, os aproximou de um espaço mais igualitário entre todos colaboradores da pesquisa.
Palavras chave: Formação docente. Estudo de Aula. Terceiro espaço formativo.

Lesson study in initial teacher training in math: creation of a third educational alternative

Abstract

In this article, we aim to discuss classroom study as a third formative space in a context of initial training for mathematics teachers. To carry out the research, we used the theoretical notions of Lesson Study process and hybrid formative spaces, as third formative spaces, alternative to the conventional ones. Twenty students from the Mathematics course at a federal university in the western region of Bahia and three teacher trainers participated in the research. Data production was based on classroom observation, which came close to a classroom study with effective participation of future teachers. The main aspect that characterized class study as a third formative space was the gathering of practical knowledge of analyzing a class in which the role of student and observer was taken on at the same time, which meant a new learning opportunity for future teachers in training, as it brought them closer to a more equal space among all research collaborators.
Keywords: Teacher training. Classroom study. Third training space.

Introdução

Ao longo dos anos dedicados à formação docente inicial e continuada, temos notado um fenômeno intrigante, que estamos caracterizando como equívocos na idealização do espaço de exercício da docência como locus da experimentação cega de conhecimentos educacionais academicistas.

O referido fenômeno se manifesta de forma mais explícita e muito peculiar com mais força na formação inicial. A ideia de salvar o ensino de Matemática, de que na Educação básica estão todos os problemas do ensino, que a relação pessoal construída com saberes matemáticos na graduação é mais adequada e eficaz, é uma constante nas aulas, especialmente no que concerne os componentes de práticas de ensino.

Na contramão desse movimento de disputa de poder entre epistemologias acadêmicas e do professor que atua no ensino básico, está justamente a urgência de reconhecimento da escola e de todo trabalho realizado nesse espaço, como local de produção de saberes/conhecimentos (GONÇALVES-JÚNIOR, BURIASCO, 2006; GAMA,

FIORENTINI, 2009; PALANCH, MARINQUE, 2016) importantes para a formação e autoformação do professor de Matemática.

Nos questionamos sobre o que não demos conta, mesmo em meio a inúmeras pesquisas cujo escopo é o contexto escolar, a aula de Matemática, métodos de ensino e a aprendizagem em Matemática. De antemão pode-se afirmar que temos negligenciado dois pontos importantes. O primeiro que a escola não é locus de experimentação das teorias produzidas na academia, mas um espaço de produção de saberes. O outro, que um objeto de elevado grau de importância na formação de professores, deveria ser a aula. Em outras palavras, nas pesquisas em Educação Matemática, deveríamos olhar para o estudo da aula, como ponto de partida para compreensão do complexo processo de ensino-aprendizagem.

Nesse contexto de desafios, estudar a aula tem se mostrado em nossas práticas uma importante ferramenta didática, de pesquisa e de cooperação entre docentes que atuam na formação de professores de Matemática, e que discutem a luz do vasto repertório de investigações no âmbito da Educação Matemática, os dilemas, as inquietações do contexto escolar e acima de tudo caminhos para mitigar os problemas diagnosticados num formato de pesquisa colaborativa.

Diante do exposto, constitui-se como objetivo nesse artigo, discutir o estudo da aula como terceiro espaço formativo na formação docente na área de Matemática. Para tanto, apresentamos nossa concepção de estudo de aula, com aporte aos trabalhos desenvolvidos no Grupo de sábado liderado por Dario Fiorentini, bem como a ideia de terceiro espaço formativo conforme Zeichner (2010), conectando as informações sobre essas duas linhas de pensar a formação de professores que ensinam ou ensinarão matemática. Contudo, as tensões entre o estudo de aula e outras formas de se pensar a formação docente vai além do escopo desse estudo, e desse modo, não será abordado nesse momento.

O método utilizado nesse estudo de abordagem qualitativa (FERNANDES, GARNICA, 2020), é o estudo teórico do fenômeno supracitado, para construção de argumentos que apontem o estudo de aula como terceiro espaço formativo no processo de formação docente. A esse respeito, podemos inferir que estudar a aula, para além de impactar o perfil profissional e alterar significativamente a dinâmica de aulas de uma determinada instituição, constitui uma possibilidade de (auto)formação reflexiva que evidencia a indissociabilidade da teoria e prática na profissão docente.

Assim, neste texto objetiva-se discutir sobre o Estudo de Aula como possibilidade de formação profissional e pesquisa no curso de Licenciatura, como um espaço de conexão entre licenciandos e profissionais atuantes nas escolas e refletir sobre como a ação de estudar aulas pode constituir-se como o terceiro espaço formativo proposto por Zeichner. Para tanto, iniciaremos com uma breve revisão da literatura, apresentando nossa concepção de estudo de aula, apoiados principalmente na perspectiva discutida aqui no Brasil. Na sequência, discutimos a noção de terceiro espaço formativo de Zeichner (2010), e por fim, uma análise do modo como os licenciandos se aproximaram do Estudo de Aula, no curso de dois componentes optativos, oferecidos de forma remota, com momentos síncronos de discussão coletiva e momentos assíncronos de estudos de textos referentes ao Estudo de Aula e a constituição do pensamento algébrico.

Os participantes desse trabalho, que se transformou numa ação inicial de um projeto de investigação sobre as contribuições do Estudo de Aula na formação inicial do professor de matemática, foram três professores formadores atuantes no curso de Licenciatura em Matemática, dois da área de Educação Matemática e um da área de Matemática, vinte licenciandos matriculados nos componentes: Tópicos de Ensino Fundamental II e Tópicos em Educação Matemática III, sendo que eram 14 matriculados em um componente, 13 matriculados no outro componente e 7 matriculados em ambos. Esses sete estudantes conseguiram fazer a conexão entre os dois componentes, mobilizando os conhecimentos produzidos pelas leituras e discussões sobre Estudo de Aula para refletir sobre as aulas em que discutimos pensamento algébrico.

Estudo de aula: concepção brasileira

O nosso entendimento sobre Estudo de Aula toma por base as origens desse processo, as suas características e as formas em que tem sido implementado em diferentes contextos. No Japão, país em que esse estudo teve início, utiliza-se a expressão “Jugyokenkyu”, uma composição de “jugyou” cujo significado é “lição ou aula” e “kenkyu” que indica “investigação/pesquisa ou estudo”. Em língua inglesa tem-se a expressão *Lesson Study* e, nesse estudo, adotaremos a expressão Estudo de Aula. Nesse processo tem-se uma metodologia de planejamento, elaboração, execução, revisão, avaliação e reformulação de aulas. A ideia central é ter a aula como foco do estudo, desde o planejamento a uma possível reformulação.

Em todas as etapas desse processo os professores atuam na seleção e análise das especificidades do conteúdo da aula e as dificuldades dos estudantes, definição dos objetivos, planejamento das fases da aula, elaboração de tarefas, implementação da aula, observação pelos participantes do grupo de trabalho da ação do professor responsável em desenvolver a aula e dos estudantes durante a aula, revisão do planejamento e da execução e reelaboração de acordo com as observações feitas das aproximações ou distanciamentos entre o realizado e o planejado.

A participação dos professores em grupos de Estudo de Aula constitui-se como um processo de desenvolvimento profissional e tem se destacado como um espaço formativo que tem como objeto central de estudo a prática em sala de aula. E, essa formação profissional tem um forte eixo investigativo, pois a base da aula é o diagnóstico das dificuldades, conhecimento das orientações curriculares e materiais disponíveis e, principalmente, análise do que foi realizado durante a aula, pelos professores e estudantes, tendo por base as observações e registros. O fato de ter um grupo de trabalho contribui para o aprofundamento das discussões. A participação nesse processo torna possível a reflexão sobre a prática e a avaliação sobre necessidade de mudar essa prática, a partir do aprofundamento de conhecimentos.

No Brasil tem-se destacado os grupos de estudo coordenados por Dario Fiorentini como exposto no painel "Estudo de uma experiência de lesson study híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação" durante o ENDIPE (2018), em que *Lesson Study* é adotada como base para uma metodologia de formação-pesquisa e adaptada à realidade da escola pública brasileira e à prática colaborativa do grupo responsável, resultando, de acordo com esse pesquisador, em um modelo denominado *Lesson Study Híbrido (LSH).*

No referido painel foram socializadas experiências que ocorreram em um projeto de formação docente e pesquisa, em que estiveram juntos universidade e escola, cujo objetivo foi a formação em serviço de professores que ensinam matemática em escolas públicas, e a compreensão de como se dá a aprendizagem docente e o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática, principalmente o conhecimento profissional. Uma das experiências apresentou as bases teóricas e metodológicas do projeto, destacando o modelo LSH e as possibilidades de melhoria da prática e do conhecimento profissional do professor que ensina matemática. Uma segunda experiência relatou e discutiu o planejamento de uma das professoras que atua nos anos iniciais de escolarização, explorando os sentidos e os significados dos estudantes ao campo multiplicativo. E, ainda, uma terceira experiência relatou o processo de implementação do planejamento em uma classe de Ensino Médio, problematizando a negociação de sentidos sobre a natureza da observação e o papel dos observadores em aula. O eixo comum nesse projeto foi o Estudo de Aula que tornou possível a pesquisa, a formação e o desenvolvimento profissional.

.

Estudo de aula como terceiro espaço formativo

Depois da publicação de "Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades" um importante texto de Zeichner (2010), em língua portuguesa, em que esse pesquisador revela suas inquietações sobre a desconexão entre os componentes curriculares acadêmicos e a parcela da formação docente que acontece nas escolas, outros estudos emergiram, tomando como objeto de investigação a viabilidade de construção de novos espaços formativos. Levantamos alguns pontos dessa discussão, que é fundamental à proposição do estudo da aula ser mais um desses espaços formativos.

Consideramos três ambientes, sob a lente proposta por Zeichner (2010), identificados no estudo realizado por nós, como espaços formativos alternativos, a saber: a formação a nível de pós-graduação stricto sensu, os programas de residência pedagógica e/ou de iniciação a docência e os grupos colaborativos que dedicam-se a estudos de aulas.

No que tange ao primeiro ambiente supracitado, Sousa, Ribeiro e Nogueira (2015), apresentam um recorte de duas investigações desenvolvidas num programa de mestrado profissional para docentes da Educação Básica, e apontam argumentos que denotam como programas de formação docente como este podem ser um espaço formativo híbrido, ou como Zeichner chama, de terceiro espaço formativo. Em síntese, são apresentadas pelas autoras reflexões sobre a relação teoria e prática, aprendizagem e produção de conhecimento, autoria e prática docente, que segundo elas, é o que inscreve o programa de pós-graduação como espaço formativo alternativo.

No entanto, Zeichner (2010), denuncia que ainda que estudantes da pós-graduação estejam interessados em realizar um trabalho de excelência na formação docente, essa formação não é em certa medida o principal interesse dos estudos. A inferência possível a partir disso, é que o estudo de aula como objeto de investigação não integra os interesses para pesquisa.

A dicotomia entre universidade e escola, concernente à formação de professores se perpetua, associada a ideia de que a primeira é espaço de construção e disseminação de conhecimentos “científicos”enquanto a escola assume a posição de campo de prática (BARAB; DUFFY, 2000).

Zeichner (2010) discute algumas experiências, que surgiram nos Estados Unidos ao longo dos últimos quarenta anos, que visavam mitigar os efeitos da referida dicotomia entre os centros de formação de professores na figura da universidade e a escola, locus da atuação dos professores. Dentre as experiências, destacamos centros pedagógicos, que ainda segundo esse autor, enquanto observador externo, enxerga nesse tipo de parceria as culturas e formas singulares de discurso têm se mantido separados nessas instituições, tornando o aspecto de renovação das práticas dos formadores e formados limitado.

O conceito de terceiro espaço é utilizado por Zeichner (2010) como uma especie de lente que permite discutir diversos "tipos de cruzamentos de fronteira entre universidade e escola” (p.486) em desenvolvimento na época da publicação da obra citada em programas de formação docente norte americanos. A esse respeito, Zeichner ainda afirma:

> Terceiros espaços envolvem uma rejeição das binaridades tais como entre o conhecimento prático profissional e o conhecimento acadêmico, entre a teoria e a prática, assim como envolve a integração, de novas maneiras, do que comumente é visto como discursos concorrentes – em que uma perspectiva do isso ou aquilo é transformada num ponto de vista do tanto isso, quanto aquilo. (ibidem, 2010, p. 486).

O uso que esse autor faz do conceito de terceiro espaço, refere-se "à criação de espaços híbridos nos programas de formação inicial de professores que reúnem professores da Educação Básica e do Ensino Superior, e conhecimento prático profissional e acadêmico”(ZEICHNER, 2010, p. 487) visando aprimorar a aprendizagem de futuros professores, e porque não daqueles que já estão em serviço e consideram-se em processo de formação.

Da perspectiva acadêmica a solução para o problema da desconexão entre universidade e escolas na formação de professores e na formação profissional continuada para professores da Educação Básica, apontado por Zeichner (2010), tem sido o de tentar perceber maneiras melhores de levar o saber produzido nas universidades, fruto de pesquisas das pós-graduações, para os professores da Educação Básica. Esse é um modelo que Zeichner (1995) caracterizou como de fora para dentro, no qual o saber está nas mãos dos formadores de professores nas universidades e não entre os docentes da educação básica.

Como argumentaremos adiante, criar terceiros espaços na formação de professores pressupõe "uma relação mais equilibrada e dialética entre o conhecimento acadêmico e o da prática profissional" (ZEICHNER, 2010, p. 487) como caminho viável de auxiliar a aprendizagem de futuros professores ou aqueles em formação continuada.

Retomando a discussão sobre os ambientes que configuram na literatura “terceiro espaço formativo”, podemos destacar que o segundo é o espaço dos programas institucionais de residência pedagógica - RP e/ou de iniciação a docência - PIBID, ainda que comecem não vencendo o obstaculo da dicotomia entre universidade e escola, haja vista o projeto submetido à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES ser proposto pelas universidades muitas vezes sem a participação dos atores das escolas, há na sua execução maneiras de romper com qualquer forma hierárquica no processo formativo.

No centro dessa discussão sobre formação inicial docente, há que se considerar a formação acadêmica e a formação pedagógica, com o intuito de capacitar os futuros professores para exercício de uma atividade que não se restringe, unicamente a ministrar aulas (FELÍCIO, 2014). Para Garcia (1999) esse fenômeno complexo (formação profissional) envolve aspectos subjetivos relacionados ao desenvolvimento pessoal e a aspectos objetivos, que relaciona-se com o desenvolvimento de uma função social. Nesse ínterim, Felício (2014) compreende os programs de iniciação a docência como um espaço-tempo que se constituiu ao longo dos últimos anos como uma importante política pública de formação profissional docente, e que pode ser representante a depender da sua forma de condução um espaço de formação tal como é concebido por Zeichner (2010).

Zeichner (2010), aponta como problemático o formato de formação que tem caráter aplicacionista, onde os professores em sua complexidade do cotidiano escolar revelam pouco conhecimento do que é trabalhado nos componentes curriculares na universidade e por outro lado os formadores conhecem pouco da práticas efetivas nas escolas. Esse autor denomina tal problemática como desconexão entre universidade e escolas, o que pode ser amenizado segundo esse autor com a criação de *espaços como o da formação stricto sensu e aqueles que possibilitam iniciar os estudantes na docência* (grifo nosso). Esses espaços-tempos reunem o conhecimento prático ao acadêmico de modo menos hierárquico que o estágio supervisionado que integram a maioria do currículos das licenciaturas. Mas como já foi destacado anteriormente, ainda existem lacunas na formação via programas como os mencionados acima, por esse motivo apresentamos o estudo de aula como espaço-tempo que tem maior potencial de romper com as dicotomias já citadas nesse texto.

Assim, nesse manuscrito propomos que o estudo de aula, é um terceiro ambiente (entenda-se espaçotempo) viável à formação docente inicial que vai valorizar os conhecimentos produzidos na universidade e na escola. Um aspecto que merece destaque é a construção de uma relação equilibrada entre escola e universidade no processo formativo dos futuros professores. Esse é também um ponto imprescindível da constituição de grupos colaborativos que utilizam essa metodologia de investigação sobre os processos educacionais e a formação docente popularizada como estudo de aula.

A colaboração é uma dimensão basilar na cultura profissional (RICHIT, PONTE, 2017), isso porque apoia-se num conjunto de crenças, valores, atitudes, hábitos de uma comunidade docente que podem ser uma base de apoio e identidade profissional dos professores, frente aos desafios que serão impostos aos futuros docentes.

Por ser uma abordagem de formação centrada na prática, assumindo uma natureza colaborativa e reflexiva (PERRY, LEWIS, 2009; PONTE et al., 2016; PONTE, 2017; RICHT, PONTE, 2017) é que entende-se que o estudo de aula é um espaço-tempo não convencional e que atua nas dicotomias já mencionadas anteriormente, podendo viabilizar outra cultura profissional (BORGES, 2007).

Ademais, é através da colaboração, da partilha dos costumes, das crenças, dos saberes, dos conhecimentos didáticos docentes de uma instituição, que poderá ocorrer um processo de aculturação de forma equilibrada como prevê a ideia de espaços híbridos de formação docente de Zeichner (2010), com adesão de forma voluntária de futuros professores, os que já ensinam e formadores, com objetivos comuns e com um divisão de trabalho racional, constituindo um ambiente em que todos têm algo a aprender e a ensinar (PONTE, 2014), sendo isso necessário para o enfrentamento de problemas já conhecidos e situações novas que afetam o processo educacional.

Material e métodos

O estudo de aula como terceiro espaço formativo, ou espaço formativo alternativo é nosso objeto de estudo nesse trabalho. Mas para essa discussão, faltaria espaço para um número maior de aulas, motivo pelo qual realizamos um recorte, do que foi feito a cerca das aulas de um componente curricular, ofertado de forma remota, em que se discutiu o pensamento algébrico e as ferramentas digitais para o ensino de Matemática.

Deste modo, nesse trabalho, que representa uma ação inicial de um projeto de investigação sobre as contribuições do Estudo de Aula na formação inicial do professor de matemática, contou com a participação de três professores formadores atuantes no curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal localizada no oeste da Bahia, sendo dois da área de Educação Matemática e um da área de Matemática. Além, dos formadores, participaram vinte licenciandos matriculados nos componentes: Tópicos de Ensino Fundamental II (14 estudantes) e Tópicos em Educação Matemática III (13 estudantes). Sete estudantes estavam matriculados em ambos componentes, que compuseram a grade curricular de disciplinas optativas da área de Educação Matemática. Nesse artigo, discutimos, a partir de excertos da percepção de alguns dos sete estudantes que cursaram os dois componentes curriculares sobre o estudo de aula e o pensar algebricamente, como o estudo de aula , aqui adaptado, configura um terceiro espaço formativo.

A aula discutida aqui, referiu-se as apreensões das leituras sobre dois artigos que tratavam da busca por um consenso sobre o conceito de pensamento algébrico, na qual propôs-se a construção de uma nuvem de palavras pelos estudantes de Tópicos de Ensino Fundamental II. Diante do exposto, na sequência apresentamos nossas análises a partir do estudo da referida aula, o planejamento, e as contribuições dos estudantes na condição de pesquisadores em formação sobre as próprias práticas e as práticas dos professores formadores na concepção e condução da aula sobre o conceito de pensamento algébrico.

Com efeito, nessa fase do estudo, não participaram professores da educação básica, ou formadores de outras instituições, o que está previsto para a continuidade do desenvolvimento da investigação. Na figura 1, apresentamos o plano de curso do componente Tópicos do Ensino Fundamental, o qual será objeto de análise por meio da aula sobre pensamento algébrico com a produção de nuvens de palavras.

UNIVERSIDADE FEDERAL
Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias

PLANO DE ENSINO

SEMESTRE SUPLEMENTAR I - 2020

Disciplina: Metodologias ativas direcionadas ao pensamento algébrico

Docentes:

C,H.: 50 h - 60h/a

Horário das aulas: A definir

Ementa

Metodologias ativas de aprendizagem matemática. Aprendizagem criativa. Metodologias ativas com uso de tecnologias digitais e potenciais usos na álgebra escolar. Tecnologias digitais e personalização do processo de aprendizagem. Plataformas para ensino remoto (Google sala de aula). Pensamento algébrico. Tópicos de Álgebra do Ensino Fundamental e a construção do pensamento algébrico. Tarefas com tópicos de álgebra: equações, desigualdades, funções, relações utilizando metodologias ativas.

Objetivo Geral:

Estudar referenciais teóricos sobre metodologia ativas de aprendizagem e possíveis contribuições para construção do pensamento algébrico no Ensino Fundamental.

Figura 1 - Plano de ensino do componente curricular Tópicos de Ensino Fundamental II

Fonte: Arquivo dos autores (2020)

Como pode ser visto no recorte do plano de ensino da figura acima, especificamente na sua ementa, foram três os aspectos mais relevantes abordados que se constituiu como nossa intenção didática: metodologias ativas, pensamento algébrico e tecnologias digitais. No entanto, o foco dos licenciandos desde o inicio foi compreender o que era pensamento algébrico, isso se revelou desde o primeiro contato com a classe, e provocou uma alteração na abordagem que seria dada, após estudos entre os três professores formadores.

Na figura 2, apresentamos o ambiente Google Classroom que norteou a ressignificação da proposta para uma convergência com o componente Tópicos de Educação Matemática III, cujo objeto era estudar o Lesson Study. Nas discussões mostraremos alguns pontos que destacaram-se nessa primeira parte da investigação a partir de nossa prática pedagógica, que afirmamos ser nossa no sentido de não ser construída sem os licenciandos.

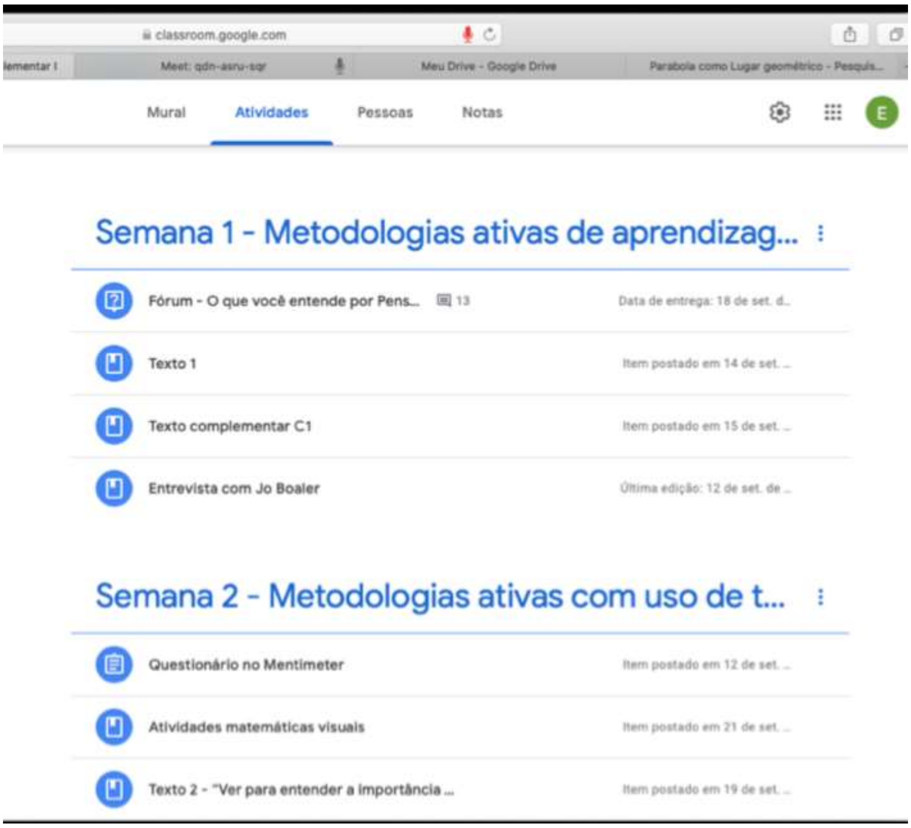


Figura 2 - Fórum no AVA (Google Classroom) sobre pensamento algébrico

Fonte: Arquivo dos autores (2020)

Como pode ser visto na figura acima, foi proposto um fórum que permitiu percebermos as primeiras impressões sobre o que os estudantes compreendiam sobre pensamento algébrico. Desse fórum destacamos aqui dois excertos, mas vale ressaltar que todos os comentários foram importantes na etapa de replanejar a aula:

Professora formadora:
Vou iniciar questionando: Qual é uma das principais características da Matemática? Melhor: como os matemáticos chegaram a definir uma lei geral, por exemplo, para uma função exponencial? Foram necessárias muitas observações de alguns fenômenos para se chegar a uma generalização. A existência de determinados padrões de comportamento em diferentes situações é intrigante e levou muitos matemáticos a modelar situações usando uma linguagem própria.......
Encontre nessa fala duas palavras importantes e constantes quando se fala em pensamento algébrico....
Licenciando:
Compreendo que o pensamento algébrico sejam conceitos utilizados tanto na escola como fora dela, não tendo uma formalidade necessariamente. Possui uma representação simbólica envolvendo números desconhecidos, variáveis e etc.. seria um conjunto de diversas análises matemáticas para a resolução de inúmeros problemas.
As duas palavras importantes citar quando se fala em pensamento algébrico, seriam generalização e padrão!

Do excerto acima, que exemplifica as compreensões da classe, vimos no estudo da aula em que socializamos os comentários do fórum, a necessidade de planejar novamente a aula, o que é uma etapa do estudo de aula. Nos resultados e discussão apresentamos um recorte do plano, da aula replanejada. Esse, é nosso principal instrumento para discutir aspectos do estudo de aula nessa prática formativa de futuros professores de Matemática, e que pode revelar aspectos importantes para argumentarmos sobre o fato de o estudo de aula com a participação dos licenciandos ser um terceiro espaço formativo para a formação docente em Matemática.

Ademais, a investigação em curso apresentada nesse artigo, é de abordagem qualitativa, e assim é compreendida mais como uma postura do que conjunto de procedimentos metodológicos, ou seja, é uma postura de diálogo com o objeto de estudo (FERNANDES; GARNICA, 2020). Portanto, há uma preocupação com a interpretação dos fenômenos educacionais referentes ao processo de formação docente em contexto de estudos de aulas.

A primeira etapa do estudo, não apresentada nesse manuscrito em sua integra, envolveu uma revisão de literatura, para melhor delineamento dos recortes de estudos que seriam feitos inicialmente sobre as práticas docentes dos formadores. Serviu para identificar, por exemplo, se já haviam estudos em andamento sobre o Lesson Study enquanto terceiro espaço formativo, da mesma maneira que pode ser encontrado sobre programas de iniciação a docência e as formações a nível stricto sensu. A segunda etapa, consistiu no estudo a priori das aulas dos competentes curriculares, para posteriores ressignificações, replanejamentos e análises a posteriori.

Quanto aos métodos, utilizamos a análise documental quando recorremos aos planos de ensino, de aula e o ambiente virtual de aprendizagem, onde estão alguns registros das produções realizadas durante o período letivo analisado. Para os demais pontos a serem analisados, utilizamos uma abordagem interpretativa (FERNANDES, GARNICA, 2020), cujas narrativas produzidas, podem se aproximar daquilo que é normalmente prescrito no Lesson Study, enquanto metodologia de investigação sobre a formação e prática docentes.

Resultados e discussões

O que necessariamente credencia o estudo de aula como terceiro espaço formativo? Nossa tentativa é responder a essa questão secundária a partir de aspectos da prática confrontados com as noções teóricas que já discutimos nas seções anteriores. Mas vamos antes de prosseguir com essa tarefa, apresentar um quadro em que os principais aspectos do Lesson Study e dos espaços híbridos de formação docente são destacados.

Quadro 1 - Características da Lesson Study e Terceiro espaço formativo

Lesson Study	Terceiro espaço formativo
Formação centrada na prática	Valorização dos conhecimentos produzidos na escola e na universidade
Preocupação com a aprendizagem docente e desenvolvimento profissional	Relação equilibrada e dialética entre conhecimentos teóricos e práticos.
Estudo da prática em sala de aula	Alternativa ao formato de formação docente aplicacionista
Ocorre essencialmente via colaboração	Criação de novas culturas profissionais baseadas na colaboração

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

A partir da síntese das características apresentadas no quadro acima, apontamos um primeiro elemento que chamaremos de credenciador da proposição que discutimos nesse artigo, a saber: a não convencionalidade do espaço-tempo para formação docente.

Uma das justificativas para tal é que a hierarquização dos papeis do envolvidos no processo ensino-aprendizagem no componente curricular em jogo, tende a ser nula, mas espera-se que seja de fato, a medida em que, os atores envolvidos se aproximam e vivenciam o estudo de aula e o compreendem como um espaço de formação. Outra justificativa plausível é que ao menos no contexto em que foi experimentado (ensino remoto), aproxima-se a teoria da prática de forma conjunta (ZEICHNER, 2010), o que de certa maneira é também fator que altera os papeis de formadores e licenciados, e tem potencial para construir um novo contrato a ser experimentado nas etapas vindouras da pesquisa com a escola básica e seus atores.

O segundo elemento é a característica de grupo de colaboração. Como já discutimos anteriormente, a colaboração é essencialmente a alma da Lesson Study enquanto metodologia de investigação, de formação e desenvolvimento profissional (TAKAHASHI; YOSHIDA, 2004), e também o é para as ideias propostas por Zeichner (2010) no caso dos espaços híbridos de formação docente. Mas é então o caráter colaborativo do estudo de aula, experimentado como metodologia de ensino e pesquisa pelos formadores, o que torna-o um espaço híbrido formativo capaz de mitigar as dicotomias denunciadas na literatura, como a da teoria e prática? Bem, precisamos ser cautelosos neste ponto, pois a experimentação do Lesson Study não ocorreu nessa primeira etapa da nossa investigação, com envolvimento dos profissionais da Educação Básica.

Essa é a razão inclusive para não classificarmos essa investigação como colaborativa, pois apesar de já termos um grupo com participação voluntária de pessoas envolvidas com o processo educacional nos diferentes níveis, o caráter colaborativo não integrou essa primeira etapa da pesquisa. Contudo, no que tange a dicotomia teoria e prática pode-se dizer que o estudo colaborativo é uma importante ferramenta de enxergar possibilidades dessa relação ser mais efetiva, do ponto de vista das contribuições para aprendizagens de conhecimentos teórico-práticos que o futuro professor necessita.

No que concerne ao estudo da aula sobre pensamento algébrico, apontamos as seguintes características sintetizadas no quadro 2. Mas, vale ressaltar que nos estudos prévios de construção do componente curricular, cuja ementa era livre, pensávamos não ser um problema a abordagem do tema pensamento algébrico, daí nosso objeto seria pensar meios para desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes na Educação Básica.

Nesse ponto, podemos apresentar um recorte do replanejamento da aula sobre pensamento algébrico. Não quanto ao objetivo da aula, mas quanto a estratégia metodológica para discussão dos textos básicos, que precisa ser compatível com as ferramentas utilizadas na aula, e na própria essência do componente curricular (métodos ativos de aprendizagem e uso de tecnologias digitais). Assim, o método utilizado na aula passou de discussão livre das principais ideias do texto, que se tornou um fator limitante das práticas discentes, para construção e socialização de uma nuvem de palavras, um método mais ativo de aprendizagem. Foi orientado que as nuvens fossem construídas no

Quadro 2 - Características do estudo da aula sobre pensamento algébrico

Aspectos da aula	A priori Planejamento pré-experimentação	A posteriori Planejamento pós-experimentação
Objeto da aula	Estudantes de Matemática tinham desenvolvido ao longo de sua vida estudantil na EB, uma forma consensual de pensar algebricamente	Assim como na literatura, na prática os licenciando não têm clareza do que constitui o pensar algebricamente, e existem lacunas no seu pensar.
Estratégia metodológica	Discussão teórica e análise de situação de aula/situação-problema	Discussão teórica a partir da elaboração de uma nuvem de palavras
Avaliação	Participação dos estudantes em debate e argumentos utilizados na discussão sobre situação em análise	Argumentação e articulação das principais ideias relacionadas ao pensamento algébrico

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

Nas etapas do processo de estudo da aula, os três formadores atuaram na seleção e análise das especificidades do conteúdo da aula (pensamento algébrico) e as dificuldades dos estudantes. Se faz necessário um parênteses nesse ponto. No estudo a posteriori foi possível visualizar que uma lacuna importante e que necessariamente precisa ser mitigada é a do nível em que se encontra o pensamento algébrico dos licenciandos. De forma geral, está relacionado as incógnitas e a resolução de equações, de certo modo podemos dizer que o foco está nos objetos da Álgebra, mesmo assim de forma limitada. A identificação das dificuldades, é portanto um aspecto decisivo no estudo de aula, porque norteará o fazer docente e diz muito a respeito de aprendizagens que são essenciais ao professor como a de avaliar e ressignificar a difusão dos conhecimentos matemáticos.

Além das etapas já mencionadas, a própria análise a priori do quadro 2, já dá pistas da definição de objetivos, bem como do planejamento das fases da aula e da elaboração de tarefas, como etapas naturais de uma aula e essenciais no estudo de aula. Há que se fazer outro destaque sobre tais etapas. Na investigação relatada aqui, não foi determinado entre os formadores e estudantes, quem seria observador, ou docente, ou pesquisador, havia uma quebra de contrato em relação ao que normalmente se espera numa investigação com experimentações didáticas como parte do método. A condução da aula, a observação e as análises essencialmente era tarefa dos três formadores e naturalmente foi para alguns estudantes que cursavam os dois componentes curriculares, conforme já mencionado na seção anterior.

As etapas seguintes, de implementação da aula e observação pelos participantes do grupo de trabalho da ação dos professores que foram co-responsáveis pelo desenvolvimento da aula e dos estudantes durante a aula, têm por sua vez, o papel de apontar diagnósticos importantes sobre aprendizagem tanto docente quanto dos estudantes, nesse caso de futuros professores de Matemática. Foi exatamente nessas etapas que identificamos primeiro que haviam lacunas quanto o que significava pensar algebricamente e no próprio desenvolvimento do pensamento dos estudantes. Segundo, que diante do formato remoto e todas as barreiras que são impostas por esse, seria necessário avançar para as etapas seguintes, tendo em vista que as estratégias e recursos a serem utilizados, precisariam de compatibilidade com o ambiente não fisico em que as aulas ocorriam.

Nesse contexto, é que se apresentou a etapa de revisão do planejamento e da execução da aula, com reelaboração das estratégias metodológicas, reelaboração esta, que implicou na mudança de foco de todo restante do curso, o que provocou uma assimetria entre os principais pontos do componente: metodologias ativas, tecnologias digitais e pensamento algébrico, pendendo-se a trabalhar com o desenvolvimento desse último. As reuniões da pesquisa, tornaram-se naturalmente o primeiro espaço de estudo das aulas, e umas das principais ações era analisar em que medida ocorria aproximação ou distanciamento entre o que se planejava e o que de fato era realizado nas aulas.

Uma vez que se apresentava o objetivo da aula, e uma especie de síntese do planejamento dessa aos futuros professores, ocorria uma expansão do estudo da aula, agora de forma coletiva envolvendo os estudantes, o que pode ser apontado como uma forma de atuar no processo de desenvolvimento profissional. Expandiu-se dessa maneira, o espaço-tempo da formação, que de forma não convencional colocava o licenciando no papel de estudante, co-professor e pesquisador.

Na avaliação feita por um estudante no que podemos dizer que se tratou de uma aproximação do estudo de aula, foram apontados aspectos que resultaram na etapa de replanejamento, e consequentemente uma nova implementação. Dentre o que foi apontado pelo estudante destaca-se:

Licenciando: a discussão oral, destacando juntamente com os estudantes os termos mais importantes que aparecem com mais frequência nos textos sobre o Pensamento Algébrico, tem como um dos meios de avaliar a aprendizagem a participação e interação, ou seja, os alunos teriam que ler os textos e expor suas ideias de forma oral destacando/circulando/grifando no texto as principais palavras envolvendo a álgebra, talvez isso não seja suficiente para esse modelo de ensino remoto.

A revisão do planejamento implicou numa estratégia diferente para discussão dos conceitos de pensamento algébrico, que estão longe de serem consensuais (ALMEIDA; SANTOS, 2017). Para os formadores, reflexão sobre a necessidade de mudar a prática ensejando a aprendizagem conceitual dos licenciados, para os estudantes mudar a prática, alterando a relação desses com os objetos de conhecimentos. É importante ressaltar que em outras aulas, houve tentativa dos formadores de diagnosticar o pensar dos estudantes por meio de problemas/tarefas que evocavam soluções criativas, visuais, abertas, mas esses não contribuíram de forma eficaz a curto prazo para compreensão do objeto da aula analisada.

No trabalho de Almeida e Santos (2017), encontramos três concepções mais gerais sobre pensamento algébrico encontrados na literatura: (I) construção de significados para os objetos da Álgebra, atividade que do processo de generalizações de resultados de conjecturas sobre dados e relações matemáticas por meio do uso de uma linguagem formal (KAPUT, 2008); (II) relação com as estruturas e uma variedade de representações que possibilitam manipular situações quantitativas de forma relacional (KIERAN, 1992; KAPUT, 2008); (III) uma maneira de produzir significado para Álgebra (LINS, 1992; ARCAVI, 2005).

Na figura 3 apresentamos um exemplo de nuvem de palavras elaborada por um dos licenciados e os conceitos como foram compreendidos por ele, para cada palavra da nuvem. Vale destacar que quanto maior a palavra, maior o grau de relevância dela no que se refere a ideia em jogo. Além disso, no planejamento da aula e dessa tarefa em si, ensejamos a reflexão sobre a prática dos estudantes, suscitadas pela análise da relação deles com objetos, relações e os significados atribuídos quando se estuda álgebra.

Figura 3 - Nuvem de palavras para conceito de pensamento algébrico

Fonte: Arquivos dos autores (2020)

A referida nuvem foi apresentada pelo estudante acompanhada dos significados de cada palavra, como pode ser visto a seguir:

1 Álgebra

Escolhi essa palavra por ser uma das mais importantes do texto e por despertar minha curiosidade em procurar o significado dela. Álgebra é a união do estudo de equações, metodologia de resoluções, estruturas matemáticas, assim como, utilização do processo de soma, subtração, multiplicação e divisão com símbolos.

2 Aritmética

Percebi que conhecia o conceito mas não sabia que estava relacionado com essa palavra em especificamente. A aritmética também usa o processo de adição, subtração, multiplicação, divisão, assim como, radiciação, fatoração, racionalização, potencialização e logaritmação. É a principal área matemática justamente por envolver todas essas operações, que são utilizadas no dia a dia, e por está presente desde a educação inicial do estudante.

3 Raciocínio

Raciocínio matemático é fundamental para compreensão e análise dos problemas aritméticos por isso a escolha da palavra. É um recurso importante que serve para interpretação, explicar e resolver exercícios matemáticos, geométricos.

4 Equação

Escolhi essa palavra porque vejo muitas vezes na área da matemática e o conceito que aprendi pode ser bastante raso. É uma expressão algébrica que contem uma ou mais incógnita e uma igualdade para encontrar um resultado/soluções de um problema.

5 Inequação

Tinha esquecido o significado dessa palavra e seu uso, por isso a escolha dela. Tem o objetivo de expressar desigualdades usando símbolos de maior que, menor que, menor ou igual, maior ou igual.

6 Generalização

A generalização na matemática serve para encontrar e deduzir uma formula, uma estratégia que se encaixe na resolução de um problema aritmético, algébrico, etc. É preciso demonstrar essa generalização para que tenha vericidade.

7 Função

Uma palavra importante no texto que achei importante também. A função é fundamental para determinar, modificar diferentes elementos de diferentes conjuntos. Existem diversos tipos de funções para as mais variadas situações (Função linear, de primeiro grau, segundo grau, constante e etc). Vemos funções principalmente no mercado, ao comprar uma certa quantidade o preço pode subir ou aumentar.

8 Padrão

Essa palavra me chama atenção que tanto na matemática e na vida em si, existem padrões, coisas que se repetem e segue uma ordem. Comparando padrões é possível identificar, analisar e refletir sobre as mudanças nos meios e resultados que eles apresentam. Pode ser também o uso de ideias, símbolos para representar, manipular, criar/formular e simplificar os problemas matemáticos.

9 Contextual

O que eu entendi desse pensamento contextual é que ele está relacionado á expressão de relações com base na linguagem natural (junto com simplicidade, gestos, símbolos e sinais não convencionais) e o contexto.

10 Factual

Vem antes do processo contextual e está relacionado com os mecanismos de percepção, coordenação de gestos, palavras e símbolos.

11 Conjectura

Essa palavra eu não conhecia, por isso escolhi colocar ela aqui. Significa o ato de deduzir algo com base em evidencias, hipóteses.

(Significados atribuídos às palavras da nuvem por um estudante da licenciatura)

Numa outra situação em que os estudantes se aproximam da ideia de estudo de aula, o mesmo licenciando citado acima, pontua aspectos que demonstram um possível acerto na estratégia adotada para discussão do tema. Primeiro ele avalia o aplicativo sugerido e na sequência fala da importância da atividade proposta.

Licenciando:
O infogram é um aplicativo gratuito que permite criar nuvens de palavras, ou seja, é uma representação visual com palavras-chaves sobre um determinado tema apresentado em sala de aula, além disso, é fundamental para sinalizar termos de maiores importância em relação às leituras sugeridas e de fácil manipulação.

Quanto a estratégia adotada o estudante argumenta:
A *dinâmica da nuvem de palavras utilizada no Componente Curricular (CC) Tópicos de Matemática do Ensino Fundamental II foi importante para compreender e discutir fatores sobre o Ensino e a Álgebra durante esse período remoto, com o objetivo de relacionar com outras áreas de conhecimento, proporcionando assim, uma aprendizagem construtiva enquanto estudante em processo de formação inicial.*

Observe-se que o estudo da aula está pautado num modelo de auto-avaliação feita por esse estudante, que não chega a sugerir algo que possa integrar um possível replanejamento, nem fala sobre a prática dos formadores na condução dos trabalhos, o que diz muito sobre a ideia de hierarquização ainda forte nas práticas desses futuros professores.

Por conseguinte, ao analisar não somente a nuvem mas os significados atribuídos, percebemos que há na estratégia adotada na aula em tela, potencial de reconstrução das práticas, no sentido de atribuir razão de ser ao estudo dos objetos do conhecimento propostos na aula. O que o estudante revela na sua fala, é que comumente estudamos alguns pontos relacionados aos domínios matemáticos, mas nem mesmo sabemos o que significam. Na prática, o estudante destaca e concordamos com ele, que antes de discutirmos o que significa pensamento algébrico, precisamos compreender o que a Álgebra representa em nossas práticas.

A análise após a implementação dessa aula em que se utilizou a construção de uma nuvem de palavras, nos remete a pensar sobre o que fica para o estudante, que em alguns anos será professor, refletir sobre as dificuldades para aprender objetos da álgebra, ou mesmo conceituar o que significa pensar algebricamente, além das possibilidades de reflexões sobre outros planejamentos de aulas que deem conta das dificuldades levantadas durante a observação na implementação da aula em questão.

A participação dos formadores no estudo de aulas constituí-se como processo de desenvolvimento profissional em dois aspectos. Um é o auto-desenvolvimento, pois remete os formadores ao lugar de estudantes. O outro, é que atua no desenvolvimento profissional dos futuros professores, que vivem na prática um estudo de aula em grande grupo (toda a classe) a medida em que a aula ocorre, e desse modo tais práticas tornam-se objeto do que tem sido chamado de currículo oculto, ou seja, o futuro professor aprende com os exemplos.

Além disso, considerar o estudo de aula como terceiro espaço formativo, implicou na reunião do conhecimento prático de analisar uma aula em que se assume ao mesmo tempo o papel de estudante e observador, significou nova oportunidade de aprendizagem para esses futuros professores em formação, a medida em que, os aproximou de um espaço mais igualitário entre os participantes.

Conclusões

A principal característica do estudo de aula que o torna um terceiro espaço formativo na formação inicial de professores de Matemática, é a minimização dos efeitos da dicotomia teoria e prática, que pôde ser percebida por um estudo de aula adaptado, que preferimos chamar de aproximação com essa metodologia.

No que tange as limitações do estudo em sua fase inicial, podemos apontar a essência da pesquisa. Ensejamos que seja colaborativa, mas na primeira etapa, não conseguimos atuar num principal ponto para que ela assim seja reconhecida, ou seja, que aquelas pessoas que voluntariamente se aproximaram do grupo que instituímos para estudos dos processos educacionais e sobre a formação docente, integrem a investigação e que de fato possamos superar a dicotomia universidade e escola.

Em virtude disso, um caminho natural para continuidade da pesquisa é por em prática a colaboração no grupo de estudo de modo que investiguemos as possíveis contribuições de praticas colaborativas na formação inicial num curso de licenciatura em Matemática, para então melhor apresentarmos argumentos que credenciem o estudo de aula como terceiro espaço formativo.

Referências

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: **Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática.** Caminha, Portugal, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-bibliografia.htm. Acesso em 20/08/2020.

ALMEIDA, J. R; SANTOS, M. C. Pensamento algébrico, em busca de uma definição. Revista paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, Pr, v.6, n.10, p.34-60, jan.-jun. 2017.

BORGES, M. **Professores**: imagens e auto-imagens. (Tese) Doutorado em Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

FERNANDES, F. S.; GARNICA, A. V. M. Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática: éticas e políticas na inserção de novos sujeitos, cenários e conhecimentos. **Perspectivas da educação Matemática** - INA/UFMS. v.14, n.34, 2020.

FIORENTINI, D., RIBEIRO, M., CRECCI, V. M., VIDAL, C. P., LOSANO, A. L., FERRASSO, T.O. Estudo de uma experiência de Lesson Study híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação. Painel. Eixo 3 – Subeixo 2: Didática na formação de professores para a educação básica e ensino superior. XIX Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino ENDIPE. Salvador, Bahia. 03 a 06 de setembro de 2018.

GAMA, R. P.; FIORENTINI, D. Formação continuada em grupos colaborativos: professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.11, n.2, pp.441-461, 2009.

GONÇALVES-JÚNIOR, M. A.; BURIASCO, R. L. C. Professor de Matemática e a produção de saberes sobre a gestão curricular. **Ciência & Educação**, Bauru - SP, v. 12, n. 1, p.99-115, 2006.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KIERAN, C. **The learning and teaching of school algebra. Handbook of research on mathematics teaching and learning**. National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, New York, 1992.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

PALANCH, W. B. L.; MARINQUE, A. L. Ações colaborativas universidade - escola: formação de professores que ensinam matemática em espaços colaborativos. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 10, n. 2, p. 188-202, 2016.

PERRY, R., LEWIS, C. What is successful adaptation of lesson study in the US? **Journal Educational Change**, v.*10*, pp. 365-391, 2009.

PONTE, J. P. Formação dos professores de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, pp.343-360.

PONTE, J. P. Lesson studies in initial mathematics teacher education. **International Journal for Lesson and Learning Studies***,* v. 6, n. 2, pp.1-14, 2017

PONTE, J. P., QUARESMA, M., MATA-PEREIRA, J., & BAPTISTA, M. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. *30, n.* 56, pp. 868-891, 2016.

RICHIT, A., PONTE, J. P.La Colaboración Docente en Estudios de Clase en la Perspectiva de Profesores Participantes. **Revista Paradigma**, v. 37, n. 1, p. 330 – 351Junio de 2017.

ZEICHNER, K. Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. **Educação**, Santa Maria, v. 35, n. 3, p. 479-504, set./dez. 2010.

TAKAHASHI, Y. & YOSHIDA, M. Ideas for Establishing: Lesson Study Communities. Teacher Children Mathematics. p. 8. NTCM. Mai. 2004.

Autores:

Ana Maria Porto Nascimento
Licenciada em Matemática pelo Centro Universitário de Brasília - UNICEUB.
Doutora em Educação pela Universidade de Brasília - UNB.
Atualmente é professora na Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB.
Tem experiência na área de Educação Matemática e Estágio supervisionado.
Correio eletrônico: ana.nascimento@ufob.edu.br
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2048-5554

Edmo Fernandes Carvalho
Licenciado em Matemática pela Universidade Católica do Salvador - UCSAL
Doutor em Ensino , Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia - UFBA e Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS.
Atualmente é professor na Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB.
Tem experiência na área de Educação Matemática e Estágio supervisionado.
Correio eletrônico: edmo.carvalho@ufob.edu.br
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6959-2652

Priscila Santos Ramos
Graduada em Bacharelado em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC.
Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade de Campinas - UNICAMP.
Atualmente é professora na Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB.
Tem experiência na área de Matemática, Análise e Física matemática.
Correio eletrônico: priscilasr@ufob.edu.br
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3394-764X

Como citar o artigo:

NASCIMENTO, A. M. P; CARVALHO, E. F.; RAMOS, P. S. Estudo de aula na formação docente inicial em Matemática: criação de um terceiro espaço formativo. **Revista Paradigma**. Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de formação, ensino e aprendizagem em Educação Matemática na contemporaneidade, pp. 68-91, entro, 2022. DOI: 10.37618

Prácticas de formación para profesores desde los primeros años convertidas al desarrollo del pensamiento algebraico

Fernanda Cristina Ferreira Santos
fecristy@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0001-8293-4592
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)
Guarulhos, Brasil.
Vanessa Dias Moretti
vanessa.moretti@unifesp.br
https://orcid.org/0000-0003-2435-5773
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)
Guarulhos, Brasil.

Recibido: 10/junio/2021 **Aceptado:** 10/septiembre/2021

Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar prácticas de formación contínua desarrolladas con profesores polivalentes de los años iniciales de la Enseñanza Fundamental en una escuela pública. Tales prácticas se fundamentan en la perspectiva Histórico-Cultural y tienen como objetivo el desarrollo del pensamiento algebraico, entendido como pensamiento teórico en el campo de conocimiento algebraico. El proceso de formación se desarrolló en el contexto de una acción de extensión vinculada a una investigación de maestría y fue organizado teniendo como base teórico- metodológica la Actividad Orientadora de Enseño, lo que implicó considerar en los procedimientos la colectividad y los procesos de análisis y síntesis en la solución de situaciones desencadenantes que problematizaron algunos vínculos conceptuales de álgebra. El análisis de los datos muestra pistas de desenvolvimiento del pensamiento algebraico de los profesores revelando una aproximación de significados sociales del objeto de conocimiento en pregunta y también un mayor nivel de conciencia en relación a su praxis pedagógica como desencadenantes del aprendizaje del alumno. Concluye que las prácticas formativas desenvolvidas, al considerar los procesos colectivos de solución de situaciones desencadenantes envolviendo algunos vínculos conceptuales de álgebra favorecieron el desenvolvimiento del pensamiento algebraico de los profesores por medio de la abstracción, generalización y formación de conceptos algebraicos, bien como permitieron el reencuadre y reorganización de la enseñanza de la matemática y, particularmente, de álgebra para los años iniciales de la Enseñanza Fundamental.

Palabras clave: Formación de profesores. Actividad Orientadora de Enseñanza. Pensamiento Teórico. Pensamiento Algebraico. Teoría Histórico-Cultural.

Práticas de formação para professores dos anos iniciais voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar práticas de formação continuada desenvolvidas com professores polivalentes que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma escola de rede pública. Tais práticas estão fundamentadas na perspectiva Histórico-Cultural e têm em vista

o desenvolvimento do pensamento algébrico, entendido como pensamento teórico no campo de conhecimento algébrico. O processo de formação se deu no contexto de uma ação de extensão vinculada a uma pesquisa de mestrado e foi organizado tendo como base teórico-metodológica a Atividade Orientadora de Ensino, o que implicou considerar nos procedimentos a coletividade e os processos de análise e síntese na solução de situações desencadeadoras que problematizaram alguns nexos conceituais da álgebra. A análise dos dados apresenta indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico dos professores revelando uma aproximação das significações sociais do objeto de conhecimento em questão e um maior nível de conscientização em relação à sua práxis pedagógica como desencadeadora da aprendizagem do aluno. Conclui-se que as práticas formativas desenvolvidas, ao considerarem os processos coletivos de solução de situações desencadeadoras envolvendo alguns nexos conceituais da álgebra favoreceram o desenvolvimento do pensamento algébrico dos professores por meio da abstração, generalização e formação de conceitos algébricos, bem como permitiram a ressignificação e reorganização do ensino da matemática e, particularmente, da álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental.
Palavras-chave: Formação de professores. Atividade Orientadora de Ensino. Pensamento Teórico. Pensamento Algébrico. Teoria Histórico-Cultural.

Training practices for teachers in the early years focused on the development of algebraic thinking

Abstract

This article aims to present training practices of continuing education developed with multipurpose elementary school teachers in a public school. These practices are based on the Historical-Cultural perspective and aim at the development of algebraic thinking, understood as theoretical thinking in the field of algebraic knowledge. The training process took place in the context of an extension action linked to a master's research and was organized on the theoretical-methodological basis of the Teaching Orientation Activity, which implied considering in the procedures a collectivity and the processes of analysis and synthesis in the solution of triggering situations that problematized some conceptual nexus in algebra. The analysis of the data reveals evidence of the development of the algebraic thinking of the teachers, revealing an approximation of the social meanings of the object of knowledge in question and also a greater level of awareness in relation to their pedagogical praxis as a trigger for student learning. Concludes that the training practices developed, when considering the collective processes for the solution of triggering situations involving some conceptual nexus of algebra, favoured the development of algebraic thinking of teachers through abstraction, generalization and formation of algebraic concepts, as well as allowed the re-signification and reorganization teaching mathematics and algebra for the particularly early years of elementary school.
Keywords: Teacher training. Teaching Orientation Activity. Theoretical thinking. Algebraic thinking. Historical-Cultural Theory.

Introdução

A formação docente é um tema que vem fomentando diversos movimentos de pesquisa que refletem a variedade de perspectivas e contradições que permeiam tal temática. Há mais de duas décadas Nóvoa (1999) já apontava uma contraposição entre a abundância em discursos voltados à profissão docente e seu papel, com a pobreza de políticas educativas, ineficiências nos programas de formação e a proletarização dessa profissão.

Curi (2021) reflete sobre o processo formativo do professor que ensina matemática nos anos iniciais e salienta que já a formação inicial deste profissional apresenta contradições, sobretudo relacionadas à desvalorização do conhecimento matemático neste processo, bem como ao "mito de que o conhecimento comum sobre a aritmética basta ao professor para atuar nos anos iniciais do Ensino Fundamental" (CURI, 2021, p.1).

No âmbito da formação continuada de matemática desses mesmos professores, Esteves e Souza (2017) apontam para a necessidade de superação de modelos reprodutores e tecnicistas que muitas vezes permeiam esse processo formativo e acabam por fortalecer a resistência à matemática e reproduzir um ensino pautado em práticas procedimentais repetitivas e de memorização.

Nesse viés, emerge a necessidade de práticas de formação que preconizem a unidade entre teoria e prática e valorizem o aspecto coletivo, a fim de promover autonomia e conscientização sobre sua práxis num movimento de apropriação dos conhecimentos matemáticos intrinsicamente relacionado ao processo de organização do ensino da matemática para os anos iniciais.

Tomando esse contexto desafiador que contempla a elaboração de práticas de formação docente, em particular, em Educação Matemática, diante de dificuldades e contradições inerentes a esse processo, desenvolvemos uma pesquisa de mestrado (SANTOS, 2020) que investigou, no ambiente da formação continuada, o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores de forma articulada ao movimento de organização do ensino da matemática, e particularmente da álgebra, para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Mediante a isso, nos propomos apresentar neste texto, práticas de formação docente fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural (THC) que, ao considerarem as condições objetivas dessa formação na contemporaneidade, possam contribuir com o pensamento teórico do professor no campo de conhecimento algébrico, ou seja, o pensamento algébrico, em articulação com seu movimento de organização e ressignificação do ensino da álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental (SANTOS, 2020).

Constituição do trabalho docente na perspectiva histórico-cultural

Uma dificuldade inerente ao longo processo de constituição da profissão docente foi a propagação, infelizmente algumas vezes ainda presente, da dicotomização entre a teoria e prática na atividade docente. Segundo Roldão (2007, p.97), “a atividade de ensinar – como sucedeu com outras atividades profissionais – praticou-se muito antes de sobre ela se produzir conhecimento sistematizado” o que poderia justificar uma compreensão inicial de tal dicotomia, embora tais elementos, teoria e prática, devam ser compreendidos como indissociáveis no trabalho do professor.

Assim como todas as atividades humanas, a constituição da profissionalidade docente não se dá de modo natural ou neutro, mas intrinsecamente articulada às relações sociais estabelecidas pelo sujeito e atrelada aos modelos de formação a que estes profissionais são submetidos. No trabalho do professor dos anos iniciais, incumbido da responsabilidade de ensinar conhecimentos de diversas áreas, manifesta-se uma necessidade ainda maior de que este profissional tenha acesso a processos de formação continuada que potencializem o desenvolvimento de seu pensamento teórico sobre os objetos de conhecimento de modo articulado e indissociável ao seu movimento de organização do ensino. Torna-se fundamental, neste contexto, a promoção da autonomia e criticidade do professor de modo a promover mudanças no processo de educação escolar com vistas a transformar o sujeito e a realidade (CONTRERAS, 2002).

A Teoria Histórico-Cultural (THC), com base na abordagem histórico-dialética, compreende que o ser humano se constitui como tal por meio do trabalho, num processo em que transforma o meio e a si mesmo a partir de sua atividade. A atividade humana assim compreendida é determinada por um objetivo, uma intencionalidade que aspira satisfazer às necessidades humanas, superando os aspectos biológicos e passando a contemplar aqueles individual ou socialmente criados (LEONTIEV 1978, 1983, 1988). Assim, o que caracteriza a atividade humana é a intencionalidade, ou seja, por meio da atividade o homem busca concretizar um objetivo idealizado anteriormente, num movimento em que o objeto e o motivo de sua atividade coincidem.

Compreender a atividade dessa forma traz implicações para compreendermos o trabalho do professor. De acordo com Moretti (2007), a atividade de ensino é o trabalho do professor e a práxis, isto é, a atividade teórico-prática é a objetivação desta atividade. Como “toda práxis é atividade, mas nem toda atividade é práxis" (VÁZQUEZ, 1968, p. 185), vale salientar que para ser considerada como práxis, a atividade deve refletir a unidade entre teoria e prática na articulação entre o conhecimento de objetos da realidade e das condições e instrumentos potencializadores de transformação do sujeito e da vida social. Ao considerarmos a atividade de ensino como práxis, reconhecemos que ao ter como motivo da sua atividade criar condições para que os estudantes se apropriem dos conhecimentos científicos e culturais produzidos pela humanidade, o professor responde à sua necessidade de ensinar ao articular os objetivos de ensino, as ações, as operações e os instrumentos a serem utilizados neste processo. Na práxis, unidade teoria e prática, a constituição desses objetivos se dá de forma dialética, na medida em que o professor deve reestruturá-los continuamente, ao revisitar a teoria e compreendê-la com nova qualidade, no movimento constante de transformação da realidade diante das contradições da realidade. No caso da atividade de ensino, tais contradições esbarram, entre outros, nas condições de trabalho, remuneração e formação docente.

A práxis pedagógica, de acordo com Freire (2001), prevê a flexibilidade do professor em relação à constante transformação da realidade e da própria prática, já que, nas palavras do autor, "o aprendizado do ensinante ao ensinar se verifica à medida em que o ensinante, humilde, aberto, se ache permanentemente disponível a repensar o pensado [...]" (FREIRE, 2001, p.259). Nesse viés, cabe ao professor a organização do ensino unida dialeticamente à formação e ao desenvolvimento do aluno. Assim, à medida que organiza o ensino, o professor desenvolve-se por meio da apropriação de novos conhecimentos. De forma decorrente, compreendemos ser imprescindível que, nos momentos de formação docente, a apropriação de novos conhecimentos se dê tendo como referência a organização de práticas voltadas ao ensino, ou seja, na atividade de ensino constituída na unidade entre a teoria e a prática pedagógica.

Os processos formativos do professor em atividade de ensino

Assumir a atividade de ensino como um pressuposto para a formação docente implica em uma formação voltada para a mudança de prática, por meio de um processo de trabalho na coletividade, de interação entre os pares. "Esse caráter coletivo da atividade do trabalho é, substantivamente, aquilo que se denominará social" (NETTO, 2012, p. 34). É por meio do trabalho que a humanidade se constitui como tal e este processo contínuo de humanização, quando tomado na formação docente, permite considerar aspectos históricos e culturais que possam fomentar e subsidiar uma educação democrática e humanizadora aos sujeitos.

> Essa perspectiva de uma *educação humanizadora* não se limita à apropriação do conhecimento entendido como útil e nem à adaptação dos estudantes a uma realidade tida como inquestionável. Uma educação humanizadora é transformadora em sua essência. Transformadora de alunos, de professores e, consequentemente, da realidade. Entende-se, assim, que propiciar a todos os sujeitos uma educação de qualidade com o amplo desenvolvimento do pensamento teórico, que supere o senso comum, é condição dessa humanização [...] (MORETTI, 2007, p.176, grifo da autora).

Nesse contexto, emerge a necessidade de práticas de formação que viabilizem a atividade teórico-prática, em que o professor, num processo de desenvolvimento individual e coletivo, possa entrar em atividade de ensino e, com isso, ter condições de articular os conhecimentos teóricos ao movimento de organização do ensino. Num processo de planejamento consciente e intencional, o professor busca organizar situações que favoreçam o desenvolvimento do pensamento teórico de seus alunos. Nesse viés, os movimentos de formação continuada devem favorecer a reflexão sobre os modos de organização do ensino, com propostas que potencializem a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento teórico do professor sobre os objetos a serem ensinados.

> O desafio que se apresenta ao professor relaciona-se com a organização do ensino, de modo que o processo educativo escolar se constitua como atividade para o estudante e para o professor. Para o aluno, como estudo, e para o professor, como trabalho (MOURA et al., 2016, p.110).

Visando dar conta do desafio enunciado por Moura et al. (2016, p.110), propomos a realização de práticas de formação que objetivem o desenvolvimento do pensamento teórico do professor num contexto coletivo. Para isso, a pesquisa que desenvolvemos (SANTOS, 2020) tomou como base teórica e metodológica os conceitos de experimento formativo (CEDRO, 2004; DAVIDOV, 1988; VIGOTSKI, 2010a) e de Atividade orientadora de Ensino (MOURA, 1996, 2016).

O conceito de experimento formativo vem sendo bastante utilizado no contexto de pesquisas em formação de professores, sobretudo voltadas à educação matemática, tais como Sousa (2004), Moretti (2007), Panossian (2014), Zeferino (2016), Romeiro (2017), Santos (2020), e tem contribuído para as reflexões acerca de práticas de formação dos professores que ensinam matemática na medida em que pressupõe a intervenção direta do pesquisador/formador, de modo que o processo de coleta de dados seja articulado com a formação continuada do professor, buscando colocá-lo em atividade de ensino e corroborar sua práxis pedagógica. Tal conceito emerge das contribuições de Davidov (1988) e Vigotski (2010b), com base na ideia de experimento didático, "que tinha como objetivo o estudo do desenvolvimento das funções psicológicas superiores[1] durante o processo de escolarização" (CEDRO, 2008, p.105). No contexto da formação do professor, o experimento formativo pode contribuir substancialmente com o processo de desenvolvimento psíquico do sujeito e com a investigação deste fenômeno, na medida em que prevê ações intencionalmente planejadas pelo formador(a) e/ou pesquisador(a) voltadas à problematização e potencialização da coletividade no processo de apropriação e síntese dos objetos de conhecimento.

O aspecto coletivo da formação docente ganha, nesse referencial teórico, importância significativa uma vez que "é na relação dialética do inter para o intra que ocorrem as transformações psíquicas [...]" (ROMEIRO, 2017, p.82). Nesse sentido, entendemos que o conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) traz contribuições tanto para a promoção de práticas formativas voltadas ao desenvolvimento do pensamento teórico do professor no contexto do experimento formativo, quanto para a organização do ensino da matemática. De acordo com Moura (1996, p.4) a AOE configura-se como "o conjunto articulado da intencionalidade do educador que lançará mão de instrumentos e de estratégias que lhe permitirão uma maior aproximação entre sujeitos e objeto de conhecimento".

A AOE caracteriza-se como uma proposta teórico-metodológica orientadora do movimento de organização do ensino e articuladora entre a atividade do professor e a atividade do aluno, objetivando o processo de apropriação dos conhecimentos e científicos por meio do pensamento teórico.

> A AOE constitui-se um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento. Assim, o professor, ao organizar ações que objetivam o ensinar, também requalifica seus conhecimentos, e é esse processo que caracteriza a AOE como unidade de formação do professor e do estudante (MOURA et al., 2016, p.115).

[1] Funções psicológicas superiores, a partir das contribuições de Vigotski (2007), são compreendidas como "aquelas propriamente humanas e constituídas a partir do contexto histórico e social" (SANTOS, 2020, p.24).

A AOE se ancora no pressuposto da coletividade e a atividade do sujeito é objetivada por meio das interações e contribuições entre os pares. Ademais, ajudam a compor a AOE outros elementos como os recursos teórico-metodológicos, a análise e síntese coletiva, a ludicidade e a interação, tendo em vista o desenvolvimento coletivo de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem voltadas ao desenvolvimento do pensamento teórico do sujeito. Para a elaboração da Situação Desencadeadora de Aprendizagem, a AOE propõe que se considere a síntese histórica do conhecimento a ser ensinado (MOURA, 1996). Não se trata de um acompanhamento da história da matemática em sua íntegra, nem de uma recapitulação histórica cronológica ou a reprodução literal dos fenômenos históricos, mas de identificar os marcos de desenvolvimento do objeto que coloque o sujeito diante do mesmo tipo de dificuldade que a humanidade sentiu ao criar esse conhecimento. “Entendemos que compreender a essência das necessidades que moveram a humanidade na busca de soluções que possibilitaram a construção social e histórica dos conceitos é parte do movimento de compreensão do próprio conceito” (MORETTI, 2007, p.97)

A objetivação da síntese histórica na organização do ensino por meio de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA), perpassa pela apropriação do objeto pelo professor e a identificação de sua gênese histórica, elemento essencial que constituiu historicamente a necessidade de construção de determinado conceito. É esse movimento que subsidiará a organização de propostas que possam despertar no aluno a necessidade de aprender e colocá-lo em atividade (MOURA et al., 2016).

A Situação desencadeadora de aprendizagem “é organizada pelo professor a partir de seus objetivos de ensino que, como dissemos, traduzem-se em conteúdos a serem apropriados pelos estudantes no espaço de aprendizagem” (MOURA et al., 2016, p.117-118). A SDA pressupõe a superação de propostas de ensino limitadas a casos particulares e, ao contrário, carrega em si um problema de aprendizagem relacionado à essência do objeto (MOURA et al., 2016). É por meio da essência do objeto que se torna possível a superação de abordagens empiristas da realidade, pautadas na aparência e em casos particulares. A consideração do movimento histórico e lógico dos conceitos (KOPNIN, 1966; PANOSSIAN, 2014) é fundamental no processo de organização do ensino pautado na AOE na medida em que potencializa, por meio dos Problemas Desencadeadores de Aprendizagem (VIRGENS, 2019) inerentes à SDA, o processo de generalização num movimento de ascensão do abstrato ao concreto, que converge com o desenvolvimento do pensamento teórico, conforme veremos mais adiante.

Os recursos teórico-metodológicos da AOE, para a elaboração das situações desencadeadoras de aprendizagem, incluem a história virtual, os jogos e as situações emergentes do cotidiano. São "elementos potencialmente mobilizadores dos sujeitos para a solução de um problema relativo aos conteúdos [...]" (MOURA, 1996, p.4). Marcados pela ludicidade e pela problematização, a utilização destes elementos visa motivar os sujeitos para a atividade coletiva de resolução da SDA proposta, uma vez que a "consciência sobre o modo de desenvolvimento da matemática nos processos de satisfação das necessidades humanas poderá propiciar o desenvolvimento de práticas educativas capazes de criar o motivo eficaz para a aprendizagem" (MOURA, 2012, p.186). A seguir, apresentamos algumas possibilidades de cada um desses recursos teórico-metodológicos da AOE.

A história virtual utiliza cenários e personagens que podem ser adaptados de lendas e contos, ou criados com base no movimento histórico do conceito. Destaca-se, no entanto, a necessidade de apresentar uma situação-problema que desperte o interesse do sujeito para uma questão atrelada à gênese do conceito. O jogo, ao ser utilizado como uma SDA deve superar seu aspecto aparente com fim em si mesmo. Apesar de atuar como fonte de motivação e prazer, o jogo deve ser considerado e utilizado como um objeto pertencente a uma cultura e que carrega em si a potencialidade de instrumento pedagógico a ser explorado intencionalmente pelo professor com vistas à apropriação de determinados conhecimentos. Já as situações emergentes do cotidiano abarcam aquelas situações do cotidiano da realidade escolar que emergem efetivamente da realidade social do sujeito e, desta forma, permitem uma flexibilização e autonomia ao professor no movimento de organização de ensino ao inserir o imprevisto da realidade no contexto do ensino.

As ações do professor, ou formador/pesquisador no caso de formação de professores, no decorrer da solução coletiva da SDA visam favorecer a interação, reflexão e sistematização dos conceitos abordados, bem como garantir movimentos de análise e síntese coletiva. É por meio da socialização e levantamento de hipóteses que se torna possível a revelação dos aspectos essenciais do objeto de conhecimento e de sua generalização teórica.

Nesse sentido, a Atividade Orientadora de Ensino vem fundamentando pesquisas e práticas de formação de professores que ensinam matemática com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico do sujeito em atividade, haja vista "usar sua estrutura para identificar motivos, necessidades, ações desencadeadas e sentidos atribuídos pelos sujeitos no processo de ensino" (MOURA et al., 2016, p.125).

No contexto da pesquisa de Santos (2020), o conceito de Atividade Orientadora de Ensino ancorou a elaboração de práticas formativas a partir de dois vieses. Primeiramente, a AOE fundamentou a organização do processo de formação continuada dos professores dos anos iniciais a partir de um experimento formativo voltado ao pensamento teórico sobre conhecimentos do campo algébrico. Em um segundo momento, a AOE subsidiou momentos coletivos de elaboração de SDA sobre o conhecimento algébrico pelos próprios professores e o posterior desenvolvimento destas SDA em sala de aula. Tanto o processo de elaboração quanto de desenvolvimento das SDA em sala de aula, foram socializados no coletivo de professores por meio de relatos em encontros posteriores, o que permitiu articular o processo de formação com a organização e práticas de ensino.

Metodologia e organização do processo formativo

O processo formativo desenvolvido ao longo da pesquisa de mestrado (SANTOS, 2020) apresentada neste artigo foi elaborado com base no método materialista histórico dialético, na medida que este incorpora e supera o "processo descritivo, adotando o movimento de análise e explicação do fenômeno com base em pares dialéticos, considerando seu movimento e suas contradições internas e externas, em busca de revelar a essência do objeto" (SANTOS, 2020, p.64).

Desenvolveu-se uma ação de extensão com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma rede pública de ensino. Participaram da referida pesquisa 23 professores, ao longo de um experimento formativo de 17 encontros que ocorreram no contexto de formação continuada desses professores.

Para o movimento de produção e coleta dos dados foram utilizados recursos como câmera e gravadores (digital e celular) e os seguintes instrumentos: Registro em Questionário (RQ), Transcrição de Audiovisual (TAV), Resolução da Situação Desencadeadora de Aprendizagem (RSDA) e Diário de Campo (DC). Também indicamos nos registros o número de cada um dos 17 encontros junto à letra E (do E1 ao E17).

Após a transcrição desses dados, deu-se o processo de análise ancorado no referencial teórico que subsidiou o percurso investigativo. Adotou-se o conceito de unidade de análise, que é "um produto de análise que, diferente dos elementos, possui todas as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade" (VIGOTSKI, 2010, p.8); de isolado, isto é, de recortes da realidade "que possibilitam a compreensão da essência do fenômeno em movimento" (SANTOS, 2020, p.93); e, por fim, de episódios, que são "aqueles momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem do novo conceito" (MOURA, 1992, p.77).

Para a análise dos dados, escolhemos acompanhar o movimento de três professores: Bia, Jonas e Elisa (nomes fictícios), por estes apresentarem mais indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico e de alteração de sentidos pessoais acerca do ensino da álgebra para os anos iniciais. Vale observar que nos trechos a serem utilizados, aparecem falas de outros professores por estes terem ajudado a compor o coletivo e, como tal, contribuírem com o desenvolvimento do pensamento teórico dos professores tomados para análise.

Práticas de formação continuada de professores dos anos iniciais voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico

A partir da pesquisa de Santos (2020), que investigou o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais no contexto da formação continuada, trazemos um recorte de análise que busca mostrar, ainda que de forma sintética, o processo de desenvolvimento do pensamento teórico do professor no campo algébrico, num movimento que contou com as práticas formativas anteriormente apresentadas, sendo possível identificar indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo do movimento de organização do ensino, bem como a mudança na compreensão de sua atividade de ensino a partir do movimento de formação.

Antes de apresentar a análise, no entanto, cumpre indicar que abordamos o pensamento teórico com base nas contribuições de Davidov (1983, 1988), que o reconhece como um modo de compreensão racional da realidade a partir da essência de seus objetos, num movimento que parte do geral para o particular. Ou seja, é compreendendo os nexos conceituais do objeto de conhecimento, os elementos essenciais que o constituem, que sua essência poderá ser manifestada nos casos particulares; esse movimento de constituição do pensamento teórico perpassa pelos movimentos de abstração, generalização e formação de conceitos teóricos, em que o sujeito consegue reproduzir mentalmente o sistema de construção do objeto em seu sistema integral (DAVIDOV, 1988).

Em suma, o pensamento teórico é mediado por conceitos científicos e podemos sintetizar seu processo de constituição a partir do movimento concreto-abstrato-concreto (ROMEIRO, 2017). Vale observar que "de acordo com Davidov (1983), o concreto é determinado pela unidade integral dos casos singulares, passível de contemplação e representação. Já o abstrato é o conjunto das propriedades desassociadas do objeto e processadas mentalmente" (SANTOS, 2020, p. 35). Desse modo, a superação do pensamento empírico, pautado nas aparências dos fenômenos particulares, prevê a ascensão no pensamento, do abstrato ao concreto, em que o sujeito explica os fenômenos com base em regras gerais estabelecidas a partir da essência do objeto de conhecimento.

O pensamento algébrico, por sua vez, é um pensamento teórico que, como tal, conta com o movimento de abstração dos nexos conceituais algébricos e com a generalização algébrica, em que o sujeito explica os casos particulares a partir de regras gerais relacionadas à essência do conhecimento algébrico, que é estabelecer relações entre as diversas grandezas variáveis (PANOSSIAN, 2014). A unidade entre os processos de abstração e generalização algébricas viabiliza a formação de conceitos algébricos; desse modo, consideramos que o pensamento algébrico é o pensamento teórico que conta com a mediação de conceitos algébricos (SANTOS, 2020).

Vale observar que a proposta de abordagem do ensino da álgebra para os anos iniciais não prevê um simples adiantamento dos conteúdos abordados nos anos finais do Ensino Fundamental. Ao contrário, na perspectiva da THC, propõe-se uma abordagem articulada entre álgebra e aritmética, num movimento de ensino que tem por objetivo levar o sujeito a manipular quantidades desconhecidas e variáveis por meio de regras gerais, potencializando os processos de generalização e analiticidade (RADFORD, 2014); isto permite a ressignificação dos conhecimentos aritméticos por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico (SANTOS, 2020).

No movimento de formação continuada realizado em Santos (2020), utilizou-se o conceito de experimento formativo, que foi organizado a partir de práticas formativas ancoradas na fundamentação teórico-metodológica da Atividade Orientadora de Ensino. Tais práticas formativas visaram desencadear a atividade dos sujeitos com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos professores, de modo articulado ao movimento de organização do ensino de álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Na análise, buscamos indícios de novas compreensões pelos professores acerca do ensino da matemática, e particularmente da álgebra para os anos iniciais, como mudanças em seus sentidos pessoais, em que, de acordo com a compreensão de Vigotski (2010a) e de Leontiev (1978), os sentidos atribuídos pelo sujeito acerca da realidade histórico-social e dos conhecimentos criados pela humanidade são refletidos nas significações sociais, que apresentam-se como cristalizações do pensamento humano acerca dos conhecimentos num determinado momento da história, como um tipo de consciência social (PIOTTO; ASBAHR; FURLANETTO, 2017). O processo de desenvolvimento do pensamento teórico, e neste caso algébrico, tende a provocar essas mudanças de sentido, aproximando-os das significações sociais acerca do objeto de conhecimento.

No decorrer do processo formativo a pesquisadora/formadora propôs aos participantes da pesquisa, considerando a organização didática da AOE, a resolução coletiva de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem que considerassem o movimento histórico e lógico da álgebra e seus nexos conceituais, a fim de que os professores em formação pudessem entrar em atividade e, por meio de ações coletivas como discussão, resolução, análise e síntese, pudessem realizar abstrações e generalizações teóricas com vistas à formação de conceitos algébricos. Foram utilizadas algumas SDA como as histórias virtuais “O jovem construtor” (SANTOS, 2020) e “A altura da pirâmide” (SOUSA, 2004), e os jogos “Fantan” (PANOSSIAN; MOURA, 2010) e “Pega-varetas” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014); tais propostas apresentavam condições que favoreciam, por meio de resolução coletiva, análise e síntese, a aproximação de nexos conceituais da álgebra e dos elementos do conhecimento algébrico, como o movimento de variação das grandezas e as diversas relações existentes entre elas, a possibilidade de prever movimentos da realidade ligados às quantidades desconhecidas e variáveis, diversas formas de controlar esses movimentos a partir dos campos de variação e de expressar essas relações por meio de linguagem verbal, escrita, com símbolos, letras etc.

Ao longo dos encontros, por meio das situações propostas, os professores também foram se aproximando do conceito de AOE como uma possibilidade de proposta teórico-metodológica para o seu movimento de organização de práticas pedagógicas. Na fase final do experimento, alguns encontros foram dedicados a uma discussão mais profunda sobre este assunto e, posteriormente, para a elaboração coletiva, a princípio com todo o grupo, de propostas de Situações Desencadeadoras para o Ensino de álgebra nos anos iniciais.

O recorte da análise que apresentaremos aqui, refere-se a momentos em que, ao longo do processo formativo articulado ao movimento de organização do ensino de álgebra para os anos iniciais, os professores deram indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico e de mudanças de compreensão acerca do processo de ensino e aprendizagem da álgebra nos anos iniciais.

O primeiro trecho que trazemos refere-se ao movimento de elaboração coletiva de todo o grupo de professores, com a mediação da pesquisadora, de uma SDA que teria como recurso teórico-metodológico uma situação emergente do cotidiano. O grupo decidiu utilizar o processo de distribuição das bolachas para as crianças no momento do lanche. Diante disso, os professores deveriam criar uma proposta de ensino com base nos elementos teóricos da AOE com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos.

Foram consideradas diversas hipóteses, até que o grupo elegeu a sugestão da professora Bia, que propôs utilizar a situação, real, de uma cozinheira da escola que acabara de ser admitida como professora na mesma unidade escolar. A problemática apresentada às crianças seria como a cozinheira explicaria para sua sucessora a dinâmica de como fazer a distribuição das bolachas. Diante disso, os professores buscam estruturar uma SDA que contemplasse a ideia de variação:

> *Bia:* [...] a gente pode perguntar quantas bolachas vão ser usadas. Porque vai variar.
> *Edna:* E a gente pede pra eles calcularem a quantidade usada no dia?
> *Elisa:* Mas se eles só calcularem não vai ter variação. Eles têm que entender que cada dia vai ser uma quantidade de bolacha diferente.
> *Bia:* Eu acho que eles têm que entender e explicar como que faz para calcular. Nesse caso, pra calcular o tanto de bolacha, tem que fazer a quantidade de crianças vezes quanto cada uma vai receber.
> *Elisa:* Sim. A quantidade de bolacha vai depender da quantidade de alunos.
> (TAV, E-13).

Ao identificarem que a SDA deveria conter o movimento de variação e a relação entre as grandezas variáveis existentes nela, as professoras Bia e Elisa parecem recorrer aos nexos conceituais e a aspectos da essência do conhecimento algébrico (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014). Além disso, percebem a necessidade de primeiramente levar as crianças a compreenderem a relação geral existente naquela situação e não a calcularem casos particulares.

Ao indicar que "pra calcular o tanto de bolacha, tem que fazer a quantidade de crianças vezes o quanto cada uma vai receber", a professora Bia, considerando a intencionalidade da

SDA proposta, estabelece uma relação entre as grandezas variáveis, que parece ser compreendida pela professora Elisa ao dizer que “a quantidade de bolacha vai depender da quantidade de alunos”. O movimento do pensamento das professoras, nesse momento, parece partir do geral para o particular (DAVIDOV, 1983), em que a regra geral estabelecida por elas a priori poderá ser manifestada em futuras situações particulares e ressignificar os cálculos aritméticos, nessa situação, vinculados à forma geral da multiplicação. Esse movimento remete a uma abordagem algébrica articulada com o ensino de conhecimentos aritméticos (KIERAN, 2016), o que corrobora o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Num segundo momento, os professores foram organizados em grupos menores (cerca de quatro integrantes) e aos pares, conforme o ano junto ao qual estavam atuando naquele momento, a fim de que pudessem elaborar conjuntamente uma SDA a ser desenvolvida em sala de aula com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Esse movimento, intencionalmente planejado dentro da prática formativa proposta, tinha por objetivo articular o processo de formação dos professores com o movimento de organização de ensino, no sentido de corroborar sua práxis pedagógica. Após a elaboração, foi feita a socialização da SDA por cada grupo, a fim de que os demais professores pudessem analisar e sugerir alterações, se necessário.

Destacamos um trecho em que o professor Jonas, durante a elaboração coletiva da SDA para os 4ºs e 5ºs anos, dá indícios de um movimento no modo de pensar que converge para o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico. Ele parece conseguir reproduzir nesse instante, a partir do fenômeno abordado na elaboração da SDA, alguns aspectos que remetem aos nexos conceituais da álgebra e sua essência, em particular sobre a importância do movimento de variação das grandezas, algumas relações funcionais que podem ser estabelecidas e a necessidade de buscar regras gerais que ressignifiquem os cálculos aritméticos.

A proposta de seu grupo foi de que as crianças fizessem um levantamento do processo de preparação dos alimentos da escola, acompanhando o movimento de cálculos das quantidades de comida, feito pelos cozinheiros.

> *Jonas:* O que é bacana é que vai mostrar as possibilidades. Não vai ter um resultado só, a gente vai mostrar o movimento pra eles; e também que tem um conjunto de possibilidades pra cada variável: pra quantidade de arroz, de feijão, de carne, enfim...que vai depender da quantidade de alunos (TAV, E-14).

O professor Jonas, além de indicar a existência de grandezas variáveis, destaca o papel do campo de variação que compõe o conjunto numérico representado pela variável, estando, então, intrinsecamente ligado a ela. Num encontro posterior, no decorrer da síntese coletiva e análise das propostas por meio das contribuições dos outros grupos, as falas do professor Jonas e de seu grupo reforçam essa compreensão.

> *Edna:* No nosso grupo a gente pegou uma atividade que eu já tinha feito em anos anteriores com outras turmas e repensamos agora, tentando olhar para a questão da álgebra. Eles têm que pensar na organização e distribuição da comida na escola. Pensando na quantidade de alunos e de alimentos e como que isso pode ser distribuído.
> *Jonas:* É muito legal, porque eles fazem um levantamento do período, perguntam para o secretário quantas salas tem, quantos alunos...e eles vão nas salas perguntando quantos alunos tem naquele dia, porque, conversando com os cozinheiros, eles percebem que a quantidade de comida de cada dia vai depender disso.
> *Edna:* Então, antes, quando eu usei essa atividade nos outros anos, eles faziam esse levantamento e já calculavam. Faziam tabelas, gráficos, calculavam quanto de comida ia usar naquele dia. Agora a gente pensou em fazer outras perguntas, outras problematizações, explica, Jonas.
> *Jonas:* A ideia é eles perceberem o movimento, como no caso das balas do 1º ano, mas de uma forma ampliada. Então a gente vai pedir pra eles explicarem como que calcula a quantidade de comida. A gente quer que eles percebam que conforme muda o tanto de criança, muda o tanto de comida. E eles teriam que explicar esse movimento. Tanto para o arroz, para o feijão, para a carne...tudo vai depender da quantidade que cada aluno come e de quantos alunos tem a cada dia. Depois disso, a gente faz a tabela e o gráfico dos dias, pra eles registrarem e conseguirem visualizar que uma coisa tá dependendo da outra.
> *Yara:* Resumindo, agora o importante é eles perceberem a variação e não só calcular o quanto de comida que vai usar no dia.
> *Jonas:* Depois eles podem calcular.... até pra gente trabalhar também as operações básicas. Mas antes eles têm que entender esse movimento.
> (TAV, E-15).

Esse trecho, além de evidenciar a compreensão dos professores, sobretudo do professor Jonas, acerca de aspectos que remetem a alguns nexos conceituais da álgebra como a fluência e interdependência entre as grandezas e a existência de campos de variação (PANOSSIAN, 2014) que controlariam a quantidade desses alimentos (a depender da quantidade de alunos), mostra como os professores buscaram estabelecer relações gerais que explicassem aspectos gerais do objeto, partindo do geral para o particular (DAVIDOV, 1983) e superando o pensamento empírico na medida em que ressignificam os casos particulares, inclusive relacionados às operações aritméticas, a partir dessas relações.

Ao fazerem uma proposta que busca levar os alunos a compreenderem a fluência, a variação da realidade, as grandezas variáveis e as relações que podem ser estabelecidas entre elas, os professores estão propondo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014). E, ao fazerem isso conscientemente em sua atividade de ensino, como o demonstram a partir de suas falas, indicam que também eles tiveram um movimento no pensamento que converge para o pensamento teórico sobre o conhecimento algébrico, ou seja, revelam o movimento de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Esse movimento dos professores reflete as aprendizagens desenvolvidas a partir das práticas formativas propostas que tiveram como foco os elementos constituintes da Atividade Orientadora de Ensino, como a coletividade na resolução da SDA, a necessidade de aproximação dos nexos conceituais da álgebra e de sua essência, além da generalização algébrica como condição para a formação de conceitos algébricos e ressignificação de conceitos aritméticos. Tais indícios de mudanças em suas ações, articuladas à apropriação teórica, indicam potenciais contribuições das práticas formativas propostas sobre o pensamento e a organização do ensino pelo professor.

Durante a socialização dos professores acerca do desenvolvimento, em sala de aula, da SDA que eles elaboraram coletivamente, as professoras Bia e Elisa dão indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico num movimento articulado à reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem.

> *Bia:* O que mais me surpreendeu no 1º ano é que eles conseguiram falar pra gente uma forma de registrar. Não só de como resolver, mas de escrever. Na minha sala surgiu algo como "Ah, prô...tem que ser o mesmo tanto de bala pra todo mundo... e se a gente desenhar um pacotinho pra cada criança, porque a gente não sabe quantas balas elas têm... aí a gente coloca que é igual ao pacote grande de bala?" Eu fiquei impressionada com essa fala da minha aluna, porque eu nunca imaginei que ela iria conseguir propor um registro pra algo que pra mim era tão abstrato, porque era um valor desconhecido, e ela conseguiu pensar em uma forma de representar.
> *Elisa:* Eu concordo plenamente. Inclusive na minha turma eu perguntei pra eles se eu levasse todo dia um pacote igual aquele de balas se eles achavam que eles receberiam a mesma quantidade de bala todos os dias. Eles falaram que não, porque podia faltar mais alunos e a quantidade seria diferente. Aí eu vi como que a gente subestima as crianças.
> (TAV, E-16).

As professoras indicam que têm consciência da importância de as crianças entenderem e expressarem uma forma geral para resolver a situação proposta como potencializadora do desenvolvimento do pensamento algébrico. Demonstram, em suas observações, indícios de compreensão sobre os nexos conceituais da álgebra, na medida em que ressaltam nas falas de seus alunos uma possível compreensão do movimento de variação, bem como da noção de variável sendo expressa nas falas e registros e da identificação da relação funcional entre as grandezas variáveis presentes naquela SDA: a quantidade de crianças, a quantidade de bala do pacote e a quantidade de balas por crianças.

As professoras, nesse momento, parecem superar uma abordagem empírica daquela proposta, pois intencional e conscientemente pretenderam levar seus alunos a compreenderem a estrutura das operações utilizadas, buscando identificar as relações gerais que, posteriormente, viessem a ressignificar os cálculos aritméticos, que poderiam vir a fazer, para descobrir a quantidade de balas por alunos em um determinado dia, por exemplo, o que permite relacionar também a incógnita.

O movimento acompanhado nesse excerto parece indicar a compreensão dos professores acerca de noções relacionadas ao conhecimento algébrico nos anos iniciais que refletem alguns nexos conceituais da álgebra. A apropriação desses elementos favorece e impacta o movimento de formação de conceitos algébricos (PANOSSIAN, 2014), influenciando no modo deles pensarem a organização de situações de aprendizagem para os alunos.

Em outro trecho, percebemos que a compreensão da analiticidade como aspecto central no desenvolvimento do pensamento algébrico se evidencia na fala das professoras. Ao planejarem com seus pares uma SDA para o ano referente ao que lecionavam, as professoras Elisa e Bia, ambas do grupo dos 1º anos, fazem algumas considerações que apontam para uma possível mudança em sua concepção sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

> *Bia:* É legal porque a gente tem que partir da álgebra pra fazê-los perceberem o movimento, as possibilidades para a quantidade de cada tipo de bala.
> *Elisa:* E a gente pode pedir pra eles registrarem, para eles poderem explicar o jeito de fazer. Assim a gente vê se eles entenderam.
> *Bia:* Mas eles podem falar. No 1º ano é difícil pra eles fazerem o registro, a gente pode ir escrevendo na lousa o que eles forem falando, de um jeito que todos entendam, com desenhos, sei lá.
> (TAV, E-14).

Esse trecho indica que as professoras estão se pautando na analiticidade vinculada à álgebra, em que se busca compreender os processos relacionados ao movimento da realidade e das grandezas variáveis, além da necessidade de trabalhar o conceito de número sem a necessidade do numeral (PANOSSIAN, 2014). Elas identificam que os alunos precisam compreender a forma geral de resolução e não partir de casos particulares expressos numericamente, conforme propunham nos primeiros encontros do experimento. Percebem a relevância em desenvolver o pensamento algébrico nas crianças, voltado para o movimento das grandezas da realidade, e que essa compreensão do movimento das grandezas pode ser expressa de outras formas além da escrita, como a partir da fala, por exemplo. Essa mudança das professoras que vai da forma de lidar com casos particulares para a busca da analiticidade e generalização (RADFORD, 2014), ainda que verbal, foi possível por conta das práticas formativas propostas que possibilitaram sua aproximação dos nexos conceituais da álgebra por meio de ações coletivas que articularam o processo de desenvolvimento do pensamento teórico das professoras com seu movimento de reorganização e ressignificação de propostas de ensino voltadas ao pensamento algébrico.

Um último trecho que destacamos aqui é um momento em que Jonas e Bia deram indícios de novos sentidos pessoais atribuídos à organização do ensino da matemática voltada para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais.

> *Dora:* Eu achei muito interessante, porque a gente viu que muitas coisas a gente já fazia com eles, mas não tinha consciência, a gente acaba só repetindo a mesma atividade muitas vezes...
> *Jonas:* É isso mesmo. É pensar: será que eu estou dando sentido para o que o meu aluno está fazendo? Será que ele aprendeu ou está fazendo no automático? E aí a gente começa a se preocupar em formas de despertar o interesse deles em aprender alguma coisa, igual aconteceu com a gente aqui, a gente sentiu a necessidade de perguntar, de pesquisar, de pensar mesmo.
> *Bia:* E a gente vê que não é só chegar num resultado n, é entender como chegar lá, o que que tem por trás daquilo. Eu acho que isso é o que também os leva a desenvolverem o pensamento algébrico.
> (TAV, E-17).

Os professores demonstram, em suas falas do excerto anterior, uma tomada de consciência quanto a sua atividade de ensino na medida em que identificam a necessidade de pensar e repensar sobre sua forma de organização do ensino e formar-se nesse processo.

Além disso, reconhecem que, a partir do momento em que o aluno se depara com uma dificuldade previamente planejada e devidamente orientada pelo professor, cria-se nele uma necessidade em aprender determinado conceito, que tende a colocá-lo em atividade de estudo, um movimento potencial para o desenvolvimento do pensamento teórico e, nesse contexto, do pensamento algébrico. Esses aspectos remetem à essência da AOE como base teórico-metodológica para as práticas de formação de professores, bem como orientadora das atividades de ensino e de aprendizagem da matemática, e particularmente da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Considerações finais

Buscamos apresentar neste artigo práticas de formação para professores que ensinam matemática nos anos iniciais com base em uma pesquisa de mestrado desenvolvida com professores de uma rede pública de ensino.

Partimos da compreensão de que o professor tem na atividade de ensino o seu trabalho que pode ser objetivado por meio da práxis pedagógica, isto é, na unidade teórico-prática voltada para a transformação do sujeito e da realidade. Como a atividade humana é mediada pelas relações sociais e pela cultura (VIGOTSKI, 2010a), entendemos que práticas de formação que promovam a coletividade e a unidade teórico-prática na atividade do professor podem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem numa perspectiva de formação integral e de uma educação humanizadora.

Como sujeito da atividade de ensino, o professor é responsável pela organização de propostas que coloquem o aluno em atividade, neste caso de estudo, com vistas ao processo de apropriação de conhecimentos científicos por meio do pensamento teórico; isto pressupõe que também o professor pense teoricamente sobre o objeto de conhecimento a ser ensinado. Diante disso, a pesquisa da qual este texto é um recorte (SANTOS, 2020), investigou, no contexto da formação continuada, o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividade de ensino.

A fim de viabilizar a indissociabilidade entre teoria e prática na atividade do professor em formação, a Atividade Orientadora de Ensino foi adotada como fundamentação teórico-metodológica que subsidiou a organização de práticas formativas em um contexto de formação continuada de professores, o que incluiu orientar o movimento de organização do ensino. Por ter como objetivo o desenvolvimento do pensamento teórico a partir do princípio da coletividade, a AOE atua como unidade formativa entre a atividade de ensino e de estudo (MOURA, 1996). Para isso, parte de Situações desencadeadoras de aprendizagem que considerem a gênese histórica do conceito, contribuindo com propostas que viabilizem a entrada do sujeito em atividade.

Na análise dos dados da pesquisa (SANTOS, 2020) pudemos identificar indícios de alteração nos sentidos pessoais dos professores em relação ao ensino da álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, em que demonstraram tanto uma aproximação das significações sociais do objeto de conhecimento em questão, como um maior nível de conscientização em relação à sua práxis pedagógica como desencadeadora da atividade de estudo do aluno.

Nesse sentido, as práticas formativas desenvolvidas que buscaram promover o pensamento teórico por meio de propostas que, considerando princípios como coletividade, análise e síntese, aproximaram os professores dos nexos conceituais e da essência da álgebra, com vistas à abstração, generalização e formação de conceitos algébricos, corroboraram a entrada desses professores em atividade de ensino ao longo do desenvolvimento de seu pensamento algébrico, bem como permitiram a ressignificação e reorganização do ensino da matemática e, particularmente, da álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

O percurso investigativo e resultados da pesquisa apresentada neste artigo evidenciam a necessidade de reflexão contínua acerca dos processos formativos de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, sobretudo no que tange a indissociabilidade entre teoria e prática e a relação entre o desenvolvimento do pensamento teórico, mais especificamente do pensamento algébrico, do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental com o de seus alunos. Em outras palavras, trata-se de um movimento que busca viabilizar a unidade entre o percurso de apropriação teórica do docente com o processo de organização do ensino.

Referências

CEDRO, Wellington Lima. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino. 2004**. 171f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Área de concentração: Ciências e Matemática. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 2004.

CEDRO, Wellington Lima. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática:** uma perspectiva histórico-cultural. Tese (Doutorado), Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008.

CONTRERAS DOMINGO, J. **A Autonomia de Professores**. São Paulo: Cortez, 2002.

CURI, Edda. Conhecimentos para ensinar matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um longo caminho percorrido e a percorrer na pesquisa e na prática. **ACERVO-Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 3, p. 1-20, 2021. Disponível em: http://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/32. Acesso em 06 de novembro de 2021.

DAVÍDOV, Vasili V. **Tipos de generalización em la enseñanza**. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo Y Educación, 1983.

DAVÍDOV, Vasili V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación psicológica teórica y experimental. Moscu: Editorial Progresso, 1988.

DAVÍDOV, Vasili V.; MÁRKOVA, Aelita K. La concepcion de la atividad de estudio de los escolares. In: DAVIDOV, V. V.; SHUARE, M. **La psicología evolutiva y pedagogía en la URSS:** Antología. Moscú: Editorial Progresso, 1987. p. 316-336.

ESTEVES, Anelisa Kisielevski; SOUZA, Neusa Maria Marques de. Conteúdo e forma na atividade de formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais. In: MORETTI, Vanessa Dias; CEDRO, Wellington (Org.). **Educação Matemática e a teoria histórico-cultural.** Campinas: Mercado de Letras, 2017. p. 61-86.

FREIRE, Paulo. Carta de Paulo Freire aos professores – Ensinar, aprender: leitura do mundo, leitura da palavra. **Estudos Avançados**, 15, 42, p. 259-268, 2001. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ea/v15n42/v15n42a13. Acesso em 30 de julho de 2018.

KIERAN, Carolyn et al. **Early Algebra**. ICME-13Topical Surveys, Hamburg, 2016.

KOPNIN, Pável Vassílievitch**. Logica Dialectica**. México: Editorial Grijalbo S.A., 1966.

LEONTIEV, Alexis. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte, 1978.

LEONTIEV, Alexis. **Actividad, Consciencia, Personalidad**. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo Y Educación, 1983.

LEONTIEV, Alexis. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A.N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo, 1988. Página: 59-83.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em atividade de ensino:** uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. 2007. 206 f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática), Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **Construção do signo numérico em situação de ensino**.1992. 151 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de SãoPaulo, São Paulo, 1992.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de (Coord.). **Controle da variação de quantidades:** Atividades de ensino. São Paulo: FEUSP, 1996.

MOURA, M. O. Didática e prática de ensino para educar com a matemática. In: **Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino**, 16., 2012, Campinas. Anais do XVI Endipe: Campinas, 2012. p.178-190.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; ARAUJO, Elaine Sampaio; SOUZA, Flávia Dias de; PANOSSIAN, Maria Lucia; MORETTI Vanessa Dias. A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 93-125.

NETTO, José Paulo; BRAZ, Marcelo. **Economia Política:** uma introdução crítica. 8. ed. São Paulo, 2012.

NOVOA, A.. Os professores na virada do milênio: do excesso dos discursos à pobreza das práticas. **Educ. Pesqui.**, São Paulo, v. 25, n. 1, p. 11-20, June 1999 . Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-97021999000100002&lng=en&nrm=iso.pdf. Acesso em 12 de julho de 2018.

PANOSSIAN, Maria Lucia; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. O jogo fantan: explorações didáticas. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática:** Educação Matemática, Cultura e Diversidade. 2010, Salvador. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo. São Paulo, 2014.

PIOTTO, Débora Cristina; ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira; FURLANETTO, Flávio Rodrigo. Significação e sentido na psicologia Histórico-Cultural: implicações para a educação escolar. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (Org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 101-123.

RADFORD, Luis. The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. 2, p. 257-277, 2014.

ROLDÃO, Maria do Céu. Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 34, 2007. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1413-24782007000100008&script=sci_abstract. Acesso em: 10 de fevereiro de 2018.

ROMEIRO. I. O. **O Movimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração e o sentido atribuído aos materiais didáticos na atividade de ensino**. 2017. 203f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2017.

SANTOS, Fernanda Cristina Ferreira. **Desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais em atividade de ensino:** o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos. 2020. 185f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2020.

SOUSA, MARIA DO CARMO. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, Maria do Carmo de; PANOSSIAN, Maria Lucia; CEDRO, Wellington Lima. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. São Paulo: Mercado de Letras, 2014.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente**. 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A Construção do pensamento e linguagem**. 2ª ed. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2010a.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **Psicologia pedagógica**. 3ª ed. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2010b.

VÁSQUEZ, Adolfo Sánchez. **Filosofia da Práxis**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1968.

VIRGENS, Wellington Pereira das. **Problemas desencadeadores de aprendizagem na organização do ensino:** sentidos em movimento na formação de professores de matemática. 2019. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo. São Paulo, 2019.

ZEFERINO, Lidiane Chaves. **Aprender a ensinar frações a partir do conceito de atividade orientadora de ensino:** um estudo com professores de quartos e quintos anos do ensino fundamental. 2016. 123f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2016.

Autoras:

Fernanda Cristina Ferreira Santos

Licenciada em Pedagogia e em Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL). Mestra em Educação pela Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico Cultural – GEPPEDH. Professora de Educação Básica - Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental - na Prefeitura Municipal de Guarulhos.

Correo electrónico: fecristy@yahoo.com.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8293-4592

Vanessa Dias Moretti

Licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Doutora em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (Ensino de Ciências e Matemática), com pós-doutorado em Educação pela Laurentian University (Canadá). Professora Associada da Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP e professora credenciada do Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE-Unifesp). Pesquisadora do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica- GEPAPe/USP - e líder do Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico Cultural - GEPPEDH na Unifesp. Desenvolve pesquisas em Educação Matemática focando especialmente a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, aprendizagem da docência, atividade de ensino, teoria histórico-cultural e teoria da objetivação.

Correo electrónico: vanessa.moretti@unifesp.br

https://orcid.org/0000-0003-2435-5773

Como citar o artigo:

SANTOS, F. C. F.; MORETTI, V. D. Prácticas de formación para profesores desde los primeros años convertidas al desarrollo del pensamiento algebraico. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 92-116, enero, 2022. DOI: 10.37618

Revelaciones sobre la presencia de la geometría en la formación de profesores de matemáticas en Brasil (2001-2019)

Lailson dos Reis Pereira Lopes
lailson.lopes@unimontes.br
https://orcid.org/0000-0002-2275-5047
Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes)
Montes Claros, Brasil.

Ana Lúcia Manrique
manrique@pucsp.br
https://orcid.org/0000-0002-7642-0381
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP)
São Paulo, Brasil.

Josué Antunes de Macêdo
josueama@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7737-7509
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais (IFNMG) e Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes)
Montes Claros, Brasil.

Recebido: 30/05/2021 **Aceito:** 04/11/2021

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de dos categorías del eje temático: Geometría en la formación del docente de Matemáticas, que conforman el análisis de datos de una investigación doctoral en Educación Matemática, de carácter bibliográfico del tipo estado de conocimiento. La investigación se orientó por la pregunta: ¿cuáles son los aportes de disciplinas específicas en el campo de la Geometría, de los cursos de pregrado en Matemáticas, en la formación del futuro docente en el abordaje de los contenidos matemáticos a impartir en la educación básica? La investigación contó con dos fuentes para la recolección de datos, el marco temporal de 2001 a 2019, subdividido en otras dos, 2001 - 2012, que tuvo como fuente disertaciones y tesis que abordan la formación inicial de profesores de matemáticas. El otro recorte de 2013 a 2019 contó como fuente de datos, las revistas científicas brasileñas. Algunas debilidades relacionadas con el dominio de contenido fueron identificadas por graduados y estudiantes universitarios que habían cursado las disciplinas de Geometría, tales como: el error de generalizar que todo rectángulo es cuadrado. Preguntas sobre la carga de trabajo destinada a las disciplinas de Geometrías, ausencia de Geometrías no euclidianas. Tratamiento de los contenidos educativos básicos, con énfasis en un enfoque axiomático y avanzado.

Palabras clave: Geometría. Formación de profesores. Educación Matemática.

Revelações sobre a presença da Geometria na formação inicial de professores de Matemática no Brasil (2001-2019)

Resumo

Neste trabalho apresentamos os resultados de duas categorias do eixo temático: a Geometria na formação do professor de Matemática, que compõem a análise de dados de uma pesquisa de doutorado em Educação Matemática, de natureza bibliográfica do tipo estado do conhecimento. A pesquisa foi orientada pela questão: quais são as contribuições das disciplinas específicas do ramo de Geometria, dos cursos de licenciatura em Matemática, na formação do futuro professor na abordagem dos conteúdos matemáticos a serem ensinados na educação básica? A pesquisa contou com duas fontes para a coleta de dados, o recorte temporal de 2001 a 2019, subdividido em outros dois, 2001 – 2012, que teve como fonte dissertações e teses que abordam a formação inicial de professores de Matemática. O outro recorte de 2013 a 2019 contou como fonte de dados, revistas científicas brasileiras. Foram identificadas algumas fragilidades relacionadas ao domínio de conteúdos por parte de licenciados e licenciandos que haviam cursados as disciplinas de Geometria, como por exemplo: o equívoco de generalizar que todo retângulo é quadrado. Questionamentos em relação a carga horária destinada às disciplinas de Geometrias, ausência de Geometrias não Euclidianas. Tratamento dos conteúdos da educação básica, com ênfase em uma abordagem axiomática e avançada.

Palavras-chave: Geometria. Formação de professores. Educação Matemática.

Revelations about the presence of Geometry in the formation of Mathematics teachers in Brazil (2001-2019)

Abstract

In this work we present the results of two categories of the thematic axis: Geometry in the formation of the Mathematics teacher, which make up the data analysis of a doctoral research in Mathematics Education, of a bibliographic nature of the state of knowledge type. The research was guided by the question: what are the contributions of specific disciplines in the field of Geometry, of undergraduate courses in Mathematics, in the training of the future teacher in the approach of the mathematical contents to be taught in basic education? The research had two sources for data collection, the time frame from 2001 to 2019, subdivided into two others, 2001 - 2012, which had as source dissertations and theses that address the initial training of Mathematics teachers. The other clipping from 2013 to 2019 counted as data source, Brazilian scientific journals. Some weaknesses related to the domain of contents by graduates and undergraduates who had attended the disciplines of Geometry were identified, such as: the mistake of generalizing that every rectangle is square. Questions regarding the workload destined to the disciplines of Geometries, absence of non-Euclidean Geometries. Treatment of basic education content, with an emphasis on an axiomatic and advanced approach.

Keywords: Geometry. Teacher training. Mathematical Education.

Introdução

Os resultados dos alunos brasileiros em avaliações da aprendizagem em Matemática, especialmente nas de larga escala tais como o Programa Internacional de Avaliação de

Estudantes - PISA, revela um quadro bastante preocupante. A proficiência dos alunos avaliados no ano de 2018 foi de 384 pontos, enquanto a média dos alunos dos países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, foi de 489 pontos. Se comparados com os países vizinhos da América do Sul, o quadro também é desanimador, constatamos que a proficiência dos estudantes avaliados no Chile foi de 417 pontos e Uruguai 418 pontos. As melhores proficiências se referem aos alunos da Coreia com 526, do Canadá 512 e dos Estados Unidos 478 pontos (Brasil, 2019).

Dentre os possíveis motivos apontados para os resultados insatisfatórios, tem se destacado os aspectos didáticos e metodológicos que culminam em aulas poucos contextualizadas, permeadas pela resolução de exercícios, utilização mecânica de algoritmos que não aguçam para o pensamento crítico e nem exploram os aspectos epistemológicos, falta de estratégias que podem contribuir para que o aluno participe e se posicione de forma ativa na construção do conhecimento. Dessa forma, a formação inicial dos docentes passa a ser questionada, como também a sua formação continuada.

Em relação ao ensino e aprendizagem, dentre os vários tópicos de conteúdos matemáticos que devem ser explorados na educação básica, a Geometria aparece desde os primeiros anos de escolaridade, tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997), como na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Entretanto, esse tema tem sido bastante debatido, um exemplo é o estudo de Mandarino (2006) que lançou mão da observação de aulas de 116 professores dos anos iniciais do ensino fundamental, com o objetivo de identificar quais os conteúdos matemáticos são priorizados pelos professores desse nível de ensino. A constatação foi que, dos 484 conteúdos matemáticos identificados durante as observações, 76,4% dos conteúdos se referem ao bloco de Números e Operações, 14,9% são relacionados às Grandezas e Medidas, 3,9% com Espaço e Forma e 4,8% se associavam ao bloco de Tratamento da Informação (Mandarino, 2006). Ou seja, dos quatro blocos de conteúdos, os que se referem a Geometria, espaço e forma, era o menos explorado.

De uma maneira geral, a abordagem ou a não abordagem da Geometria na educação básica tem sido questionada. Pesquisas como as realizadas por Pavanello (1989,1993), Peres (1995), Lorenzato (1995), Almouloud et al. (2004), Andrade & Nacarato (2004), Constantino (2006), Miranda (2008), Santos (2011), dentre outros, trouxeram alguns apontamentos de que a *renúncia* ou quase *eliminação* do ensino da Geometria da educação básica tem sido motivo de discussões entre os educadores matemáticos no Brasil. Nos trabalhos de Constantino (2006) são apontados que dentre os motivos dessa omissão, tem se destacado problemas em relação a formação deficitária dos professores no que diz respeito ao domínio dos conteúdos de Geometria, e em relação a abordagem dada nos livros didáticos, ao apresentarem os tópicos de Geometria dissociados da Aritmética e da Álgebra, com priorização de fórmulas, propriedades, nomes, definições e resolução de exercícios que muitas vezes se busca simplesmente a aplicação de fórmulas, não dando ênfase à exploração de contraexemplos e de situações que levem o aluno a realizar conjecturas.

É nesse cenário de resultados insatisfatórios em Matemática e de críticas em relação ao ensino e aprendizagem de Geometria, que colocam em xeque a formação docente, que esse estudo de natureza bibliográfica se insere. Este artigo apresenta um recorte da tese de doutorado do primeiro autor e tem como objetivo: identificar as revelações das pesquisas brasileiras realizadas no período 2001 a 2019, a respeito da abordagem dos conteúdos a serem trabalhados na escola básica, no bojo das disciplinas do ramo Geometria, a pesquisa foi norteada pela seguinte questão: quais são as contribuições das disciplinas específicas de Geometria dos cursos de licenciatura em Matemática, na formação do futuro professor, na abordagem dos conteúdos matemáticos a serem ensinados na educação básica?

Metodologia

A pesquisa de cunho bibliográfico, com base nos entendimentos de Fonseca (2002), tem a modalidade do estado do conhecimento, nas perspectivas de Haddad (2002), Ferreira (2002), Romanowski & Ens (2006) e Pillão (2009). Teve como recorte temporal o período de 2001 a 2019, e contou com duas fontes para coleta de dados. Para o período de 2001 a 2012, lançamos mão da pesquisa de âmbito nacional, intitulada: Mapeamento da Pesquisa Acadêmica Brasileira sobre o Professor que Ensina Período 2001-2012, publicada no *ebook* organizado por Fiorentini et al. (2016). O referido mapeamento é composto por 858 pesquisas, teses e dissertações, sobre Professores que Ensinam Matemática, distribuídas em: formação inicial de professores, formação continuada de professores, formação inicial e continuada de professores e outros contextos. Constatou-se que 285 tratam de formação inicial, dos quais excluímos 51 que tratam da formação de professores dos anos iniciais e, portanto, não diz respeito a licenciatura em Matemática. Assim sendo, passamos a trabalhar com 234 trabalhos.

Logo, enfrentamos alguns desafios, um deles diz respeito a localização dos trabalhos, 12 deles não foram localizados, muitas bibliotecas virtuais não estavam atualizadas. Por essa razão, entramos em contato com os autores e obtivemos retorno de dois pesquisadores, que além de responder o correio eletrônico anexou o trabalho junto a resposta. Além disso, as dissertações e teses da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) disponibilizou os trabalhos por capítulos, consequentemente houve dificuldades de entendimento ao fazer a leitura fragmentada.

Identificados os trabalhos que atendem aos primeiros critérios, ter a formação inicial de professores de Matemática como temática de estudo; posteriormente, passamos a leitura dos resumos, análise das palavras-chave e a realização de buscas no texto por palavras que se considera pertinentes ao tema para permitir identificar aqueles que atendem ao segundo critério: apontar revelações a respeito dos conteúdos de Geometria a serem trabalhados na escola básica abordados ou não na graduação. Os trabalhos foram analisados considerando qual tipo de abordagem era realizada, em qual disciplina, com qual finalidade, ou sobre a articulação dos conteúdos a serem trabalhados na escola básica e as metodologias de ensino, ou ainda apontar as contribuições das disciplinas tidas como específicas, as de Matemática pura ou aplicada, para o ensino e a aprendizagem da Geometria na Educação Básica. Foram localizados inicialmente seis trabalhos.

Buscando indicativos sobre novos rumos, a respeito de revelações mais recentes acerca da presença ou não de conteúdos matemáticos a serem ensinados na escola básica durante a formação de futuros professores de Matemática, decidimos trabalhar com outro espaço temporal que compreende o período de 2013 a 2019. Para a coleta de dados optamos por buscar nas revistas brasileiras Qualis A1 e A2 da área de Ensino, pelos artigos que atendiam aos mesmos critérios estabelecidos para a seleção de trabalhos do mapeamento já mencionado. Ao todo foram localizadas dezesseis revistas que atendiam ao critério do qualis, além disso, outra condição foi apresentar em seu escopo o termo ensino de Matemática ou Educação Matemática.

Após identificadas as revistas, passamos a buscar pelas publicações que abordam sobre a formação inicial de professores, para isso foi realizada a leitura dos resumos e das palavras-chave. Constatamos que nas dezesseis revistas que atendiam aos critérios estabelecidos, durante o período de 2013 a 2019 foram publicados 4.206 artigos, dentre estes foi possível identificar 278 que dizem respeito a formação inicial de professores de Matemática. Dos quais, doze trazem apontamentos acerca dos conteúdos de Geometria a serem abordados na escola básica e sua abordagem na formação inicial do professor de Matemática.

Portanto, nos dois recortes 2001 a 2012 e 2013 a 2019 foram identificados ao todo dezoito trabalhos que tratam de conteúdos de Geometria a serem ensinados na escola básica e sua presença na licenciatura em Matemática. Os resultados foram organizados em categorias, a partir das concepções de Bardin (2016). Essa autora afirmou que a categorização é uma: "operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), a partir de critérios previamente definidos" (Bardin, 2016, p. 117).

Em relação ao eixo temático que trata da Geometria, dezoito trabalhos compõem o seu *corpus*, sendo seis dissertações e doze artigos, na tese foram organizados em quatro categorias: Alguns aspectos históricos da Geometria no Brasil; Conhecimentos dos professores e dos licenciandos sobre a Geometria; Dificuldades ou problemas: a formação de professores, o ensino e a aprendizagem de Geometria; a formação de professores e a exploração dos ambientes computacionais na abordagem da Geometria.

Nesse artigo apresentamos duas categorias, intituladas respectivamente: a) Conhecimentos dos professores e dos licenciandos sobre Geometria e b) a formação de professores e a exploração dos ambientes computacionais na abordagem da Geometria.

Conhecimentos dos professores e dos licenciandos sobre Geometria

Lima & Silva (2015) buscaram analisar os conhecimentos que foram desenvolvidos nas disciplinas de Geometria de um curso de licenciatura em Matemática, na modalidade Educação a Distância (EaD), para isso, organizaram os resultados em quatro categorias: conhecimentos docentes de conteúdo, pedagógicos, tecnológicos e conhecimentos didáticos.

Os autores consideram que nem todos os conhecimentos: de conteúdo (CC), didático (CD), pedagógico (CP) e tecnológico (CT) são desenvolvidos durante a formação inicial do futuro docente, esses são em muitas das vezes construídos por meio da prática ou pela formação continuada. O que não isenta a formação inicial de oferecer conhecimentos mínimos que deem ao futuro docente autonomia, aptidão de aprender sem ter necessariamente um professor formador, que sejam capazes de aprender sozinhos ao longo da carreira.

De uma maneira geral, o conjunto de conhecimentos são trabalhados na licenciatura de maneira disjunta, porque um professor trabalha Geometria, outros trabalham as disciplinas pedagógicas, outro leciona disciplinas que abordam o uso de novas tecnologias, de forma estanque. Na expectativa de que, na prática, o professor consiga relacionar todos esses conhecimentos. Ao analisarem as ementas das disciplinas do curso de licenciatura em Matemática da instituição pesquisada encontraram indícios dessa disjunção de conhecimentos. Entretanto, Lima & Silva (2015) verificaram que no curso procura-se de certa forma relacionar essas quatro categorias, o que é constatado pelo Quadro 1, elaborado a partir da adaptação de um quadro apresentado pelos autores. Embora, nenhuma das disciplinas de Geometria do curso apresentava mobilização das quatro categorias.

Quadro 1 - Conhecimentos identificados nas disciplinas de Geometria

Disciplinas	CC	CP	CD	CT
Geometria Analítica	X			X
Geometria Euclidiana Axiomática	X	X		
Geometria não Euclidianas	X	X		
Geometria Euclidiana I e II	X		X	X
Desenho Geométrico	X		X	X
Geometria das Transformações	X		X	X

Fonte: Adaptado de Lima & Silva (2015).

Ao recorrer a um estudo realizado anteriormente, Lima & Silva (2015):

> [..] entendem por Conhecimento Didático Tecnológico do Conteúdo (CDTC) aquele que permite ao professor, analisar, com base nas teorias da Didática da Matemática, como as diferentes tecnologias podem ser utilizadas para o ensino e para a aprendizagem de um determinado objeto matemático (Lima & Silva, 2015, p. 166).

No curso analisado consideram que o CDTC é construído nas disciplinas: Geometria Euclidiana I e Desenho Geométrico, ambas trabalhadas no segundo semestre do curso, Geometria Euclidiana II, abordada no terceiro semestre, e na Geometria das Transformações, esta última não foi possível identificar em que período era abordada.

Ao revisitar a literatura, pode-se considerar que os: "Conhecimentos Pedagógico do Conteúdo – CPC relacionam conhecimentos pedagógicos gerais com a área específica, no caso, a Matemática [...]." (Lima & Silva, 2015, p. 171). No curso analisado, os referidos autores identificaram que esses conhecimentos são desenvolvidos na disciplina Geometria Euclidiana Axiomática que era ministrada no quinto período e na disciplina Geometrias não Euclidianas, que era ministrada no sexto período do curso. Os referidos autores salientaram que no Quadro 1, não há indicação sobre CDTC nas disciplinas de Desenho Geométrico e de Geometria das Transformações, mas ao realizar uma análise mais detalhada dos materiais didáticos utilizados nas aulas, concluíram que os Conhecimentos Pedagógico do Conteúdo eram construídos em si. Para justificar essa inferência tomaram como exemplo, no caso da disciplina de Desenho Geométrico, o fato de os acadêmicos trabalharem com construções por meio de régua e compasso, e posteriormente por meio do GeoGebra. Na Geometria das Transformações os acadêmicos trabalhavam com dobraduras e malhas quadriculadas, e posteriormente, exploravam o GeoGebra para resolverem os problemas.

Outro tipo de conhecimento identificado no curso investigado foi o Conhecimento Tecnológico de Conteúdo (CTC), entendido por Lima & Silva (2015), como sendo o conhecimento de determinado conteúdo e sua relação com a tecnologia. Esse conhecimento foi identificado na disciplina Geometria Analítica ministrada no terceiro período do curso. A qual difere da abordagem das Geometrias Euclidianas I e Geometria Euclidiana II, que tratavam dos conteúdos estudados na escola básica, visto que na Geometria Analítica tinha o tratamento vetorial que não fazia parte do currículo da escola básica.

O estudo realizado por Vieira, Fonseca & Souza (2019) apresenta um recorte de uma pesquisa que teve como objetivo investigar como os egressos do curso de licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Alagoas (IFAL), posiciona-se na formação para ensinar Geometria. Os autores partiram:

> [...] do pressuposto de que é possível existir relações entre os conteúdos de geometria do ensino superior e os conteúdos geométricos a serem ensinados na educação básica, visto que o principal objetivo dos cursos de formação de professores é habilitar os licenciados para a docência no ensino básico (Vieira; Fonseca & Souza, 2019, p. 24).

Ao buscarem por meio da pesquisa responderem as questões: existem relações entre os conteúdos de Geometria abordados no curso de Licenciatura em Matemática, no Instituto Federal de Alagoas e os conteúdos a serem abordados no ensino médio? Os conteúdos de Geometria abordados na formação inicial contribuem para que os egressos da instituição ensinem os conteúdos geométricos no ensino médio? Constataram que há convergência quanto aos conteúdos abordados na licenciatura e os conteúdos a serem ensinados na escola básica. Porém, identificaram divergências nas opiniões dos egressos em relação a formação para ensinar esses conteúdos na escola básica.

Nas respostas de um dos participantes, verifica-se que ele aponta a excessiva formalização do conteúdo como motivo que levou a formação inicial contribuir pouco para a sua futura prática docente, ao faltar prática de formação em Geometria. Outro considerou que apesar das formalizações foi possível identificar em parte as relações entre os conteúdos tratados na graduação e os a serem ensinados na escola. Isso foi possível na parte inicial da disciplina em razão de complicar-se no decorrer do curso, devido a abordagem axiomática e avançada.

Foi identificado, no Plano Curricular do referido curso investigado, que 15% da carga horária, 1.150 horas, destinadas aos conteúdos do eixo de disciplinas específicas eram dedicadas à Geometria, sendo elas: Geometria Euclidiana Espacial; Geometria Analítica e Geometria Euclidiana Plana. A situação apontada levou os autores a questionarem se essa carga horária e essas disciplinas eram suficientes para realizar aprofundamento, ou revisão de conteúdos abordados no ensino médio. Desse modo, ressaltamos, que não comungamos com as concepções de revisão de conteúdos da educação básica, nem somente abordagem metodológica para o ensino deles. Mas, sim, que sejam explorados os aspectos históricos e epistemológicos desses conteúdos, bem como os recursos didáticos mais viáveis de serem utilizados em seu ensino, e abordagem do conteúdo, evidente que não exclusivamente no mesmo nível de exigência da escola básica, mas que permita ao futuro professor desenvolver os conhecimentos do conteúdo. Na formação de professores não se pode partir do pressuposto que o futuro docente detenha os conhecimentos pelo fato de já ter passado pela escola.

Pelo exposto na ementa, Vieira, Fonseca & Souza (2019) consideram que mesmo com abordagem axiomática e avançada os conteúdos previstos para a licenciatura da instituição pesquisada representavam uma extensão daqueles a serem abordados na educação básica. Porém, dependia de as concepções dos formadores obter ou não a articulação entre esses conteúdos, visto que cabe ao professor formador buscar essas articulações.

Costa & Santos (2017) apontam resultados preocupantes em relação ao pensamento geométrico de futuros professores de Matemática. O estudo contou com a participação de 24 acadêmicos de uma instituição de ensino superior de Pernambuco que já haviam cursado as disciplinas de Geometria em sua formação acadêmica em curso. A análise dos dados foi realizada a partir das dimensões do pensamento geométrico, propostas por Câmara dos Santos (1992). Foram utilizadas duas das questões aplicadas por Câmara dos Santos (1992) em sua coleta de dados que contou com alunos do 6º ano do ensino fundamental. Imaginava-se que os acadêmicos não tivessem grandes dificuldades em situações de abordagem desse tema. E que o pensamento geométrico dos futuros professores em formação deveria se encontrar na quinta dimensão, chamada por Câmara dos Santos (1992) como dimensão do discernimento.

Na primeira questão solicita-se aos participantes para desenhar um retângulo e, em seguida, outra figura de quatro lados que não se configurasse como esse quadrilátero. Na segunda parte da questão, ele deveria dizer por que a primeira era um retângulo e a segunda figura não era. Na segunda questão, deveria construir dois quadrados diferentes. Os resultados apontaram que em média 40% não reconheciam o quadrado como um tipo especial de retângulo, enquanto 7% dos participantes construíram retângulos como quadrados, cometendo o equívoco de generalizar que todo retângulo é quadrado. Vários participantes construíram dois quadrados, diferenciando-os apenas pelo tamanho. As evidências apontadas nesses exemplos e outras não mencionados aqui, indicam que, em geral, a metade dos participantes encontram-se na dimensão pragmática, nas suas justificativas utilizavam apenas a aparência física. Desconsideraram elementos da definição e as propriedades das figuras geométricas nas construções.

Foi constatado que, em média, um terço dos participantes encontravam-se na dimensão relacional, quando as figuras geométricas são reconhecidas por meio das propriedades. Como, por exemplo: na segunda etapa da primeira questão, na qual o participante deveria explicar suas construções, consistia em dizer porque a primeira figura era um retângulo e o motivo da segunda não ser um retângulo. Um dos participantes afirmou: "a primeira figura é um retângulo, porque a base é maior que a altura; já a segunda figura não é um retângulo pois é um quadrado" (Costa & Santos, 2017, p. 27). Outro participante, construiu um retângulo e um trapezoide, ao explicar utiliza a definição o '*retângulo possui quatro ângulos retos'* e recorre a um dos atributos, que o retângulo '*possui lados opostos paralelos congruentes'*. Para justificar que o trapezoide não é retângulo, afirma que, *não é retângulo porque não possui todos os ângulos retos*.

Outro exemplo apontado, um dos acadêmicos reconheceu o quadrado como um tipo especial de losango. Nos seus registros foram identificadas marcações, comparando ângulos e medidas dos comprimentos dos lados.

De modo geral, em torno de um quinto dos participantes encontravam-se na categoria aplicativa. Uma das indicações para esse resultado, foi identificada na construção de um dos licenciandos que produziu dois paralelogramos. Um retângulo é um paralelogramo oblíquo com dois ângulos internos obtusos, e dois ângulos internos agudos. Ao analisarem os registros os autores puderam conjecturar que o participante mobilizou os ângulos internos das figuras geométricas para diferenciar as duas construções. Com indícios de que não mobilizou o uso das diagonais no processo de construção, utiliza-se elementos da definição.

Outro indicativo para classificação de um terço dos participantes na dimensão aplicativa, foi a segunda questão, na qual foi solicitado que construíssem dois quadrados diferentes. Os resultados apontaram que em torno de 44% dos professores em formação, ao realizarem suas produções não fizeram uso das propriedades em suas justificativas, essas foram realizadas por meio de elementos da definição das figuras geométricas, portanto, se encontravam na dimensão aplicativa. Outro exemplo de identificação da referida dimensão justifica-se pela diferença entre os quadriláteros notáveis, retângulo e paralelogramo. Um participante confirma a conjectura de que utilizou elementos da definição para diferenciar: “a primeira figura é um retângulo, pois possui 4 ângulos retos - explicação ao retângulo, enquanto a segunda não é um retângulo, pois não possui 4 ângulos retos - explicação ao paralelogramo (Costa & Santos, 2017, p. 26).

Desse modo, a pesquisa aponta diversos indicativos: “que a Geometria vivenciada por esses estudantes não favoreceu, de modo significativo, o desenvolvimento de dimensões mais elaboradas do pensamento geométrico” (Costa & Santos, 2017, p. 18).

Outro aspecto indicado pelos autores diz respeito a posição da construção das figuras construídas pelos participantes, frequentemente, foi realizada na posição mais explorada na escola da educação básica e os mesmos erros cometidos por muitas de diferentes níveis, assim, estes autores salientam que:

> Algumas pesquisas (Costa & Câmara dos Santos, 2015a; 2015b; 2016a; 2016b; Costa & Rosa dos Santos, 2016; 2017) têm mostrado que pessoas de diferentes escolaridades (desde o ensino básico até o ensino superior) apresentam o mesmo tipo de erros em situações que exploram os quadriláteros notáveis. Como exemplo disso, citamos o caso de muitos estudantes não considerarem um quadrado com um tipo especial de retângulo (Costa & Santos, 2017, p. 21).

Essa situação sinaliza a necessidade de pesquisas que visam investigar a raiz epistemológica ou didática que origina tal erro e evidencia um importante papel do professor, que na sua prática docente deva identificar as dificuldades dos alunos e intervir para saná-las.

A ausência de abordagem das Geometrias não Euclidianas na formação de professores foi detectada no trabalho realizado por Lovis & Franco (2015). O estudo ocorrido em 2008 buscou verificar quais as consequências da inclusão de conteúdos de Geometria não Euclidianas na Educação Básica, a partir das Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE), do Estado do Paraná. De acordo com os autores supracitados, os estudos realizados durante seis anos apontaram contradições, dúvidas, opiniões e preferências dos professores sobre as Geometrias.

Na pesquisa realizada com 27 professores de Matemática que atuam na educação básica, constatou-se que em relação as Geometrias não Euclidianas, apenas um dos entrevistados estudou a Geometria Projetiva na formação inicial, outros dois afirmam que ouviram falar a respeito dessas geometrias durante a graduação. Sendo assim, 15 professores estudaram alguns conceitos, definições, implicações, dessas geometrias por meio de cursos oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação (SEE) ou Núcleos Regionais de Educação (NRE), oito professores conheceram alguns conceitos e resultados porque leram a respeito, enquanto quatro professores nunca estudaram as Geometrias não Euclidianas.

As DCE do Paraná recomendam trabalhar cinco geometrias e, em relação a essas geometrias, a pesquisa constatou que: "vinte e três professores já estudaram ou leram algo sobre a Geometria Fractal, seis professores sobre a Geometria Projetiva, quatro professores sobre a Geometria da Superfície da Esfera e dois professores sobre a Geometria Hiperbólica e a Topologia" (Lovis & Franco, 2015, p. 370).

Consideramos que a proposta fica comprometida pela falta de conhecimentos do assunto, visto que apenas um professor estudou Geometria não Euclidiana na graduação e de forma superficial, e foi a Geometria Projetiva, uma das recomendadas pelas DCE do Paraná. Os outros afirmam que leram ou estudaram sobre as Geometrias não Euclidianas. O que se verifica é que parte dos professores realizaram capacitações oferecidos pelas secretarias ou núcleos regionais de ensino. Ao que parece os cursos não foram suficientes para construção de conhecimentos e estabelecer novas concepções sobre o pensamento Geométrico, especialmente os não euclidianos. Outros nem sequer tiveram formação, oito leram sobre essas geometrias e quatro não tem nenhum conhecimento acerca da disciplina.

A pesquisa realizada por Lima & Silva (2015), discutida anteriormente, identifica na instituição pesquisada a abordagem de Geometrias não Euclidianas, que era ministrada no sexto período do curso, sendo inclusive apontada nela a construção de Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo. De uma maneira geral, consideramos que o tema ainda é pouco explorado na formação inicial, alguns professores têm buscado por iniciativa própria realizar estudos visando se atualizarem. Entendemos ser necessário a incorporação das Geometrias não Euclidianas na formação inicial, e que a formação continuada cumpra o papel de instrumentalizar os professores em atuação acerca do assunto. Defendemos que a formação continuada seja assumida pelo poder público, como política de estado, visando a valorização profissional e melhoria da qualidade do ensino.

A formação de professores e a exploração dos ambientes computacionais na abordagem da Geometria

Scheffer & Heineck (2016) consideram o processo de visualização, possibilitado pelos ambientes computacionais, antes desprezados nos contextos de ensino de Matemática, como um espaço privilegiado e que têm sido valorizados na construção de conceitos geométricos. Entretanto, grande parte dos professores de Matemática, atuantes na escola básica, formaram-se em uma época que os ambientes eram pouco explorados ou não explorados, sendo opção para sanar essa defasagem a formação permanente. Em relação aos cursos de formação inicial de professores de Matemática e a incorporação de tecnologias computacionais os autores salientaram que: "[...] a formação inicial, no geral, pouco mudou nas últimas décadas [...]" (Scheffer & Heineck, 2016, p. 37). Por outro lado, a utilização de *softwares* livres na Educação Matemática tem se constituído em campo de pesquisa por parte de professores e acadêmicos.

Em relação a utilização de novas tecnologias Silva & Penteado (2013) defendem a ideologia de utilizar nas aulas de Matemática os *softwares* de Geometria Dinâmica, o que acaba por levar os professores a adentrarem em um campo repleto de imprevisibilidades. Desse modo, esse novo caminho situa-se entre as fronteiras da zona de conforto e de risco, porque trarão maiores possibilidades de aprendizagens tanto aos alunos, quanto aos professores. Os referidos autores destacam a importância do trabalho coletivo como possibilidade para formação e de buscas de soluções diante dos imprevistos. Apontam que: "o trabalho individual contribui para que os professores permaneçam em uma zona de conforto, estimulando uma estagnação" (Silva & Penteado, 2013, p. 290).

Outro estudo chama a atenção para o trabalho colaborativo entre professores ou entre futuros professores. Bairral & Marques (2016) analisaram interações de dois grupos de acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática em um ambiente virtual integrado ao GeoGebra, chamado de *Virtual Math Team* com GeoGebra - VMTcG. Por meio da realização das construções no *software* com atividades: um grupo explorando a colinearidade dos três pontos notáveis do triângulo e o outro ao analisar a localização de cada ponto e a forma do triângulo, os autores apontaram as contribuições desse tipo de atividade na formação inicial de professores de Matemática, como para a formação continuada. Desse modo, possibilita o debate colaborativo com interação e socialização das estratégias utilizadas nas construções, discussões e argumentações sobre as escolhas, entre outros. Além disso, revela-se como uma ferramenta para uso do professor ao buscar por inovação para as práticas letivas de Matemática.

Consideramos, portanto, importante que, na formação em serviço, sejam adotados os grupos de estudos para realização de planejamentos coletivos de oficinas, socialização de experiências, oferecimentos de cursos contando com os próprios professores como multiplicadores de cursos de formação continuada ao visar, assim o desenvolvimento profissional com incorporação de novos recursos didáticos, novas práticas e melhoria do processo de ensino e de aprendizagem.

Scheffer & Heineck (2016) afirmam que os resultados do estudo apontaram que a socialização das experiências pelos participantes funciona como espaços de formação. O estudo evidenciou as contribuições do *software* GeoGebra na exploração geométrica para a formação dos futuros professores e para os professores em atuação.

Nesse sentido, a utilização de grupos de discussões, apontada por Miranda (2008), é uma promissora possibilidade a ser utilizada na formação inicial de professores. Especialmente, no que se refere a realização de atividades coletivas com uso de *software* de Geometria Dinâmica, como recurso didático para o ensino de Geometria.

Outra pesquisa, que diz respeito, especialmente, a utilização de novas tecnologias nas aulas de Matemática e os possíveis impactos dessas nas práticas pedagógicas, foi realizada por Pereira, Freitas & Victer (2016) e aponta resultados oriundos de recorte de um estudo, no qual realizou comparativos de duas oficinas trabalhadas com licenciados em Matemática e com acadêmicos de licenciatura em Matemática ao objetivar comparar a formação inicial e continuada. A pesquisa de cunho qualitativo foi orientada basicamente pelas questões: quais são as novas demandas que estes recursos trazem para a formação/atuação deste profissional? O GeoGebra apresenta-se como auxiliar para suas práticas pedagógicas em aulas de matemática?

Das três atividades trabalhadas, duas referiram-se à Geometria. Após a sua realização os participantes responderem a um questionário. Foi constatado que dos 11 participantes da oficina 1: Teorema de Tales foi oferecida aos licenciados, nove tinham conhecimentos prévios do *software* GeoGebra, porém apenas quatro afirmam que esse contato ocorreu durante a licenciatura. Considera-se desolador o fato de que dos 14 participantes da oficina 2: Soma dos ângulos internos de todo triângulo, apenas três terem indicado que já tiveram algum contato com o GeoGebra. Porém, não foram no seu curso de licenciatura.

Constata-se, portanto, a ausência de oportunidades de construção de conhecimentos tecnológicos destacados anteriormente por Lima & Silva (2015), que embora tenham reconhecido a formação inicial não dar conta da construção de todos os conhecimentos, afirmaram que essa formação deve dotá-los aos menos de conhecimentos mínimos.

Os estudos de Pereira; Freitas & Victer (2016) apontam que os professores consideraram ser importante que os cursos de formação de professores repensem as práticas, ao visar a incorporação dos recursos tecnológicos em ambientes escolares e não escolares como ferramentas úteis as suas práticas letivas. Diversos depoimentos convergem para a defesa de projetos que tenham como foco discussões e implementações de ações que utilizam as tecnologias digitais. Outro aspecto identificado diz respeito ao reconhecimento das potencialidades do *software* GeoGebra no ensino de Geometria, classificado pelos participantes como dinâmico, inovador e descontraído. Além disso, foi apontado a ampla aceitação em participarem das oficinas e as diversas solicitações via *e-mail* de informações sobre a indicação de outros *softwares*, de livros e artigos que tratavam acerca da utilização das tecnologias digitais. Em relação as possibilidades de exploração do GeoGebra no ensino de Geometria, os participantes consideraram que podem facilitar as visualizações geométricas.

Nesse sentido, a pesquisa de Santos (2011) aponta que a utilização do *software* GeoGebra proporcionou ricas possibilidades de visualização de conceitos e propriedades relacionados a Retas, Circunferências e Cônicas, além de privilegiar a experimentação e dar ênfase à interpretação de construções geométricas que são difíceis de serem trabalhadas em sala de aula. As interações possibilitadas por esse recurso didático permitem explorar tanto a abordagem visual, como as manipulações algébricas, o que contribuiu para realização de reflexões, explicações e a realização de conjecturas. Além disso, contribuem para a formação de um professor mais autônomo e reflexivo.

Na pesquisa realizada por Lima & Silva (2015) foi constatado que em todas as disciplinas de Geometria, abordadas no curso de licenciatura em Matemática da instituição pesquisada, sendo elas: Geometria Analítica, Geometria Euclidiana Axiomática, Geometria não Euclidianas, Geometria Euclidiana I e II, Desenho Geométrico, Geometria das Transformações, eram desenvolvidos trabalhos que exploravam o *software* GeoGebra ou o Cabri 3D.

Considerações finais

Este texto teve como objetivo apresentar algumas revelações identificadas nas pesquisas brasileiras realizadas no período 2001 a 2019, a respeito da abordagem dada aos conteúdos de Geometria na formação inicial do professor de Matemática. Identificamos questionamentos em relação à carga horária destinada a esse campo do saber matemático. Um dos trabalhos analisados constatou que na instituição pesquisada apenas 15% de carga horária de 1.150 horas, destinadas às disciplinas específicas, foram dedicados à Geometria, sendo elas: Geometria Euclidiana Espacial; Geometria Analítica e Geometria Euclidiana Plana. De acordo com os autores, essa pequena carga horária levanta questionamentos sobre as possibilidades de aprofundamentos ou de revisão dos conteúdos. Nesse sentido, nos posicionamos a respeito da revisão de conteúdos da escola básica na licenciatura. Defendemos que a abordagem dos conteúdos não deva ter essa perspectiva. Não podemos partir do pressuposto que o acadêmico já tenha dominado esses conteúdos, pois talvez nem tenham estudado o tema. Consideramos que a abordagem tenha como ênfase os aspectos didáticos, metodológicos, históricos e epistemológicos dos conteúdos, além dos conhecimentos tecnológicos, com exploração dos ambientes computacionais por meio de atividades. Desse modo, também consideramos que a carga horária destinada ao trabalho com a Geometria parece comprometer essas nossas expectativas quanto a abordagem defendida.

Em algumas pesquisas analisadas foi apontado que, por meio da análise das ementas, foi possível constatar que conteúdos previstos para a licenciatura representaram uma extensão daqueles a serem abordados na educação básica, mesmo ao possuir uma abordagem axiomática e avançada. Entretanto, é apontado que depende de as concepções dos formadores obter ou não a articulação entre esses conteúdos. Uma vez que cabe ao professor formador buscar estabelecer as relações entre os conteúdos a serem abordados na escola básica e aqueles estudados na formação inicial.

De uma maneira geral parece haver uma concordância quanto aos conteúdos de Geometria presentes nos cursos de formação inicial de professores de Matemática e aqueles a serem ensinados no ensino básico. Porém, é apontada a excessiva formalização do conteúdo de Geometria, sendo um dos motivos que levam os professores a considerarem que a formação inicial contribuiu pouco para a sua atuação como docente na escola básica, sendo mencionada a não priorização da prática.

Um aspecto identificado e bastante preocupante diz respeito ao domínio dos conteúdos a serem ensinados. Um estudo realizado com acadêmicos que já havia cursado as disciplinas de Geometria na licenciatura apontou que em média 40% deles não reconhece o quadrado como um tipo especial de retângulo, enquanto 7% dos participantes construíram retângulos como quadrados, cometendo o equívoco de generalizar que todo retângulo é quadrado. As evidências apontadas nesses exemplos e outras não mencionados aqui, indicam que, em geral, a metade do número dos participantes encontra-se na dimensão pragmática, ou seja, nas suas justificativas utilizam apenas a aparência física, desconsideram elementos da definição e as propriedades das figuras geométricas nas construções.

A ausência das Geometrias não Euclidianas nos cursos de licenciatura é outro problema apontado. Em um estudo realizado no Paraná, constatou-se que, de 27 professores em atuação na escola básica, apenas um estudou Geometria Projetiva na formação inicial. E trata-se de uma Geometrias recomendadas pelas DCE do Paraná de 2008 para o currículo das escolas de educação básica. Muitos desses professores buscaram realizar leituras sobre as Geometrias não Euclidianas, outros realizaram curso de capacitação oferecido pela secretaria de educação ou núcleos regionais. Como sabemos esses cursos apresentam algumas fragilidades em função de muitas vezes serem realizados nos finais de semana ou nas férias. Não resta dúvidas que a falta de formação dos professores compromete a implementação das propostas, no caso em questão, e a recomendação de se incorporar as Geometrias não Euclidianas no currículo das escolas de ensino básico.

A utilização das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Geometria é apontada em muitas das pesquisas como uma grande e promissora possibilidade, enquanto recurso didático. Entretanto, são destacados alguns problemas no que diz respeito à formação docente. Muitos dos professores de Matemática em atuação na escola de educação básica foram formados em um contexto pouco permeado pelos ambientes computacionais. Uma opção para minimizar a falta desse domínio, a formação continuada, ocorre de forma incipiente e não atende a todos.

Um exemplo das fragilidades da formação inicial nesse aspecto, e bastante desolador, é o fato apontado em uma das pesquisas que compõe o corpus desse estudo. Dos 14 participantes de uma oficina: Soma dos ângulos internos de todo triângulo, apenas três indicaram que já tiveram algum contato com o GeoGebra. Porém, não foram no seu curso de licenciatura.

Uma das pesquisas buscou analisar os conhecimentos que podem ser desenvolvidos nas disciplinas de Geometria de um curso de licenciatura e apontou indícios de que parece haver a preocupação em propiciar ao futuro professor a construção de conhecimentos que venham a contribuir com a sua prática docente. Essa preocupação não apareceu de forma tão explicita em outros estudos.

Dentre esses indicativos destaca-se o número de disciplinas de Geometria no curso, sete ao todo, sendo elas: Geometria Analítica, Geometria Euclidiana Axiomática, Geometria não Euclidianas, Geometria Euclidiana I e II, Desenho Geométrico e Geometria das Transformações. Outro indicativo foi a abordagem dos conteúdos estudados na escola básica atribuída às Geometrias Euclidianas I e Geometria Euclidiana II. Outro destaque diz respeito a busca pelo desenvolvimento do Conhecimento Didático Tecnológico do Conteúdo (CDTC) ao ser construído na instituição pesquisada nas disciplinas: Geometria Euclidiana I e II, Desenho Geométrico e Geometria das Transformações.

Outro apontamento que sinaliza a intensão da instituição em instrumentalizar e propiciar ao futuro professor a construção de conhecimentos que venham a contribuir com a sua prática docente diz respeito a incorporação dos recursos computacionais na formação de professores, no curso de Matemática da instituição pesquisa, identificou-se que são desenvolvidos trabalhos que exploram o *software* GeoGebra ou o Cabri 3D nas aulas que envolvem os conteúdos de Geometria.

Em relação aos estudos futuros, pretendemos investigar a presença das Geometrias não Euclidianas nos currículos dos cursos de licenciatura em Matemática e verificar quais tem sido as contribuições da formação continuada no sentido de amenizar as fragilidades formativas dos professores de Matemática da escola básica em relação à apropriação dos recursos tecnológicos. Especialmente, a partir do isolamento social, provocado pelos cuidados preventivos para evitar os riscos de contágio do Covid 19, que ao adotar o sistema de aulas remotas, escancara a falta de estrutura das escolas públicas e evidencia ainda mais a necessidade de formação docente, visando a implementação dos novos recursos digitais em sala de aula.

Referências

Almouloud, S. A. et al. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, (27), 94-108.

Andrade, J. A. A. & Nacarato, A. M. (2004). Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista*, 11, 61-70.

Bairral, M. A. & Marques, F. J. R. (2016). Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? futuros professores de Matemática interagindo no ambiente VMT com GeoGebra**.** *Educação Matemática Pesquisa*, 18 (1), 111-130.

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. São Paulo, Edições 70 Brasil.

Brasil (1997). *Parâmetros curriculares nacionais*: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, MEC/SEF.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC). Versão Final. Brasília, MEC. Recuperado de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Brasil (2019). *Relatório Brasil no Pisa 2018* – Versão preliminar. Brasília, INEP. Recuperado de: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf

Câmara dos Santos, M. (1992). Analyse didactique d'un materiel pour les premiers apprentissages en géométrie. *Mémoire de Master en Didactique Des Disciplines Scientifiques*. Université Claude Bernarde Lyon 1.

Constantino, R. (2006). *O ensino da geometria no ambiente cinderella*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática). Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá.

Costa, A. P. & Santos, M. R. (2017) O pensamento geométrico de professores de matemática em formação inicial. *Educação Matemática em Revista–RS,* 18 (2),18-32.

Ferreira, N. S. A. (2002). As pesquisas denominadas "estado da arte". *Educação & Sociedade*, XIII (79), 257-272.

Fiorentini, D. et al. (2016). Professor que ensina Matemática como campo de estudo: uma introdução ao Estado da Arte da Pesquisa. In: Fiorentini, D.; Passos & Lima, R. C. (Org.). *Mapeamento e estado da arte da pesquisa Brasileira sobre o professor que ensina Matemática*. Campinas, Ed. da Unicamp, 17-42.

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza, UEC.

Haddad, S. (2002). *Educação de Jovens e Adultos no Brasil (1986-1998)*. Brasília, MEC/INEP/COMPED.

Lima, G. L. & Silva, M. J. F. (2015). Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de licenciatura em matemática**.** *Vidya*, 35 (2), 159-177.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, III (4), 3-13.

Lovis, K. A. & Franco, V. S. (2015). As concepções de geometrias não euclidianas de um grupo de professores de matemática da educação básica**.** *Bolema*, 29 (51), p. 369-388.

Mandarino, M. C. F. (2006). *Que conteúdos da Matemática escolar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental priorizam?* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro.

Miranda, A. O. (2008). *Formação de professores para o ensino de geometria em ambientes informatizados*: possibilidades de um trabalho cooperativo. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUCMG), Belo Horizonte.

Pavanello, R. M. (1989). *O Abandono da geometria*: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, I (1), 7-17.

Pereira, R. M.; Freitas, A. V. & Victer, E. F**. (**2016). Formação do professor de matemática**:** análises comparativas de oficinas envolvendo o GeoGebra. *Rev. Areté*, 9 (18), 61-71.

Peres. G. (1995). A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo. *Educação Matemática em Revista, Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, (4).

Pillão, D. (2009). *A pesquisa no âmbito das relações didáticas entre matemática e música: estado da arte*. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

Romanowski, J. P. & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. *Diálogo Educ*., 6 (19), 37-50.

Santos, I. N. (2011). *Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informação e comunicação*: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática), Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

Scheffer, N. F. & Heineck, A. (2016). Construções de geometria analítica com o software geogebra: uma Análise de Narrativas de Professores. São Paulo, *Educação Matemática em Revista*, *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, (51), 35-43.

Silva, G. H. G. & Penteado, M. G. (2013). Geometria dinâmica na sala de aula**:** o desenvolvimento do futuro professor de Matemática diante da imprevisibilidade. *Ciênc. Educ*., 19 (2), 279-292.

Vieira, J. E. L.; Fonseca, L. S. & Souza, D. N. (2019). Professores de matemática frente ao processo formativo para ensinar geometria na educação básica**.** *Educação Matemática em Revista*, *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, 24 (63), 18-33.

Autores

Lailson dos Reis Pereira Lopes

Licenciado em Matemática e Especialista em Matemática Superior pela Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). Mestre em Educação pela Universidade de Uberaba (Uniube). Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), Professor do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), com atuação em cursos presenciais e à distância. Membro do conselho editorial da revista Educação Matemática Debate.

E-mail: lailson.lopes@unimontes.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2275-5047

Ana Lúcia Manrique

Possui graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo, Mestrado em Ensino de Matemática e Doutorado em Educação (Psicologia da Educação), ambos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e Pós-doutorado no Programa de Pós-graduação em Educação da PUC/RJ (Pós-Doc Júnior CNPq). Pesquisadora Produtividade em Pesquisa do CNPq (2016-2018) e (2019-2021). É professora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atualmente, é Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP (2020-2022). Pesquisa sobre os seguintes temas: Formação de professores que ensinam matemática, Formadores de professores, Saberes docente, Trabalho docente, Mapas conceituais, Cálculo Diferencial e Integral e Educação Matemática Inclusiva.

E-mail: manrique@pucsp.br

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7642-0381

Josué Antunes de Macêdo

Licenciado em Matemática e Especialista em Matemática Superior pela Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUCMG). Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (Unicsul). Atualmente é Professor e pesquisador do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais (IFNMG) e Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). Realiza pesquisas sobre os seguintes temas: Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências e Matemática; Formação de professores que ensinam Matemática; Ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica; Investigação nas aulas de Ciências e Matemática; Educação Matemática e Científica.

E-mail: josueama@gmail.com

Orcid: http://orcid.org/0000-0001-7737-7509

Como citar o artigo:

LOPES, L.R.P.; MANRIQUE, A. L.; MACÊDO, J. A. Revelações sobre a presença da Geometria na formação inicial de professores de Matemática no Brasil (2001-2019). **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 1-21, enero, 2022. DOI: 10.37618

INVESTIGACIÓN EN GRUPOS COLABORATIVOS, EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO

Marcielli de Lemos Cremoneze
marciellicremoneze@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9787-3419
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
São Carlos (SP), Brasil.

Klinger Teodoro Ciríaco
klinger.ciriaco@ufscar.br
https://orcid.org/0000-0003-1694-851X
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Recibido: 29/mayo/2021 **Aceptado:** 29/agosto/2021

Resumen

En este artículo pretendemos caracterizar lo que dicen algunas investigaciones sobre las experiencias de los futuros profesores en grupos colaborativos de Educación Matemática. El marco teórico-metodológico discute el concepto de colaboración y grupos colaborativos, siendo este último el descriptor que utilizamos con las bases de datos BDTD y CAPES en el período 2008 a 2018. El enfoque metodológico adoptado para el mapeo del "estado" tipo da arte" (Ferreira, 2002), es de carácter descriptivo-analítico en el que las tesis y disertaciones localizadas fueron descritas en base a sus objetivos, contextos, metodologías, principales resultados y conclusiones, respetando fielmente las fuentes primarias. Entre 83 trabajos, cuatro cumplieron los criterios de selección del análisis y, con la aproximación de los resultados, encontramos que las acciones mediadas por la colaboración están potenciando el desarrollo profesional en la formación inicial del profesorado a partir de actividades que generan prácticas preprofesionales de aprendizaje a la docencia. En conclusión, se pudo constatar que el foco principal de la mayoría de las investigaciones se centra en el campo de la educación continua, que es relevante. Sin embargo, se trata de espacios que en general no están vinculados a la formación inicial, no permiten el acceso a futuros docentes, ya que apuntan a la necesidad de fortalecer las iniciativas de estudio/investigación que integren a docentes activos y docentes en la formación inicial, cuya colaboración es la base para la negociación de significados al compartir sus conocimientos y prácticas.

Palabras clave: Cartografía. Grupo colaborativo. Educación Matemática. Formación inicial del profesorado

Pesquisas em Grupos Colaborativos, Educação Matemática e a Formação Inicial do Professor

Resumo

No presente artigo, temos como objetivo caracterizar o que dizem algumas pesquisas sobre experiências de futuros professores em grupos colaborativos de Educação Matemática. O referencial teórico-metodológico discute o conceito de colaboração e grupos colaborativos, sendo este último o descritor a que recorremos junto às bases de dados da BDTD e CAPES no período de 2008 a 2018. A abordagem metodológica adotada, para o mapeamento do tipo "estado da arte" (Ferreira, 2002), é de natureza descritivo-analítica em que as teses e dissertações localizadas foram descritas a partir de seus objetivos, contextos, metodologias, principais resultados e conclusões, respeitando fidedignamente as fontes primárias. Dentre 83 trabalhos, quatro se enquadraram no critério de seleção de análise e, com a aproximação dos resultados, verificamos que ações mediadas pela colaboração são potencializadoras ao desenvolvimento profissional na formação inicial de professores a partir de atividades que gestam práticas pré-profissionais do aprender a ensinar. Como conclusão, foi possível perceber que o foco principal da maioria das pesquisas centra-se no campo da formação continuada, o que se faz pertinente. No entanto, são espaços que em geral não estão ligados à formação inicial, não possibilitam acesso aos futuros professores, dado que aponta para a necessidade de fortalecer iniciativas de estudos/investigações que integrem professores em exercício e professores em formação inicial, cuja a colaboração seja base para a negociação de significados ao compartilharem seus saberes e práticas.

Palavras-chave: Mapeamento. Grupo colaborativo. Educação Matemática. Formação inicial de professores.

Research in Collaborative Groups, Mathematical Education and the Initial Teacher Training

Abstract. In this article, we aim to characterize what some researchers say about the experiences of future teachers in collaborative groups of Mathematics Education. The theoretical-methodological framework discusses the concept of collaboration and collaborative groups, the latter being the descriptor we used with the BDTD and CAPES databases in the period 2008 to 2018. The methodological approach adopted for mapping the "state" type da arte" (Ferreira, 2002), is of a descriptive-analytical nature in which the localized theses and dissertations were described based on their objectives, contexts, methodologies, main results and conclusions, faithfully respecting the primary sources. Among 83 works, four met the analysis selection criteria and, with the approximation of the results, we found that actions mediated by collaboration are potentiating professional development in initial teacher education from activities that generate pre-professional practices of learning to teach. In conclusion, it was possible to see that the main focus of most research is centered on the field of continuing education, which is relevant. However, these are spaces that in general are not linked to initial training, do not allow access to future teachers, as they point to the need to strengthen study/research initiatives that integrate active teachers and teachers in initial training, whose collaboration is basis for the negotiation of meanings when sharing their knowledge and practices.

Keywords: Mapping. Collaborative group. Mathematics Education. Preservice Teacher Education.

Introdução

Apoiados em resultados da pesquisa de mestrado que desenvolvemos (Cremoneze, 2019), defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEduMat/UFMS) na linha de pesquisa "Formação de Professores e Currículo", em que problematizamos saberes docentes na formação inicial de professores em um contexto colaborativo, intencionamos caracterizar o que dizem algumas pesquisas sobre experiências de futuros professores em grupos colaborativos de Educação Matemática. Para este fim, recorremos ao processo de mapeamento no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), para caracterizar o que dizem os estudos que nos antecederam neste campo e, ao mesmo tempo, problematizar em uma apreciação crítica os objetivos, focos de investigação, referenciais teóricos e metodológicos, bem como os principais resultados e conclusões.

Entendemos que tal ação foi e é necessária para avançarmos na produção do conhecimento em Educação e Educação Matemática ao reconhecer as contribuições de pesquisadores sobre o mesmo assunto e ainda fincar estacas (Kilpatrick, 1996), demarcando o diferencial/contributos do que implementamos no grupo colaborativo do qual somos integrantes[1].

Para sustentar a discussão pretendida e atingir o objetivo a que nos propusemos, o artigo estrutura-se da seguinte forma: referencial teórico com os pressupostos da colaboração e do trabalho colaborativo em contextos de formação com professores(as); delineamento metodológico, em que descrevemos os passos do mapear dos trabalhos; descrição das teses e dissertações identificadas no período circunscrito para a busca (2008 a 2018); síntese dos focos investigativos e apreciação dos títulos analisados; e, por fim, as considerações finais.

O papel da colaboração e de grupos colaborativos na formação de professores

É no cenário de reformulações dos postulados que regem a formação e prática docente que o termo "colaboração" ganha espaço no cenário nacional e internacional na literatura especializada na temática, contribuindo de maneira significativa no campo da educação.

[1] Grupo de Práticas Colaborativas em Educação Matemática nos anos iniciais (GPCEMai-UFMS).

Pesquisas como as de Hargreaves (1998), Boavida e Ponte (2002), Fiorentini (2004) e Damiani (2008) apontam contribuições significativas nas formações que têm como base a colaboração produzida por intermédio das interações entre professores(as), futuros(as) professores(as), pesquisadores(as) e demais membros da comunidade escolar.

Neste contexto, faz-se necessário definir os termos "cooperação" e "colaboração", pois estes, muitas vezes, são utilizados como sinônimos para designar trabalhos em grupos e não o são. Em seus estudos, Damiani (2008) apresenta uma distinção entre os termos defendendo que, embora ambos tenham o prefixo "co" que significa "ação conjunta", o verbo cooperar vem da palavra latina "*operare*" que significa operar, fazer funcionar de acordo com um determinado plano. Por outro lado, o verbo colaborar é derivado de "*laborare*" que significa trabalhar, produzir, desenvolver atividades visando determinado fim.

Boavida e Ponte (2002) também corroboram com tal compreensão diferenciando os termos. Para os autores, o verbo operar está relacionado à realização de uma operação, muitas vezes, simples que não ocorre a partir de negociação conjunta. Trabalhar colaborativamente pode exigir uma série de atividades negociáveis visando objetivos comuns. É pensar, preparar, refletir, formar, desenvolver diversas ações que podem ou não estar estabelecidas e que são compartilhadas pelo grupo. Habitualmente, os grupos iniciam-se na perspectiva da cooperação e, no decorrer das discussões, tornam-se um ambiente de parceria, respeito, auxílio, portanto, "colaborativo". O que queremos dizer é que as pessoas encontram-se para fins práticos inicialmente, contudo, conforme o tempo avança vão se envolvendo e passam a negociar significantes e significados do fazer, para além dos aspectos práticos, chegando a níveis de reflexão e meta-reflexão (Schön, 2000).

"A colaboração não é um fim em si mesma mas sim um meio para atingir certos objetivos. Por isso, objetivos diferentes, prosseguidos em condições bastante diversas, exigem, naturalmente, formas de colaboração também muito diversas" (Boavida & Ponte, 2002, p. 4). Segundo Boavida e Ponte (2002), existem diversas formas de colaborar, pois os contextos são diferentes e requerem objetivos diversos para atender as demandas coletivas.

Neste sentido, os autores defendem que o termo "colaboração" está relacionado a indivíduos que trabalham em conjunto visando objetivos comuns. Embora cada indivíduo assuma um papel, não há uma relação hierárquica, os indivíduos são engajados no diálogo, na negociação com base na igualdade à alcançarem objetivos que beneficie a todos (Boavida & Ponte, 2002).

Fiorentini (2004) afirma que, na cooperação, os participantes se ajudam mutuamente, ou seja, cooperam na execução de tarefas que não necessariamente exigem negociações do grupo, podendo, ou não, haver relações desiguais e hierárquicas. Já na colaboração, os integrantes buscam atingir os mesmos objetivos, ajudando-se uns aos outros por meio de negociações entre os envolvidos. Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e corresponsabilidade nas ações desenvolvidas (Fiorentini, 2004).

Cumpre salientar que a colaboração ocorre por meio das interações estabelecidas entre o grupo que discute, reflete e produz ações conjuntas visando transformar processos. Quanto menor as relações de hierarquia, maior o potencial colaborativo e maior o engajamento dos participantes na produção de novos significados, uma vez que nas diferenças da pluralidade de visões somos todos iguais.

Ao se referir a interação no contexto da colaboração, Ciríaco (2016) realça a diferença como ponto de união, haja vista que a formação é dialógica e mediada pela negociação. Neste espaço, todas as questões são discutidas e analisadas pelo grupo a partir do respeito mútuo e da valorização das diferenças como ponto de união.

A convivência e interação entre profissionais de diferentes níveis de formação proporciona aos envolvidos no grupo experiências e diferentes olhares sobre uma mesma realidade, o que de forma isolada não seria possível. Para Boavida e Ponte (2002), a colaboração pode ocorrer entre pares, mas também pela interação de diferentes partícipes que podem estar em distintos níveis de carreira e assumirem papéis diversos na área da educação como, por exemplo, entre professores(as), futuros professores(as), coordenadores(as) e outros membros. No entanto, quanto mais diversificado for o grupo, mais esforços são necessários consolidar a colaboração.

Ainda sobre as características que envolvem um grupo colaborativo, destacamos o estudo de Azevedo (2012), para quem as características centrais deste tipo de trabalho englobam: a) engajamento o grupal; b) identidade; c) compromisso; e d) respeito mútuo. Além disso, para a autora, é importante que no espaço da colaboração ocorram leituras e discussões teóricas direcionadas a partir da fala dos integrantes.

Azevedo (2012) destaca também a questão temporal, visto que as características do grupo vão se constituindo na medida que os encontros ocorrem, isso porque o desenvolvimento dos(as) professores(as) e dos demais integrantes ocorre também com o passar do tempo, sendo assim para que um grupo seja colaborativo, tal pressuposto requer tempo e a contribuição ao desenvolvimento profissional (Azevedo, 2012).

Hargreaves (2001, p. 216-217) salienta que as relações de trabalho em colaboração, exercidas, pelos(as) professores(as), podem ser classificadas como "[...] espontâneas, voluntárias, orientadas para o desenvolvimento, difundidas no tempo e no espaço e imprevisíveis". Quando espontânea diz respeito às relações apoiadas pela própria comunidade docente e nas interações entre os profissionais que evoluem espontaneamente. São voluntárias quando resultam da própria percepção que os(as) professores(as) têm do seu valor, que é consequência da sua experiência profissional e também quando sentem o trabalho em conjunto como necessário e agradável para o seu desenvolvimento.

Portanto, este tipo de colaboração não resulta de "[...] constrangimentos administrativos ou de coação" (Hargreaves, 2001, p. 216). Nas relações de trabalho orientadas para o desenvolvimento, os(as) professores(as) decidem as finalidades e as tarefas do seu trabalho em conjunto, deixando de parte os propósitos dos elementos externos. Quando estes têm de dar resposta a "[...] ordens externas fazem-no seletivamente, baseando-se, enquanto comunidade, na sua confiança profissional e no seu juízo discricionário" (Hargreaves, 2001, p. 216).

Já as relações difundidas no tempo e no espaço dependem de uma instituição que regula a cultura de colaboração, realizando reuniões que "[...] consistem em encontros informais, quase imperceptíveis, breves mas frequentes". Estes encontros podem "[...] assumir a forma de palavras e olhares de passagem, elogios e agradecimentos, ofertas para troca de turmas em ocasiões difíceis, sugestões a respeito de novas ideias, discussões ou encontros conjuntos com pais" (Hargreaves, 2001, p. 216). Assim, este tipo de colaboração constitui-se na forma como os(as) professores(as) vivenciam a escola. Por fim, o autor classifica as relações de colaboração como imprevisíveis. Nestas, os(as) professores(as) atuam com discrição, mas exercem controle sobre o que desenvolvem, transformando as suas ações em resultados incertos e imprevisíveis (Hargreaves, 2001).

Ferreira (2013, p. 152), em investigação sobre trabalhos colaborativos, aponta que "[...] cada indivíduo participa da maioria das decisões: escolher a meta, definir as estratégias, definir as tarefas, avaliar o resultado. E o faz consciente de que é algo realmente importante para ele, algo que tanto beneficia o grupo como um todo, quanto a ele diretamente [...]". Desse modo, todos os indivíduos se envolvem com o mesmo compromisso e esforços para favorecer um objetivo em comum, proporcionando transformações positivas no ensino e na aprendizagem.

Num trabalho de cunho colaborativo, a participação do grupo ocorre de maneira ativa como fonte de aprendizagem, o espaço oportuniza reflexões e troca de experiências permitindo que o(a) professor(a) questione, explore e aprenda com os seus saberes e com os saberes dos demais colaboradores (Ferreira, 2013).

Tendo em vista este contexto, entendemos a importância de os(as) futuros(as) professores(as) terem, ainda em formação inicial, um espaço que possibilite a construção e mobilização dos saberes, não apenas privilegiando os conhecimentos específicos, mas articulando um repertório de conhecimentos metodológicos e curriculares rompendo com a dicotomia desses saberes. Para tanto, é necessário investir na formação permanente, esta deve exceder as características de mera atualização e promover a participação e reflexão no contexto de grupo, de modo que venha subsidiar uma educação transformadora e democrática aos cidadãos.

Delineamento metodológico

A abordagem metodológica adotada para este artigo é de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) de caráter descritivo-analítico. O direcionamento deu-se a partir de um mapeamento bibliográfico do tipo "estado da arte" (Ferreira, 2002) em que buscamos identificar e discutir produções científicas em um determinado campo de conhecimento (grupo colaborativo) no período de 2008 a 2018.

Segundo Ferreira (2002), tal procedimento permite levantar os principais destaques e abordagens que vem sendo realizados num recorte temporal. Trabalhos nessa área tem sido foco de muitos pesquisadores desafiados a "[...] conhecer o já construído e produzido para depois buscar o que ainda não foi feito [...]" (Ferreira, 2002, p. 259). Estudos do tipo estado da arte são necessários por apontar o que vem sendo produzido, os aportes teóricos e metodológicos que são tomados e ainda reconhecer as contribuições e/ou possíveis lacunas na produção do conhecimento em uma determinada área.

Dada a propositura do processo de mapeamento de pesquisas anteriores, o objetivo é "[...] mapear essa produção num período delimitado, em anos, locais, áreas de produção" (Ferreira, 2002, p. 265) com vista à caracterizar o que dizem algumas pesquisas sobre experiências de futuros professores em grupos colaborativos de Educação Matemática. Para tanto, em termos operacionais, a experiência do mapeamento também serviu para quantificar, analisar e levantar indicadores futuros frente aos resultados das pesquisas defendidas anteriormente, como também situar no espaço-tempo acerca da temática que pretendemos trabalhar, o que é um desafio aos pesquisadores que optam pelo estado da arte.

Guiados pelos mesmos desafios, propusemo-nos mapear teses e dissertações que evidenciassem, em seus resumos, palavras-chaves relacionadas ao descritor "Grupo Colaborativo" como espaço formativo de futuros(as) professores(as) no campo da Educação Matemática nos anos iniciais e que foram produzidas em Programas de Pós-Graduação (Mestrado e Doutorado acadêmico). A delimitação temporal para tal busca, conforme mencionado, ocorreu entre os anos de 2008 a 2018, haja vista que o ingresso da primeira autora no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat/UFMS) ocorreu em 2018 e, nesse sentido, procuramos analisar a década anterior. Desse modo, o mapeamento centrou-se na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD – e no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

No levantamento inicial, identificamos 83 pesquisas. Dos estudos encontrados, 15 resumos estavam incoerentes com descritor "*Grupo Colaborativo*" que propomos verificar, ou seja, o trabalho era apresentado no banco, porém, ao baixar o arquivo, a pesquisa abordava outro assunto como, por exemplo, estudos oncológicos desenvolvido na área da Medicina; trabalhos em rede digital; levantamento da identidade profissional de alunos(as) do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), entre outros assuntos que não versavam a temática colaboração propriamente dita e nos moldes que possibilitariam que se enquadrassem no escopo da análise aqui presente: experiências com grupos colaborativos em Educação Matemática na formação inicial do professor. Quanto as áreas de conhecimento, surgiram trabalhos em Química, Física, Sociologia, Educação Física, Ciências, Multidisciplinar discutindo Currículo e/ou Tecnologias.

O maior número de pesquisas recaiu sobre a Matemática (31). Os colaboradores dos estudos nesta área, apresentaram-se da seguinte maneira: professores(as) em exercício/formação continuada (25); alunos(as) da Educação Básica (2); levantamento bibliográfico (1); e futuros(as) professores(as) (4).

Das pesquisas que integram "*Grupo Colaborativo*" em Educação Matemática, quatro têm como colaboradores futuros(as) professores(as). Deste quantitativo, três trabalhos tiveram direta ou indiretamente licenciandos em Pedagogia como o foco da investigação de Palanch (2011), Menegazzi (2014), Conti (2015) e Cardim (2008) analisou o movimento de aprendizagens de licenciandos em Matemática.

Frente ao nosso objetivo, caracterizar o que dizem teses e dissertações acerca de grupos colaborativos na formação inicial de professores(as), são estes quatro estudos que tomaremos como objeto de apreciação crítica, pois acreditamos que contribuíram com o aprimoramento do trabalho desenvolvido no mestrado (Cremoneze, 2019), visto que debatem o conhecer e o produzir Matemática nos anos iniciais mediados pela colaboração entre a Universidade e a escola, com professores(as) em exercícios e futuros(as) professores(as) em um elo de produção de conhecimento.

O que dizem as pesquisas sobre grupos colaborativos na formação inicial?

Como apresentado no item interior, das pesquisas que integram "*Grupo Colaborativo*" em Educação Matemática, quatro tiveram como colaboradores(as) futuros(as) professores(as): Cardim (2008), Palanch (2011), Menegazzi (2015) e Conti (2015).

Cardim (2008), em sua pesquisa de mestrado, investigou saberes sobre a docência produzidos e mobilizados na formação inicial de professores de Matemática em diferentes espaços formativos. Considerou-se os saberes sobre o ensino de Geometria mediado pela tecnologia computacional. A autora acompanhou as dinâmicas e intervenções das aulas, num curso de licenciatura em Matemática, nas disciplinas de "Tecnologia Educacional em Matemática", "Estágio Supervisionado" e as dinâmicas do Grupo Colaborativo de Geometria (GRUCOGEO).

Foram apresentados os três espaços formativos em que a pesquisa ocorreu, os objetivos e as dinâmicas que possibilitaram o movimento dos futuros professores. Referindo-se ao GRUCOGEO, Cardim (2008) mencionou ser um espaço de formação docente, constituído por pesquisadores, professores, futuros professores de Matemática e pós-graduandos de diferentes cidades da região de Itatiba/SP que se reúnem para estudar o ensino de Geometria, bem como as suas possibilidades pedagógicas. Os integrantes fazem uso de instrumentos midiáticos explorando e desenvolvendo atividades de Geometria. Além disso, faz parte da dinâmica do grupo a discussão e a escrita de textos.

Os colaboradores dessa pesquisa são integrantes do grupo e, de acordo com a autora, participaram ativamente das reuniões. As futuras professoras foram incentivadas à produzir e explorar, junto com os professores, atividades direcionadas aos alunos da Educação Básica do município (Cardim, 2008).

Fizeram parte da investigação três estudantes que participavam do espaço do GRUCOGEO e cursavam o terceiro semestre do curso de licenciatura em Matemática da Universidade São Francisco. Ainda na produção de dados, as futuras professoras realizaram a disciplina de "Tecnologia Educacional em Matemática" e o "Estágio Supervisionado I", sendo possível acompanhar o movimento das estudantes nos três espaços de formação.

Para Cardim (2008), as observações das futuras professoras em uma turma do Ensino Fundamental foram refletidas nas disciplinas de tecnologia e estágio. Os projetos de intervenção e a regência das atividades também foram problematizados, o que para a pesquisadora possibilitou a interação entre os professores e os demais colegas de sala constituindo um espaço em que os licenciando colocaram em xeque suas dúvidas e anseios frente as dificuldades encontradas no planejamento e nas intervenções com os alunos do Ensino Fundamental.

De acordo com Cardim (2008), o curso de licenciatura em Matemática da Universidade São Francisco, *campus* de Itatiba, possui 35 anos de atividades. A disciplina de "Tecnologia Educacional em Matemática" possui carga horária de 68 horas e objetiva-se proporcionar aos alunos reflexões sobre o papel da informática na Educação Matemática, explorando análise dos limites, potencialidades de *softwares*, bem como jogos matemáticos.

O contexto da disciplina ocorreu por meio de leituras e discussões teóricas, produção e exploração de atividades e conceitos geométricos com uso de *softwares* de Geometria Dinâmica. Os futuros professores produziram um texto reflexivo abordando os conteúdos e a dinâmica trabalhada durante a disciplina. Segundo Cardim (2008), este material foi utilizado para compor a análise de dados da investigação. Por fim, destaca que na disciplina "Estágio Supervisionado I", as estudantes cumpriram todas as normas acadêmicas e que a dinâmica da disciplina fomentou discussões acerca do ensino de Matemática na Educação Básica e orientou os futuros professores "[...] na elaboração, com fundamentos teórico-metodológicos, de projetos para o ensino de matemática que fora aplicado em sala de aula." (Cardim, 2008, p. 70).

Em conclusões, Cardim (2008, p. 103) declara que "O processo de formação inicial docente diante de uma integração entre espaços formativos, possibilita uma articulação de conceitos e práticas, promovendo intersticialidade no sentido de produzir saber [...]". Esta articulação proporciona a apropriação de conceitos e de práticas da docência, gerando significado a formação inicial. Na visão da autora, inicialmente a motivação das estudantes em participarem do GRUCOGEO estava relacionada com o desejo de aprender os conhecimentos específicos de Geometria, bem como as metodologias de ensino. Porém, ao logo dos encontros as futuras professoras destacam a importância da interação com os professores em exercício para o desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial.

De acordo com Cardim (2008), a participação das estudantes possibilitou, além de saberes sobre a Geometria, reflexões sobre o próprio processo de formação, justamente por este transitar nos diferentes espaços de formação, permitiu dialogar teoria e prática, relacioná-las com experiências em sala de aula, ressignificá-las, produzindo e mobilizando saberes da docência.

Palanch (2011), em sua pesquisa de mestrado, objetivou investigar as contribuições que o professor que ensina Matemática e o futuro professor recebem ao participarem de um projeto de colaboração entre Universidade-Escola. Além disso, buscou pontuar as aprendizagens em relação ao trabalho docente produzido no contexto colaborativo. Para tanto, seus colaboradores foram alunos do curso de Pedagogia e de Matemática da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar *campus* de Sorocaba, e professores polivalentes e de Matemática da rede municipal e estadual.

O campo de pesquisa se deu no espaço da "Atividade Curricular de Integração Ensino, Pesquisa e Extensão (ACIEPE)" que é oferecida pela UFSCar com a temática de estudar "Possibilidades Didáticas para a Aprendizagem de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental" (Palanch, 2011, p. 71). A ACIEPE é uma experiência educativa, cultural e científica que visa articular o ensino, a pesquisa e a extensão. Participam dessas atividades professores, técnicos e alunos da Universidade. Está inserida no currículo dos licenciandos como atividade complementar, com duração de sessenta horas semestral.

Para o autor, pelo fato da ACIEPE ter características gerais às disciplinas formais, porém, se diferenciar pela liberdade na escolha das temáticas, diálogo com diversos segmentos da sociedade e pela possibilidade de os alunos reconhecerem outros espaços como, por exemplo, a sala de aula e laboratórios, constitui-se um local privilegiado para aprendizagens significativas dos futuros professores e professores.

Palanch (2011) utilizou como instrumento de produção de dados observações de campo e entrevista coletiva com dez participantes, sendo cinco licenciandas em Pedagogia, dois licenciandos em Matemática e três professores dos anos iniciais formados em Pedagogia, todos participantes da ACIEPE. As observações e entrevistas ocorreram no último encontro do grupo, o qual o autor gravou em áudio e vídeo as interações dos participantes e a entrevista coletiva. A dinâmica do encontro se deu em três momentos, primeiramente os alunos relataram como foram as oficinas das quais participaram na escola; o segundo momento foi disponibilizado para que o pesquisador realizasse a entrevista coletiva; e no terceiro momento os alunos avaliaram as atividades da ACIEPE.

Para responder a questão inicial: "Quais são as contribuições decorrentes das ações colaborativas Universidade – Escola, para o atendimento dos elementos constitutivos do trabalho docente no processo de formação de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais?" (Palanch, 2001, p. 21). O autor norteou a entrevista em duas categorias: "*Formação de Professores em Contextos Colaborativos*" e "*Elementos Constitutivos do Trabalho Docente*".

Ao discorrer sobre a categoria analítica, Palanch (2011, p. 80) menciona: "Pudemos observar que, tanto os alunos quanto os professores, sentiram-se integrantes de um mesmo grupo que estava preocupado em discutir a prática docente." Para o pesquisador, o espaço proporcionou aos estudantes interação entre alunos de Pedagogia e de Matemática potencializando reflexões individuais e coletivas sobre a prática docente, além de possibilitar o aprender por meio do compartilhamento de experiências.

Na pesquisa de Menegazzi (2014), organizou-se um projeto de extensão com estudantes do curso de Pedagogia com a intenção de proporcionar um espaço colaborativo de reflexões em que os futuros professores pudessem vivenciar a ressignificação do conceito de frações e a produção de recursos para os anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisadora justificou que a escolha do objeto matemático fração foi motivada por sua experiência enquanto professora nos diferentes níveis de ensino e suas preocupações quanto as fragilidades dos alunos em relação ao conceito de frações. Além disso, ao propor o estudo, os futuros professores foram unânimes em concordar com a dificuldade no entendimento de frações.

Participaram desta pesquisa de mestrado 8 estudantes do curso de Pedagogia, sendo que algumas alunas estavam iniciando a graduação e outras já concluindo. O estudo objetivou identificar as concepções de frações que os estudantes apresentam e analisar de que modo a participação nas atividades de um grupo colaborativo podem contribuir para o processo de ressignificação de tais concepções (Menegazzi, 2014).

A formação ocorreu durante 4 meses, contanto com 8 encontros presenciais e com atividades semanais que eram postadas no ambiente virtual do curso. A temática de cada reunião fora pensada a *priori* e apoiadas com vídeos, artigos, livros didáticos e paradidáticos, como também outros materiais que serviram de amparo para as discussões no grupo de estudo.

Os instrumentos diagnósticos foram de suma importância para identificar as concepções de frações que os estudantes constituíam antes da formação, também os indícios apontados fomentaram as discussões durante as reuniões, pois de certa forma destacava os conceitos de maior dificuldade por parte dos futuros professores, podendo ser problematizados e trabalhados pelo grupo.

Menegazzi (2014) salienta que por meio do registro do diagnóstico inicial foi notável diferenças em relação ao conhecimento matemático do grupo. O que pode estar associado ao fato de alguns integrantes estarem iniciando a formação e outros finalizando, o que de certa forma tornou o grupo heterogêneo e diversificado. Outro pondo destacado, foi o desejo dos futuros professores em participar e buscar um objetivo comum, ou seja, experiências do aprender a ensinar frações.

Para Menegazzi (2014), ao longo das reuniões, os integrantes começaram a demostrar algum progresso frente às dificuldades em compreender fração. Na visão da autora, este fato foi observado em condições de discussão entre os pares em que os participantes começaram a procurar responder dúvidas dos colegas, além de colocar em xeque suas próprias preocupações. Pelo exposto, fica claro que o processo para constituir um espaço de colaboração demanda tempo e é relativamente lento, no sentido que cada integrante vai se desenvolvendo com o tempo e se integrando ao grupo com pequenas alterações em suas atitudes. No caso da referida pesquisa, isso foi um fator limitante dado que houveram apenas 8 sessões.

Por fim, a pesquisadora salienta a necessidade de espaços comprometidos com a formação integral no sentido de tomar a prática pedagógica na escola como ponto de partida e de chegada às reflexões no âmbito de experiências formativas com os professores que ensinam Matemática e que, dessa forma, estes possam colocar em evidência suas dificuldades, discuti-las, compreendê-las, problematizá-las, desconstruir crenças negativas sobre o ensino da Matemática.

A tese de Conti (2015) teve como objetivo "[...] compreender as aprendizagens e o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental na perspectiva do letramento estatístico por meio de práticas letradas em um contexto colaborativo" (p. 51). Para tanto, a pesquisadora realizou convite aos futuros professores e professores da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que atuavam na rede pública e privada, buscando constituir um grupo com características colaborativas para estudar Estatística na perspectiva da Educação Estatística.

A autora menciona que o grupo chegou a ter 20 participantes, mas que no de correr dos estudos permaneceram 9 integrantes, isso porque o grupo foi se constituindo aos poucos, e o sentimento de pertencimento foi se desenvolvendo à medida que os integrantes sentiam que era permitido questionar, errar e que o contexto proporcionava aprendizagem entre os pares (Conti, 2015).

Ao longo do ano, ocorreram 20 encontros com professores atuando em diferentes níveis de carreira em turmas do Ensino Fundamental e Educação Infantil, como também futuros professores cursando que estavam entre o 1º e 4º ano de Pedagogia. Dos integrantes, fizeram parte da pesquisa 3 professores dos anos iniciais, 4 estudantes do curso de Pedagogia e a autora que é licenciada em Matemática e Pedagogia. Conti (2015) esclarece que a heterogeneidade do grupo abriu possibilidade aos diferentes integrantes, assumirem papéis distintos em um processo de apoio e corresponsabilidade.

De acordo com a autora, a formação visava que todos os sujeitos da investigação pudessem participar com autonomia de um processo significativo para o desenvolvimento profissional. Para Conti (2015, p. 62) "Nossa intenção foi, o tempo todo, investigar com os professores e futuros professores e não por eles, embora, no início dos encontros, eu assumisse um papel mais de interferência, aos poucos diminuído, em função do contexto colaborativo."

Isso porque, visava-se um processo de formação que possibilitasse o desenvolvimento profissional não somente dos integrantes, mas também da pesquisadora.

Para responder à questão de pesquisa, as informações foram relacionadas com 3 eixos de análises. Eixo 1 – Complexidade do desenvolvimento profissional; Eixo 2 – Colaboração; e Eixo 3 – Letramento. A autora utilizou vídeos e diário que foram fornecidos pelos participantes para compor a investigação sobre o processos de desenvolvimento profissional na perspectiva do letramento estatístico em contextos colaborativos do grupo *Estatisticando*, nome este destinado ao espaço coletivo de aprendizagens possibilitadas no ambiente de colaboração.

A dinâmica de trabalho ocorreu na perspectiva colaborativa, em que juntos futuros professores, professores da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental e formadores estudavam, problematizavam, refletiam e escreviam sobre o ensinar e aprender Estatística nas escolas.

Com a intervenção realizada, verificou-se nos primeiros encontros que os professores e futuros professores tinham pouco conhecimento para trabalhar com o letramento estatístico, mas ao longo do trabalho foi notado, indícios do desenvolvimento profissional dos participantes, pois foi possível criar um grupo de trabalho colaborativo, que permitiu uma formação significativa no que diz respeito à Estatística, na perspectiva do letramento estatístico, e ir além deste, contribuindo para o desenvolvimento profissional de todos os envolvidos (Conti, 2015).

Apreciação crítica sobre os trabalhos localizados

Sobre a concepção dos autores acerca da colaboração, Cardim (2008), Palanch (2011), Menegazzi (2014) e Conti (2015) assumem a perspectiva de colaboração defendida por Ana Boavida e João Pedro da Ponte, ao distinguirem "cooperação" de "colaboração"; Dario Fiorentinni (nas discussões sobre características dos grupos no Brasil) e Andy Hargreaves (nos processos dos professores como aprendentes em tempos de mudanças a partir da colaboração).

De modo geral, existe o consenso nos trabalhos localizados nas bases de dados tanto da CAPES quanto da BDTD de que os integrantes de um grupo colaborativo trabalham conjuntamente com apoio mútuo, buscando atingir objetivos comuns negociados pelo grupo. Embora cada integrante possa assumir um papel, não há relações de hierarquia, isso porque, em geral, o grupo é heterogêneo, pode e se constitui com professores(as), futuros(as) professores(as), professores(as) universitários(as), estudantes de mestrado e doutorado, pessoas que se encontram com o intuito de aprenderem juntos, de forma que suas ações são compartilhadas entre os pares, dado este corroborado pela literatura especializada na temática com a ressalva de que o tempo apresenta-se como um fator limitante ou não à proposta colaborativa, no sentido de evidenciar que quanto mais o tempo-espaço de imersão ao grupo, maiores possibilidades deste torna-se colaborativo chegaremos.

Cardim (2008), operando com Boavida e Ponte (2002), expõe que os termos cooperação e colaboração, muitas vezes, são encontrados como sinônimos, tal como afirmamos no início deste capítulo.

Palanch (2011), amparou-se nos estudos de Hargreaves (1998), ao defender que a colaboração pode ser uma estratégia importante para o desenvolvimento de atividades na área de educação sendo capaz da promoção do desenvolvimento profissional dos indivíduos. Ainda menciona que o fato dos grupos serem constituídos por pessoas com diferentes experiências permite maior interação e aprendizagem dos docentes.

De forma semelhante, as quatro investigações assumem o conceito de colaboração como potencializadora do desenvolvimento profissional em que professores da Educação Básica, professores(as) universitários(as), futuros(as) professores(as), mestrandos(as) e doutorandos(as), defendem que todos podem trabalhar juntos para enfrentar os desafios educacionais.

Sobre a metodologia adotada nos estudos, as pesquisas de Cardim (2008) e Conti (2014) adotaram a abordagem qualitativa em estudos de caso, objetivando conhecer uma entidade bem detalhada como os(as) futuros(as) professores(as) e compreender em profundidade as especificidades e características singulares de cada pessoa. Na visão destas autoras, o estudo de caso é uma opção adequada para as investigações realizadas.

Palanch (2011), também no âmbito de pesquisa qualitativa, utilizou entrevista coletiva e observações para analisar as experiências vivenciadas no contexto da ACIEPE com os licenciandos em Pedagogia e Matemática. Embora sua investigação não se deu nos espaços que os estudantes frequentaram por um semestre, o autor identificou indícios do trabalho colaborativo ao analisar a fala dos(as) entrevistados(as). Para discutir trabalho docente pautou-se em Tardif (2003), Amigues (2004) e Bueno (2009) e para a compreensão de grupos colaborativos Hargreaves (1998) e Foerste (2005) apresentaram-se como base central. O pesquisador amparou-se nos estudos de Hargreaves (1998) defendendo que a colaboração pode ser uma estratégia importante para o desenvolvimento de atividades na área de educação sendo capaz da promoção do desenvolvimento profissional dos indivíduos. Ainda menciona que o fato dos grupos serem constituídos por pessoas com diferentes experiências permite maior interação e aprendizagem dos docentes, dado que reforça a necessidade de termos diferentes olhares para um mesmo objeto: a Matemática.

Também no campo das investigações qualitativas em educação, Menegazzi (2014) optou por uma abordagem interpretativa. Para o autor, é um caminho propício à pesquisa, pois utiliza-se de diferentes fontes como narrativas e discursos. A análise de dados ocorre de maneira indutiva em que a intenção não reside em aceitar ou refutar hipóteses, mas em analisar todo o processo. Sua investigação pautou nas potencialidades e limitações do trabalho colaborativo. A pesquisa teve como foco identificar as concepções de frações que as futuras professoras apresentam ainda em condição de estudante. O referencial teórico opera na teoria sócio-histórica de Vygotsky (1984; 1989) e Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2001; 2008) no que se refere a grupos colaborativos utilizou-se Boavida e Ponte (2002); Fiorentini (1994; 2013) e Hargreaves (2003).

A última produção localizada, Conti (2015) utilizou como aporte teórico, entre outros autores, Barton e Hamilton (2004), Street (2003; 2004) relativos ao letramento; Batanero (2002; 2013); Gal (2002) e Lopes (2010; 2011) relativos a Educação Estatística e ao letramento estatístico; sobre desenvolvimento profissional destaca-se Passos et al. (2006). Ponte (1995; 2011) e Fiorentini (2010; 2011), além de Hargreaves (1998) para compreender o referencial do contexto colaborativo.

As pesquisas apontam a preocupação em discutir e investir na formação inicial do(a) professor(a), seja do(a) licenciado(a) em Pedagogia ou em Matemática. Os autores abordam não apenas as lacunas e fragilidades dos(as) futuros(as) professores(as), mas também, trazem contextos significativos que possibilitam o aprender a ensinar Matemática em ambientes distintos que demarcam possibilidades de organização de práticas curriculares ou não na licenciatura que podem vir a contribuir com a articulação da teoria estudada nas disciplinas com a prática escolar. No geral, o papel da colaboração em comunidades educacionais tem se mostrado significativo no que se refere a produção/mobilização de saberes e para o desenvolvimento profissional, temas mais recorrentes pelas 4 produções na formação inicial que destacamos anteriormente.

Considerações finais

Ao longo do artigo propusemos caracterizar o que dizem algumas pesquisas sobre experiências de futuros professores em grupos colaborativos de Educação Matemática. Dado o processo empreendido para o mapeamento, é possível fazer algumas inferências:

- As investigações no campo da Educação Matemática que têm como foco principal futuros(as) professores(as), no tempo por nós delimitado (2008-2018), ainda são poucas quando comparadas ao total de pesquisas encontradas. Foi possível identificar 30 (100%) pesquisas na área de Educação Matemática, apenas 4 (13%) focam a investigação na formação inicial. A discussão no campo da colaboração, pela experiência de aproximação com os trabalhos, permite concluirmos que o foco principal recai sobre professores(as) em exercício, apontando indícios que as ações formativas com base em grupos colaborativos são muito recorrentes em contextos de formação continuada, o que se faz pertinente. No entanto, são espaços que em geral não estão ligados à formação inicial, não possibilitando acesso aos(as) futuros(as) professores(as);
- Dos estudos caracterizados aqui, a tese de Conti (2015) fora desenvolvida num espaço constituído para a pesquisa e ocorreu ao longo de um ano. Já Menegazzi (2014) constituiu um projeto de extensão com duração de 40 horas. A investigação de Palanch (2011) se deu em uma "Atividade Curricular de Integração Ensino, Pesquisa e Extensão (ACIEPE)", com duração semestral de 60 horas. Cardim (2008), investigou por um semestre futuras professoras integrantes de um grupo consolidado. Esses dados trazem indícios da questão temporal em que as investigações ocorreram e na consolidação desses espaços formativos, colocam a pensar se o tempo de formação e a consolidação do grupo interfere, de alguma maneira, no desenvolvimento profissional dos(as) futuros(as) professores(as), pois, ao nos referirmos a espaços formativos que têm como base a colaboração, vemos nas pesquisas encontradas o fator tempo como um dos limitadores que podemos considerar. Isso porque demanda tempo para que ocorra a consolidação de um ambiente que se intitula como sendo "grupo colaborativo", o que de certa forma se torna um obstáculo levando em consideração o período que ocorre e os objetivos que se quer atingir com cada investigação.

Frente ao que se expôs na discussão que realizamos, o levantamento da produção do conhecimento no período analisado levou à percepção de que pesquisar e trabalhar com grupos colaborativos é importante, haja vista os ganhos de tal perspectiva formativa. Contudo, no que respeita à formação inicial de professores(as) que ensinarão Matemática, seja na licenciatura em Matemática ou na licenciatura em Pedagogia, esta temática ainda é, ao menos nos anos que realizamos a busca, pouco debatida. Sem dúvida, isso reforça a necessidade de investimentos neste campo, realidade que empreendemos esforços no Mestrado em Educação Matemática da UFMS.

Referências

Amigues, R. (2004). Trabalho do professor e trabalho de ensino. In: A. R. Machado (org.). *O ensino como trabalho:* uma abordagem discursiva. Londrina: EDUEL. p.35-54.

Azevedo, P. D. (2012). *O conhecimento matemático na Educação Infantil:* o movimento de um grupo de professoras em processo de formação continuada. 241f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. Recuperado de: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/2293/4889.pdf?sequence=1/. Acessado em: 15, ago. 2018.

Barton, D. & Hamilton, M. (2004). La literacidad entendida como práctica social. In: V. Zavala; M. Niño-Murcia; P. Ames. (Ed.). *Escritura y sociedad:* nuevas perspectivas teóricas y etnográficas. Lima: Red para el Desarrollo De Lasciencias Sociales En El Peru. P. 109-019.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. In: *Jornadas interamericanas de enseñanza de la estadística.* Conferência inaugural. Buenos Aires. p. 1-11. Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf. Acessado em: 15 out. 2018.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. In: J. M. Contreras, et al. *Actas de las 1.ª Jornadas Virtuales em Didactica de la Estadistica, Probabilidad y Combinatoria – SEIEM*, Granada, ano I, v. 2, n. 1, p. 1-8.

Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional.* Lisboa: APM. p.43-55.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora.

Bueno, L. (2009). *A construção de representações sobre o trabalho docente:* o papel do estágio. São Paulo: FAPESP/EDUC.

Cardim, V. R. C. (2008). *Saberes sobre a docência na formação inicial de professores de Matemática***.** 191f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade São Francisco, Itatiba-SP. Recuperado de: https://www.usf.edu.br/galeria/getImage/385/14343057385737068.pdf. Acessado em: 10 ago. 2018.

Ciríaco, K. T. (2016). *Professoras iniciantes e o aprender a ensinar Matemática em um grupo colaborativo.* Presidente Prudente, SP. 334f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – FCT/UNESP, São Paulo. Recuperado de: http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNSP_f4f6b97d64bb48796e54ac412190066d Acessado em: 10, jul. 2018.

Conti, K. C. (2015). *Desenvolvimento profissional de professores na perspectiva do letramento estatístico em contextos colaborativos***.** 273f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas. Recuperado de: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/253996/1/Conti_KeliCristina_D.pdf. Acessado em: 12, jul. 2018.

CREMONEZE, M. de L. (2019). *Grupo de Práticas Colaborativas em Educação Matemática nos anos iniciais (GPCEMai/UFMS):* saberes mobilizados por futuros professores. 130f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Matemática da Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. Recuperado de: https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/7267. Acessado em: 05, nov. 2021.

Damiani, M. F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar em Revista*, n. 31, p. 213-230. Recuperado de: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/12795. Acessado em: 15, jul. 2018.

Ferreira, A. C. (2013). O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In: A. M. Nacarato & M. A. V. Paiva. (Orgs.). *A formação do professor que ensina Matemática:* perspectivas e pesquisas. 3ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica. p.149-166.

Ferreira, N. S. de A. (2002). As pesquisas denominadas "estado da arte". *Revista Educação e Sociedade*, São Paulo: ano 23, n.79, p. 257-272. Recuperado de: https://www.scielo.br/j/es/a/vPsyhSBW4xJT48FfrdCtqfp/. Acessado em: 05, nov. 2021.

Fiorentini, D. (2011). A investigação em educação matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. In: *Conferência interamericana de educação matemática,* 13. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 26 -30, jun. p.01-19.

Fiorentini, D. (1994). A Educação Matemática enquanto campo profissional de produção de saber: a trajetória brasileira. Blumenau: *Dynamis*, v1, nº7, abr/jun. p.7-17.

Fiorentini, D. (2010). Desenvolvimento profissional e comunidades investigativas. In: A. Dalben. J. Diniz, L. Leal Leiva & L. Santos (Orgs.). *Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente:* Educação ambiental – Educação em ciências – Educação em espaços não escolares – Educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, v. 1. p.570-590.

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: M. C. Borba. & J. L. Araujo. (Orgs.). *Pesquisa Quantitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica. p. 53-85.

Fiorentini, D. (2013). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: M. C. Borba. & J. L. Araujo. (Orgs.). *Pesquisa Quantitativa em Educação Matemática.* 5ª edição. Belo Horizonte: Autêntica. p.53-85.

Foerste, E. (2005). *Parceria na formação de professores*. São Paulo: Cortez.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, Netherlands, n. 70, p. 1-25.

Hargreaves, A. (2003). *O ensino na sociedade do conhecimento*. Portugal: Porto Editora.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança:* o trabalho e a cultura dos professores na Idade Pós-Moderna. Portugal: McGraw-Hill.

Hargreaves, A. (2001). *Os professores em tempos de mudança***:** o trabalho e a cultura dos professores na Idade Pós-Moderna. Portugal: McGraw-Hill.

Kilpatrick, J. (1996). Fincando estacas: Uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e cientifico. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 4, n. 5, p. 99-120, 1996. Recuperado de: http://www.lite.fe.unicamp.br/grupos/matema/patrick.html Acessado em: 05, nov. 2021.

Lopes, C. E. (2011). A Estocástica no currículo de Matemática e a resolução de problemas. In: Seminário em Resolução De Problemas, 2. Rio Claro. *Anais Do Ii Serp.* Rio Claro: Unesp, V. 1. p.1-10.

Lopes, C. E. (2010). Os desafios para Educação Estatística no currículo de Matemática. In: C. E. Lopes. C. de Q. Coutinho. & S. A. Almouloud. *Estudos e reflexões em Educação Estatística.* Campinas: Mercado de Letras. p.85-103.

Menegazzi, M. (2014). *Potencialidade e limitações de um trabalho colaborativo sobre frações na formação inicial de professores que ensinam Matemática***.** 221f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRS, Porto Alegre. Recuperado de: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/97860. Acessado em: 05, nov. 2021.

Palanch, W. B. de L. (2011). *Ações colaborativas Universidade-Escola: o processo de formação de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais.* 102f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10887/1/Wagner%20Barbosa%20de%20Lima%20Palanch.pdf. Acessado em: 05, nov. 2021.

Passos, C. L. B. et al. (2006). Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: uma meta-análise dos estudos brasileiros. *Quadrante,* Lisboa, v. XV-1e2, p. 193-219. Recuperado de: https://quadrante.apm.pt/article/view/22800/16866. Acessado em: 20, maio 2018.

Ponte, J. P. (1995). Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: J. P. Ponte. et al. (Orgs). *Desenvolvimento profissional de professores de Matematica:* que formação? Lisboa: SEM-SPCE. p.193-211.

Ponte, J. P. (2011). Preparing Teachers to Meet the Challenges of StatisticsEducation. In: G. Batanero. & G. Burrill. & C. Reading. (Orgs.). *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education:* A Joint ICMI/IASE Study. New York, NY: Springer.

Schön, D. A. (2000). *Educando o profissional reflexivo*: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Trad. R. C. Costa. Porto Alegre: Artmed.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica*. Campinas, SP: Papirus.

Skovsmose, (2001). O. *Educação Matemática Crítica:* a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus.

Street, B. V. (2004). Los nuevos estudios de literacidad. In: V. Zavala. M. Niño-Murcia. & P. Ames. (Orgs.). *Escritura y sociedad:* nuevas perspectivas teóricas y etnográficas. Lima: Red para el Desarrollo de las Ciencias Sociales en el Perú.

Street, B. V. (2003). *What's "new" in New Literacy Studies? Critical approaches to literacy in theory and practice.* Current Issues in Comparative Education – Teachers College, Columbia University, Columbia, v. 5, n. 2, p.77-91. Recuperado de: http://www.tc. columbia.edu/cice/articles/ bs152.html. Acessado em: 25, nov. 2018.

Tardif, M. (2003). *Saberes docentes e formação profissional***.** 3ª ed. Petrópolis: Vozes,

Vygotsky, L. S. (1984). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (1989). *Pensamento e linguagem.* São Paulo: Martins Fontes.

Autores:

Marcielli de Lemos Cremoneze

Doutoranda em Educação na linha de pesquisa "Educação em Ciências e Matemática" pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Mestra em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS Campo Grande, na linha de pesquisa "Formação de Professores e Currículo"; Integrante do MANCALA - "Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Cultura e Formação Docente" (CNPq/UFSCar) e do Grupo de Estudos e Pesquisa "Outros Olhares para a Matemática" (GEOOM/CNPq/UFSCar). É licenciada em Pedagogia pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, Campus Naviraí.

Correo electrónico: bramarxy@hotmail.com

https://orcid.org/00xx-0001-5757-2075

Klinger Teodoro Ciríaco

Professor Adjunto do Departamento de Teorias e Práticas Pedagógicas (DTPP) do Centro de Educação e Ciências Humanas (CECH) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar); Licenciado em Pedagogia (UFMS, *Campus* Três Lagoas); Mestre e Doutor em Educação (FCT/UNESP, Presidente Prudente). Docente Permanente dos Programas de Pós-Graduação: Educação Matemática (UFMS/INMA, Campo Grande); Educação (PPGE/UFSCar); e do Mestrado Profissional em Educação (PPGPE/UFSCar). Líder do "MANCALA – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Cultura e Formação Docente" (CNPq/UFSCar) e Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisa "Outros Olhares para a Matemática" (GEOOM). Tem experiência nas seguintes áreas: Interculturalidade, Educação Matemática na Infância, Psicologia da Educação Matemática, Formação de Professores, Início da Docência, Desenvolvimento Profissional e Grupos Colaborativos.

Correo electrónico: klinger.ciriaco@ufscar.br

https://orcid.org/0000-0003-1694-851X

Como citar o artigo:

CREMONESE, M. L.; CIRÍACO, K. T. Pesquisas em Grupos Colaborativos, Educação Matemática e a Formação Inicial do Professor. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 138 – 160, enero, 2022. DOI: 10.37618

Conocimiento movilizado por los estudiantes desde los primeros años de la escuela primaria al interpretar infografías estadísticas

Waleska Stefany Moura Diniz
stefanydiniz10@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1916-7153
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Gilda Lisbôa Guimarães
gilda.lguimaraes@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1463-1626
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Recibido: 26/mayo/2021 **Aceptado:** 26/agosto/2021

Resumen

El presente estudio consiste en una investigación cualitativa desarrollada en el Gref (Grupo de Estudio de Educación Estadística en Educación Primaria) que tiene como objetivo analizar la comprensión de conceptos estadísticos, en la perspectiva de la Alfabetización Estadística, movilizada por estudiantes de 3 ° y 5 ° año de Educación Primaria. (9 y 11 años) al interpretar y concluir sobre datos en infografías estadísticas. Para ello, se realizaron entrevistas semiestructuradas mediante el método clínico piagetiano, con cuatro alumnos de 3º y 5º de primaria. Las preguntas de la entrevista involucraron la interpretación y elaboración de conclusiones sobre la información presentada en una infografía estadística. Los resultados no mostraron diferencias entre cursos escolares, ya que indican que tanto el 3º como el 5º año interpretan y sintetizan conclusiones sobre la información estadística en la infografía, siempre y cuando sean inducidos a reflexionar sobre los datos y hacer las relaciones necesarias. Además, estos estudiantes demuestran, en diferentes momentos de su interpretación, movilizar diferentes conocimientos y habilidades involucradas en los elementos cognitivos y disposicionales del Letramento Estadística defendidos por Gal.
***Palabras clave*:** Educación estadística. Letramento estadística. Infografía. Educación Primaria.

Conhecimentos mobilizados por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao interpretar infográficos estatísticos

Resumo

O presente estudo consiste em pesquisa qualitativa desenvolvida no Gref (Grupo de Estudo em Educação de Estatística no Ensino Fundamental) a qual tem como objetivo analisar a compreensão de conceitos estatísticos, na perspectiva do Letramento Estatístico, mobilizados por estudantes do 3º e do 5º ano do Ensino Fundamental (9 e 11 anos de idade) ao interpretar e concluir sobre dados em infográficos estatísticos. Para tal, foram realizadas entrevistas semiestruturadas através do método clínico piagetiano, com quatro estudantes do 3º e do 5º ano do Ensino Fundamental. As questões da entrevista envolveram a interpretação e elaboração de conclusões sobre informações apresentadas em um infográfico estatístico. Os resultados não demonstraram diferenças entre os anos escolares, pois, indicam que tanto alunos do 3º quanto do 5º ano interpretam e sintetizam conclusões sobre as informações estatísticas do infográfico, desde que sejam levados a refletir sobre os dados e a fazer

relações necessárias. Além disso, esses estudantes demonstram, em distintos momentos durante a sua interpretação, mobilizar diferentes conhecimentos e habilidades envolvidas nos elementos cognitivos e disposicionais do Letramento Estatístico defendido por Gal.
Palavras-chave: Educação Estatística. Letramento Estatístico. Infográfico. Ensino Fundamental.

Knowledge mobilized by students from the early years of elementary school when interpreting statistical infographics

Abstract

The present study consists of qualitative research developed at Gref (Study Group on Statistics Education in Elementary School) which aims to analyze the understanding of statistical concepts, in the perspective of Statistical Literacy, mobilized by students from the 3rd and 5th year of the Elementary School (9 and 11 years old) in the interpretation and conclusion about statistical data and infographics. To this end, semi-structured interviews were carried out using the Piagetian clinical method, with four students from the 3rd and 5th grades of elementary school. The interview questions involved the interpretation and elaboration of conclusions about information presented in a statistical infographic. The results did not show differences between school years, as they indicate that both the 3rd and the 5th year interpret and synthesize conclusions about the statistical information in the infographic, as long as they are led to reflect on the data and make the necessary relationships. Furthermore, these students demonstrate, at different times during their interpretation, to mobilize different knowledge and skills involved in the cognitive and dispositional elements of Statistical Literacy defended by Gal.
***Keywords*:** Statistical Education. Statistical literacy. Infographic. Elementary School.

Introdução

A ampla divulgação e acesso à informação e aos resultados de inúmeras pesquisas nas mais diversas áreas, evidenciam a necessidade de tornar o cidadão competente para interpretar os dados e fenômenos pesquisados e analisados estatisticamente. Sabendo que os gráficos são uma forma de divulgação e acesso à informação, mas que podem e são muitas vezes manipulados, é imprescindível aos cidadãos uma formação crítica em relação às informações disseminadas pelas mídias. Dessa forma, consideramos essencial, desde os primeiros anos de escolarização, o ensino fundamentado no Letramento Estatístico, no sentido de possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades essenciais para a compreensão e reflexão crítica da informação divulgada.

Nesse sentido, tomamos como marco teórico a compreensão de Letramento Estatístico de Gal (2002) o qual afirma que o Letramento Estatístico envolve conhecimentos e habilidades de interpretação, avaliação crítica e comunicação de reações e opiniões a respeito das informações estatísticas, ou seja, elementos cognitivos e disposicionais.

Nesta pesquisa, também é discutido o que propõe a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) para o ensino e a aprendizagem da Estatística, em especial, para a interpretação de gráficos, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, trazemos para a discussão alguns estudos recentes que investigaram as capacidades e as dificuldades demonstradas por estudantes dos anos iniciais ao interpretar gráficos.

Além disso, discorremos sobre infográfico, que é um recurso que vem sendo muito utilizado pela mídia na disseminação de informações estatísticas. Segundo Rajamanickam (2005), os infográficos são uma forma visual de apresentação de informações, que utiliza de elementos visuais e textuais de forma explicativa, possibilita a visualização de muitos dados e tem como objetivo informar entretendo. Porém, o infográfico não se resume à transformação do que pode ser lido no que pode ser visualizado, mas requer uma filtragem da informação, o estabelecimento de relações e o uso de recursos que permitam ao leitor compreender o significado da informação (RAJAMANICKAM, 2005).

Por fim, são discutidos os resultados de estudos que utilizaram infográficos para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos em salas de aula dos anos iniciais, bem como, discorremos sobre o que aponta a BNCC para o trabalho com infográficos com estudantes do Ensino Fundamental. Além disso, discorremos sobre a tendenciosidade dos dados midiáticos, em especial em infográficos.

Porém, apesar de infográficos estarem sendo muito utilizados na divulgação de dados pela mídia e de serem recomendados no nosso documento curricular, ainda são poucos os estudos que os utilizam enquanto recurso para o ensino de matemática em salas dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nenhum estudo envolvendo conhecimentos estatísticos para os anos iniciais foi encontrado.

Por esse motivo, nesse estudo temos como objetivo analisar a compreensão de conceitos estatísticos, na perspectiva do Letramento Estatístico, mobilizados por estudantes do 3º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao interpretar e concluir sobre dados em infográficos estatísticos.

O Letramento Estatístico e a interpretação de dados

Diariamente, temos acesso às informações estatísticas divulgadas em plataformas científicas e midiáticas e, dessa forma, segundo Gal (2002) é fundamental ao cidadão uma formação que desenvolva conhecimentos que lhe possibilite interpretar e avaliar criticamente essa informação, através de um ensino voltado para o Letramento Estatístico.

O Letramento Estatístico envolve um grupo de conhecimentos e habilidades formais e informais, de crenças e atitudes, e de postura crítica, necessárias para a formação de cidadãos mais informados e críticos. Segundo Gal (2002), o Letramento Estatístico possui dois componentes interrelacionados: os elementos cognitivos e os elementos de disposição. Para o autor, os elementos de cognição envolvem "a capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, argumentos relacionados a dados ou fenômenos estocásticos, em contextos diversos" e a "capacidade de discutir ou comunicar suas reações a tais informações estatísticas, tais como seu entendimento do significado das informações, suas opiniões sobre as implicações dessas informações ou suas preocupações em relação à aceitabilidade de determinadas informações (GAL, 2002, p. 2-3).

Gal (2002) argumenta que ser letrado estatisticamente requer a ativação conjunta de disposições e de conhecimentos cognitivos básico. Segundo o autor, são elementos disposicionais: a postura crítica, que envolve atitude questionadora em relação as informações estatísticas; e, as crenças e atitudes, que envolvem a postura crítica e a disposição das pessoas para usar sua capacidade de letramento estatístico.

Considerando que a sociedade contemporânea utiliza de gráficos, tabelas e dados na divulgação de informações estatísticas, entendemos que é fundamental que os estudantes desenvolvam habilidades e conhecimentos que os tornem capazes de interpretá-los.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), reforça a importância do Letramento Estatístico na formação cidadã do estudante, defendendo um ensino que possibilite o desenvolvimento de habilidades de coleta e apresentação dos dados, bem como, de interpretação, avaliação e tomada de decisão sobre informações estatísticas. Nesse documento, a habilidade de interpretação de gráficos (ler, compreender e analisar) é indicada para que seja desenvolvida desde o 1º ano do Ensino Fundamental.

Ao observar o Quadro 1 é possível perceber que há uma gradação dos objetos e habilidades a serem desenvolvidos em cada ano escolar, envolvendo diferentes tipos de gráficos que os alunos devem interpretar e concluir sobre os seus dados.

Quadro 1 – Interpretação de dados na BNCC para os Anos iniciais

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º ano	Leitura de gráficos de colunas simples.	(EF01MA21) Ler dados expressos em gráficos de colunas simples.
2º ano	Coleta, classificação e representação de dados em gráficos de colunas.	(EF02MA22) Comparar informações de pesquisas apresentadas em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima.
3º ano	Leitura, interpretação e representação de dados em gráficos de barras	(EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos.
4º ano	Leitura, interpretação e representação de dados em gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e colunas e gráficos pictóricos.	(EF04MA27) Analisar dados em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise.
5º ano	Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em gráfico de colunas agrupadas, gráficos pictóricos e gráfico de linhas.	(EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões.

Fonte: Elaboração baseada na BNCC (BRASIL, 2017, p. 278-295)

Consideramos que a habilidade de concluir, enquanto parte da interpretação, é essencial para o desenvolvimento da capacidade de tomar decisões a partir de informações estatísticas. Nesse sentido, entendemos que essas habilidades são essenciais para a formação da postura crítica do estudante, devendo ser desenvolvida desde os anos iniciais.

Diversos estudos vêm comprovando que crianças desde os anos iniciais do Ensino Fundamental são capazes de interpretar e concluir sobre dados estatísticos em contextos reais. Dentre eles destacamos o estudo desenvolvido pelo Gref, por Cavalcanti e Guimarães (2018), que investigaram os conhecimentos apresentados por estudantes do 5º ano, antes e depois de conhecerem os dados estatísticos. A partir dos resultados as autoras constataram que os estudantes, desde o 5º ano, são capazes de interpretar gráficos de barras, revendo suas hipóteses iniciais quando defrontados com dados reais apresentados em gráficos. Em relação as habilidades de elaborar conclusões, as autoras observam que a partir de uma intervenção de ensino referente a essa habilidade os alunos aprenderam a realizar. Entretanto, analisar conclusões ainda foi difícil para os estudantes desse ano escolar. As autoras defendem que proporcionar atividades que levem os estudantes a refletir sobre dados reais em situação de interpretação e construção de gráficos é imprescindível à formação cidadã.

Nesse mesmo sentido, gostaríamos de destacar outro estudo recente do Gref, desenvolvido por Cavalcanti e Guimarães (2019), realizado com estudantes do 1º ao 5º ano (crianças e adultos da EJA), que investigaram os conhecimentos desses estudantes para interpretar escalas em gráficos. Os resultados do estudo demonstraram que os estudantes são capazes de realizar interpretações de gráficos de barras e pictóricos desde o 1º ano. As autoras, porém, destacam que a vivência cotidiana se mostra insuficiente para a compreensão de escala em gráficos, uma vez que adultos de mesmo grau de escolaridade apresentam desempenho semelhante, reforçando a importância de os professores levarem os estudantes a reconhecerem os elementos estruturais de um gráfico (título, eixos e fonte) e a compreenderem um valor explícito ou implícito de uma escala a fim de permitir aos alunos uma análise crítica, identificando se existe manipulação de informações.

Infográfico e implicações para a educação

Segundo Rajamanickam (2005), os infográficos são representações visuais de informação que combinam imagens, palavras e símbolos, utilizando de forma híbrida o verbal e o visual e oferecendo maior eficácia da comunicação. A representação visual da informação não se resume à transformação do que pode ser lido no que pode ser visualizado, mas que requer uma filtragem das informações, o estabelecimento de relações, a diferenciação de padrões e sua representação de maneira a permitir ao leitor compreender o seu significado.

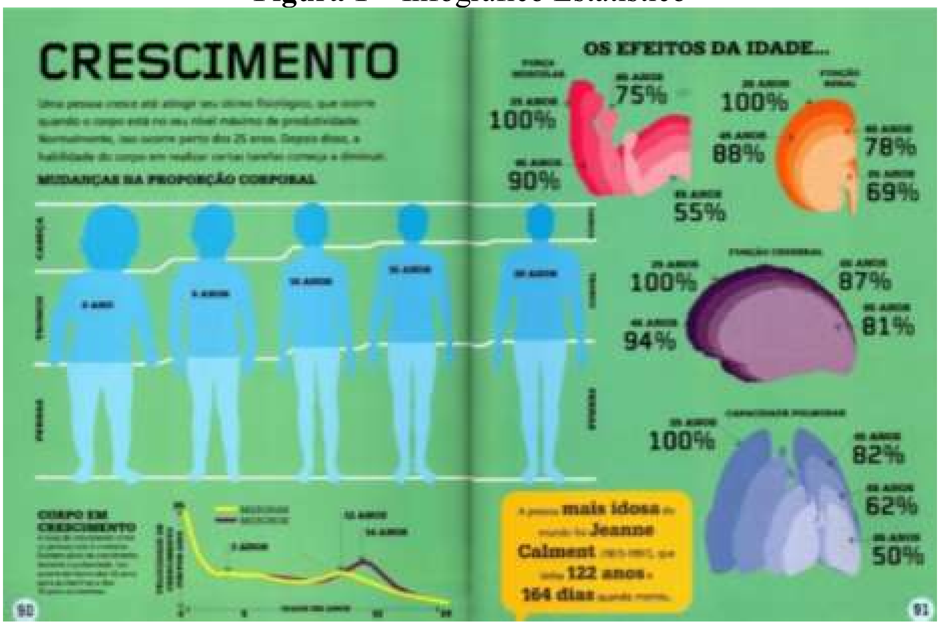
Esse autor desenvolveu uma tipologia de estrutura que os sintetiza em três variáveis: tipo de informação, dispositivos de representação e método de comunicação, ou seja, conteúdo, forma e mídia na qual é veiculada. Sobre os tipos de informação, os classifica em: espacial, que envolve posições em relação à localização; cronológica, que envolve sequencias e relações em linha de tempo; e, quantitativa, que envolve a organização de quantidades. A respeito dos dispositivos de representação os classifica em: diagramas, que envolvem a apresentação de informações através de linhas do tempo, mostrando sequencias de eventos; mapas, que envolvem informações sobre localizações, através de representação da realidade; e gráficos (linhas, barras, setor e área), utilizados de acordo com as relações que pretende apresentar.

Por fim, classifica os métodos de comunicação em três tipos: estático, no qual a informação é apresentada em sua totalidade, não podendo ser modificada, em mídia impressa e digital; dinâmico, no qual a informação é apresentada em sequência de animação gráfica, divulgada em mídia digital; e interativo, no qual a informação é apresentada de acordo com a escolha do leitor, possibilitando simulações ou explorações, através de mídia digital.

A partir da tipologia de infográficos de Rajamanickam (2005), classificamos os infográficos com informação do tipo quantitativa e que possuem gráficos como dispositivos de representação, de infográficos estatísticos. A Figura 1 apresenta um exemplo de infográfico que consideramos como estatístico, pois seu foco é na apresentação de informação do tipo quantitativa. Esse infográfico apresenta informações sobre os níveis de produtividade no corpo humano e de alguns de seus órgãos em relação as idades através de gráficos pictóricos e pequenos textos informativos; apresenta as mudanças na proporção corporal em relação as idades, através de imagens; apresenta a velocidade de crescimento de meninas e meninos em relação as idades, através de gráfico de linhas e de texto informativo, trazendo diferentes informações relacionadas ao assunto.

Como podemos observar na Figura 1, o infográfico estatístico "Crescimento" foi elaborado e publicado em um livro para crianças e, além das informações estatísticas, apresenta informações sobre o corpo humano. Nesse sentido, demonstra a possibilidade de um trabalho interdisciplinar. Os infográficos podem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento, dentre elas a educação, articulando linguagem verbal e não verbal. Os infográficos oportunizam a eficácia na apresentação e compreensão da informação, bem como, possibilitam relacionar diversos assuntos. Apesar disso, ainda são poucos os estudos com infográficos envolvendo crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Figura 1 – Infográfico Estatístico



Fonte: Richards e Simkins (2012, p. 90-91)

Estudos recentes como os de Alshehri e Ebaid (2016) com estudantes 3º ano do Ensino Fundamental, na Arábia Saudita, e de Ozdal e Ozdamli (2017) com estudantes do 5º ano, na República Turca de Chipre do Norte, trazem evidências das aprendizagens possibilitadas pelo trabalho com infográficos com os estudantes em sala de aula. A partir dos resultados desses estudos, foi possível constatar que o uso de infográficos na educação teve um impacto positivo no sucesso acadêmico dos estudantes nas disciplinas analisadas, demonstrando aprendizado dos diferentes conceitos trabalhados e que eles são importantes recursos para a compreensão dos conteúdos e para a motivação da aprendizagem.

Ainda a respeito do uso educacional de infográficos nos anos inicias do Ensino Fundamental, na BNCC (BRASIL, 2017), eles são indicados de serem abordados na área de Linguagem - Práticas de Estudo e Pesquisa, enquanto exemplo de gênero do campo investigativo que pode ser trabalhado nos anos iniciais. Além disso, o documento indica que o infográfico é um dos gêneros textuais a serem trabalhados com os estudantes desde o 1º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de desenvolver habilidades de leitura, compreensão e produção de textos expositivos de divulgação científica, desde que sejam destinados a crianças e que sejam considerados a situação comunicativa e o tema ou assunto do texto. Além desses, o documento destaca como objetivos específicos para o 4º e 5º ano o desenvolvimento de habilidades como “reconhecer a função de gráficos, diagramas e tabelas em textos, como forma de apresentação de dados e informações” e “comparar informações apresentadas em gráficos ou tabelas” (BRASIL, 2017, p. 127).

Nesse documento, na área da Matemática e em especial na unidade temática Estatística e Probabilidade, porém, não há indicação do uso de infográficos como recursos para o ensino de Estatística. Consideramos isso uma falha, na medida em que, como muitos infográficos possuem informações estatísticas, é necessário ao cidadão possuir compreensão de conceitos estatísticos para poder interpretar e concluir sobre suas informações, bem como, se posicionar criticamente sobre elas e não ser influenciado por dados tendenciosos.

Vários estudos vêm evidenciando a tendenciosidade de dados apresentados na mídia. Dentre os mais recentes, destacamos o estudo de Silva e Samá (2018) que apontam que, além de divulgar informações, as mensagens divulgadas pelas mídias também são usadas para disseminar e influenciar a maneira de pensar, se comportar e organizar a vida nas sociedades. Por esse motivo, as autoras destacam a importância do conhecimento estatístico para a formação do leitor/consumidor de dados estatísticos divulgados nas mídias, como o caso dos infográficos. Entendendo isso, as autoras defendem que o ensino da Estatística seja promovido desde o Ensino Básico e consideram que a apropriação dos conhecimentos estatísticos é essencial à cidadania, por possibilitar ao cidadão analisar e questionar a veracidade de informações que circulam socialmente.

Nesse mesmo sentido, Cavalcanti e Guimarães (2019) apontam que, apesar do importante papel da mídia na divulgação de informações estatísticas, ela tem como interesse formar a opinião dos cidadãos. As autoras apontam que os infográficos, enquanto recursos midiáticos, também podem ser vinculados aos interesses de quem os produz e apontam que a grande quantidade de informação apresentada nos infográficos pode dificultar a avaliação da veracidade de todas as suas informações. Entendendo isso, as autoras destacam a importância de o professor propor atividades que envolvam a interpretação dos gráficos usados na mídia para que promova a formação de cidadãos informados e críticos.

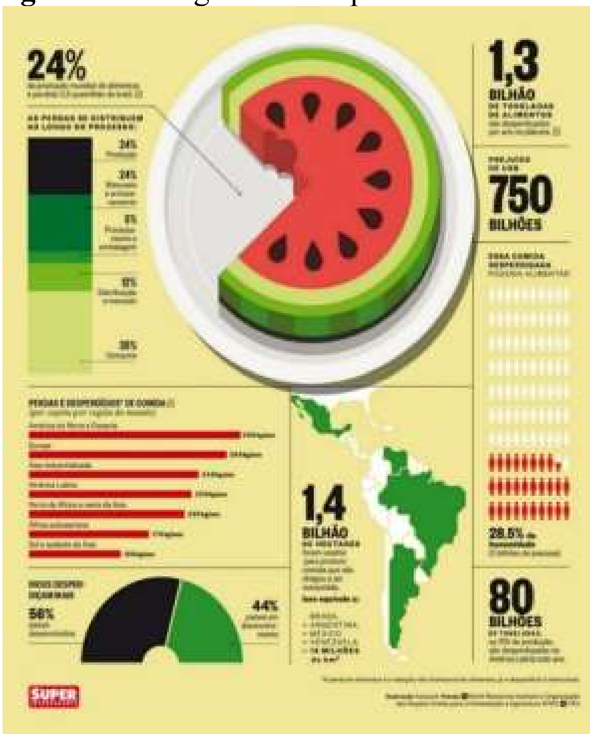
Método

O presente estudo trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, que tem como objetivo analisar a compreensão de conceitos estatísticos, na perspectiva do Letramento Estatístico, mobilizados por estudantes do 3º e do 5º ano do Ensino Fundamental ao interpretar e concluir sobre dados em infográficos estatísticos.

Participaram do estudo quatro estudantes brasileiros do 3º e do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo dois estudantes de cada ano, de escolas públicas e privadas da cidade de São Lourenço da Mata, região metropolitana do Recife - Pernambuco/Brasil. Para assegurar a identidade das crianças, nesse estudo serão identificadas por letras do Alfabeto, sendo os estudantes A e B os do 3º ano e os estudantes C e D os do 5º ano. A escolha por esses anos escolares se deu pelo fato de a habilidade de leitura de texto ser um fator importante para a interpretação de infográficos e, geralmente, estudantes do 3º e 5º ano já são leitores.

Foi realizada uma entrevista semiestruturada a partir do método clínico-piagetiano, individualmente, com cada estudante em suas residências. A escolha por esse método se deu por ele envolver a realização de entrevista e observação das respostas dos estudantes e de questionamentos para a obtenção de justificativas (CARRAHER, 1989), buscando entender os conhecimentos sobre determinado conteúdo. Nessas entrevistas o papel do mediador é fundamental, desde o planejamento das questões a serem feitas, bem como, os questionamentos que julgar necessários durante a entrevista, para a elucidação dos processos mentais que levaram o aluno à uma dada resposta. Nessa pesquisa, a entrevista foi composta por questões de interpretação sobre o infográfico estatístico "Desperdício de Comida" (Figura 2) da Revista Superinteressante.

Figura 2 – Infográfico: Desperdício de Comida



Fonte: https://geografiavisual.com.br/wp-content/uploads/2016/10/superinteressante-desperdicio-de-comida-infografico-1300.jpg.

O infográfico estatístico “Desperdício de Comida” apresenta informações sobre as perdas mundiais de alimento em todo o processo desde a produção ao consumo, sobre o desperdício de comida por pessoa por região do mundo, sobre o desperdício de comida entre os países ricos e em desenvolvimento, sobre o prejuízo desse desperdício em dólares e sobre o quantitativo de pessoas que poderiam ser alimentadas com essa comida que é desperdiçada, através de gráfico de barras simples e sobrepostas, gráfico de setores, pequenos textos informativos e imagens de proporção.

As questões da entrevista foram pensadas levado em consideração os objetos de conhecimento e as habilidades elencadas na BNCC (BRASIL, 2017) para o 3º e 5º ano do Ensino Fundamental, para a leitura e compreensão de infográficos (Área de Linguagem - Práticas de Estudo e Pesquisa) e para a interpretação de gráficos (Área da Matemática - Estatística e Probabilidade). Essas questões podem ser observadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Classificação dos conhecimentos e habilidades das questões da entrevista segundo a BNCC

Objetos de conhecimento	Habilidades	Questões
Compreensão em leitura; Leitura de imagens analíticas em textos.	Ler e compreender textos de divulgação científica; Ler e compreender dados e informações apresentadas em gráficos e diagramas.	1. Esse infográfico fala sobre o que? Quais informações estão sendo apresentadas? 2. Quais informações o mapa está mostrando? 3. Quanto alimento é desperdiçado no mundo por ano? Isso é muito? 4. A comida desperdiçada poderia alimentar muita gente? Quantas pessoas? 5. Imagem da melancia: Essa imagem fala sobre o que? 24% é metade, mais da metade ou menos da metade da imagem?
Leitura e interpretação de gráficos.	Ler, interpretar e comparar dados apresentados em gráficos de barras para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos.	6. Ao longo do processo de produção de alimentos qual a etapa que tem mais perda ou desperdício? Em qual delas esse desperdício é menor? 7. Em qual região do mundo o desperdício de alimentos é maior? E, em qual é menor? Em quais regiões a quantidade de desperdício é semelhante entre si?
	Sintetizar conclusões.	8. Podemos afirmar que nós consumidores somos quem mais desperdiça alimentos? 9. Podemos afirmar que pobres desperdiçam menos alimentos do que os ricos? Por quê tu achas que isso acontece? 10. O que podemos concluir a partir desse infográfico?

Fonte: Elaboração baseada na BNCC (BRASIL, 2017, p. 127-295)

Durante as entrevistas, inicialmente, uma das pesquisadoras mostrava o infográfico para a estudante e solicitava que iniciasse a sua leitura em voz alta. Essa exigência propiciava a pesquisadora registrar a ordem de leitura utilizada pela estudante. Em seguida, eram realizadas as questões da entrevista, envolvendo a interpretação das informações estatísticas presentes no infográfico e justificadas as respostas. Essas respostas dos estudantes foram analisadas de forma qualitativa através da observação das habilidades e conhecimentos mobilizados para a interpretação do infográfico estatístico, levando em consideração os elementos cognitivos e disposicionais do Letramento Estatístico de Gal (2002).

Resultados e discussões

No início das entrevistas solicitamos aos estudantes que lessem as informações do infográfico, isso se deu pelo fato de que na elaboração dos infográficos é dado destaque para contextualizar e ressaltar os trechos considerados mais importantes pelo infografista. Porém, durante a leitura inicial do infográfico "Desperdício de Comida", foi possível perceber que nem sempre os elementos de destaque chamaram a atenção dos estudantes e a ordem de leitura das informações foram diferentes. Marcamos a ordem de leitura e observação dos estudantes com números em azul, como pode ser observado nas Figuras 3, 4, 5 e 6. Apesar de algumas informações em destaque, o foco desse infográfico é apresentar informações em um padrão de leitura de cima para baixo, de forma que as informações anteriores são complementadas pelas seguintes. Observando a ordem de leitura dos estudantes nesse infográfico é possível perceber que em sua maioria eles conseguiram respeitar essa ordem.

Figura 3 – Leitura do estudante A

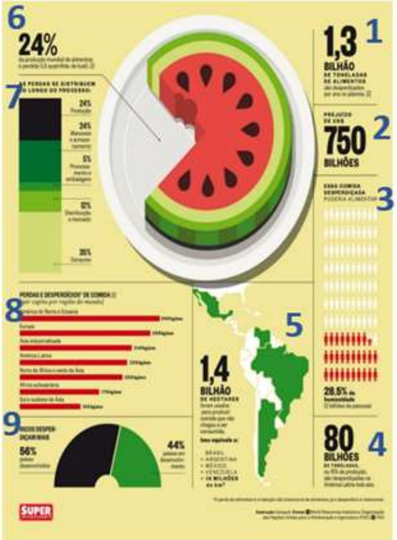


Figura 4 – Leitura do estudante B

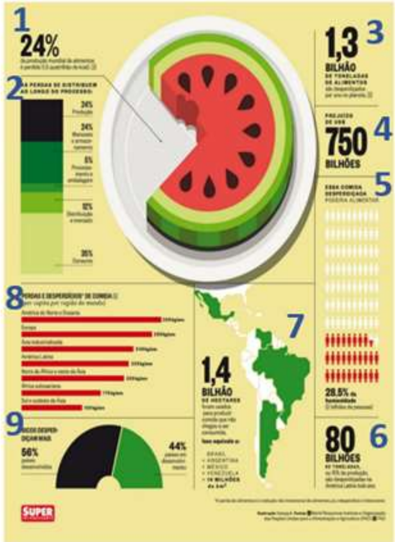


Figura 5 – Leitura do estudante C

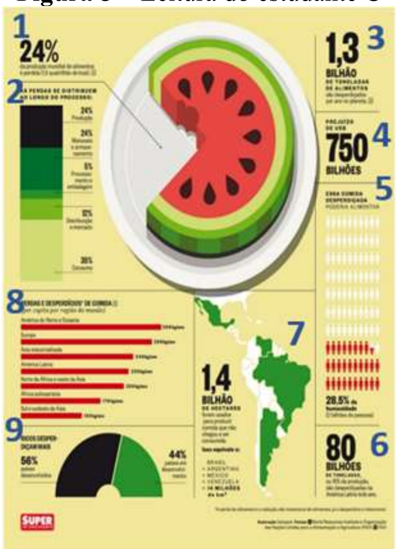
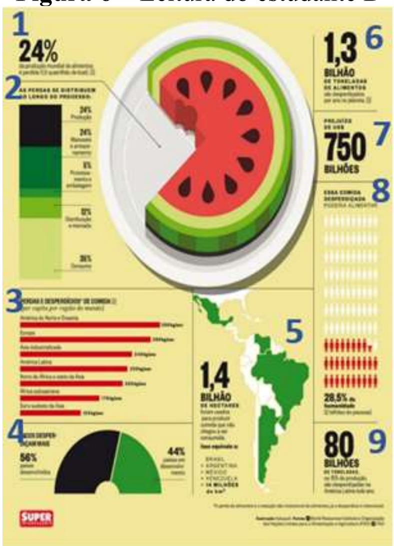


Figura 6 – Leitura do estudante D



Fonte: Elaboração pelos autores

Após essa primeira leitura do infográfico, os estudantes foram questionados sobre o que entenderam a partir dessa leitura, com liberdade para falar sobre suas primeiras compreensões a respeito das informações.

Quadro 3 – Respostas dos estudantes na questão de leitura e compreensão inicial

Estudante	1. Esse infográfico fala sobre o que? Quais informações estão sendo apresentadas?
A	A: Ele fala sobre o desperdício de comidas, da comida que desperdiça no mundo. Que 28,5 da humanidade pode querer comer. Tanta gente poderia comer.
B	B: Sobre o desperdício de comida em cada lugar, no mundo.
C	C: Ele fala sobre desperdício da comida em alguns países. Eu vi o prejuízo de quando a comida é desperdiçada, que são 750 bilhões, as perdas se distribuem ao longo do processo também, e a produção de alimento desperdiçado que são 80 bilhões de toneladas.
D	D: Que os países mais ricos desperdiçam mais comida que os países pobres e, que o prejuízo das pessoas desperdiçando comida são 750 bilhões.

Fonte: Elaboração pelos autores

Como podemos observar nas respostas e justificativas nessa primeira questão, os estudantes do 3º e do 5º ano demonstraram compreender muitas das informações do infográfico. Porém, demonstram observar apenas as informações textuais do infográfico e, dessa forma, dentre os conhecimentos estatísticos os estudantes mobilizaram habilidades que Gal (2002) define como “letramento geral”, que envolvem a compreensão dos termos estatísticos utilizados e o processamento de textual, habilidades necessárias à compreensão do texto que apresenta informações estatísticas em si ou que explica um gráfico ou tabela.

Como o infográfico “Desperdício de Comida” envolve elementos visuais e textuais que precisam ser interpretados, as demais questões de entrevista são mediadoras do olhar dos estudantes, para que possam observar os dados nos diferentes elementos do infográfico.

A segunda questão da entrevista envolvia a leitura e a compreensão da imagem de proporção de um mapa representando as Américas do Sul, Central e parte da América do Norte, que é acompanhada de pequeno texto informativo que apresenta a quantidade de hectares de terra usada para plantação de comida que não foi consumida no mundo, utilizando o mapa das américas para representar visualmente essa extensão territorial.

Quadro 4 – Respostas dos estudantes na questão de interpretação de texto e imagem

Estudante	2. O que esse mapa está mostrando?
A	A: Que foi usada pra produzir comida que não comeram.
B	B: 14 milhões de km. Para produzir comida que não chegou a ser consumida.
C	C: Então, foi usado 1,4 bilhão de hectares pra produzir comida só que não chegou a ser consumida.
D	D: Que os alimentos não foram usados.

Fonte: Elaboração pelos autores

A partir das respostas dos estudantes podemos constatar que compreenderam as informações, na medida em que demostraram entender que uma área territorial foi utilizada para produzir alimentos que não foram consumidos. Isso mostra que os estudantes, tanto do

3º quanto do 5º ano, mobilizaram habilidades de processamento de texto ao extrair significado e compreender as informações apresentadas.

A terceira questão da entrevista envolvia a leitura e compreensão de trecho textual com informações estatísticas sobre o quantitativo de comida desperdiçada por ano no mundo em bilhões de toneladas e a quarta questão envolvia o trecho textual e imagem de proporção sobre a quantidade de pessoas que poderiam ser alimentadas com essa comida desperdiçada. A imagem apresenta uma representação da proporção de pessoas do mundo através de 100 bonecos dos quais 28,5 deles representam a parte dessa população que poderia ser alimentada com essa comida desperdiçada.

Quadro 5 – Respostas dos estudantes nas questões de interpretação de texto e imagem

Estudante	3. Quanto alimento é desperdiçado no mundo por ano? Isso é muito? 4. A comida desperdiçada poderia alimentar muita gente? Quantas pessoas?
A	A: 1,3 bilhões de toneladas de comida. P: Isso é muito? Muita comida? A: Muita comida. P: Daria pra fazer o que? A: 28,5 da humanidade pode querer comer. Tanta gente poderia comer.
B	B: Aqui! É 1,3 bilhões de toneladas de alimentos são desperdiçados por ano no planeta. P: Isso é muito? B: Sim. P: Por que tu achas que é muito? B: Porque essa comida poderia alimentar 28,5% da humanidade, 2 bilhões de pessoas. P: Isso é muita gente? B: Sim, muita gente.
C	C: Ah! São 1,3 bilhões. P: Isso é muito? C: Sim. P: Por quê? C: Porque são muito mesmo. Nem são milhões, são bilhões. P: Essa comida desperdiçada poderia alimentar muita gente? C: Podia. P: Quantas pessoas? C: 28,5% da humanidade, 2 bilhões de pessoas.
D	D: 1,3 bilhões de toneladas de alimento. P: Isso é muito? D: Uhum. P: Isso dava pra alimentar muita gente? D: Dava. P: Quantas? D: Aqui. 28,5% da humanidade, 2 bilhões de pessoas. P: É muita gente? D: É.

Fonte: Elaboração pelos autores

A partir da análise das respostas e justificativas dos estudantes nas questões 3 e 4, podemos constatar que os estudantes do 3º e do 5º ano compreenderam as informações apresentadas nos trechos textuais e na imagem de proporção, demonstrando, além das habilidades de processamento de texto, a capacidade de reconhecimento de símbolo matemático de porcentagem e de ordem de grandeza milhões e bilhões, e de amostra populacional. Nesse sentido, os estudantes mobilizaram habilidades de letramento e conhecimentos matemáticos e estatísticos, elementos cognitivos necessários ao Letramento Estatístico (GAL, 2002).

A quinta questão da entrevista envolvia a leitura e compreensão de outra imagem de proporção do infográfico. Ela mostra a representação de uma melancia, na qual é apresentada a proporção de alimentos perdidos no mundo.

Quadro 6 – Respostas dos estudantes na questão de interpretação de texto e imagem

Estudante	5. Imagem da melancia: Essa imagem fala sobre o que? 24% é metade, mais da metade ou menos da metade da imagem?
A	A: Sobre o desperdício de comida. P: E essa parte tirada dele é o que? Essa parte é quantos porcento? A: 1,5? (Apontando para o número 1,5 quatrilhão) P: E 1,5 quatrilhão é quantos porcento da imagem? A: (Balançando a cabeça negativamente). P: É metade, mais da metade ou menos da metade? A: É menos da metade.
B	B: Tá falando da quantidade de perda da produção, do manuseio e armazenamento... P: Então essa imagem (imagem de proporção da melancia) tem a ver com esse gráfico? (gráfico de barras empilhadas) B: Uhum. P: 24% é metade, mais da metade ou menos da metade dessa imagem? B: É menos da metade.
C	C: Que 24% da produção de alimentos é perdida. É, metade da produção é perdida. Um pouco menos da metade. P: Metade, mais da metade ou menos da metade? C: Um pouco menos da metade.
D	D: Da produção de alimento perdida. P: A parte vazia, que tá faltando, é quanto? D: 1,5. P: E é quanto em porcento? D: 24%. P: É mais da metade, menos da metade ou metade da imagem? D: Menos da metade.

Fonte: Elaboração pelos autores

Analisando essas respostas podemos ver que os estudantes do 3º e do 5º ano conseguiram ler e compreender as informações estatísticas apresentadas na imagem e no texto. Para isso, além de mobilizar habilidades de letramento, para a ativação de habilidades de processamento de texto e de recursos gráficos, os estudantes também mobilizaram conhecimentos matemáticos envolvendo os significados de metade e de proporcionalidade e reconhecimento do símbolo de porcentagem, demonstrando habilidades e conhecimentos fundamentais para extrair significados e compreender informações estatísticas.

A sexta questão da entrevista envolvia a interpretação de gráfico de barras múltiplas sobrepostas, que apresentava os percentuais de perdas de alimentos ao longo do processo desde a produção até o seu consumo. A partir da análise das respostas dessa questão podemos afirmar que os estudantes tanto do 3º quanto do 5º ano conseguiram interpretar o gráfico, ao comparar e localizar valores (máximos e mínimos), fazer relações entre variáveis qualitativas e demonstrar compreensão da relação de proporcionalidade entre o tamanho das colunas do gráfico e os seus valores. Nesse sentido, os estudantes demonstram mobilizar habilidades de letramento documental, "que dizem respeito à leitura de vários textos não prosaicos, incluindo gráficos e tabelas" (GAL, 2002, p. 8), e envolvem a identificação, a interpretação e o uso de suas informações estatísticas. Além disso, demonstram mobilizar conhecimentos matemáticos e estatísticos que, segundo Gal, envolvem a compreensão de quantidades, a interpretação de números usados em informações estatísticas e o entendimento de relações matemáticas envolvidas nos gráficos.

Quadro 7 – Respostas dos estudantes na questão de interpretação de gráfico de barras múltiplas sobrepostas

Estudante	6. Ao longo do processo de produção de alimentos qual a etapa que tem mais perda ou desperdício? Em qual delas esse desperdício é menor?
A	A: Consumo. P: Por quê? Como tu tais vendo que é o consumo? A: Porque tá muito grande. P: Quantos porcento? A: 35. P: E qual é a etapa que menos desperdiça? A: A de processamento e embalagem. P: Por que essa é a que menos desperdiça? A: Porque é 5%.
B	B: 35%? P: Qual é a etapa? B: O consumo. P: Por quê? B: Porque ele é o maior. P: E em qual dessas etapas o desperdício é menor? B: 5% processamento e embalagem. P: Por quê? B: Porque é 5%. É o menor.
C	C: É o consumo, 35% consumo. P: Por que tu achas que o consumo é o que mais desperdiça? C: Porque tá com mais porcentagem. Tá com valor maior. P: E qual é a etapa que tem menos desperdício? C: No processamento e embalagem.

	P: Por quê? C: Porque é só 5%. Tá menor.
D	D: Tem consumo. P: Por que tu achas que ela desperdiça mais? D: Porque é 35%. P: Esse valor é mais alto do que os outros? D: Sim. P: E qual é a que desperdiça menos? D: Processamento e embalagem. P: Por que tu achas que é ela? D: Por que só tem 5%, e é bem pequenininho.

Fonte: Elaboração pelos autores

A sétima questão da entrevista envolvia a interpretação do gráfico de barras simples do infográfico, que mostrava a quantidade de comida desperdiçada por cada pessoa em um ano, em cada região do mundo. Ao analisar as respostas, constatamos que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental foram capazes de interpretar gráficos de barras simples ou empilhadas. Esse resultado corrobora com outros estudos, com os Cavalcanti e Guimarães (2018) e de Cavalcanti e Guimarães (2019), que confirmam que estudantes desses anos de escolarização conseguem localizar valores explícitos e relacionam o bom desempenho dos estudantes na interpretação de gráficos de barras à familiaridade deles com esses tipos de representação, por serem os mais utilizados na sala de aula dos anos iniciais.

Quadro 8 – Respostas dos estudantes na questão de interpretação de gráfico de barras

Estudante	7. Em qual região do mundo o desperdício de alimentos é maior? E, em qual é menor? Em quais regiões a quantidade de desperdício é semelhante entre si?
A	A: A América do Norte, 300 kg/ano. P: E qual é a que menos desperdiça? A: A que desperdiça menos é o Sul e Sudeste da Ásia, 130 kg/por ano. P: Como tu tais vendo que essa desperdiça mais e essa desperdiça menos? A: Porque essa o valor tá menos e essa o valor tá mais. P: E quais dessas regiões tem desperdício semelhante? A: Essas aqui, 220, 230 e 240. Porque antes do 240 é o 230, e antes do 230 é o 220.
B	B: América do Norte e Oceania. P: Por quê? B: Porque ele tem 300 kg/ano. É o maior. P: E qual dessas regiões é a que menos desperdiça? B: É Sul e Sudeste da Ásia. P: E em qual dessas regiões do mundo o desperdício é semelhante? B: Norte da África e oeste da Ásia, América Latina. Tem essa: a Ásia industrializada. P: Por quê? Como tu tais vendo que são parecidas? B: Por que aqui é 230, 240 e aqui é 220.
C	C: É a América do Norte a Oceania. P: Por quê? C: Porque são 300 kg/ano que eles desperdiçam, que não são consumidas. P: E qual é a que desperdiça menos? C: É o Sul e Sudeste da Ásia. Porque são 130kg/por ano. P: Em quais delas o desperdício é semelhante?

	C: É o Norte da África e oeste da Ásia, e a América Latina, porque são bem parecidos.
D	D: América do Norte e Oceania, 300 kg por ano. Poque tá maior. P: Qual a que menos desperdiça? D: Sul e Sudeste da Ásia. Porque tá menor e é 130kg por ano. P: Tem regiões aí que o desperdício é semelhante? D: Ásia Industrializada e a América Latina. E o Norte da África. P: Por que tu achas que tá parecido? D: Porque são quase iguais os valores.

Fonte: Elaboração pelos autores

Além disso, as respostas e justificativas dos estudantes também demonstram que eles mobilizaram conhecimentos matemáticos e estatísticos, elementos do Letramento Estatístico de Gal, uma vez que para interpretar os dados dos gráficos, compararam e localizaram valores máximos e mínimos com medidas de tempo (ano) e massa (quilo).

A oitava questão da entrevista envolvia a avaliação de uma conclusão sobre os dados apresentados no gráfico de barras múltiplas sobrepostas. Nessa questão, os estudantes questionados sobre a possibilidade de afirmar que os consumidores eram quem mais desperdiçava alimentos. A partir das respostas e justificativas, foi possível perceber que tanto os estudantes do 3º quanto os do 5º ano foram capazes de avaliar corretamente a conclusão dada, ao concordar e justificar sua concordância através da análise dos dados apresentados no gráfico, que mostra que a etapa do consumo é a que mais desperdiça em todo o processo.

Quadro 9 – Respostas dos estudantes na questão de avaliação de conclusão sobre os dados do gráfico de barras múltiplas sobrepostas

Estudante	8. Podemos afirmar que nós consumidores somos quem mais desperdiça alimentos?
A	A: (Balançando a cabeça afirmativamente). P: Onde é que tem isso? A: Aqui. (Apontando o gráfico de barras múltiplas). 35% consumo.
B	B: C: Sim. P: Por quê? B: Aqui. (Apontando o gráfico de barras múltiplas sobrepostas). P: O que tem aí? B: 35% consumo.
C	C: Uhum. P: Por quê? C: Porque o consumo é o que desperdiça mais.
D	D: Sim. P: Por quê? Onde tu tais vendo que nós consumidores desperdiçamos mais? D: Aqui. (Apontando o gráfico de barras múltiplas sobrepostas). P: Por quê? D: Porque é 35% o consumo, é maior.

Fonte: Elaboração pelos autores

Esse resultado corrobora com o encontrado no estudo de Cavalcanti e Guimarães (2018), que aponta que os estudantes do 5º ano são capazes de avaliar conclusões. Nesse estudo observamos que crianças mais jovens, ainda, estudantes do 3º ano foram capazes de analisar uma conclusão. Além disso, concordamos com as autoras quando afirmam que a observação dos dados enquanto evidências foi fundamental para que eles pudessem avaliar as conclusões.

Destacamos, ainda, que as respostas dos estudantes demonstraram a mobilização de habilidades de Letramento Estatístico como questionamento crítico e postura crítica (elementos cognitivos e disposicionais) que, segundo Gal (2002), são habilidades essenciais à avaliação da informação estatística, pois, devido a possibilidade de se deparar com mensagens tendenciosas, o leitor precisa examinar a validade das informações e avaliar a sua veracidade para refletir sobre as conclusões apresentadas.

A nona questão da entrevista envolvia a avaliação dos dados do gráfico de setores semicírculo. Nessa questão, os estudantes foram questionados sobre a possibilidade de afirmar que pobres desperdiçam menos do que ricos. A partir das respostas e justificativas foi possível perceber que os estudantes do 3º e do 5º ano foram capazes de avaliar corretamente a conclusão a partir dos dados, que evidenciam que os ricos desperdiçam mais do que os pobres. Nessa análise dos dados do gráfico, os estudantes localizaram valores, relacionaram as variáveis qualitativas e demonstraram compreender a proporcionalidade entre o tamanho das partes do gráfico e os seus valores.

Quadro 10 – Respostas dos estudantes na questão de interpretação e avaliação do gráfico de setores semicírculo

Estudante	9. Podemos afirmar que pobres desperdiçam menos alimentos do que os ricos? Por que tu achas que isso acontece?
A	A: Sim. P: Por quê? B: Porque aqui tem uma linha que aponta do rico para essa parte preta e aqui tem uma do pobre apontando pro verde. E a porcentagem é 56% de comida que o rico desperdiça e 40% que o pobre desperdiça. P: Por que tu achas que os pobres desperdiçam menos que os ricos? B: Pra durar mais o comer, porque o que sobra tem gente que é da rua e que precisa. E o rico desperdiça mais porque todo dia eles vão ter comer, e o pobre não. Então o pobre economiza mais e tem mais cuidado com a comida, pra não desperdiçar.
B	B: Sim. P: Por quê? B: Porque tá 56% e os pobres em desenvolvimento 44%. P: Por que tu achas que os pobres desperdiçam menos que os ricos? E: Porque os ricos estão mais desenvolvidos, tem mais muito coisas do que os países que estão em desenvolvimento, por isso que eles não dão muita importância a isso.

C	C: Eu acho que sim. É, ricos desperdiçam mais, é 56% e pobres é 44. P: Por que tu achas que rico desperdiça mais? D: Por causa da porcentagem que é maior. P: E na tua opinião, por que os ricos desperdiçam mais? D: Porque têm mais dinheiro, aí não se preocupa tanto. Já o pobre não tem como ter isso. Compra, mas não pode desperdiçar, porque não tem pro outro dia e porque não tem muito dinheiro pra gente tá desperdiçando muita comida assim como os ricos, né.
D	D: Sim. Os ricos desperdiçam mais do que os pobres. P: Por quê? D: Porque tem 44%, que é o verde, que é menor e o preto é maior. P: E o preto é o que? E: É os ricos. P: Por que tu achas que isso acontece? E: Porque os ricos têm mais dinheiro pra gastar com comida. E os pobres não tem muito dinheiro pra gastar com comida.

Fonte: Elaboração pelos autores

A questão dez também envolveu questionamento e exigia justificativas pessoais, sobre o porquê de os pobres desperdiçarem menos alimentos do que os ricos. Para concluir sobre os dados do gráfico de setores, os estudantes também mobilizaram conhecimentos do contexto/mundo, pois demonstraram familiaridade com o contexto dos dados e dessa forma puderam refletir sobre eles, realizando questionamentos críticos.

A questão onze envolvia a elaboração de conclusões, a partir da interpretação das informações do infográfico como um todo. Analisando as respostas dos estudantes, foi possível constatar que, tanto os do 3º quanto os do 5 ano, conseguiram sintetizar conclusões. Esses estudantes elaboraram conclusões sobre diferentes dados e informações presentes no infográfico, como ter muita comida desperdiçada no mundo, que os ricos desperdiçam mais comida do que os pobres, que uma porção de terras foi usada para produzir comida que foi desperdiçada, que essa comida desperdiçada poderia alimentar muitas pessoas e que a etapa de consumo é a que mais desperdiça alimentos em todo o processo.

Quadro 11 – Respostas dos estudantes na questão de elaboração de conclusões

Estudante	10. O que podemos concluir a partir desse infográfico?
A	A: Eu entendi que gente rica joga muita comida fora e que pobre economiza. E que usam terras para fazer comida que jogaram fora.
B	B: Sobre o desperdício da comida e o quanto ela foi desperdiçada; e, também, quais países ela foi desperdiçada, e quais países desperdiça mais e quais desperdiça menos; e, do processo da comida, o quanto essa comida desperdiçada poderia alimentar de pessoas.
C	C: Que é muita, muita, comida desperdiçada no mundo todo e que pobre não pode ter isso, tem que economizar muito; e, que a comida desperdiçada é muita, que os ricos desperdiçam mais.
D	D: As pessoas ricas desperdiçam mais e os pobres desperdiçam menos; que 28,5%, 2 bilhões de pessoas poderia comer a comida desperdiçada; e, que o consumo é que desperdiça mais do que as outras.

Fonte: Elaboração pelos autores

Analisando as respostas dos estudantes é possível observar que, para sintetizar suas próprias conclusões sobre as informações presentes no infográfico, eles mobilizaram diversos elementos cognitivos e disposicionais, evidenciando familiaridade com o contexto dos dados e dessa forma puderam refletir sobre eles. Apresentaram questionamentos críticos e reflexões sobre as informações apresentadas para além de suas crenças.

Conclusões

A partir dos resultados desse estudo, consideramos que estudantes desde o 3º ano do Ensino Fundamental foram capazes de interpretar e sintetizar conclusões sobre dados apresentados em suas diferentes formas (textos, imagens e gráficos) no infográfico. Porém, os estudantes demonstram interpretar apenas informações textuais do infográfico, mas, quando estimulados a refletir sobre os dados estabelecendo relações entre eles, foram capazes de interpretar as informações estatísticas presentes nos gráficos. Dessa forma, os estudantes demonstraram extrair significados dos textos e das imagens e compreender as informações estatísticas e matemáticas. Além disso, para avaliar e elaborar conclusão sobre os dados, mobilizaram conhecimentos do contexto/mundo com questionamentos críticos.

Esses resultados demonstram que, para a interpretação de infográfico, diferentes elementos cognitivos e disposicionais foram mobilizados pelos estudantes desde o 3º ano do Ensino Fundamental, evidenciando a possibilidade de compreender as informações apresentadas nos mesmos. Desde que, esses estudantes sejam questionados e levados a ler, compreender e refletir criticamente sobre essas informações. Defendemos que o ensino de estatística seja efetivado na perspectiva do Letramento Estatístico, como forma de possibilitar aos estudantes, desde os primeiros anos de escolarização, o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades estatísticas essenciais para a compreensão e reflexão crítica das informações divulgadas nos diferentes meios de comunicação, como é o caso dos infográficos.

Esse estudo aponta caminhos para o ensino e a aprendizagem de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, no sentido de refletirem sobre dados em infográficos estatísticos, uma vez que este é um recurso utilizado na mídia e seu uso é indicado em documento curricular. Estudos complementares deverão ser realizados com um maior quantitativo de alunos e envolvendo outras habilidades.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Referências

ALSHEHRI, A. M.; EBAID, M. The Effectiveness of Using İnteractive İnfographic At Teaching Mathematics İn Elementary School. **British Journal of Education**, v.4, n. 3, 2016, p. 1-8.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a Base. Brasília: MEC, 2017.

CARRAHER, T. N. (Org.) **Aprender pensando**. Petrópolis: Vozes, 1989. 128p.

CAVALCANTI, E. M.; GUIMARÃES, G. Compreensões demonstradas por estudantes do ensino fundamental ao levantarem hipóteses, analisarem dados reais e tomarem decisões. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**. v.2, p.194 - 216, 2018.

CAVALCANTI, M; GUIMARÃES, G. L. Conhecimento Matemático para o ensino de escala apresentada em gráficos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis (SC), v.14, Edição Especial Educação Estatística, p.1-19, 2019.

GAL, I. Adults Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review**, v.70, n.1, p. 1-25, 2002.

OZDAMLI, F.; OZDAL, H. Developing an Instructional Design for the Design of Infographics and the Evaluation of Infographic Usage in Teaching Based on Teacher and Student Opinions. **EURASIA Journal of Mathematics**, Science and Technology Education, v. 14, n. 4, p. 1197–1219, 2017.

RAJAMANICKAM, V. **Infographics seminar handout**. Seminars on infographic design, national institute of design, Bombay: Ahmedabad, and the Industrial Design Centre, Indian Institute of Technology, 2005.

RICHARDS, J.; SIMKINS, E. **O mundo em infográficos**. Tradução de Liliana Negrello, Orlei Negrello Filho. Rio de Janeiro: Sextante, 2013.

SILVA, C. R; SAMÁ, S. P. Infografia com gráficos: um estudo semiótico da percepção e do processamento da informação estatística. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 9, p. 127-146, 2018.

Autoras:

Waleska Stefany Moura Diniz
Mestranda do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC/UFPE, graduada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Integra do Gref - Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental e pesquisa na área de Educação Matemática, especialmente na Educação Estatística.
E-mail: stefanydiniz10@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1916-7153

Gilda Lisbôa Guimarães
Professora Titular da Universidade Federal de Pernambuco, Doutora em Psicologia Cognitiva pela UFPE, com pós-doutorado na Universidad de Burgos/Espanha e na Université Laval/Canadá. Pesquisa e orienta estudos na área de Educação Estatística e é líder do Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental.
E-mail: gilda.lguimaraes@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1463-1626

Como citar o artigo:

DINIZ, W. S. M.; GUIMARÃES, G. L. Conhecimentos mobilizados por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao interpretar infográficos estatísticos. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 1-23, janeiro, 2022. DOI: 10.37618

Un problema que desencadena el concepto de fracción: consecuencias para el proceso de convertirse en docente

Nelem Orlowski
orlovskice@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-1426-9671
Prefeitura Municipal de Curitiba (RME) e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET/UTFPR)
Curitiba, Brasil.

Maria Lúcia Panossian
mlpanossian@utfpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-5847-4485
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e PPGFCET/UTFPR
Curitiba, Brasil

Luciane Ferreira Mocrosky
mocrosky@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8578-1496
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e PPGFCET/UTFPR
Curitiba, Brasil

Jaqueline Silva Assis
jaquelineassis@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7851-3696
Secretaria da Educação do Paraná (SEED)e mestranda do PPGFCET/UTFPR
Curitiba, Brasil

Recibido: 21/maio/2021 **Aceptado:** 20/septiembre/2021

Resumen

En este texto presentamos aspectos formativos de un problema desencadenante del aprendizaje presentado como historia virtual (MOURA, 2015) con la génesis del concepto de fracciones, en parte de un curso de extensión universitaria realizado en 2019, vinculado al proyecto Universal financiado por el CNPq, ofrecido y realizado con docentes de escuelas públicas del estado de Paraná, en la plataforma moodle UTFPR / Curitiba. El camino metodológico estuvo guiado por el concepto de aislamiento, en el que los análisis presentados como episodio permitieron concluir que el problema desencadenante movilizaba las resoluciones de los docentes en formación, revelando relaciones de multiplicidad y divisibilidad entre las grandezas, en la trayectoria de los movimientos vividos con el objeto (fracciones) de manera lógica, produciendo su esencia y simultáneamente la historicidad de su desarrollo. Las características que entendemos son constituyentes de un proceso formativo orientado a educar con las matemáticas en cuatro dimensiones formativas: práctica, lógico-histórica, gnosiológica y filosófica en la que nos involucramos en formas de formar y formar no solo como formas predefinidas para orientar nuestras acciones. , pero como posturas y actitudes formativas en las que las acciones vividas y realizadas por nosotros configuran también diferentes formas de formar y formar a los profesores que educan con las matemáticas.

Palabras clave: Educación matemática. Formación de Profesores. Problema desencadenante.

Um problema desencadeador do conceito de fração: desdobramentos para o processo de formar-se professor

Resumo

Neste texto apresentamos aspectos formativos de um problema desencadeador de aprendizagem apresentado como história virtual (MOURA, 2015) com a gênese do conceito de frações, em parte de um curso de extensão universitária realizado em 2019, vinculado ao projeto Universal financiado pelo CNPq, ofertado e realizado com professores de redes públicas de ensino no estado do Paraná, na plataforma moodle da UTFPR/Curitiba. O percurso metodológico foi orientado pelo conceito de isolado, em que as análises apresentadas como um episódio permitiram concluir que o problema desencadeador mobilizou resoluções dos professores em formação revelando relações de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas na trajetória dos movimentos vividos com o objeto (frações) de um modo lógico, produzindo sua essência e simultaneamente a historicidade de seu desenvolvimento. Características estas que compreendemos constituintes de um processo formativo voltado ao educar com a matemática em quatro dimensões formativas: prática, lógico-histórica, gnosiológica e filosófica em que nos envolvemos em modos de formar e formar-se não apenas como formas pré-definidas a orientarem nossas ações, mas como posturas e atitudes formativas em que as ações experienciadas e realizadas por nós também configuram diferentes modos de formar e de nos formarmos professores que educam com matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação de Professores. Problema Desencadeador.

A problem that triggers the concept of fraction: consequences for the process of becoming a teacher

Abstract

In this text we present formative aspects of a problem triggering learning presented as virtual history (MOURA, 2015) with the genesis of the concept of fractions, in part of a university extension course held in 2019, linked to the Universal project funded by CNPq, offered and conducted with teachers from public schools in the state of Paraná, on the UTFPR / Curitiba moodle platform. The methodological path was guided by the concept of isolated, in which the analyzes presented as an episode allowed us to conclude that the triggering problem mobilized resolutions of the teachers in formation revealing relations of multiplicity and divisibility between the greatnesses in the trajectory of the movements experienced with the object (fractions) in a logical way, producing its essence and simultaneously the historicity of its development. Characteristics that we understand are constituents of a formative process aimed at educating with mathematics in four formative dimensions: practical, logical-historical, gnosiological and philosophical in which we engage in ways of forming and forming not only as pre-defined forms to guide our actions, but as postures and formative attitudes in which the actions experienced and carried out by us also configure different ways of forming and training teachers who educate with mathematics.

Keywords: Mathematical Education. Teacher Training. Triggering Problem.

Introdução

O ensino de frações tem sido apontado como uma temática que gera dificuldades, tanto no que se refere ao ensino quanto à aprendizagem, especialmente quando se trata dos anos iniciais (CRESTANI, 2016; ZEFERINO, 2016; GALDINO, 2016; MATOS, 2017; FONTES, 2019; ISIDORO, 2019).

No ensino, o significado de frações como parte/todo, a partir da divisão de figuras geométricas planas em partes iguais, sobretudo priorizando o contexto de superfícies sem considerar a conservação da área da figura, tem sido a abordagem predominante nos anos iniciais. Nunes e Bryant (1997) destacam a fragilidade desta abordagem, pois evidencia uma falsa compreensão, os professores constroem estruturas rígidas para os números fracionários, além de estimular a dupla contagem das partes em relação ao todo como atestam Silva (2017) e Mocrosky *et al*., (2019).

Ainda em relação à abordagem das frações com superfícies planas divididas e pintadas, há uma descaracterização da grandeza que está sendo medida, neste caso, a área é uma tentativa de tratar o contínuo com o mesmo modo de pensar o discreto, tal como Silva (2017) chama de "discretização do contínuo", desconsiderando os raciocínios que estão envolvidos nas ações de contar e medir que são diferentes e que evidenciam uma lacuna formativa.

Visando problematizar estes e outros aspectos do ensino dos racionais com professores da Educação Básica, realizamos um curso de extensão universitária em 2019 vinculado ao projeto Universal financiado pelo CNPq intitulado: "Situações de ensino de conteúdo matemático", ofertado a professores de redes públicas de ensino na plataforma moodle da UTFPR/Curitiba totalmente à distância intitulado "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco". Utilizamos como situação desencadeadora de aprendizagem conceitual o recurso da história virtual Cordasmil (MOURA, 2015) sobre a gênese do conceito de frações.

Neste texto apresentamos a discussão sobre uma parte desta experiência formativa objetivando compreender como o problema desencadeador contido na história virtual mobilizou resoluções dos professores em formação e seus desdobramentos para educar com a Matemática.

O texto está organizado em três partes. Na primeira, apresentamos o curso e os critérios de escolha da história virtual Cordasmil como situação desencadeadora da formação para avançar em discussões conceituais e suas possibilidades formativas com professores.

Na segunda parte explicitamos o percurso metodológico e como os dados foram constituídos e organizados em forma de um episódio a partir do isolado (MOURA, 2004; MORETTI, MARTINS, SOUZA, 2017) do "Fórum Problematizador" do referido curso, expondo as análises empreendidas na sequência.

Por fim, trazemos a discussão de como as análises evidenciaram que a proposta mobilizou resoluções dos professores em formação, destacando-se as relações de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas na trajetória dos movimentos vividos com o objeto (frações) de um modo lógico, revelando sua essência e simultaneamente a historicidade de seu desenvolvimento. Características que compreendemos constituintes de um processo formativo voltado ao educar com a matemática.

1. A experiência formativa de frações com um problema desencadeador na formação continuada de professores que ensinam matemática

Em 2019, através do projeto Universal financiado pelo CNPq intitulado: “Situações de ensino de conteúdo matemático: estabelecendo parâmetros e critérios de análise”, coordenada pela professora Maria Lúcia Panossian e vice coordenação da professora Luciane Mocrosky, elaboramos e realizamos o curso de extensão universitária “Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco”, ofertado na plataforma moodle da UTFPR/Curitiba e integralmente à distância para professores da educação básica de redes de ensino públicas. O conteúdo central, ensino de frações, foi proposto com base em avaliações de cursos anteriores promovidos no mesmo formato em outros contextos de extensão universitária pela mesma instituição.

A carga horária total foi de 35 horas distribuídas em cinco módulos, com um total de 25 professores concluintes. A inscrição foi realizada a partir da Divisão de Cursos de Qualificação Profissional (DICPRO), com a assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) pelos participantes e a autorização do comitê de ética com CAAE 13813619.0.0000.5547, sob o parecer de número 3.453.544.

Na elaboração do percurso formativo destacamos o estranhamento como uma atitude filosófica que movimentou a formação, possibilitando que esta emergisse da dinâmica dos questionamentos sobre o conteúdo escolar e seu ensino:

> Compreendemos o estranhamento como algo característico de uma atitude filosófica, assim como a indagação, a argumentação e a reflexão. O estranhamento acontece quando uma pessoa vivencia uma circunstância diferente da que costuma experimentar cotidianamente ou, quando no viver com o familiar, algo lhe salta aos olhos, provocando estranheza. Perplexos, ficamos em estado de alerta, atentos às coisas de modo a observarmos algo que antes não víamos ou que não nos causava incômodo. No estranhar-se *com* e *nas* coisas, questionamos o visto, que sempre é observado por alguém, de onde se entende o estranhamento como algo genuíno, dada a singularidade de cada um (MOCROSKY *et al*., 2019, p. 1453).

Pelo estranhamento fomos compondo cenários deflagradores de discussão tendo como pano de fundo o conteúdo programado para cada uma das unidades de estudo: aspectos conceituais e práticos do ensino dos números racionais, diferentes significados das frações e suas possíveis contextualizações, articulações entre representações (frações, decimais e porcentagens) dos números racionais.

A intenção foi a de marcar a experiência formativa não por modelos, mas pelo transitar de trajetos formativos flexíveis. Tais unidades de estudo, ao todo cinco, foram distribuídas na carga horária total e propostas como fóruns de discussão abertos a cada dez dias. Tinham os seguintes títulos: Fórum de ambientação e apresentação: O que esperamos cultivar? Fórum de discussão: O que temos cultivado? Conceito de fração, o que isso quer dizer? Diferentes significados do número racional: fragmentos de uma complexidade; Formar-se, entre o aprender e o ensinar; Avaliação e despedida.

Cada fórum trouxe uma imagem relacionada ao cultivo e uma poesia ou citação que provocasse tanto estranhamentos em relação ao conteúdo, quanto ao formar-se. Havia um ponto deflagrador dos formadores como um texto, imagem, parte de um documento curricular, etc., que advinha do evidenciado pelos professores como uma necessidade formativa de conteúdo (no caso as frações).

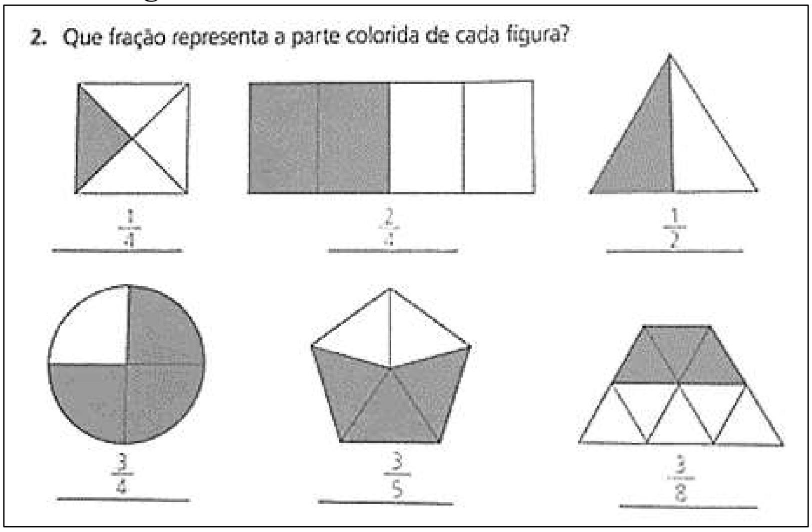
Neste texto apresentaremos apenas o movimento intencional da segunda unidade de estudo, especificamente "o fórum problematizador" em que propusemos aos professores em formação a resolução do problema desencadeador da história virtual do conceito de frações "Cordasmil" (MOURA, 2015).

1.1 Cordasmil

A opção por este problema surgiu da observação de dois aspectos centrais no ensino desse conteúdo escolar: o modo como comumente se inicia o ensino de frações com a apresentação de figuras geométricas pintadas e repartidas; e problematizar a fala recorrente dos professores participantes quanto ao que entendiam sobre "construção do conceito de frações".

O primeiro aspecto, a apresentação da fração através das figuras geométricas repartidas e pintadas (que se resolve com dupla contagem) tem sido a abordagem predominante de frações nos anos iniciais e pode ser exemplificada na ilustração de um exercício comum em livros didáticos:

Figura 1 – Exercício de livro didático



Fonte: Youssef e Guelli (2017, p 119)

Sob a justificativa de um trabalho inicial com o significado de parte de um todo, este tipo de exercício apresenta algumas limitações bem marcantes e necessárias de serem discutidas, sendo uma delas a omissão do significado de medida. Segundo Vizcarra e Sallán (2005), a existência de um processo de medição neste tipo de exercício está oculta da escola, pois os seguintes fatos ocorrem:

> - Omissão da magnitude utilizada. No enunciado das tarefas, geralmente é usada a magnitude da superfície, mas não há menção a ela porque a atividade é resolvida sem medir a quantidade de área de superfície, basta fazer duas contagens
> - Unidade indefinida. O "todo" ou a unidade não precisa ser mostrado explicitamente. Por esse motivo, os números tendem a ser sobrepostos e claramente diferenciados de acordo com o atributo de cor, para que o aluno não precise reconhecer a unidade para resolver a tarefa.
> - Irrelevância de quantidades iguais de magnitude. O aluno deve reconhecer o número de regiões que compõem duas figuras planas, mas a ênfase é colocada na cardinalidade, não na igualdade das superfícies das regiões que aparecem no fracionamento.
> - O sentido do número natural é reforçado. A resposta à tarefa é alcançada por dupla contagem e, portanto, o aluno não vê a necessidade de introduzir nenhuma estrutura numérica superior à do número natural.
> - A fração não possui o status numérico. Antes da escola, a fração aparece como a relação simbólica entre dois números naturais, mas, para essa escola, a expressão simbólica não possui a entidade numérica porque a entende como uma situação descritiva.
> - Promove a aprendizagem passiva. A relação entre a parte e o todo apresenta uma situação estática entre quantidades de superfície; não há situação problemática porque a tarefa está perfeitamente preparada para garantir o sucesso dos alunos. (VIZCARRA, SALLÁN, 2005, p.19-20, tradução nossa)

Outro problema que se revela nesta abordagem é a consideração apenas do aspecto discreto. Segundo Brolezzi (1996) discreto e contínuo se referem a ações básicas na elaboração matemática, contar e medir.

> Em geral, no trabalho com frações, faz-se referência à continuidade de formas geométricas, como círculos e retângulos, dos quais se extraem imagens que auxiliam a dar significado aos 'números quebrados'. Mas o verdadeiro significado de número racional, composto pelas ideias de divisão e de razão, só pode ser atingido por um trabalho que leve em consideração o duplo aspecto, discreto e contínuo, dos números (BROLEZZI, 1996, p. 3).

Também, segundo o autor, há três vertentes das quais surge o número racional: frações unitárias egípcias (como parte de um todo); representação de números quebrados (Mesopotâmia) e noção de razão grega (incomensuráveis). Disto, Brolezzi (1996) propõe ser necessário três componentes fundamentais no ensino de frações: Tomar uma parte de um todo (compreendendo que a ideia subjacente é discreta na medida em que se compara partes de um todo); dividir um número inteiro por outro e comparar duas grandezas. Ressalta ainda que tal abordagem pedagógica necessita de um trabalho que trate deste "nó conceitual" considerando o discreto e o contínuo, ponderando que a continuidade está na base histórica dos números fracionários.

Na mesma direção, trazemos a segunda perspectiva de escolha do Cordasmil como problema desencadeador de discussões no fórum problematizador, qual seja, a necessidade de despertar nos professores em formação um estranhamento acerca do que queriam dizer quando expressavam sua busca por um ensino que propiciasse a "construção do conceito de frações". Nossa intencionalidade esteve voltada em lançar aos professores uma situação em que fosse possível vivenciar a necessidade conceitual.

Encontramos esta possibilidade com o problema virtual Cordasmil, por ele trazer consigo o movimento lógico-histórico do conceito de frações, ou seja, o par lógico-histórico foi tomado como critério para a organização desta situação desencadeadora de aprendizagem, considerando que

> O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico, ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento dialético do histórico e do lógico resolve–se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento (KOPNIN, 1978, p.186).

Também a lógica dialética foi tomada como base e para a sistematização do conhecimento de frações tendo em vista a apropriação do conceito, como em Santos (2017), que desenvolveu o Cordasmil matematicamente com base na proposição davydoviana de ensino.

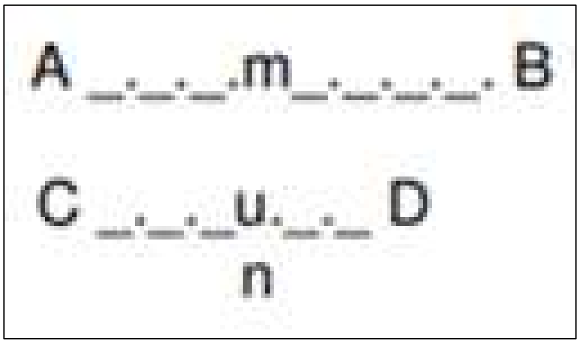
Do ponto de vista histórico, considerando que as frações tiveram sua origem na divisão de grandezas, tal como explicita Bento Jesus de Caraça (repartição das terras entre os egípcios) e o problema gerado pela necessidade de medição para expressar o controle de quantidades contínuas:

> É, portanto, necessário: estabelecer um estalão único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie; esse estalão chama-se unidade de medida da grandeza de que se trata [...] há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos- escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número (CARAÇA, 2003, p. 30).

No entanto, ao expressar o resultado de uma comparação com um número, o autor alerta sobre a dificuldade em relação ao aspecto aritmético, qual seja, subdividirmos uma unidade em n partes iguais, de tal modo que uma dessas partes caiba m vezes na grandeza a medir. O problema aparece quando m não seja divisível por n, impossibilitando a divisão e requisitando a necessidade da criação de um novo campo numérico:

> Satisfaz-se a estes requisitos dando a seguinte definição. Sejam, fig. 3, os dois segmentos de recta e AB e CD , em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u AB contém m vezes e CD contém n vezes o segmento u. Diz-se, por definição, que a medida do segmento AB , tomando CD como unidade, é o número m/n e escreve-se AB = m/n. CD, quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não é nulo); se m for divisível por n, o número m/n coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número diz-se fraccionário (CARAÇA, 2003, p. 35).

Figura 2 – Segmentos



Fonte: Caraça (2003, p. 35)

A necessidade da criação do novo campo numérico, denominado pelo autor de fracionário, expõe a perspectiva lógico-histórica, na medida em que, ao se resolver o problema é possível perceber como os números racionais surgem em resposta à necessidade de comparar grandezas, quando contar não foi suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que outra. Surge o impasse nas situações em que a grandeza tomada como referência não "cabe" num número exato de vezes no que está se medindo, a busca para solucionar este problema, chega, depois de um longo processo, na simples divisão indicada (antes considerada impossível) e passa a ser possível como a representação de um novo tipo de número, que expressa o resultado da divisão e que por conseguinte origina o conjunto dos números racionais.

Compreendemos o movimento lógico-histórico se configurando enquanto perspectiva didática (SOUSA, 2018), e neste sentido o problema desencadeador pode mobilizar o pensamento teórico, suscitando o processo de significação uma vez que quem o resolver individualmente ou coletivamente, em certa medida, "revive" não apenas a circunstância geradora da necessidade humana de medir e não ter um modo de expressá-la continuamente, mas "sente" o movimento de gênese que faz parte do desenvolvimento do próprio conhecer humano, possibilitando a compreensão da definição formal matemática de número racional.

Assim, em concordância com Panossian, Moretti e Souza (2017), compreendemos o movimento lógico-histórico como um dos princípios para o reconhecimento da relevância de um determinado conceito como objeto de ensino, e encontramos a possibilidade de realizar este movimento, vivenciando com professores, o problema desencadeador na história virtual Cordasmil. Na sequência descrevemos aspectos do percurso metodológico e de análise da experiência formativa.

2. Percurso metodológico

Como já explicitado anteriormente, neste artigo, apresentamos e analisamos apenas um fórum de estudo realizado no curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco". Tal fórum será apresentado como um episódio de um isolado (CARAÇA, 2003; MOURA, 2004; MORETTI, MARTINS, SOUZA, 2017) enquanto modo de proceder e instrumento para a análise de dados, como uma seção do vivenciado que preserva todos os fatores que, ao se interdependerem, sustentam a influência no fenômeno a estudar. Compreendendo que

> O fato de o isolado ser uma seção da realidade comporta, segundo Caraça, certa margem de erro, pois afasta uma parte do resto da realidade, o que necessariamente vai influir no resultado do estudo. Cabe, então, ao observador, a escolha do isolado que conserve todos os fatores que, ao se interdependerem, têm influência marcante no fenômeno a estudar. Mas, como lembra esse autor, a história está cheia de exemplos de que nem sempre é possível determinar com precisão esses fatores. Em dado momento, em que se está analisando um fenômeno ou na realização de uma ação, surge um fato inesperado. É esse inesperado o indício de que o isolado não foi convenientemente determinado, pois algum fator dominante não foi considerado. O surgimento do inesperado torna-se, assim, um fator que contribui para o desenvolvimento da ciência (MOURA, 2004, p. 267).

Nesta perspectiva, o isolado como um modo de proceder metodológico, contém as características do todo trazendo em si uma rede de elementos interdependentes que compõem o todo. Já o episódio é compreendido como uma unidade das ações que podem revelar aspectos do processo formativo dos envolvidos, e "são produzidos como um conjunto de cenas selecionadas entre os dados levantados" (MORETTI, MARTINS, SOUZA, 2017, p. 50). Neste sentido,

> Os episódios revelam a natureza e qualidade das ações em um isolado. Quanto à natureza, podemos destacar se qualidades trata de conceito. De modos de ação, de valores, de conhecimento estratégico (organização do trabalho coletivo e das relações de trabalho, criação de atividades desencadeadoras de aprendizagem), ou se é apenas conhecimento prático. Quanto à qualidade, os episódios poderão revelar se podem tratar de ações coordenadas pelos motivos individuais ou coletivos, se visam à concretização da atividade ou feitos sem vínculo com os motivos dessas ações, se articulam análise e síntese na avaliação das ações (MOURA, 2004, p. 274).

Assim, nos amparando em Moura (2004) e Moretti, Martins e Souza (2017) utilizamos o conceito de isolado para análise de processos formativos e episódios representados pelas frases escritas dos participantes como possibilidade metodológica para revelar aspectos constitutivos de elementos que desencadeiam o pensamento teórico dos participantes.

Consideramos o curso realizado, do ponto de vista metodológico, como um isolado no qual pesquisamos a formação de professores que ensinam matemática e o "Fórum Problematizador Cordasmil" como um episódio deste isolado, ou seja, neste caso utilizamos este isolado enquanto método e instrumento para o tratamento dos dados da pesquisa, considerando-o o conjunto interdependente de situações vivenciadas.

Assim, ao propormos, o tratamento dos dados a partir do conceito de isolado, no episódio "Fórum Problematizador Cordasmil" intencionamos um modo de investigar as mobilizações de resoluções dos professores em formação e suas apropriações do conceito de frações tendo o problema desencadeador proposto como um episódio do isolado "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco".

Para tanto, apresentamos a proposta e as postagens na íntegra dos professores que participaram do referido fórum. Os professores participantes foram denominados pela letra P e número conforme a ordem de sua interação no fórum. Como a proposta foi aberta, houve uma diversidade de modos de expressar a resolução, que também mantivemos conforme o ocorrido, usando imagens e textos copiados e colados do fórum.

O critério de apresentação da sequência das resoluções e suas respectivas análises foram guiadas por reflexões teóricas sobre o movimento conceitual de fração visando mostrar dimensões possíveis do desenvolvimento do pensamento teórico dos professores participantes em meio às suas resoluções. Para isto, nos amparamos em Santos (2017), que resolveu o problema partindo do empírico, seguindo três etapas: concreto (caótico), modelação objetal, gráfica e literal e a ascensão do abstrato ao concreto. Também este foi o movimento analítico empreendido em meio às resoluções dos professores.

2.1 Apresentando os dados/resultados

Na sequência apresentamos a proposta, tal como foi postada no moodle e as resoluções dos professores seguindo a dinâmica analítica apresentada.

Quadro 1 – Proposta para os professores em forma de fórum no moodle

História Virtual do conceito de fração (MOURA, 2015) Cordasmil é um estirador de cordas encarregado pelo Faraó para medir os terrenos que foram distribuídos aos súditos para o cultivo às margens do rio Nilo. Ele mede apenas a lateral dos terrenos, pois a medida de frente que corresponde à margem do rio é fixa. O que lhe interessa mesmo é o quanto o Nilo tem de terra cultivável às suas margens, pois os impostos serão cobrados tendo em vista esta porção de terra. Ao medir a lateral do terreno de Unopapiro, o estirador contou n cordas inteiras, mas percebeu que sobrava um tanto dessa lateral em que não cabia uma corda inteira. Sabendo que o Faraó exigirá uma representação da medida do terreno de Unopapiro, de que modo deverá proceder Cordasmil para transmitir ao Faraó a dimensão da lateral do terreno medido? Como proceder para representar a parte que não é uma corda inteira? Qual sua proposta para Cordasmil resolver este problema? Faça uma representação de uma situação que possa ter sido vivenciada por Cordasmil e ilustre a sua solução.

Fonte: Elaboração pelas autoras

P3 e P4 não propuseram soluções, analisaram a proposta do ponto de vista didático e suas possibilidades de múltiplas respostas.

Quadro 2 – Descrição das interações dos professores no fórum

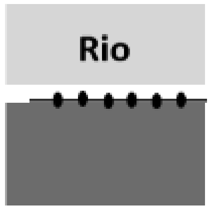
P3: Olá, pessoal! Penso que nesta questão podemos ter diversas respostas, pois tudo dependerá da unidade de medida que adotarmos e quais subdivisões iremos utilizar para resolver a parte faltante da medida do rio, ou seja está sendo construído o conceito de fração. Aqui vejo, que está sendo criado uma situação-problema que pode ser construída no chão na sala de aula e levar os alunos a resolverem (entregar cordas por exemplo) de forma prática. Grande abraço a todos!
P4: Olá, entendo que a situação proposta, abre para várias respostas/possibilidades, assim seria interessante a representação em sala de aula, para que com o manuseio dos materiais, (no caso corda), os alunos visualizem e concretizem o experimento. Em sala realizamos uma atividade semelhante para medir a sua área, primeiro usamos passos, posteriormente uma trena. E finalizamos com a planta baixa de um ambiente, a escolha dos alunos, de suas respectivas casas, cada aluno fez o seu desenho com as medidas correspondentes.

Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

Identificaram a potencialidade de realização da proposta com os estudantes, principalmente relacionado à sua possibilidade de utilização de materiais e ser "prática". Também percebemos em P4 a articulação da proposta com outro estudo que seria o de medidas.

Na sequência P5 usou medida padrão, mas não existia no contexto do problema, numa espécie de "fuga didática", uma vez que o objetivo do problema era justamente lidar com a impossibilidade de expressar a medida de qualquer "tamanho" com qualquer que fosse a unidade utilizada para comparar.

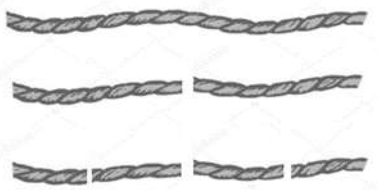
Quadro 3 – Descrição das interações dos professores no fórum

<table>
<tr><td>P5: Olá! Eu marcaria a corda com "nó" ou "tinta" a cada metro, ou unidade de medida utilizada na época. Assim ele poderia medir o restante. Existe outra forma que não lembro direito. Ele poderia usar a corda e marcar o chão, depois pegar o final do terreno e medir no sentido contrário. Daí a diferença que faltava a ser medida, era transferida para o meio, facilitando a medição deste espaço.</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

Na mesma direção de "descomplicar" o problema, P8 e P11 dariam a corda cortada, o que seria uma forma de transformar a questão em um exercício com uma única resposta para todos que o resolvessem, o que inviabilizaria discussões posteriores sobre a necessidade de se criar modos de expressar comparação entre grandezas de uma maneira padronizada.

Quadro 4 – Descrição das interações dos professores no fórum

<table>
<tr><td>P8: Para os alunos que trabalho (Ensino Fundamental I - Séries Iniciais), utilizaria materiais concretos, barbantes ou desenhos de cordas, cortados em tamanhos iguais (ao meio e em 4 partes), para que pudessem medir os tamanhos e perceber que possuem o mesmo comprimento de uma corda inteira. Utilizaria uma caixa de sapato com o desenho do rio para que medissem, com o barbante ou desenho, a quantidade de corda necessária para calcular o terreno.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">P11: Imaginando estudantes de 9 anos eu faria uma representação de um dos terrenos em papelão, e disponibilizaria barbantes de mesma medida aos alunos, depois que eles percebessem o problema na medição eu entregaria mais barbantes do mesmo tamanho mas com subdivisões a tinta (em terços, quartos, quintos) e depois pediria que explicassem o que fizeram. Acho importante fazer uma discussão sobre a régua numerada após a atividade, ja que ela traz consigo a mesma função.
É muito difícil chegar numa resolução do problema apenas com a corda, entretanto, se eu fosse cordasmil mediria o que sobrou do terreno e marcaria na corda. Então buscaria uma forma de dividir a corda em que aquele pedaço fosse um múltiplo (penso isso manualmente, já que não haviam medidas intermediárias estabelecidas).</td></tr>
</table>

Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

Destacamos a importância dada pelos professores à utilização de materiais concretos. A ênfase e a busca constante por atividades de construção, manipulação, observação, etc., de materiais "concretos", "uma excessiva preocupação com materiais didáticos, como se fossem o 'santo milagroso' o fetiche - capaz de solucionar os problemas do ensino da Matemática" (DUARTE, MATOS, SILVA, 2019, p. 15). De modo que se espera que, apenas a manipulação do concreto pelo estudante conduza-o à construção do conhecimento, revelando-se a crença de que esse tipo de manipulação fará a superação das dificuldades em relação à apreensão dos conceitos matemáticos, evidenciando, segundo autores supracitados, a decorrência de uma reflexão acrítica que não auxilia na apropriação conceitual.

Já P9, propõe uma resolução que seria aceitável ao problema, entretanto, acabaria com a possibilidade de vivenciar a necessidade do surgimento de um novo campo numérico, ao mesmo tempo em que, só se poderia resolver estes tipos de problemas com apoio de materiais. Permanecendo ainda em falta um modo de expressar isso, seja por meio da linguagem ou de símbolos, tal como apresentado também por P16 que usaria o que sobrou da corda como uma nova unidade de medida e, por P19, que usaria outro objeto para ter como referência de um padrão de unidade.

Quadro 5– Descrição das interações dos professores no fórum

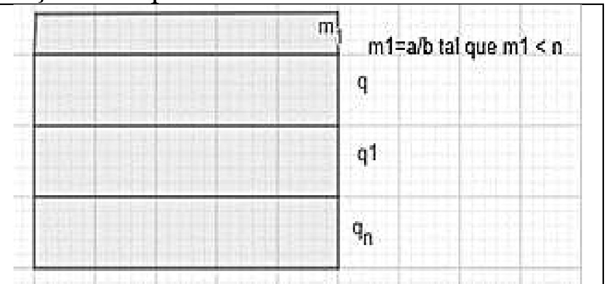
P9: Vivenciei uma situação similar a esta com professores dos primeiros anos também. Minha sugestão é que o pedaço que "sobrou" seja a medida unitária para medir o terreno, ou seja, a medida do terreno são tantas vezes essa medida. Aguardo sugestões, Bons estudos!
P16: Para representar a parte que não é uma corda inteira eu verificaria quantas vezes o pedaço que não é corda inteira caberia na corda.
P19: Para medir a lateral do rio usando a corda é muito fácil, porém, é preciso definir um padrão para o tamanho da corda, sem um padrão será muito difícil medir esse rio usando simplesmente uma corda, pois essa corda pode ser infinita. Por exemplo cada corda mede 1 metro, então eu teria 5,25 m, entretanto nessa época ele não conheciam essa unidade de medida, então usaria qualquer objeto que trouxesse referência de tamanho, por exemplo usaria o tamanho de uma árvore como referência e dividiria em 4 partes iguais, a medida seria 5 árvores inteira e 1/4.

Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

Avançando nas tentativas de resolução, P23 expressou apenas a comparação de tamanho:

Quadro 6 – Descrição das interações dos professores no fórum

P23: Eu representaria desta forma. Mas não encontrei uma solução. Apenas concluí que não consigo mensurar com as n cordas.

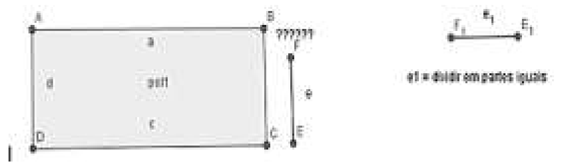
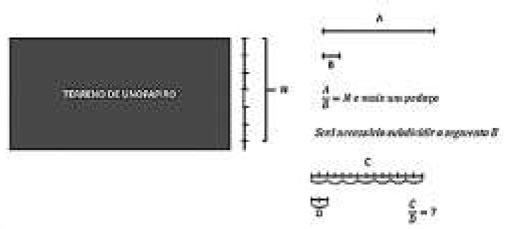
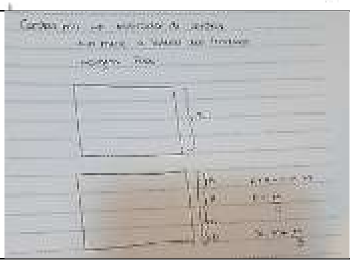


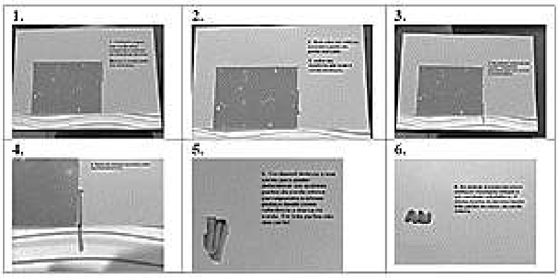
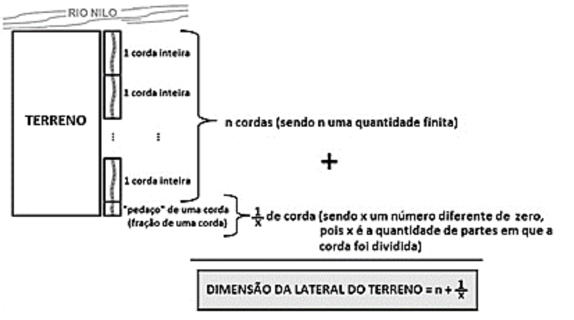
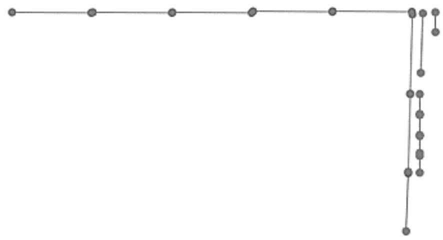
Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

O que representa um primeiro passo para movimentar o pensamento teórico. A comparação, tal como já mencionamos em Caraça (2003), é o momento que surge o impasse ao subdividir uma unidade em n partes iguais, de tal modo que uma dessas partes caiba m vezes na grandeza a medir, ou seja, o problema aparece quando m não é divisível por n, requisitando a necessidade da criação de um novo campo numérico.

Todos os outros professores, mesmo que de modos diferentes, fizeram a medição. A primeira ação foi a de encontrar um modo de medir, uma vez que a unidade de medida básica não cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. Dividiram a "corda" que seria a medida inteira para determinar uma medida intermediária. Três são os elementos dessa primeira ação: unidade (uma corda inteira), uma parte da unidade (pedaço da corda, uma fração da unidade de medida inicial) e a grandeza a ser mensurada (lateral do terreno):

Quadro 7– Descrição das interações dos professores no fórum

P1: Na minha interpretação, vejo que é possível encontrarmos diferentes respostas nesta questão (dependendo da unidade, referencial adotado), pois, está sendo construído o conceito de fração, por meio de uma situação-problema. Para exemplificar meu pensamento irei colocar em anexo a imagem.	
P2: Considero que a situação colocada abre muitas possibilidades, por isso utiliza-se representação algébrica. [...] segue minha interpretação e possível resposta.	
P14: Segue minha contribuição. Vejo múltiplas possibilidades, mas didaticamente acredito que o processo de descrição dos dados a partir da situação problema é o primeiro passo para a tentativa de resolução.	
P15: Para representar a parte que não é uma corda inteira, Cordasmil poderia fazer um nó na parte da corda em que se termina a lateral do terreno. Levando essa problematização para sala de aula, pode-se distribuir para cada aluno folhas de diversos tamanhos, simbolizando o terreno. Cada aluno medirá a lateral do seu terreno utilizando palitos de fósforo, simbolizando a corda. (devendo quebrar o palitinho quando se fizer necessário na medida do seu terreno). Outras formas dos alunos vivenciarem a atividade de Cordasmil, é medindo por passos o tamanho da quadra da escola, ou por palmos o tamanho da lousa da sala e até mesmo com barbante a sua própria carteira.	
P17: A intenção é que os alunos percebam a necessidade de representar medida que não corresponda a corda inteira, assim é interessante que a diversidade de propostas seja considerada, desde subdivisões na forma da vontade do proponente (a corda como todo e partes impostas segundo alguma lógica de comparação) até possibilidades de comparação entre o todo (corda) e a medida parcial (a parte que pode caber tantas vezes no todo). Cabe ressaltar a não existência de uma única resposta correta, mas sim caminhos de acordo com a vivência de cada sujeito. É possível instigar os alunos para que busquem uma resposta que contemple as proposições diversas da sala, assim em equipe podem os mesmos gerar um sistema de medida. Tal sistema de medida pode operar por regularidades de meio em meio, terço em terço, quarto em quarto, uma infinidade de possibilidades	

P20: Procurei ilustrar a solução do problema do Cordasmil. Claro que não há precisão nas proporções, mas o que vale é o raciocínio. Também não usei números de propósito, fazendo de conta que os números racionais ainda não haviam sido criados[1].	
P21: Cordasmil usará uma quantidade finita de cordas inteiras (n cordas) e um pedaço de uma corda, ou seja, uma fração de uma corda. Se considerarmos "n" como número finito de cordas inteiras e "x" um número natural diferente de zero como a quantidade de partes em que a corda foi dividida, então Cordasmil usou 1/x de uma corda. Logo, Cordasmil pode transmitir ao Faraó que o terreno tem n+1/x cordas de dimensão lateral.	
P26: teria que medir a parte restante e ver quantas partes da corda inteira foi usada e assim em vez de usada a totalidade da medida da corda dividi-la em partes e usar como nova unidade de medida.	
P29: Como alguns de meus colegas já colocaram, dividiria a corda utilizando uma unidade padrão de medida. A seguir, verificaria como o pedaço restante caberia dentro da unidade de medida escolhida buscando dividi-la em partes iguais visando descobrir que fração da unidade poderemos obter. No caso representado em anexo 3/4.	

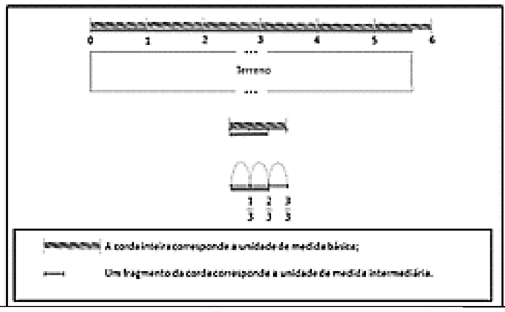
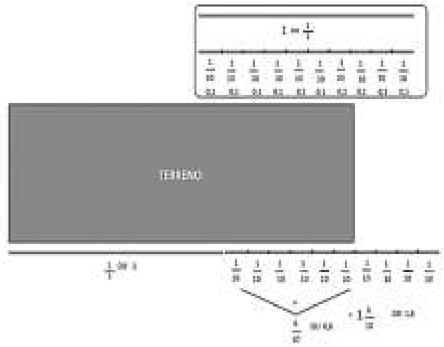
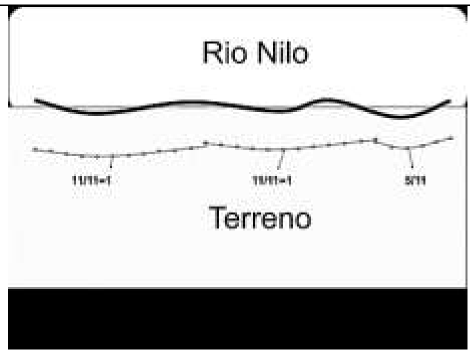
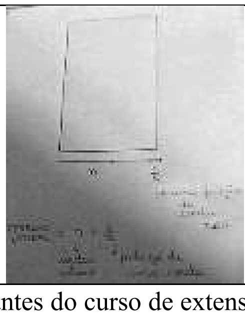
Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

Na sequência de suas resoluções, alguns professores apresentaram a relação de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas em tela, tal relação foi expressa numérica e algebricamente em forma fracionária como solução ao problema. Também o fizeram de modo explicativo, utilizando exemplos:

Quadro 8 – Descrição das interações dos professores no fórum

P10: Para representar a situação utilizei o Geogebra, realizando a divisão da unidade de medida em partes (no exemplo 3 partes). A atividade é realmente muito enriquecedora para o desenvolvimento do conhecimento de frações.
P12: Eu pensei em fazer da mesma forma: usar o pedaço que faltou como unidade de medida e verificar quantas vezes cabe dentro do todo. Se necessário fosse, dividiria esse segmento menor em 1/2, 1/3, 1/4 etc.
P18: Eu dividiria a corda até ficar no tamanho que sobrou do terreno... imaginando que a corda seria dividida em duas partes, poderia dizer que foram usadas 6 cordas inteiras mais meia corda, por exemplo. Pensando no comprimento todo usando "metades" da corda, seriam 13 metades (usei números fictícios, para exemplo).

[1] Escritas em cada figura pela P20: 1. Cordasmil pegou sua corda mais comprida e esticou na lateral do terreno. Marcou o ponto onde ela alcançou; 2. Mais uma vez esticou a corda a partir do ponto marcado. E outra vez sinalizou até onde a corda alcançou; 3. Na última "esticada da corda" Cordasmil percebeu que não ia usar a corda inteira; 4. Desta vez marcou na corda, onde alcançava o rio; 5. Cordasmil dobrou a sua corda para poder determinar em quantas partes da corda inteira correspondia o último pedaço tendo como referência a marca na corda. Em três partes não deu certo! 6. Ao dobrar a corda em cinco pedaços conseguiu chegar a um resultado satisfatório. O último trecho do terreno media três partes de cinco da corda inteira.

<table>
<tr><td colspan="2">Em sala de aula é muito importante realizar essa atividade com materiais concretos e extremamente necessário que seja desenvolvida em grupos, pois a discussão da problematização, nesse caso, vale mais que chegar em um resultado propriamente dito, já que essa situação pode apresentar variados números.</td></tr>
<tr><td colspan="2">P22: Eu resolveria da seguinte maneira, marcaria no chão quantas cordas inteiras coubessem na lateral e a parte que sobrou marcaria na corda com um nó, aí iria ver o quanto essa parte do todo representaria na corda um meio, um terço, um quarto e assim por diante. E Cordasmil daria a resposta ao rei usando a frações mistas para representar ex: 3 1/3, 2 1/4.</td></tr>
<tr><td>P24: A forma de resolução se dará da maneira que o professor deseja trabalhar em sala de aula. O mais adequado seria a utilização de materiais concretos e reais para as crianças, dividindo-as em grupos e dando o desafio a elas. As possibilidades são diversas, como podemos ver aqui no fórum, cada um com sua lógica e estratégia de ensino.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>P27: Fazer nós na corda, dividindo-a em dez partes iguais, podendo ser trabalhados os conceitos de fração e números decimais.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>P28: Cordasmil deve dividir a “corda medida” adotada dando nós na corda num número menor m de partes congruentes de tal forma que ele consiga contar quantas dessas partes preenchem a parte que sobra no final da medição do terreno.
Segue uma imagem com a seguinte situação de Cordasmil: Mediu um terreno e notou que sobrava uma parte, por meio de tentativa e erro ele percebeu que se desse 12 nós na corda (de ponta a ponta) ele dividiria a corda em 11 partes congruentes e a parte que ficava faltando equivalia a apenas 5 partes daquelas. Então como ele deveria determinar a medida do comprimento do terreno para o Faraó?
A resposta seria duas cordas inteiras mais 5/11 de corda</td><td>
</td></tr>
<tr><td>P13: Essa situação proposta abre várias respostas e possibilidades. É interessante a representação em sala de aula para que os alunos com o manuseio dos materiais possam compreender de modo significativo a resolução, a necessidade de subdividir a corda e determinar outra medida, a unidade de medida intermediária que é menor que a unidade de medida básica que dá origem ao conceito de fração.</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária “Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco” UTFPR/Curitiba, 2019.

Por fim, P6 mostrou com uso de notação algébrica, a relação que poderia “servir” para qualquer processo de medição (considerando as restrições necessárias):

Quadro 9 – Descrição das interações dos professores no fórum

P6: Além da resolução com um pedaço de corda, fazendo as subdivisões com nós (1/2, 1/4, /1/8 da corda ou 1/3,1/6...) poderíamos explorar uma abordagem algébrica da situação exposta e sistematizá-la, como, por exemplo: n – corda inteira c – tamanho da corda p_c – partes da corda t_{pc} – total de partes da corda	Temos que: $n \, . \, c + \frac{p_c}{t_{pc}}$

Fonte: Trechos das postagens dos professores participantes do curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco" UTFPR/Curitiba, 2019.

P6 expressa a medida da corda em função do total de unidades de medida intermediária, considerando o número total de cordas inteiras n, a unidade de medida intermediária p_c/t_{pc}, a constante c.

Ao darmos atenção ao conjunto das resoluções, percebemos como expressam momentos que podem ser encadeados e, em P6, temos o momento "final", em que se revela o ponto de partida e o ponto de chegada, considerando o concreto como ponto de chegada, por meio do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto.

> Na especificidade da Matemática, o modelo gráfico é manifestação do modelo revelado durante o experimento objetal. O literal, por sua vez, é manifestação dos modelos gráficos e, consequentemente, também, do objetal. Desse modo, os modelos aparecem como meio de manifestação de outros e, em unidade, refletem a mesma relação universal. O concreto ponto de chegada resulta do movimento entre o geral, particular e singular, sustentado na relação universal. No trânsito de um modelo a outro, na superação da especificidade de um modelo durante sua conversão em outro mais abstrato, a relação interna, a universal, é mantida. Eis o objeto do pensamento teórico (SANTOS, 2017, p. 81-82).

No entanto, conforme Santos (2017), tal processo de alcançar o conhecimento em nível concreto como ponto de chegada (pensado), não é imediato, mas mediado pela sucessão de abstrações.

Assim compreendemos, com base nas resoluções dos professores participantes, como há dependências internas do conceito de fração que não são dadas pelas caraterísticas visuais e imediatas, só pela observação, mas vão se revelando durante o processo de resolução a medida em que se analisa as relações de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas. Um movimento histórico na trajetória da dinâmica vivida com o objeto de um modo lógico, produzindo sua essência e simultaneamente a historicidade de seu desenvolvimento.

Em relação aos desdobramentos para o educar com Matemática, de um modo amplo, destacamos quatro dimensões formativas: prática, lógico-histórica, gnosiológica e filosófica.

A dimensão prática, nas expressões dos professores em formação, se revelou pela articulação do vivido no curso com o projetar-se na sala de aula. As reflexões indicaram diferentes aberturas ao ensino e aos modos de ensinar os números racionais, especialmente as frações. Como já mencionado, um dos objetivos do curso se referia à problematização do tratamento do ensino deste conteúdo iniciando com a relação entre parte e todo com o uso de superfícies planas pintadas, o que podemos considerar ter ocorrido.

A dimensão prática também revelou a iminência de mudanças, reflexões e novas aberturas ao ensino sendo movimentada pelo professor, ou seja, houve uma superação da noção de aplicação de recursos didáticos-metodológicos ou exercícios prontos em um entrelaçar-se ao curso à dinamicidade da prática.

> a atividade de ensino é criação humana para desenvolver o modo humano de apropriação de conhecimentos necessários para inserir novos sujeitos em atividades coletivas que tenham por objetivo a satisfação de necessidades básicas, instrumentais e integrativas desenvolvidas historicamente. A relação essencial dessa atividade é o modo de se fazer humano na atividade de ensino (MOURA, ARAUJO, SERRÃO, 2018, p. 415).

A dimensão lógico-histórica, como uma das mais significativas aos professores participantes com o problema desencadeador da história virtual do Cordasmil, se revelou pelo tratamento conceitual em uma perspectiva constitutiva. Consideramos que os professores se deram conta da necessidade do estudo conceitual, bem como, o movimento lógico-histórico da gênese de um conceito é formativo na medida em que se percebe e se busca atualizar o sentido do conceito em seu movimento lógico-histórico.

Histórico, por sua vez, é referenciado não apenas pela produção, desenvolvimento e história do objeto, mas se refere a história na perspectiva dos modos como a humanidade o produziu, a história de seu acontecimento, sua gênese, que ao ser apropriado pelo pensamento humano, constituem o aspecto lógico.

> [...] conter a gênese do conceito: explicitar as necessidades humanas que motivaram a sua criação, e como os homens mobilizaram-se para encontrar as soluções ou sínteses no movimento aqui já destacado, compreendido por lógico-histórico (MOURA *et al*., 2017, p. 13).

Expressamos a dimensão gnosiológica como uma escolha pela impossibilidade de abordar o dito pelos professores com o devido aprofundamento epistemológico, bem como, o conhecimento compareceu de um modo genérico, mais voltado ao sentido de conhecer. E nessa dimensão o que se destacou foi a condição de conhecer como que carrega em si a coletividade, ou ainda o conhecer coletivo

> O que queremos deixar claro é que a atividade deve manter uma dinâmica que permita a interação dos vários conhecimentos individuais com o objetivo de aprofundar cada vez mais os conceitos em jogo. Ela deverá permitir tornar coletivo

> aqueles conhecimentos adquiridos pelos vários sujeitos em suas realidades sociais específicas, de modo que todos possam perceber o conhecimento como um bem comum e mais útil quando assumido coletivamente como conjunto de saberes que permite leitura e intervenção objetiva nas naturezas física e social (MOURA, 1997, p.04).

E por fim, pensamos a dimensão filosófica como a que nos trouxe à cena a percepção da provisoriedade, da incerteza da certeza, da dialética prática e modos de organizar o ensino, que requerem reflexões para além das vivenciadas, mas as que ainda ficam em condição de vir a ser e que dão sentido ao que é mais próprio ao professor, formar-se.

3. Considerações finais

Ao retomarmos a proposta de discutir como o problema desencadeador da história virtual Cordasmil mobilizou resoluções dos professores em formação e seus desdobramentos para educar com a Matemática, compreendemos, com base nas análises realizadas, que foram mobilizadas resoluções dos professores revelando relações de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas na trajetória dos movimentos vividos com o objeto (frações) de um modo lógico, produzindo sua essência e simultaneamente a historicidade de seu desenvolvimento. Características que compreendemos constituintes de um processo formativo voltado ao educar com a matemática formando-se, que se mostrou por quatro dimensões formativas: prática, lógico-histórica, gnosiológica e filosófica.

Consideramos o formar-se em um sentido restrito, com apoio de ações institucionalizadas, como o curso que apresentamos e o formar-se com os pares e com os estudantes em um sentido amplo de formar-se pessoas, que como seres de natureza social que se caracterizam em sociedade imersos na cultura criada e acumulada na humanidade, se apropriam e transmitem as aquisições culturais no movimento histórico conduzido pela educação.

Neste modo de compreender, a Matemática é considerada como produto da atividade humana e se constitui no desenvolvimento de solução de problemas criados nas interações que produzem o modo humano de viver socialmente num determinado tempo e contexto. De modo que os saberes matemáticos têm significados culturais e se constituem historicamente em instrumentos simbólicos. Ao serem considerados como instrumentos determinam um modo de uso social e isto requer aprendizagem. Assim, aprender e ensinar Matemática faz parte de uma dinâmica de produção cultural:

> Assumir a dimensão lógico-histórica do conhecimento matemático pressupõe, na perspectiva do ensino que promove o desenvolvimento, organizar o ensino de forma que a experiência social da humanidade, objetivada nas significações aritméticas, algébricas e geométricas, possa ser apropriada pelo estudante. Como

> Moura (2007) assinala, a matemática, como uma ferramenta simbólica, foi criada por homens e mulheres para satisfazer, inicialmente, necessidades instrumentais e integrativas, como uma resposta à necessidade humana de controlar grandezas; nos conceitos matemáticos está objetivada a experiência social da humanidade. Considerar a perspectiva lógico-histórica na organização do ensino de matemática significa superar uma perspectiva utilitarista do conceito, marcada, sobretudo, pelo seu aspecto operacional, para considerar o processo humano de criação (MOURA, ARAUJO, SERRÃO, 2018, p. 427).

Daí a importância de se pensar que educar com Matemática requer a preocupação com os conceitos, não como simples apropriações de objetos matemáticos aos quais se fará uso em outros contextos escolares ou na vida, mas compreendendo-os como parte da dinâmica de produção histórico cultural, como um bem cultural gerado pela necessidade da criação de modos de relação com os objetos e fenômenos do mundo que nos rodeia e que ampliem as capacidades e compreensões humanas, que formem e que possibilitem às pessoas formarem-se.

Assim, destacamos a experiência formativa vivenciada com professores que ensinam matemática enquanto modos de refletirmos entre pares, considerando tal ação como uma via aberta à disponibilidade e ao acolhimento docente quando nos envolvemos em modos de formar e formar-se não apenas como formas pré-definidas a orientarem nossas ações, mas como posturas e atitudes formativas em que as ações experienciadas e realizadas por nós também configuram diferentes formas de formar e de nos formarmos professores que educam com matemática.

Referências

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. 1996. 96f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

CRESTANI, S. **Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico:** uma reflexão a partir do conceito de divisão. 2016. 125f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016. Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/3520/1/111291_Sandra.pdf. Acesso em: 10 ago. 2021.

DUARTE, W. E.; MATOS, F. C.; SILVA, R. (Org.). O Uso Dos Materiais Manipuláveis e Suas Perspectivas na Atividade Matemática. In: **Anais do XII Encontro Paraense de Educação Matemática**. (pp. 1-93). Belém: Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, 2019. Disponível em: http://www.sbempara.com.br/files/MC6.pdf . Acesso em: 21 jun. 2021.

FONTES, M. S. **Experimento didático desenvolvimental em matemática no contexto do curso de pedagogia**, 2019. 127f. Dissertação (mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Catarina, Tubarão. (2019). Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/15235/1/139_Mariana%20da%20Silva%20Fontes.pdf. Acesso em: 23 jun. 2021.

GALDINO, A. P. S. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação**: um estudo com base na teoria histórico cultural. 2016. 112f. Dissertação (mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Catarina, Tubarão. (2016). Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/3532/1/111436_Ana.pdf. Acesso em: 11 jun. 2021.

ISIDORO, L. C. do N. **Modo de organização do ensino desenvolvimental de fração:** o conhecimento revelado por acadêmicas de pedagogia. 2019. 109f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019. Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/handle/ANIMA/3515 . Acesso em 14 ago. 2021.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Tradução Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MATOS, C. F. **Modo de organização do ensino de matemática em cursos de pedagogia:** uma reflexão a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural. 2017. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017. Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/handle/ANIMA/3501. Acesso em 14 ago. 2021.

MOCROSKY, L. F. *et al*. Frações na Formação Continuada de Professoras dos Anos Iniciais: fragmentos de uma complexidade. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1444-463, dez. 2019.

MORETTI, V. D.; MARTINS, E.; SOUZA, F. D. Método Histórico-Dialético, Teoria Histórico-Cultural e Educação: Algumas apropriações em pesquisas sobre formação de professores que ensinam matemática. In: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (Org.). **Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural:** um Olhar sobre as Pesquisas (pp. 25-59). Campinas: Mercado de Letras, 2017.

MOURA, M. O. de. A Atividade de Ensino como Unidade Formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p. 1-12, 1997.

MOURA, M. O. de. **Números racionais**. [S.I.], 2015. Documento powerpoint. Disponível em: https://disciplinas.stoa.usp.br/mod/resource/view.php?id=155570. Acesso em: 10 maio. 2021.

MOURA, M. O. de. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. *In*: BARBOSA, R. L. L. (org.) **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora Unesp, 2004. s.p.

MOURA, M. O. de. Saberes Pedagógicos e Saberes Específicos: desafios para o ensino de Matemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 13., 2006, Recife. **Anais...** Recife: ENDIPE, 2006. s.p.

MOURA, M. O. de; ARAUJO, E. S.; SERRÃO, M. I. B. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, *[S. l.]*, v. 24, p. e19817, 2019. DOI: 10.26512/lc.v24i0.19817. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/19817. Acesso em: 10 dez. 2021.

MOURA, M. O.; SFORNI, M. S. F.; LOPES, A. R. L. V. A objetivação do ensino e o desenvolvimento do modo geral da aprendizagem da atividade pedagógica. In: MOURA, M. O. de. (Org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. pp. 71-99.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PANOSSIAN, M. L.; MORETTI, V. D.; SOUZA, F. D. de. Relações entre movimento histórico e lógico de um conceito, desenvolvimento do pensamento teórico e conteúdo escolar. In: MOURA, M. O. de. **Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. pp. 125-152.

RIBEIRO, F. D. **A aprendizagem da docência na prática de ensino e no estágio**: contribuições da Teoria da Atividade. 2011. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

SANTOS, C. O. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da logica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. 89f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016. Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/handle/ANIMA/3491. Acesso em 14 fev. 2021.

SILVA, M. J F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2. ed. São Paulo: Blucher.

SOUSA, M. do C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie**: R. de Didat. E Psic. Pedag., Uberlândia, v.2, n.1, p.40-68, jan./abr. 2018.

VIZCARRA, R. E.; SALLÁN, J. M. G. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [S.I.], n. 1, p. 17-35, mar. 2005. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2219009. Acesso em: 10 maio. 2021.

YOUSSEF, A. N.; GUELLI, O. A. **Meu livro de matemática, 5º ano**: ensino fundamental, Manual do professor. 1. ed. São Paulo: Editora AJS, 2017.

ZEFERINO, L. C. **Aprender a ensinar frações a partir do conceito de atividade orientadora de ensino:** um estudo com professores de quartos e quintos anos do ensino fundamental. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2016.

Autoras:

Nelem Orlowski
Licenciada em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná (UFPR),
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR),
Mestre em Educação em Ciências e em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (PPGECM/UFPR),
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET/UTFPR).
Atualmente é professora dos anos iniciais na Rede Municipal de Ensino de Curitiba (RME).
E-mail: orlovskice@yahoo.com.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1426-9671

Maria Lucia Panossian
Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC/SP),
Licenciada em Pedagogia pela Universidade de São Paulo (USP),
Mestre e doutora em Educação na área de Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de São Paulo (USP),
Atualmente é Professora Adjunta do Departamento Acadêmico de Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR),
e docente do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da UTFPR- Curitiba.
Tem experiência na área de ensino, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino de conceitos matemáticos, aprendizagem, educação matemática, atividade orientadora de ensino e formação de professores.
E-mail: mlpanossian@utfpr.edu.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5847-4485

Luciane Ferreira Mocrosky
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UFPG),
Mestre e doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho -UNESP/Rio Claro,
Atualmente é professora Titular da Carreira EBTT na Universidade Tecnológica Federal do Paraná e no Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET-UTFPR),
Tem experiência na área de Educação com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Ensino e Aprendizagem da Matemática, Formação de Professores e Educação Profissional.
E-mail: mocrosky@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8578-1496

Jaqueline Silva Assis
Licenciada em Pedagogia pelas Faculdades Integradas Maria Thereza (Famath),
Mestranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET/UTFPR).
Atualmente é pedagoga da Rede Estadual de Educação do Paraná - Curitiba SEED.
jaquelineassis@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7851-3696

Como citar o artigo:

ORLOWSKI, N.; PANOSSIAN, M. L.; MOCROSKY, L. F.; ASSIS, J. S. Um problema desencadeador do conceito de fração: desdobramentos para o processo de formar-se professor. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 184-206, enero, 2022. DOI: 10.37618

MUDANZA SOCIOECOLÓGICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: REFLEXIONES ACERCA DE LA INNOVACIÓN CURRICULAR

Alf Coles
alf.coles@bristol.ac.uk
https://orcid.org/0000-0001-7301-409X
University of Bristol
Bristol, United Kingdom.

Recibido: 11/julio/2021 **Aceptado:** 10/agosto/2021

Resumen

Este artículo propone que la educación matemática ha alcanzado un momento de mudanza socioecológica. Se identifican tres factores condicionantes de esa mudanza. En primer lugar, los avances científicos recientes apuntan hacia la interconectividad de la vida y de las ecologías que viven dentro y fuera de los cuerpos humanos. En segundo lugar, los avances en las ciencias humanas indican la necesidad de que sean repensadas las relaciones humanas y no humanas. El tercer fator es que la precariedad ecológica del mundo sustenta la necesidad de que sean repensados los propósitos y objetivos de la educación matemática. En respuesta a esa mudanza socioecológica, son ofrecidas dos posibles innovaciones curriculares. En la primera de ellas el currículo comienza a partir de una apremiante problemática ecológica enfrentada por uma comunidad. En la segunda, em un contexto escolar padrón, se promueve una matemática comunitaria con énfasis em la construcción de preguntas por parte de los estudiantes. Las dos tienen en común la adaptación del currículo.

Palabras clave: Socioecología. Innovación curricular. Enseñanza de Matemática.

Uma Mudança Socioecológica em Educação Matemática: Reflexões Acerca da Inovação Curricular

Resumo

Este artigo propõe que a educação matemática tem alcançado um momento de mudança socioecológica. São identificadas três linhas para essa volta. Primeiramente, recentes avanços científicos apontam para a interconectividade da vida e das ecologias que vivem dentro e fora dos corpos humanos. Em segundo lugar, avanços nas ciências humanas indicam a necessidade de sejam repensadas as relações humanas e não humanas. E a terceira, a precariedade ecológica do mundo aponta para a necessidade de se repensarem os propósitos e objetivos da educação matemática. Em resposta a essa mudança socioecológica, são oferecidas duas possíveis inovações curriculares. Na primeira delas o currículo começa a partir de uma problemática ecológica premente enfrentada por uma comunidade. Na segunda, em um contexto escolar padrão, promove-se uma matemática comunitária com ênfase na construção de perguntas pelos estudantes. Em comum elas têm a adaptação do currículo.

Palavras chave: Socioecologia. Inovação curricular. Ensino de Matemática.

A SOCIO-ECOLOGICAL TURN IN MATHEMATICS EDUCATION: REFLECTING ON CURRICULUM INNOVATION

Abstract

This article proposes that mathematics education has reached a socio-ecological turn. I identify three strands to this turn. Firstly, current advances in the sciences point to the interconnectivity of life and the ecologies living within and without human bodies. Secondly, advances in the humanities point towards the need to re-think human and non-human relations. And thirdly, the ecological precarity of the world points to the need to re-think the purposes and aims of mathematics education. Two possible curriculum innovations, in response to a socio-ecological turn, are offered. In one case, the curriculum starts from a pressing ecological issue facing a community. In the second case, in a more standard schooling context, a communal mathematics is promoted, with an emphasis on students asking their own questions. A commonality is the dramatization of the curriculum.

Keywords: Socio-ecological. Curriculum innovation. Mathematics teaching.

Introduction

This aim of this article is to propose that mathematics education has reached a socio-ecological turn and to illustrate two examples of what this might mean in terms of curriculum innovation. The phrase *socio-ecological* was first used by Berkes and Folke (1998), in the context of management practices aiming for resilience. The phrase socio-ecological was used to point to the interdependence of social and ecological systems. Berkes and Folke proposed that links and relations between these systems are vital for analysis, in contrast to more typical approaches which take one or other side as fixed. They also noted that distinctions between what is taken to be “the social” and what is taken to be “natural” are not only artificial but also arbitrary. Any social system is constituted by natural agents, making it impossible to say where a natural, ecological system ends and a social one starts. Similarly, to take an example of an ecological system, we know that among trees there are vital social interconnections sustaining the natural system of a forest (Simard, 2021). The social is necessary to the ecological and vice versa. I will be using the term socio-ecological in this article, also wanting to hold in mind that the social and the ecological cannot be disentangled. I will at times use the individual words “social” and “ecological”, for instance when they relate to the work of other authors, or to point to how aspects of the world have been kept separate in our thinking. But, to re-emphasise, my own preference is to move towards the use of the term socio-ecological both for largely human, social systems and for largely non-human, ecological systems.

While social perspectives (e.g., social constructivism or socio-cultural theory) within mathematics education are now commonplace (replacing more cognitivist approaches of the 1970s), the role of ecology is rarely discussed (Boylan & Coles, 2017). If the boundary between social systems and ecological systems is indeed largely arbitrary then the neglect of the ecological is potentially a significant drain on insight within mathematics education. Coupled with the potential for bringing the ecological in to view, there is also a pressing need to consider ecological issues, given that in many parts of the world the ecological precarity of the early twenty-first century is disruptive and destructive to life (e.g., droughts, fires, displacements). What would it mean for mathematics education if we viewed the division between the social and ecological as artificial, and did not take the ecological as a fixed background for social events?

In the next section, I set out some of the connecting influences which point to the significance of the socio-ecological at the current time (I am writing in 2021). Following this, I review past work linking mathematics education to ecological concerns. By way of summarizing this past work, I offer a map of possible futures, taken from Boylan and Coles (2017). I then exemplify two possibilities for curriculum innovation, drawing on current work taking place in Mexico and past work I have been involved with in England, and consider their similarities.

1 A socio-ecological turn

In this section, I trace three sources of thought, which all point to the necessity and significance of a socio-ecological turn in mathematics education. Firstly, current advances in the sciences point to the interconnectivity of life and the ecologies living within human bodies. Secondly, current advances in the humanities point towards the need to re-think human and non-human relations. And thirdly, the ecological precarity of the world points to the need to re-think the purposes and aims of mathematics education.

1.1 Science and life

Recent advances in science have pointed to a level of interconnectedness across human and non-human life that has not previously been appreciated. One avenue of insight has come from discoveries about micro-organisms living inside the human gut, our micro-biome or gut bacteria (e.g., Enders, 2017). It is estimated that, in terms of numbers of cells, there are more "non-human" cells living inside the boundary of the skin, than human cells. We are more non-human than human, on one way of reckoning. Another way of saying the same thing is that a human body supports an ecology of microbial life. One reason for the lack of study of the bacteria inside our gut is that many of them cannot live anywhere else and hence are not amenable to lab-based research. The bacteria are dependent on the conditions inside a human gut for life and they themselves are vital for human health. Gut bacteria exist in a relation of symbiosis to their hosts which has made them invisible to all but the most recent of scientific perspectives.

At the same time as new insights at a micro-level, scientists are becoming increasingly aware of the connectivity between human life and wider ecological systems; for instance, we are now aware that micro-plastics humans put into the environment end up in the human food chain and being ingested by humans across the world. Such interconnectivity was, again, all but invisible to the scientific perspectives of the past and assumptions, for example, of linear causation. Furthermore, the example of the interconnectivity of trees with each other and with fungal networks (Simard, 2021), mentioned above, points to the way in which humans have split the non-human world up into individual entities (such as trees) and analysed them as such, blinding ourselves, in the process, to the symbiotic and enmeshed relations which are actually sustaining them. Taken together, scientific advances across a range of fields suggest a view of humans as ecological systems, enmeshed in ecological systems, from scales spanning the micro to the global. Bateson (1972) coined the phrase "ecology of mind", my reading of which was to point to the way in which mental life extends beyond the skull and skin in vast circular re-entering circuits of influence. The sense of the symbiosis of life, emerging across disciplines, points the socio-ecologies of, not just mind, but action.

1.2 De-centring the human

A second strand of thought that points towards a socio-ecological turn is the call across a range of perspectives within the humanities for a *de-centring* of the human. One broad strand of such work goes under the umbrella term of post-humanism (e.g., Wolfe, 2010). There are some diverse sets of ideas all labelled post-human and there is not space to delineate them. One image that appeals to me, perhaps capturing a commonality across some versions of post-humanism, is the idea that the challenge of post-humanism is equivalent to the Copernican revolution. Whereas Copernicus displaced the false belief of the Earth being at the centre of the solar system, posthumanism proposes that human concerns need to be similarly displaced from being the sole and central focus of study and ethical consideration. Just as Copernicus helped us view the Earth in its place in the solar system, so post-humanism may help us view our role as humans in a more appropriate place (compared to assuming we are always front and centre). Moves to accord legal, personhood status to animals and to rivers are examples of what a post-human de-centring of the human might mean in practice.

Entertaining notions that animals may experience similar emotions to humans has long been tarnished, in the West, with the charge of anthropomorphism. And yet, as Safina (2015) argues, given many animals have similar brain and organ structures as humans and many have patterns of behaviour which are recognisable to us as humans (such as devotion to a partner, or grief) then the simplest explanation is that they experience emotions and thoughts which are recognisably human. At the least, this explanation should be considered the default position, on both scientific and ethical grounds.

Another disparaging term used for traditions which accord agency to the non-human world is “animism”, the term carrying with it an implication, perhaps, of a category error being made (according animal status to what is not animal). However, with the recognition of the epistemological violence done by colonialism to indigenous ways of knowing, there is also recognition of the value and wisdom of some of these indigenous knowledge systems (Kimerer, 2013) which do not accord the human a primary position – a wisdom that feels sorely needed at this time.

1.3 Socio-ecological precarity

A third strand which points to a need for a socio-ecological turn in mathematics education is the incontrovertible fact of the ever-increasing precarity of the planet. I do not use the word “crisis” here, to avoid any implication that effects of, e.g., climate change are new, or that they are potentially fixable. In marginalised communities across the world, the effects of climate change are all too present, in the form of reduced crop yields, failed harvests, land dispossession, water scarcity. While in affluent parts of the world it may be possible to experience the impacts of climate change as relatively recent, this has not been the experience of the majority.

Growing awareness of socio-ecological precarity provokes questions about what role mathematics has, and could have, in understanding what is taking place, in communicating about what is taking place and in influencing what is taking place, questions raised as part of a critical mathematics education (Skovsmose, 1994). There has been work done on these questions, which is the focus of Section 3. What I want to draw out here, in terms of a socio-ecological turn in mathematics education, is the almost certainty that the world in 20 or 30 years' time will not look like it does today. No matter what mitigation strategies the global community is able to agree, past emissions have locked in a rise in global temperatures which will have an ever more destabilising effect on life. We know change is coming, but we have little idea what it will look like. In such a context, how might mathematics education help prepare students for an uncertain future?

1.4 Towards a socio-ecological turn

The three strands of contemporary thought, sketched briefly above, point towards the importance of the ecological coming into dialogue with the social and political in our thinking and action. The phrase socio-ecological points to a desire to think about human and non-human together and a key belief driving this paper is that such a perspective is necessary for a mathematics education that is relevant to the future. In the next section I consider how the socio-ecological relates to mathematics education by reviewing past work within mathematics education that has taken on the challenge of bringing the ecological into focus alongside the social.

2 Reviewing mathematics education and the living world

While a body of research and scholarship within mathematics education has developed, focused on socio-political issues, ecological issues have been largely neglected, but with some notable exceptions (Boylan & Coles, 2017). In a review of past work (Boylan & Coles, 2017), Mark Boylan and I identified four themes. The first was work relating to critical mathematics education (Skovsmose, 1994), the second was work linking ecology to mathematical modelling, the third was the idea of a sustainable mathematics education (Renert, 2011) and a fourth strand specifically looked at the question of climate change within mathematics education (Barwell, 2013). A fifth strand could be added, which is work done within ethnomathematics. Ethnomathematics, even recently, has tended not to address explicitly questions of ecology, yet the respect given to indigenous ways of knowing within an ethnomathematical perspective is in keeping with section 2.2 and, hence, is connected to the argument for the need for a socio-ecological turn and a de-centring of human perspectives.

A common reference across many authors working in the strands above, is the work of Freire (1970) and his notion of a pedagogy of the oppressed and proposals for a problem-posing pedagogy, i.e., a conception of education where students are able to work on questions of relevance to their lives and their communities, developing skills and confidence to become active citizens. The link between a socio-ecological turn and education as a site of political activism is important. Freire wrote about finding the "meaningful thematics", or "generative themes" (p. 96) of a community, when planning the content of a non-oppressive education. Freire, pre-figured some of the developments sketched in this paper, by proposing that generative themes "can only be apprehended in the human-world relationship" (p. 106). I take human-world relationship to be socio-ecological.

In Boylan and Coles (2017), we mapped a possible future for the development of a socio-ecological mathematics education. The rows of the map indicated a deepening engagement in ecological issues. My sense is that, as a field, we have barely moved from the first row in the 4 years between its publication and this current writing. The map makes no claim to clairvoyance, but was offered, and is repeated here, as a provocation to scholars to place their own work within the grid and to consider what alternatives they would see as a mapping of possible futures.

Table 1. "Mapping a future"

Development of curriculum, pedagogy and practice	**Teacher education and professional development**	**Creation and fostering of networks**	**Research including theoretical work and empirical study**
Small-scale, classroom-based projects and trials take place, using resources that open up mathematics to global issues, in the context of a subject-oriented curriculum.	Small-scale programmes are developed, on isolated sites, linking learning to teach mathematics with a questioning of the role of mathematics in the world.	A mathematics education conference hosts a symposium on mathematics education and the living world. Mathematics educators connect with others engaging in environmental education. There is a global sharing, online, of resources and experiences.	A research agenda is established to explore ways in which mathematics classrooms can become sites for exploring uncertainty, risk and global, ecological issues.
Some schools experiment with a curriculum in which mathematical development is balanced with interdisciplinary work. A range of models are tried and tested globally and the results are shared.	Teacher training courses internationally shift to include how the study of mathematics can relate to wider ecological issues and the living world.	Scholars from across the globe document, trial and share experiences of linking mathematics education to the living world, both within their own communities and internationally.	The first large scale research project is funded, to study the ways in which mathematics education can broaden to encompass ecological awareness.
One country changes its national curriculum to put ecological awareness and stewardship of the planet at the core of all teaching and learning.	Professional development, that supports inter-disciplinary ways of working in schools, becomes a norm, on multiple sites.	Research in this field, internationally, matures providing a range of forums for the on-going linking of teaching and learning mathematics to inter- and trans-disciplinary ways of working and the living world.	Schools become sites where new research takes place on trans-disciplinary questions and issues. Students and teachers and researchers collect evidence in their own communities about change, documenting oral histories and sharing findings.

Boylan & Coles, 2017, p.13

Reflecting on what is written in Table 1, a change I might make, were I to be involved in writing a new map now, would be to place greater emphasis on activism or action for change, within each of the columns.

Before moving to consider some practical examples of what a socio-ecological perspective in mathematics education might mean for curriculum innovation, I will recap the argument so far. Firstly, I hope to have shown that there is a need for breaking down the barriers which have separated the social and the ecological in much of the theorising to date within mathematics education. Secondly, I have pointed briefly to some current and recent strands of research within mathematics education which are working towards such an aim. And, thirdly, I believe there is an urgency for moves towards curriculum innovation in mathematics education that pays attention to the precarious present time of the planet. All four strands of the map are relevant, and perhaps even necessary, for curriculum innovation. In the next section, I offer two examples (from the first row of the map) of school-based innovations "in the context of a subject-oriented curriculum". The purpose of these examples is to draw out one practical implication of a socio-ecological turn.

3 Curriculum innovation towards the socio-ecological

Given the arguments above, what are some possibilities for the mathematics curriculum? What would an innovation look like, which respected or took account of the socio-ecological? Without feeling able to answer these questions with any generality, in this section I compare and contrast two examples of curriculum innovation, one from Mexico and one from the UK. These were chosen partly for their contrasts and partly for being two innovations with which I have some personal connection. After setting out briefly the context of the work, in each case, I consider which mathematics is planned for students working on the curriculum; I use the categories of that mathematics in order to analyse the detail of the planning for the innovation (there is not the space to consider the actual work of students).

3.1 Example of a community-based project: mathematics education with the living world

The work in Mexico I report on here is a two-year (2019-2021) project, funded by United Kingdom Research and Innovation (UKRI). The Principal Investigator is Armando Solares, and I am a Co-Investigator and the only team member based in the UK (i.e., the work takes place in

Mexico). A project aim is to bring together interdisciplinary teams of scientists, university educators, teachers, non-governmental organisations, community leaders and policy makers – in order to design curriculum innovations which bring the concerns of the community into the life of its schools. The particular work I report below is taking place in a community which is in the catchment area of what has become a highly polluted river (The River Atoyac). As a direct result of (illegal) pollution in the Atoyac, there are higher than usual levels of cancer, miscarriage and childhood leukemia in the surrounding areas. Before the project began, there were few opportunities for primary schools near the river to bring questions of its pollution into the curriculum. The project is providing support for curriculum change called for within these communities.

3.1.1 Which mathematics?

The view of mathematics informing the project is closely linked to the perspective of critical mathematics education (Skovsmose, 1994) and this is the perspective used to frame an analysis of the work being planned. Researchers brought an awareness that mathematics is far from neutral in socio-ecological questions. Mathematics has a role in the modelling, description, analysis, communication, even creation of global challenges – and this role is linked to human decisions, by actors with their own agenda. The curriculum innovation in Mexico was co-planned by three groups, whose work is described below. The tasks they developed, although taking place in schools where the curriculum is subject-oriented, start off from an inter-disciplinary problem (the pollution of the river) that is keenly felt in the community. Mathematics emerges out of a wider socio-ecological problem facing a community, rather than being present as a set of objectives driving planning.

Critical mathematics education has considered three forms of knowing and these forms of knowing provide a framework with which to reflect on the tasks for students in the Mexico project:

> (1) Mathematical knowledge, which refers to the competencies we normally describe as mathematical skills. (These include competencies in reproducing mathematical thoughts, theorems and proofs, as well as in performing algorithms for calculations. The advanced competence of inventing and discovering new mathematics is also included.)
> (2) Technological knowledge, which refers to the ability to apply mathematics and formal methods in pursuing technological aims. (We

> concentrate our discussions on the applications of formal methods because they characterise highly technological societies.)
> (3) Reflective knowledge, which has to do with the evaluation and general discussion of what is identified as a technological aim, and the social and ethical consequences of pursuing that aim with selected tools. (SKOVSMOSE, 1994, pp.100-101)

In the next section, I describe how the planning for the curriculum innovation and relate this description to the forms of knowledge (above) which are being pushed or provoked. The planning described below took place early in the academic year 2020-21, in one region of Mexico, near the Atoyac River.

3.1.2 Curriculum tasks

The overall framing for the curriculum innovation was co-created at a meeting of teacher educators and teachers and this was the idea of developing a Memorial Museum to the River Atoyac. It is important to note that the Spanish word "memoria" could also be translated "memory", so an alternative title would be: Memory Museum of the River Atoyac. The decision was made (at a network meeting) to design a year-long project, which would run alongside the children's usual (subject-based) curriculum, and to create an exhibition or temporary Museum, which could then become something which is preserved and made suitable to be a travelling exhibition around the region. The Memorial Museum was split into three galleries. Each gallery had a team to develop it, comprising university educators, teachers, and members of a community-based non-governmental organization (NGO). The teams developed the plans below, for each gallery, near the start of the academic year.

Gallery 1: Once upon a time a river

Objective: to reconstruct memory and identity of my community in relation to the environment.

Triggering questions: What was the river like? What did the community members do around the river? What kinds of animals and plants inhabited its environment?

Links with Mexico curriculum content:

- Interviews of grandparents and elders from the communities.
- Historical accounts (using maps, drawings, photographs, videos).
- Radio scripts, journalistic articles, reports.
- Geographic and environmental space of local communities.

- Information analysis (interpretation and elaboration of graphs and tables of quantities).

Gallery 2: The Atoyac river contamination

Objective: Analyze the river pollution process, its characteristics and the health risks

Triggering questions: What is pollution? What types of pollution exist? Who pollutes? How do they pollute?

Links with Mexico curriculum content:

- Describe how humans transform nature by obtaining resources to nourish and protect ourselves (third grade).
- Explain the relationship between water, air and soil contamination due to the generation and improper handling of waste (third grade).
- Analyze the deterioration of ecosystems from the use of resources and technical advances in different stages of human development: hunter-gatherer, agricultural and industrial (fourth grade).

Gallery 3: Children's right to a healthy and toxic-free environment

Objective: to recognize that our universal rights are part of each one of us, as people.

Triggering questions: Do you know your universal rights? Have you heard about the right to a healthy environment? How to exercise a universal right?

Links with Mexico curriculum content:

- Assembly and reflection on the rights of children.
- Wall newspaper, journalistic notes, interviews.
- Geographic and environmental space of local communities.
- Information analysis (keywords, flowchart representation).

Reflections on the Memorial Museum

In the context of this article, one obvious reflection is that the presence of mathematics is not central to the design of the curriculum innovation and this was, of course, deliberate. However, there are elements of mathematics in each gallery. In terms of mathematical knowledge (as defined by Skovsmose, 1994), there are mathematical skills which will be developed or practiced (interpretation of graphs and tables in gallery 1; analysis of data in gallery 2 and 3). The second of Skovsmose's categories is technological knowledge, which is linked to technological "aims". I would interpret one of the technological aims, relevant to the work planned within the Memorial Museum, as being how industrial by-products and waste are disposed. Hence, in gallery 2, when the students consider who pollutes and how, and combine this with their analysis of the pollution levels themselves, they will be applying methods of analysis, interpretation and calculation, in order to make sense of the technological aim of waste disposal. However, it is clear from the Museum design that the aim is to go beyond an understanding of the technological aim of waste disposal alone, and to consider the environmental, social and ethical implications of how this aim is pursued in their community. Such a broad, overall aim is a clear example of a plan to develop reflective knowledge. In other words, as students learn about the history of the river, how European and national companies have used it to deposit waste, at no cost, over decades, they are learning about the impacts of technological aims bound up with the globalized economic system, which meant that international companies found it beneficial to locate factories near the Atoyac. Indeed, it is not too far of a stretch to say that one of the reasons Mexico presented as an attractive site for European companies is that they were able to dump waste in the river, reducing their running costs compared to having to dispose of waste in a responsible, costly and legal manner.

The social and ecological come together in this curriculum innovation through the focus on the river itself. The river is a living entity and one way community activists frame their work, which aims to reverse the current situation of the Atoyac, is to draw attention to the rights of the river. It is actually not possible to draw a boundary between the ecological and the social either in the causes or the effects of pollution. There are social and ecological conditions that lead to companies making decisions to dispose of waste in the way they do and the ecological and social impacts of the accumulation of toxins are similarly impossible to tease apart. A childhood death from leukemia can be traced through the ecology of water in the region and through the socio-economic conditions of the region, and both intertwine with each other.

3.2 Example of a school-based, symbolically structured environment

The second example, in this section, points to possibilities within a more narrowly defined mathematics curriculum, which is the case in many parts of the world. There may be contexts where teachers cannot engage with communities, or where national curricula are highly constraining. In these contexts, what can be done to bring the socio-ecological into the mathematics classroom? What relevant skills might students gain, through the study of mathematics, which might help them bring the social and ecological together? The project described below was a curriculum innovation which took place in the city of Bristol, within a single state school (Hayling School, a pseudonym), serving some of the more deprived catchment areas in the region. The work of this school was part of my doctoral study (Coles, 2013).

The aim behind the curriculum innovation in Hayling School, was to "Think Mathematically" and this was made explicit to staff and students. Students were offered the purpose of the year of "becoming mathematicians" where this phrase was interpreted as pointing to skills such as noticing patterns, making predictions and considering proof. The words "conjecture", "counter-example" and "theorem" were introduced to students in the first year of the school (students aged 11-12) and used repeatedly by staff, until they became words that were used by students and ideas that guided their actions (Coles, 2013). There was evidence of students seeing their role in mathematics classrooms as coming up with conjectures, testing them, sharing them and then trying to think why they worked. Of course, for such mathematical activity to take place, there must be tasks that make such work possible. The framework below, of a symbolically structured environment (SSE), is one I developed with Nathalie Sinclair – it captures features of the tasks used (the notion of a SSE was not developed with Hayling School in mind, but rather as a way of thinking about the work of educators such as Caleb Gattegno, Seymour Papert and Robert Davis). I will explain briefly what we mean by a SSE and then offer one example from the mathematics department teaching plans of Hayling School.

3.2.1 Which mathematics?

The phrase SSE comes from the work of the anthropologist Catherine Bell (1991). Bell developed the notion of ritualization, which Sinclair and I (Coles & Sinclair, 2019a) have applied to mathematics teaching. A "ritual" in a mathematics classroom often has negative connotations of an unthinking sequence of actions, in contrast to more exploratory of meaningful activity (Sfard, 2008). In contrast, Bell's notion of "ritualization" is about privileging some activities over others and distinguishing between the "sacred" and "profane"

(1991, p.74) but far from being set in opposition to thought, Bell saw ritualisation as a particular form of thinking. For Bell, it is non-discursive thinking:

> Ritualisation is embedded within the dynamics of the body defined within a symbolically structured environment. An important corollary to this is the fact that ritualisation is a particularly 'mute' form of activity. It is designed to do what it does without bringing what it is doing across the threshold of discourse or systematic thinking. (BELL, 1991, p. 93)

With Bell, Sinclair and I resist making the jump from acknowledging something does not cross “the threshold of discourse or systematic thinking” to assuming it is therefore meaningless or unthinking (Coles & Sinclair, 2019). We have argued that ritualisation is a helpful concept for thinking about teaching and learning mathematics in contexts where students become engaged in the study and experience some sense of being able to make decisions and choices, and ask their own question. We proposed the notion of symbolically structured environments (SSEs) in the mathematics classroom as ones where:

(a) symbols are offered to stand for actions or distinctions;

(b) symbol use is governed by mathematical rules or constraints embedded in the structuring of the environment;

(c) symbols can be linked immediately to their inverse;

(d) complexity can be constrained, while still engaging with a mathematically integral, whole environment;

(e) novel symbolic moves can be made.

Rather than exemplify each line now, I illustrate them with one of the tasks used in the curriculum at Hayling School.

3.2.2 Curriculum tasks

The text below is taken from the guidance for teachers at Hayling School, which was created by the teachers in the school. The task was for use with 12-13 year old students. The mathematical context is matrix transformations. Matrices do not appear on the curriculum in the UK until at least age 17, and then only for students specializing in Mathematics. Therefore, the purpose of the task was not so that students learnt matrices but rather that they learnt about a wide range of geometrical transformations, had practice plotting co-ordinates, dealing with multiplication by negative numbers and zero, and had opportunities for noticing patterns and asking their own questions. The task was designed originally by Laurinda Brown (see Brown, 1991) and at Hayling School we continued to use the same starting shape and matrix that Brown had originally chosen.

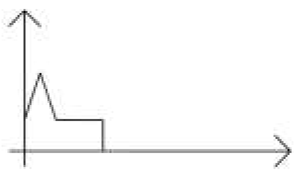
Figure 1. a first lesson

A first lesson:

Draw a co-ordinate grid in your books from 0 to 12 on x and y ...

Draw one on the board as you say this, or have one already drawn.

... and draw this shape at exactly the same points.



What is it? A church, yes!

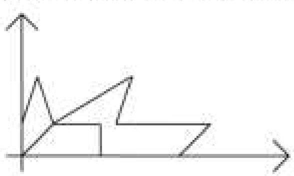
We are going to do a process involving these numbers that will change the shape. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

We will do it point by point. But first, so we know what we are talking about we need to label each point. Call this point A, what are its co-ordinates? Okay, in this project we write co-ordinates vertically. We are going to work together until everyone can do this process. Copy this into your books as we do it.

A *A'*

$$(1,5)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1x2 + 5x1, \quad 1x0 + 5x1) = (7, \quad 5)$$

Repeat these instructions for every point. Invite volunteers to complete.
Label and draw each of the new points:



What has happened to the shape?

You may want to introduce the language of stretches or shears and write up things like 'What happens to the area?' if students mention that kind of thing.

Try out your own numbers instead of $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *and see what happens to your own shape.*

You may want to discuss sensible shapes to try.

Challenge: *In 5 lessons time I will come in and write a set of four numbers (a matrix) on the board and your task will be to tell me what effect it will have just by looking at it.*

Reflections on a symbolically structured environment (SSE)

Each component of a SSE is present in the way this task was used at Hayling School. The students are introduced to the concept of a 2x2 matrix, which is a symbol standing for the action (condition a) of a geometrical transformation on a shape (in the first example, the shape being a 'church'). There are precise mathematical rules about how to operate with matrices (condition b) and these are taught to students explicitly at the start of the task. Having seen the transformation implied by a matrix, an obvious question to ask (and this either comes from the students or is prompted by the teacher) is, what matrix would transform the shape back to where it started (condition c)? The mathematical possibilities of matrix transformation are initially limited to 2x2 matricies. And within that constraint, it is possible to further constrain the situation, for example by insisting there are two zeros initially (constraint d). And, finally, students are encouraged to think of their own matrix to try and their own shape to try it on (constraint e).

In other words, the task above has the potential to fulfill all the aspects of a SSE. A SSE makes no mention of ecology or even the world outside the classroom. As such, it is potentially a framework for innovation which is possible to implement within a subject-oriented curriculum. And yet, if students take on the challenge of asking their own questions, working within a SSE can allow for a problem-posing pedagogy (Freire, 1970). And, where the task is designed to include elements well beyond the curriculum year of students, it is possible to square the circle of both allowing genuine student choice and covering a standard curriculum.

Drawing on a recent theorisation, this is a task that allows for *differentiation from an advanced standpoint* (Coles & Brown, 2021), which means choosing a topic well beyond expectations of what students need to be able to master, in order to use that topic as a context for practicing the skills needed on the curriculum, but in a manner where there can be genuine student choice – because whatever students end up doing (so long as it is within the SSE), they will be practicing the skills they need to know in the curriculum for their year. So, in the matrix example, it does not actually matter what matrix students choose, because whatever matrix they take, they will be plotting co-ordinates, multiplying numbers, comparing transformations, and more. My experience is that students can become highly engaged, working within a SSE, as they become interested in asking their own questions. It is possible for students to collaborate, across widely different levels of prior-attainment, particularly if there is a mechanism for the common collection of responses. At Hayling School, one mechanism used frequently was for students to pin up work, or results, on a board available for the whole class to see. In the matrices task, images of transformations, and the matrices which created them, can be gathered, allowing the whole class to engage in questions about similarities and differences. The common boards point are elements contributing to a communal mathematics, students working together as a class, rather than pursuing tasks as individuals.

The ecological aspects of a SSE are perhaps not so clear as in the Mexico example. However, if the ecological is read in its broadest terms, to include everything non-human, then one aspect of the melding of the social and ecological in the matrices task, comes from the mathematics itself. The process of matrix multiplication and its application to the co-ordinates of shapes in the Cartesian plane, mean that there are constraints built into the environment. If students choose matrices of a particular form (ones that are all equivalent to enlargements, say) then there are inevitable patterns which will be presented to them. Resources for students, to support mathematical thinking, come from both human communications and the structure of the mathematics being explored, with each one necessary to the other, in terms of occasioning something with which students might engage.

5 Discussion

The two examples sketched above could hardly be more different. In the first, mathematics plays a subservient role, and a socio-ecological issue drives the work and the engagement of both staff and students. In the second, the mathematics is what provides the structuring of the learning environment. Students are invited to engage in activities which will mean they, figuratively, hit up against the mathematics. The work they do will mean they get feedback about the patterns, regularities and boundaries of the mathematical space in which they are operating.

In the first case, the link to the socio-ecological is obvious. However, what is significant is the careful design to mean that students will be engaging in reflective knowing. It would be possible to design tasks or contexts which are linked to socio-ecological issues, without such reflective knowing being part of what is envisaged. It is the identification of aims and the reflection on the implications of those aims that raise the engagement to that of reflective knowing. In the second example, it is the maintenance of a SSE which will mean students are able to experience their own ideas about mathematics, are able to plan their own work and engage in reflection on the results of their choices.

There are some commonalities I would like to point towards, despite the differences. The first is a common feature of reflection. In the Mexican example, the tangibility of the polluted river provides ample opportunities for reflection, but such activity still needs to be planned, supported and, where appropriate, documented. In the UK example, the aims around mathematical thinking and developing habits of conjecturing and testing again provide opportunities for reflection on the outcomes of predictions, for example, and an altering of ideas as a result. And this leads me to a second commonality. In neither case, from the plans, is there any inevitability of either reflective knowing, or of the development of a SSE. It would be entirely possible to present the Memorial Museum to students in a manner that was controlled and where their attention was on the actions of fitting into a pre-determined plan, rather than on reflection about what they were finding out. Similarly, in the matrix task, it would be possible to constrain the task for students so that they all work on the same matrices and the space for making and testing predictions is constrained into what is already planned and known by the teacher. In both cases, the plans are to prompt communal action.

The implication of the observation that neither plan guarantees the hoped-for aims is, firstly, that the role of the teacher is fundamental. And, secondly, that in both examples of curriculum innovation there is a need to *engage* students in the plan. There is a need for a dramatization of the curriculum (Stengers, 2011), in the sense of making the tasks being offered dramatic enough to draw in students' attention and energy. As in a theatre, there is always a need for some kind of suspension of dis-belief in a schooling context. In the Memorial Museum, there is a need to suspend, for instance, any belief that the river pollution cannot be changed. In the matrices SSE, there is a need to be prepared to learn how to do matrix multiplication with little context or reason for doing so, outside the task itself. However, the patterns and connections and possibilities within the task can soon take over and become absorbing. Both tasks offer ample occasion for such a dramatizing, but nothing is guaranteed by plans alone.

5.1 Preparing for a future that is not what it what it used to be

"The future is not what it used to be" is the title of a book (Friedrichs, 2017), which argues that we cannot rely on the comfort of believing the future will follow the pattern of the past. Of course, that is only a comfort if your past has been comfortable and, for many communities around the world, a future that is different to the present may be something to be welcomed. Nonetheless, the phrase captures, for me, some wisdom that disruptions may be here to stay. This article has argued, in light of the inevitability and yet the uncertainty of change, that there is an obligation to consider what role the study of mathematics in school or university can play, in preparing students for a precarious future.

I have argued for a reconceptualization of the connection between what are often taken to be the separate spheres of the social and the ecological. A socio-ecological turn is taking place across the sciences, as we recognize, in one sphere after the other, the interconnected, symbiotic meshwork of living and non-living. This article has been an attempt to think through what such a recognition could mean for mathematics education. The map of a future, in Figure 1, offers one set of possibilities for a socio-ecological mathematics education.

I suggest that one element of re-considering possibilities for teaching and learning mathematics in school is to bring the agency of the non-human aspects of the socio-ecological (whether this be a river, or a mathematical structure) into play. I offered two examples of plans for curriculum innovations where the non-human was central to the classroom. In one example, a polluted river is the theme of a memorial museum, which allows reflection on past, present and future actions. In the second example, a mathematical structure provides constraints and feedback to students, which allows for the noticing of pattern and the raising of questions, and with reflection on actions leading to possibilities for new actions. In both cases there is a sense of a dramatizing of the curriculum (Stengers, 2011).

A socio-ecological turn implies viewing, as socio-ecological, what might more typically be taken to be either social, or ecological. So, for example, rather than considering communications in a lesson as a purely social system, a socio-ecological view might ask questions about the socio-ecological challenges facing the school's communities, and how these impact, or could impact, what tales place in the classroom; or, might ask about how the constraints of the conceptual structures in the intended curriculum might come to play an active role in students' work and discussion.

In this article I have focused on implications of a socio-ecological turn for curriculum innovation, via offering two examples. In terms of a socio-ecological turn more broadly, there is, of course, further work to be done, for example, to elaborate methodological implications for the doing of research. Also, the epistemological and ontological implications need much more detailed elaboration. In this article, I have merely pointed to the symbiotic, enmeshed, interconnecting view of knowing and being that emerges from taking seriously the role of the ecological in the social and the social in the ecological. In future work, I hope to elaborate more fully these philosophical implications as well as continuing to support work in classrooms.

Acknowledgements

The Mexican project reported in section 4.1 is called "Community, Science and Education: An interdisciplinary perspective for facing ecological crises in Mexico and South America" and is funded by the UK's Engineering and Physical Sciences Research Council (EPSRC), part of United Kingdom Research and Innovation. Grant Ref: EP/T003545/1

References

Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education,* 15(1), 1-16.

Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind*. Chicago: University of Chicago Press, 2000.

Bell, C. *Ritual theory, ritual practice*. New York: Oxford University Press, 1991.

Berkes, F., & Folke, C. (1998). *Linking Social and Ecological Systems: Management Practices and Social Mechanisms for Building Resilience.* Cambridge University Press.

Boylan, M.; Coles, A. Is another mathematics education possible? an introduction to a Special Issue on "Mathematics Education and the Living World: Responses to Ecological Crisis". *Philosophy of Mathematics Education Journal,* 32, (November 2017).

Brown, L. (1991). Stewing in your own juice. In D. Pimm & E. Love (Eds.), *Teaching and learning school mathematics – A reader (for OU course EM236)* (pp. 3-15). London, UK: Hodder and Stoughton in association with Open University.

Coles, A. (2017). A relational view of mathematical concepts. In E. de Freitas, N. Sinclair, A. Coles (Eds.) *What is a mathematical concept?.* Cambridge University Press: Cambridge, pp.205-222.

Coles, A., & Brown, L. (2021). Differentiation from an advanced standpoint: Outcomes of mathematics teachers' action research studies aimed at raising attainment. *Mathematics Teacher Education and Development* (in press).

Coles, A., & Sinclair, N. (2019b). Re-thinking 'concrete to abstract': towards the use of symbolically structured environments. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education,* 19(4), 465-480.

Coles, A., Sinclair, N. (2019a). Ritualization in early number work. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 177-194

Enders, G. (2017). *Gut: The inside story of our body's most under-rated organ.* Scribe publications: London.

Freire, P. (1970). *Pedagogy of the oppressed*. Cambridge, Continuum: New York.

Friedrichs, J. (2017). *The future is not what it used to be: Climate change and energy.* MIT Press: Massachessetts

Kimmerer, R.W. (2013). *Braiding Sweetgrass: Indigenous Wisdom, Scientific Knowledge and the Teachings of Plants.* Milkweed Editions October 2013.

Renert, M. (2011). Mathematics for life: Sustainable mathematics education, *For the Learning of Mathematics*, 31(1), 20-26.

Safina, C. (2015). *Beyond words: What animals think and feel.* Henry Holt & Co.: New York

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Simard, S. (2021). *Finding the mother tree: Uncovering the wisdom and intelligence of the forest.* Allan Lane: London

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

Stengers, I. (2011). Comparison as a matter of concern. ***Common Knowledge*** 17(1), 48-63. https://www.muse.jhu.edu/article/418671 (accessed 1st March 2021).

Wolfe, C. (2010). *What is Posthumanism?* Mineapolis: The University of Minnesota Press.

Autor:

Alf Coles

PhD in Mathematics Education.

Currently is Professor of Mathematics Education at University of Bristol. He has experience with teacher development; listening and hearing in the mathematics classroom; early number; and, most recently, socio-ecological issues in mathematics education.

Correo electrónico: Alf.Coles@bristol.ac.uk

Bristol, United Kingdom.

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7301-409X

Como citar o artigo:

COLES, A. A Socio-ecological Turn in Mathematics Education: Reflecting on Curriculum Innovation. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 207 - 228, enero, 2022. DOI: 10.37618

Aprendizaje Dialógico:
Tránsito de un Concepto Educativo hacia la Enseñanza Diaria en el Aula

Peter Gallin
p.gallin@sunrise.ch
https://orcid.org/0000-0001-7571-7821
www.gallin.ch
www.lerndialoge.ch
University of Zurich
.

Recibido: 12/junio/2021 **Aceptado:** 12/julio/2021

Resumen

En este artículo son presentados el origen y los elementos principales que constituyen el ciclo del aprendizaje dialógico. El desarrollo del concepto de aprendizaje autorregulado y sustentable está basado en el encuentro personal entre dos profesores de dos disciplinas completamente diferentes: Matemática y alemán como lengua materna. Además del relato de esa génesis, se muestran dos ejemplos prácticos que ilustran como la Matemática en el salón de clases puede resultar menos complicada cuando el profesor decide confiar en la capacidad de sus alumnos. Finalmente, se hace referencia a los tres libros *"Ich-Du-Wir" ("Yo-Tú-Nosotros")* de alemán como lengua materna y Matemática, escritos para ser usados en los seis primeros años de la escuela básica y contienen los principios del Aprendizaje Dialógico.
Palabras clave: Aprendizaje Dialógico. Actividades para el aula de clases. Enseñanza de la Matemática.

Aprendizagem Dialógica:
Passagem de um Conceito Educacional para o Ensino Diário na Sala de Aula

Resumo

Este artigo apresenta a origem e os elementos principais que compõem o ciclo da aprendizagem dialógica. O desenvolvimento do conceito de aprendizagem autorregulada e sustentável está baseado no encontro pessoal entre dois professores de duas disciplinas completamente diferentes: matemática e alemão como língua materna. Além do relato dessa gênese, são mostrados dois exemplos práticos que ilustram como a matemática de sala de aula pode ser descomplicada quando o professor decide confiar na capacidade dos seus alunos. Finalmente, são feitas referências aos três livros "Ich-*Du-Wir*" ("Eu-Você-Nós") para alemão como língua materna e matemática escrito para ser usado nos seis primeiros anos da escola básica e que contém os princípios da Aprendizagem Dialógica.
Palavras chave: Aprendizagem Dialógica. Atividades para a sala de aula. Ensino de Matemática.

Peter Gallin

Dialogic Learning: From an educational concept to daily classroom teaching

Abstract
This article presents the genesis and the main elements that compose the cycle of the dialogic learning. The development of the concept of self-controlled and sustainable learning is based on a personal encounter between two teachers of entirely different subjects: Mathematics and German. Two examples show how uncomplicated teaching mathematics in the classroom can be, once the teacher has gained the courage to trust in the capabilities of the children. The three German textbooks "*Ich-Du-Wir*" ("I-You-We") for mother tongue and mathematics in the first six years of elementary school provide support.
Keywords: Dialogic Learning. Classroom activities. Mathematics instruction.

Introduction

With our publication *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik* ("Dialogic Learning in Language and Mathematics") (Ruf & Gallin 2005) over ten years ago, Urs Ruf and I attempted to pool the wide variety of experience we had ourselves gained as Gymnasium (high school) teachers as well as that from colleagues of all school levels we met in our further training courses. Thus we tried to develop a uniform teaching concept we now call "dialogic learning". These practical educational reflections, which extensively took place parallel to our teaching work at high school and remote from empirical educational research at universities, met with a satisfying response in German-speaking regions and have in the meantime become established in the scientific community. This was largely due to a shift in our focal points to the University of Zurich, which also freed our concept from the initial bond with the grammar school subjects of German and mathematics. Nonetheless, the essence of "Dialogic Learning" still focuses directly on practical classroom activities and on a realistic, efficient time and effort management for all persons involved in the lessons. To ensure that the concept can also be implemented at primary school level, we additionally developed "I-You-We" textbooks for German and mathematics for the first six years of school, which are used here and there as teaching aids officially approved in the canton of Zurich (Ruf & Gallin 1995; Gallin & Ruf 1999). This article will, on the one hand, present Dialogic Learning in a concise framework and, on the other, provide pointers to the – by its nature free – use of the "I-You-We" schoolbooks.

This article was first published in German in the journal "*Grundschulunterricht Mathematik*" (Gallin, 2010) under the title "*Dialogisches Lernen. Von einem pädagogischen Konzept zum täglichen Unterricht*". In the years 2010–2013 Switzerland had the opportunity to participate in the European Fibonacci Project: A systemic approach for sustainable implementation and dissemination of inquiry pedagogy, tested in primary and secondary schools. For the final book “Implementing Inquiry in Mathematics Education” (Baptist & Raab, 2012) the article was translated into English. Now this version of the text is presented with the aim of sharing among the Iberoamerican community of educators the ideas of the dialogic learning concept.

Genesis and theory of Dialogic Learning

Over many years, Dialogic Learning was developed through dialog in a constant process of critical analysis of classroom teaching practices. The foundation was laid in the 1970s in the framework of interdisciplinary cooperation at the Kantonsschule Zürcher Oberland in Wetzikon, Switzerland. Urs Ruf, a teacher and professor of German, and I, a mathematician, were looking for points our two subjects had in common. We quickly realized that although there are overlaps, they are not of primary importance for high school teaching. Our cooperation rapidly shifted to the basic problems that students repeatedly have to master in our school subjects. By a stroke of luck, it turned out that Urs still had lasting memories of his own mathematics lessons at high school – not all of them of a positive nature. As far as my German lessons at school were concerned, I had endured a similar experience. This constellation enabled us to analyze the process of learning in these two subjects without having to take into account common topics. Our interdisciplinary cooperation, which we then called “overlapping” instead of merely “touching”, was characterized by the following approach: Whenever we examined a topic involving either German or mathematics, the one who had majored in the subject took on the role of an expert, the other the role of a novice. In this way, the respective teacher had a student to deal with, who was interested in the unfamiliar subject and willing to learn, but was also able to clearly indicate and articulate his difficulties.

A concrete example from the beginning of our cooperation serves to illustrate how the didactic dialog between us took place. What you need to be aware of at this stage is that I have always had a special interest in games of logic and brainteasers ever since my university student days. At that time, I did not realize their didactic significance – in contrast to the didactic significance of the specified syllabus for mathematics. Intuitively, I liked confronting others with such problems because, as a general rule, the people concerned could not simply fall back on a formula or predefined procedure to solve the problems. One of the characteristics of brainteasers is, therefore, that they reveal the one-dimensional image of mathematics that many people have. They think that mathematics is a science that consists of exercises and questions for which a solution can always be found by means of formulas (algorithms) that have to be learned. Today, we call this restricted (one-dimensional) view of mathematics a "mathematical injury" (Figure 1). Unfortunately, even today mathematics instruction rarely manages to convey a differentiated view of mathematics. This, however, is precisely the aim of Dialogic Learning in mathematics as a school subject.

Figure 1 – A restricted (one-dimensional) view of mathematics: the mathematical injury

Source: Created by the author.

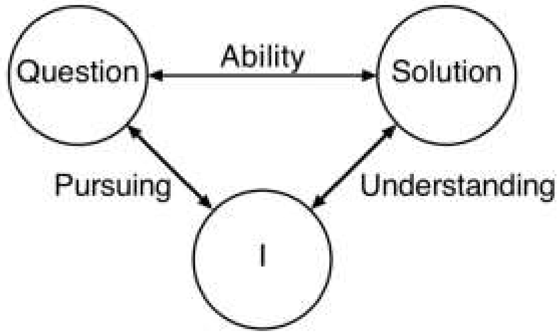
During our first didactic dialog, I was of course unaware that Urs had been made a victim of this mathematical injury in his former mathematics lessons, to the extent that he believed he had to answer every mathematical question immediately with a formula. This is why he felt great distress when I described an authentic problem I was faced with while filling the tank of my car. As he later admitted to me, his first inner reaction to my story was: "What algorithm, what formula do I have to use to solve the problem as quickly as possible?" But he didn't let it show, of course. As a Germanist, he had learned that attack is the best form of defense. Consequently, he protested, "What you're telling me here isn't complete at all. To me it sounds like one of those word problems where the author struggles through a story, but doesn't disclose the crucial part and beats around the bush. If he were to reveal it, the problem would no longer be of any interest." When I denied having withheld any information, he retorted, "OK, I'll prove it to you. I'll write down everything you've told me or better yet: the way I have understood it." No sooner said than done. When I read his text, I exclaimed, "Something is missing here!" It was, of course, a great triumph for him. "That's exactly what I wanted to prove", he answered. But I didn't relent, didn't reproach him and took a closer look at his text. I rewrote it and gave him the new version to read. Then he said, "Now I don't understand the story anymore." He rewrote the story again, after which it became my turn to declare, "Now the problem can no longer be solved." The story went back and forth in this manner several times until we both agreed on the version that resulted from this written dialog. Satisfied with the text, we unfortunately threw away all the previous versions. Today it would be interesting to retrace this development process once again. At the time, we were, however, only interested in the final result, which was to become part of a small book we had decided to publish. For this booklet we jointly formulated fifty puzzles from my collection word by word, sentence by sentence, as in the first story. It was then published in 1981 by Silva-Verlag Zurich under the title *Neu entdeckte Rätselwelt* ("Newly Discovered World of Puzzles") (Gallin & Ruf, 1981).

The first story described above was included as problem no. 17, which carried the title "While Filling the Tank" and its content is the following:

> I had parked my car in front of one of the many gas pumps at a shopping center. A green light showed me that it was available for use. It was a self-service filling station. When a customer has finished pumping gasoline, a red light on the pump lights up showing that it is now blocked. The customer takes the receipt printed by the machine and goes to the cashier, who supervises the entire filling station. Once the customer has paid, the cashier unblocks the respective pump from a central control panel. When I lifted the nozzle, I noticed the display had already been reset to zero. I filled the tank, read off how much gasoline I had put in and took the receipt from the machine. Without taking a closer look at it, I went to the cashier, handed over the ticket and wanted to pay. The cashier then exclaimed: "Now it's happened!" He went to the pump and came back with a receipt showing the right number of liters and the invoice in Swiss francs. What was on the first receipt? Can you reconstruct the incident? (Gallin & Ruf, 1981, p.22)

Intensive analysis and persistent formulation attempts enabled Urs repeatedly to come up with solutions for maths problems he was faced with. This happened almost incidentally, not because he had a formula to fall back on, but because he successfully thought his way through the situation underlying the problem. What took place here can be represented in our diagram by the additional "I", which symbolizes the position of Urs (Figure 2).

Figure 2 – Understanding is only possible if the “I” pursues thoroughly a question



Source: Created by the author.

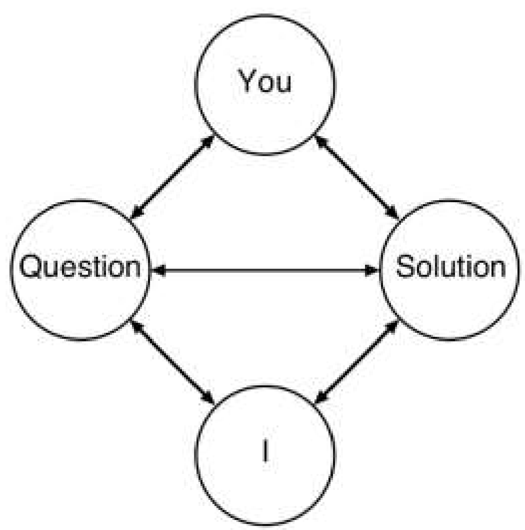
Urs’ encounter with the problem has two characteristic features:

1. The “I” of the learner was evidently activated by my provoking question, and
2. Urs was able to get a hold on the problem through his spontaneous writing.

We call the interaction between question and I “pursuing mathematics”. Initially, the focus is thus not on solving the problem, but on exploring the question and related aspects at depth until the question becomes a genuine question for the student himself/herself. It is a well-known fact that parroting the wording of a question by no means constitutes a real question that students would actually ask themselves. So in the process of pursuing mathematics, you literally ignore the solution. And a decisive point for us here is that you speak or write in your own language, your native language or – as Martin Wagenschein calls it – the language of understanding, not in some technical jargon or in the arcane lingo of insiders, of people who have already understood (Wagenschein 1980). It has often been my experience that intensively “pursuing” mathematics leads students to the solution without their even becoming aware of it. It was the same with Urs. I had to tell him several times that he had already found the solution and could stop turning over the question in his mind, pursuing mathematics. It turned out that as a linguistic expert something completely different fascinated him from what I had anticipated on the basis of my own subject-related expectations: it was not the concentrated, unambiguous, and apodictic solutions for our problems, but the entire mathematical landscape surrounding the problem that actually captivated Urs. What interests him is how to successfully relate the question to one’s own world and to make the most of various approaches to the mathematical result. The third link in our diagram, the “understanding of mathematics”, is thus generated quasi automatically if mathematics has been pursued long enough. This experience is supported by a statement made by philosopher Hans-Georg Gadamer, in which he specifies a necessary condition for understanding: “The very first stage in the process of understanding is when something appeals to us: that is the paramount of all hermeneutic conditions.” (Gadamer 1959, p. 24 – 35)

Understanding is never in the hands of the teacher. You cannot get someone to understand, all you can do is try to increase the probability that the student will feel the “appeal”, as Gadamer puts it. Understanding always comes about unexpectedly, it cannot be planned and organized. Physicist Martin Wagenschein also asked himself how understanding comes into being and made the following observation: “Real understanding is brought about by talking to others: based on and stimulated by something enigmatic, looking for the reason.” (Wagenschein 1986, p. 74) For him, too, it all starts with a person’s consternation over an “enigma.” But an additional factor comes into play here, i.e., an exchange with other people who have also given thought to the same problem. This aspect has not yet been taken into account in our diagram, which is why we extend it to include a fourth position – the “You”. This was the role I played in the dialog with Urs by responding to the solutions he tentatively suggested and raising new “questions” in him through my reactions. The dialog that develops between an I and a You in the learning process via the questions and solutions for a problem is made graphically visible as follows (Figure 3).

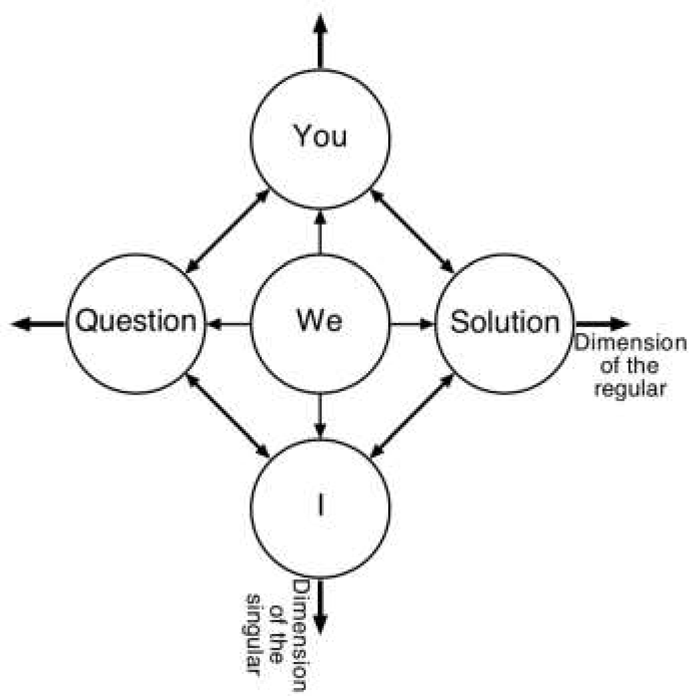
Figure 3 – The dialog during learning



Source: Created by the author.

Now the one-dimensional classroom instruction, which is solely limited to teaching formulas and algorithms (horizontal direction), has become a two-dimensional form of teaching, which includes the vertical dimension between the positions I and You. The connections between the two positions opposite each other intersect at a point that we designate as "We." That is where the regular perceptions of science meet the singular insights that develop in the dialog between the I and the You (Figure 4).

Figure 4 - Two-dimensional teaching

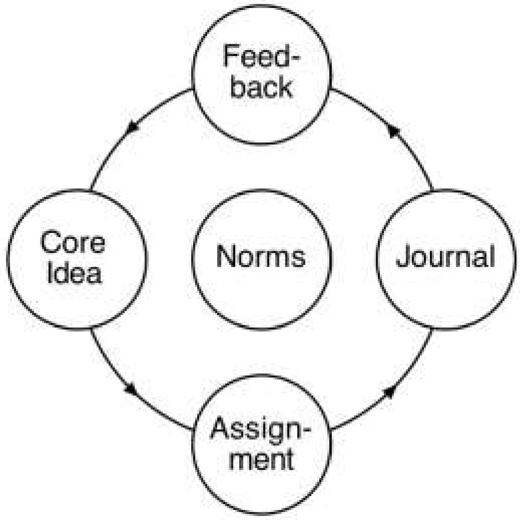


Source: Created by the author.

I would like to make it mandatory for extended forms of teaching, which are greatly recommended nowadays, to incorporate this feature of two-dimensionality. To me, they are beneficial only if the dimension of the singular (added to the regular) is actually brought into play. It is, after all, very possible to organize modern methodological arrangements in which only the dimension of the regular still counts. Genuine extended teaching therefore means classroom activities in which an exchange or dialog between an I and a You aimed at negotiating and defining the established regularities of the subject plays a major role, reaching all the way to the assessment and the awarding of grades (Ruf & Gallin, 2005, Vol. 2, p. 81ff). Consequently, students have the opportunity at school to find out how all formulas, norms, prescriptions, rules, and algorithms that exist – not only in mathematics – are, in the end, the result of a dialog, i.e., represent binding rules as a negotiated We position. Let us be clear in our minds about the fact that particularly in science all norms and substantiated results are ultimately the outcome of a dialog, an agreement among experts.

By renaming the five positions in Figure 4, which is inspired by the individual learning and research situation, a final illustration will now show how teaching entire classes can be set up. At the same time, methodological references emerge that are typical of Dialogic Learning. At the beginning, there is not simply a question in its question form, but a provocation that induces the student to act on the factual level by means of an assignment. We call this the core idea. Through this core idea, the question is presented in a compact, attractive, and perhaps even provocative manner. The core idea is the guideline for preparing an assignment directed at all " I's" in the class. To make it possible to handle an entire class with all its heterogeneity, students are instructed to record the steps they take in tackling the assignment (learning journal or "travel diary"). These are the students' tentative "solutions" that are read by a You. Frequently this will be the teacher, but it is also entirely conceivable that other students might take a look at it beforehand and comment on the work others have done in their journals (by leaving the journals and changing places with others ((Ruf & Gallin, 2005, Vol. 1, p. 39ff). A decisive factor for Dialogic Learning is that the You provides (brief) feedback and thus acknowledges the students' core ideas that were actually effective in handling the assignment. It is perfectly possible for the students' core ideas to differ from that originally stated by the teacher. Further lessons receive new impetus from a suitable selection of the ideas found in the students' notes and a discussion of these ideas in the entire class. In Dialogic Learning, the norms that ultimately have to be learned in the subject concerned are hinted at rather than spelled out: they correspond to the We position, i.e. the target (crossing) between an I and a You at the end of the exchange.

Figure 5 - The cycle of Dialogic Learning



Source: Created by the author.

Working with I-You-We as a teaching aid

The outline of the above theory and the numerous specifications involved in Dialogic Learning may put off teachers and make them think that superhuman powers are needed to meet all these requirements. A detailed description of the approaches to a dialogic structure of classroom teaching can be found in my contribution in the book *"Besser Lernen im Dialog"* ("Learning Better in a Dialog"), (Gallin 2008a).

For this reason I would like to use an example to provide suggestions for putting Dialogic Learning into practice with the help of the textbook "I-You-We" (Ruf & Gallin, 2014) as a teaching aid and try to show that significant results can be achieved even with very small steps. Another detailed example from a 6th grade class of Patrick Kolb in Steinhausen can be found in my contribution on the rule of three in the book "*Besser Lernen im Dialog*" ("Learning Better in a Dialog"), (Gallin 2008b). The first contact with multiplication is involved here and we follow the stages in the cycle shown in Figure 5.

1. Core idea

A rather broad definition of the core idea states that "Core ideas have to be phrased in such a way that they arouse questions in the singular world of the student, which in turn direct attention to a certain subject area of the lesson." (Gallin & Ruf 1990, p. 37) The crucial element of a core idea is thus its effect on the student; it triggers productivity. In this function, therefore, a verbal form of a "core idea" is, strictly speaking, initially just a "candidate for a core idea" since its effect has yet to manifest itself in a specific lesson. Consequently, core ideas cannot be designated as such until later and then only in relation to a certain unique group of students. In addition to this, however, there are core ideas of teachers that have already demonstrated their effectiveness based on the particular biography and genesis of knowledge among the persons involved. And a large number of such core ideas – the core ideas of the authors and their acquaintances – are incorporated into the textbook I-You-We and expressed both in the main text and in the titles of the chapters and assignments. All of them relate to the official syllabus in the subjects German and mathematics and are intended to stimulate the students to grapple independently with the problem at hand via the assignments.

In this way, it becomes clear what didactic role the puzzles that I employed to challenge others played: with a puzzle there is justified hope that it will act like a core idea and set a productive process in motion in the person confronted with the puzzle. Since it is not possible, however, to compress an entire syllabus into puzzles, core ideas have to take over this role.

An example that can be used in this context is the introduction of multiplication of natural numbers in the first years of school. Two core ideas are offered for this in I-You-We 1 2 3 (Ruf & Gallin 1995, p. 62ff.). The first one states: “Inner images help you to group a large number of similar objects clearly without having to touch them.” The second one is: “When you put on the multiplication glasses, you see multiplication calculations all around you.” It is highly unlikely that any core idea candidate will unfold its effect in school in this abstract form. For this reason, core ideas have to be transformed into specific assignments given to the students as mandatory tasks.

2. Assignment

The teaching aid always makes an initial suggestion for an assignment that is divided into several stages and becomes increasingly complex. Practice has shown that it is advantageous to hand out only part of the assignment at a time, either as a copy or by dictating it, so it is noted in the journal (diary) immediately prior to being worked on by the school children. This makes reading easier, particularly at a later stage and for third parties. The first part of the assignment “Multiplication glasses” is: “Imagine that you are wearing multiplication glasses and look around a bit in your environment. Do you discover things that are arranged nicely in groups of twos, threes, fours or fives? Make a note of them in your diary and write an appropriate multiplication calculation for them.” By making cardboard "multiplication glasses" with two round, empty holes for each child, the teacher creates an amusing way of giving the glasses a concrete function and thus makes it easier for the schoolchildren to fully dedicate themselves to the task at hand.

3. Journal

The journal excerpts shown in the textbook are intended to encourage teachers and students to try a similar approach. We weren't able to predict this reliably, but surprisingly it doesn't cross the children's mind at all to copy these illustrations. They are evidently designed so personally that a natural inhibition keeps the pupils from copying them. The following example (Figure 6) of eight-year-old Joana, which took place in a normal class in Zürich-Nord at the end of the first year in primary school, shows at a glance, despite the few words used, that Joana has already understood the nature of multiplications. Thanks to these clues, you can, so to speak, look into the child's mind! A decisive element is the fact that the teacher has the courage to expect something from the children and doesn't think she has to spell out everything herself in advance by handing out restrictive worksheets, for instance. The children in this class work using sketch pads, which additionally support the freedom of the individual product through their own lack of structure.

Figure 6 - With her pencil drawings Joana shows all the places where she sees multiplication calculations (the German "mal" means "times")

Source: Author's own.

4. Feedback

Joana is justifiably proud of the fact that her teacher distributes her mature work in the learning journal and talks about it during a lesson. This acts as an incentive and creates a situation in which, sooner or later, even weaker students show above-average achievement relative to their standard so that their work can be discussed and appreciated within their class. However, this is only one aspect that plays a role in going through the students' work again in class. Besides that, there is always an educational aspect that is decisive for the continuation of the lesson. In all the students' works, there are one or more core ideas that can be extracted by the teacher and turned into a new assignment. As a result, the role of the first core idea given by the teacher or the textbook fades into insignificance. Furthermore, preparation for the following lesson can be carried out in the course of looking through the students' works. Core ideas in Joana's work may include: "It is useful not to state the result of the multiplication calculation right away" or "Pictures without calculations or with a mistake may give rise to a new puzzle". New assignments could be formed on this basis and then be given to everyone in the entire class.

This means, however, leaving the line of approach of the textbook for a moment, which is precisely the characteristic feature of Dialogic Learning. This kind of classroom teaching cannot be planned in detail, it develops from the contributions of the students. At the same time, the inherent problem of heterogeneity is tackled via this approach, because all children in the class repeatedly receive the same assignments, which they work on individually, albeit at varying depths and levels of intensity. Nevertheless, an exchange within a class is possible, the children can help one another and discuss things so that individualization does not lead to isolation. Instead, it leads to social learning within subject lessons.

5. Norms

A question that repeatedly arises is whether the specified teaching goals, norms, and competencies can be achieved through Dialogic Learning. Specifically, a question frequently asked is whether subject-related topics can also be practiced and tested. To the extent that the work in the learning journals is not in itself practice enough – Joana has already practiced several multiplication calculations – preparing for a test can itself be transformed into an assignment. The somewhat superficial, though often very effective core idea behind this is: "I want to get a good grade." Accordingly, the teacher can give each child the assignment of inventing a problem that is as difficult as possible but nonetheless manageable and interesting at the current class level. And before you know it, the teacher is in possession of more than twenty problems that exert a very particular attraction for the students, in contrast to copies of predefined tasks. The authors are known, and the students are not even certain whether all problems are well-defined and solvable. Interesting subject-related discussions among the students are inevitable. Figure 7 shows an example from my own teaching at the Kantonsschule Zürcher Oberland in Wetzikon, Switzerland. It shows exercises regarding the distributive law, worked out by all students of a Gymnasium class (7th year of school).

Figure 7 - Exercises regarding the distributive law

1.	Factor out: gcdbaef + hjkmci – oqsrcnp + zyxcwtuv	
2.	Calculate as elegantly as possible: 9738659667 · 9738659967 – 9738659567 · 9738659667 + 9738659667 · 9738659467 + 973865966 · 9738659267 - 9738659967 · 9738659667	
3.	Multiply out: (a-b) · (a-b) · (a+b)	
4.	Factor out: $a^3 + a \cdot a \cdot b - a \cdot b \cdot a - a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot a + b \cdot a \cdot b - b \cdot b \cdot a - b^3$	Claudio
5.	Multiply out: (f+x) · (u-w)	Anatina
6.	Depict in a drawing (49·5), with different colors as far as possible	
7.	Write as simply as possible: $7a^2 - (3a^2 - a)$	Christian
8.	Factor out and write as simply as possible: $c^2 \cdot a - b + c^3 \cdot 2c + b^2 \cdot c^2$	
9.	Calculate in the simplest possible way: 243378 · 243379 – 243377 · 243378	Martina
10.	Which number has to be inserted for the placeholder so that the number pairs have the same quotient? (x^4,x^2), $(49^4,x^2)$	Sara
11.	Factor out the biggest possible factor: $4^3 + 4^2 + 4^5$	Sandra
12.	Calculate as simply as possible: 189357389562 · 189359389562 - 189358389562 · 189357389562	
13.	Calculate (a:(m+n))(m+n)	
14.	Calculate simply 24 · 89 + 53 · 119 – 36 · 24 – 43 · 53	
15.	Factor out: adam + eve - apple	
16.	Factor out: abcdefgh + bcdefghik - deghiklm	Kaspar
17.	Multiply out: (a-b+c) · (d+e) · (f-g-h+l)	Claudius
18.	30003 · 100 · 29997 : 25 : 4	
19.	17985 · 17985 · 1398 – 1397 · 17985	Renate
20.	Multiply out: (a+b-c) · (a-b-c)	Christof
21.	Multiply out: $(a^6 \cdot a^3 \cdot a^7 - a^8) \cdot (z^7 + 6^8 \cdot 9^9 - r^3) \cdot (v^4 + v^3 - v^2 \cdot 5)$	Sämi
22.	Factor out the biggest possible factor: 133 + u – 95 · v + 38 : w · 171 : x + 76 – y · 114 - z	Oliver
23.	Factorising is more difficult if the factor first has to be prepared separately: $95 \cdot p + 57 \cdot q^2$	Danie
24.	Factor out: $279 \cdot a - 31 \cdot a \cdot b + 93 \cdot a^2$	Bettina
25.	Multiply out: (a – b) · (c – d)	Katharina
26.	Factor out: $171 \cdot 256 - 114 \cdot 8^2$	

Source: Author's own.

Concluding Remarks

In summary, we can state that it is possible to transform traditional classroom teaching into dialogic learning by means of three simple measures:

1. Believe in your students, and do not inundate them with prepared material.
2. Teach students to produce their own individual ideas on a central topic of the lesson.
3. Look through all journals of the students, select useful material, and only then continue with the next lesson.

References

Baptist, P., & Raab, D. (2012). *Implementing inquiry in mathematics education*. Universität Bayreuth, Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik.

Gadamer, Hans-Georg (1959): Vom Zirkel des Verstehens. In: Günther Neske (ed.): Martin Heidegger: Festschrift zum 70. Geburtstag. Pfullingen: Neske Verlag, 24 – 35.

Gallin, P. (2010). Dialogisches Lernen. *Grundschulunterricht Mathematik*, *57*(2), 4-9.

Gallin, Peter & Ruf, Urs (1981): Neu entdeckte Rätselwelt. Zürich: Silva Verlag.

Gallin, Peter & Ruf, Urs (1990): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Zürich: Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz (LCH), as well as: Seelze-Velber: Kallmeyer (1998).

Gallin, Peter & Ruf, Urs (1999): Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Sprache und Mathematik, 4. - 5. Schuljahr bzw. 5. - 6. Schuljahr. Zürich: Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Gallin, Peter (2008a): Den Unterricht dialogisch gestalten – neun Arbeitsweisen und einige Tipps. In: Ruf, Urs & Keller, Stefan & Winter, Felix (ed.): Besser lernen im Dialog. Seelze-Velber: Kallmeyer Verlag, 96 – 108.

Gallin, Peter (2008b): “Zwei Welten” – der Dreisatz im Dialogischen Mathematikunterricht. In: Ruf, Urs & Keller, Stefan & Winter, Felix (ed.): Besser lernen im Dialog. Seelze-Velber: Kallmeyer Verlag, 162 – 212.

Ruf, Urs & Gallin, Peter (1995): Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Sprache und Mathematik, 1. - 3. Schuljahr. Zürich: Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Ruf, Urs & Gallin, Peter (2005): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik (vol. 1) and Spuren legen – Spuren lesen. Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern (vol. 2). 3rd revised edition of the 1st edition 1998. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Wagenschein, Martin (1980): Physikalismus und Sprache. Gegen die Nichtachtung des Unmessbaren und Unmittelbaren. In: Schaefer, Gert & Loch, Werner (ed.): Kommunikative Grundlagen des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Weinheim: Beltz Verlag, 11 – 37.

Wagenschein, Martin (1986): Die Sprache zwischen Natur und Naturwissenschaft. Marburg: Jonas Verlag, 74.

Autor

Peter Gallin

Doctor of Philosophy in Mathematics, Eidgenössische Technische Hochschule. Mathematics teacher Kantonsschule Zürcher Oberland, Wetzikon, Switzerland, 1973—2008. Didactics mathematics professor University Zurich, since 1985.

Correo electrónico: p.gallin@sunrise.ch
www.gallin.ch
www.lerndialoge.ch
https://orcid.org/0000-0001-7571-7821

Como citar o artigo:

GALLIN, Peter. Dialogic Learning: From an educational concept to daily classroom teaching. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 229 - 244, enero, 2022. DOI: 10.37618

Una encuesta sobre la asignatura de precálculo ofrecida en los cursos de grado de matemáticas en instituciones públicas del Centro-Oeste brasileño

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
luavila@unb.br
https://orcid.org/0000-0002-8952-0277
Universidad de Brasilia (UnB)
Brasilia, Brasil.

Raquel Carneiro Dörr
raqueldorr@unb.br
https://orcid.org/0000-0001-6453-7032
Universidad de Brasilia (UnB)
Brasilia, Brasil.

Thais Regina Duarte Marçal
thaisrdmarcal@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0193-0878
Universidad de Brasilia (UnB)
Brasilia, Brasil.

Recibido: 15 de junio de 2021 **Aceptado.** 15 de julio de 2021

Resumen

Este artículo presenta los resultados de una investigación que enumeró, describió y caracterizó los cursos de precálculo en instituciones de educación superior de la región centro-oeste de Brasil. Más concretamente, a partir de una encuesta en unidades académicas públicas con cursos de grado en Matemáticas, y que han ofertado a los estudiantes de grado de este curso, alguna asignatura que contenga contenidos matemáticos que sean prerrequisitos para el estudio y aprendizaje de un curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Se señalaron sus respectivos planes de estudio, cargas de trabajo y semestres. La relevancia del tema se vincula con el hecho de que aún hay instituciones que ofrecen Cálculo en el primer semestre, pero no ofrecen cursos regulares que hagan el puente entre las Matemáticas de primaria y de secundaria. Además, consideramos que los cursos de precálculo pueden contribuir a la adaptación de los estudiantes a la vida universitaria y reducir la frecuente evasión o el fracaso en los cursos de cálculo. Finalmente, la divulgación detallada de algunas experiencias de apoyo al aprendizaje del Cálculo puede ayudar a los gestores educativos de la Enseñanza Superior en la elaboración de los menús de sus cursos de precálculo. Los resultados presentados aquí muestran que las instituciones han volcado sus esfuerzos en habilitar posibilidades y alternativas instruccionales de profundización en temas matemáticos básicos a los alumnos principiantes contribuyendo, de esta manera, a la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Palabras clave: Matemáticas. Currículo. Asignaturas. Cálculo Diferencial e Integral. Precálculo.

Um levantamento sobre a oferta da disciplina Pré-Cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Públicas do Centro-Oeste Brasileiro

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de uma investigação que listou, descreveu e caracterizou cursos de Pré-Cálculo em instituições de ensino superior da região Centro-Oeste brasileira. Mais especificamente, a partir de um levantamento em unidades acadêmicas públicas com cursos de Licenciatura em Matemática, e que têm oferecido aos licenciandos desse curso alguma disciplina contendo conteúdos matemáticos que são pré-requisitos para o estudo e a aprendizagem de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral, foram assinalados os seus respectivos conteúdos programáticos, as cargas horárias e o semestre em que ocorrem. A relevância da temática está ligada ao fato de ainda existirem instituições que ofertam o Cálculo no primeiro semestre, mas ainda não disponibilizam cursos regulares que fazem a ponte entre a Matemática do ensino básico e a do ensino superior. Ademais, consideramos que cursos de Pré-Cálculo podem contribuir para a adaptação dos estudantes à vida universitária e minorar a evasão ou a reprovação frequente em cursos de Cálculo. Finalmente, a divulgação detalhada de algumas experiências de suporte à aprendizagem do Cálculo poderá auxiliar gestores educacionais do ensino superior na elaboração das ementas de seus cursos de Pré-Cálculo. Os resultados aqui expostos evidenciam que as instituições têm voltado seus esforços viabilizando possibilidades e alternativas instrucionais de aprofundamento em assuntos matemáticos básicos a estudantes iniciantes contribuindo, dessa maneira, para a formação de futuros professores de Matemática.

Palavras-Chave: Matemática. Currículo. Disciplinas. Cálculo Diferencial e Integral. Pré-Cálculo.

A survey on the subject Precalculus offered in undergraduate mathematics courses at public institutions in the Midwest of Brazil

Abstract

This article presents the results of an investigation that catalogued, described and characterized Precalculus courses at some public higher education institutions in the Brazilian Midwest region. Specifically, the research was based on a survey conducted at mathematics departments that offers a graduate degree in mathematics. These institutions have provided undergraduates with a course containing mathematical content, which is a prerequisite for the study itself, and for learning in an initial single variable Calculus course. Their respective syllabuses, academic loads, and the semester in which they take place were pointed out in the investigation. The relevance of the research is linked to the fact that in Brazil, there are still institutions that provide Calculus in the first semester, but do not yet offer regular courses that make the connection between elementary school mathematics and higher education. Furthermore, we believe that Precalculus courses can contribute to the adjustment to academic life and reduce the common number of dropping out or failure in Calculus courses. The dissemination of experiences supporting the learning of Calculus may help higher education managers in designing the programs of their Precalculus courses. The findings paint a portrait of institutions that have focused their efforts on providing to beginners possibilities and instructional alternatives to deepen their knowledge of basic mathematical subjects and consequently contributing to the education of future mathematics teachers.

Keywords: Mathematics. Curriculum. Courses. Differential and Integral Calculus. Precalculus.

Introdução

Para a maioria dos estudantes universitários brasileiros, o primeiro contato com as ideias de um curso inicial de Cálculo em uma variável real ocorre somente quando ingressam no ensino superior. O Cálculo é uma continuação dos estudos de Funções e, por isso, os requisitos para seu estudo exigem, além do conhecimento básico sobre esse objeto matemático, todos os aspectos algébricos e geométricos a ele associados, além de Geometria Analítica e Trigonometria (STEWART, 2011). Todos esses temas são componentes curriculares do ensino básico, assim, espera-se que ao entrar na universidade o estudante já os tenha adquirido, entretanto, não é o que tem ocorrido.

De fato, pesquisas têm apontado que a deficiência em conteúdos essenciais e pertencentes à formação anterior tem sido uma das causas da evasão universitária e dos altos índices de reprovação em cursos de áreas chamadas Ciências Exatas (BALANIUK; DO PRADO; DA VEIGA GUADAGNIN; FERNEDA; COBBE, 2011; RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2019). Em particular, com relação aos problemas de adaptação aos anos iniciais da graduação e aos recorrentes altos índices de reprovação e evasão, principalmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), de modo geral, as universidades brasileiras têm apresentado uma considerável retenção de alunos nesses cursos, impossibilitando-os de avançarem em seus estudos (TEIXEIRA; MENTGES; KAMPFF; 2019; SILVA GARCIA; LARA; ANTUNES, 2020).

Para enfrentamento desse quadro de retenção ou abandono de um curso superior é razoável, portanto, que as instituições adotem estratégias de acolhimento aos discentes em todos os aspectos: sociais, emocionais e da falta de requisitos conteudistas. Ademais, com a expansão das universidades brasileiras ocorrida nas últimas décadas, o problema já existente tem ampliado o quantitativo de sujeitos envolvidos, o que exige das instituições uma mobilização institucional para orientar os estudantes em seus estudos (CANAL; FIGUEIREDO, 2021). Uma das alternativas de acolhimento é a realização de cursos de suporte cujo programa contemple os assuntos matemáticos básicos que auxiliarão os estudantes não somente no Cálculo, mas também em outras disciplinas que dependem direta ou indiretamente desses assuntos (DÖRR; OLIVEIRA, 2020).

Nesse contexto, deseja-se conhecer, nesta investigação, como as instituições de ensino superior têm organizado suas graduações de modo a oferecerem cursos com o intuito de auxiliarem estudantes iniciantes a superarem suas dificuldades nos estudos de CDI. A partir dessa questão, foi definido como objetivo inicial fazer um levantamento das instituições de Ensino Superior (IES) do centro-oeste brasileiro que possuem o curso de Licenciatura em Matemática e que têm oferecido cursos de conteúdos matemáticos que são pré-requisitos para o estudo e a aprendizagem do Cálculo. Esses cursos serão denominados de cursos ou disciplinas de Pré-Cálculo. De posse desses dados, o objetivo seguinte é descrever, para cada um deles, quais os seus respectivos conteúdos programáticos.

A escolha dessa temática de investigação deve-se primeiramente ao fato de existirem ainda instituições que ofertam o Cálculo no primeiro semestre e não oferecem cursos regulares que fazem a ponte entre a Matemática do ensino básico e do ensino superior. Ainda há pouco investimento de instituições brasileiras em ações de retenção de estudantes iniciantes (TEIXEIRA; MENTGES; KAMPFF, 2019). Consideramos que cursos de Pré-Cálculo podem contribuir para adaptação dos estudantes e minorar a evasão ou a reprovação. Em segundo lugar, a divulgação detalhada de algumas experiências de suporte à aprendizagem do Cálculo poderá ajudar gestores ou coordenadores de graduação na elaboração das ementas de seus cursos de Pré-Cálculo. Por fim, as pesquisadoras têm vivenciado em suas práticas docentes a necessidade da ampliação da discussão referente ao tema, vislumbrando a possibilidade da construção de cursos de Pré-Cálculo como uma das alternativas de acolhimento aos licenciandos em Matemática, motivando-os ao estudo da matéria, à permanência nos estudos acadêmicos, mas, principalmente, à melhora de seus resultados de aprendizagem no Cálculo e nas disciplinas do curso que exigem os seus conteúdos. Para isso, há uma necessidade de que sejam realizados mais estudos acerca do tema (ANDRADE; ESQUINCALHA; OLIVEIRA, 2020).

Tendo em vista os objetivos propostos, este artigo apresenta nas próximas seções o referencial teórico associado à metodologia da pesquisa, os resultados obtidos na investigação realizada nas instituições selecionadas, seguidos das discussões e considerações finais.

Notamos que em todo o texto usaremos Cálculo, Cálculo I e CDI em referência a um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral I.

1 Marco Teórico

1.1 O Problema Recorrente

As universidades brasileiras têm enfrentado ao longo dos anos um elevado número de evasão e retenção pela reprovação de alunos nos cursos de CDI (BALANIUK; DO PRADO; DA VEIGA GUADAGNIN; FERNEDA; COBBE, 2011; SILVA GARCIA; LARA; ANTUNES, 2020).

Entre os principais fatores que levam à evasão de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática destacam-se as reprovações em componentes curriculares específicos, à escolha equivocada do curso por falta de informações acerca da carreira profissional a ele associada e as dificuldades econômicas que os impossibilitam de continuar a trajetória acadêmica (SOUZA, 2016; CHAGAS, 2019). Mais especificamente, estudos recentes realizados na região centro-oeste brasileira, onde ocorreu essa pesquisa, mostram que parte considerável das dificuldades encontradas pelos discentes nas soluções de exercícios de CDI está relacionada à falta de compreensão de conteúdos da educação básica (DÖRR, 2017; FEIJÓ, 2018; RODRIGUES; NEVES, 2019). Essas investigações usaram como instrumentos testes compostos de questões de Matemática do ensino básico aplicados em turmas de Cálculo 1 do curso de Matemática e de outros cursos. Os trabalhos registram que estudantes ingressantes apresentam lacunas conceituais, dificuldades nas manipulações algébricas e com a Trigonometria.

Sobre a evasão em cursos de Licenciatura em Matemática, estudos de Bittar, Oliveira, Santos e Silva Burigato (2012) indicam alto nível de evasão. Por exemplo, na Universidade de Brasília, UnB, uma das universidades pesquisadas neste estudo, no curso de Licenciatura em Matemática noturno tem ocorrido um dos quadros mais preocupantes. Em documento trazendo dados estatísticos e publicado pelo Decanato de Ensino de Graduação da instituição em 2016 somente 11,0% dos alunos que ingressaram entre 2002 e 2008 obtiveram diploma dentro do prazo (SOUZA, 2016).

Trata-se de um problema inerente ao contexto acadêmico e não somente da Licenciatura em Matemática, e que deve ser tratado com atenção devido às consequências negativas que acarreta. Entre elas figuram perdas sociais e econômicas para os envolvidos (BONATO; MELLO, 2017; SILVA, 2017; MACIEL; VALDES; LUSTOSA, 2020). É razoável que as instituições promovam ações que auxiliem os discentes iniciantes a superarem suas dificuldades a fim de gerarem vínculos entre eles e a instituição, e consequentemente, contribuírem para a permanência e a formação profissional dos discentes (BALANIUK; DO PRADO; DA VEIGA GUADAGNIN; FERNEDA; COBBE, 2011).

A integração e o engajamento de estudantes iniciantes dependem de ações institucionais conjuntas, ou seja, é um trabalho que envolve a cooperação entre discentes, docentes e os gestores das instituições acadêmicas. Nesse sentido, Rasmussen, Marrongelle e Borba (2019) mostram que a persistência dos estudantes é entendida como uma função da relação dinâmica entre todos os atores envolvidos no processo acadêmico, incluindo o ambiente da sala de aula.

A implementação de suporte pedagógico específico para estudantes de Cálculo também figura entre as possibilidades que devem ser consideradas em conjunto com outras estratégias, e não isoladamente. Entre as ações comuns citadas no trabalho acima, incluem-se as orientações acadêmicas e vocacionais, além de suporte financeiro aos que precisarem.

Sendo assim, um curso de Pré-Cálculo ou qualquer outro contendo assuntos matemáticos que fazem parte da Matemática elementar para um estudante iniciante de graduação, surge como uma opção importante de acolhimento, suporte e de motivação aos estudos posteriores em áreas das Ciências Exatas.

1.2 O Pré-Cálculo como alternativa

Do ponto de vista de Nasser, Assemany, Azevedo e Torraca (2013), uma abordagem adequada dos conteúdos trabalhados no Ensino Médio e em Cálculo 1 pode fazer diferença para o aprendizado dos graduandos. Esse estudo mostrou que houve um aumento percentual nos resultados das avaliações aplicadas em uma turma logo após terem sido apontados os erros principais cometidos pelos próprios alunos em provas anteriores. O trabalho ainda reforça a importância que os assuntos matemáticos do Ensino Médio trazem para a melhora do desempenho acadêmico dos estudantes ao iniciarem a graduação.

Alguns dos problemas relacionados às deficiências em conteúdos muitas vezes se estendem aos cursos seguintes ao de Cálculo 1. Nesse sentido, Lopes (1999), num contexto de repetência e evasão, relaciona as notas da disciplina Cálculo 2 com as notas do vestibular de alunos ingressantes da IES em que era monitor, mostrando a falta de habilidade em Matemática básica de parte desses alunos. Além disso, foi notado em sala de aula que muitos alunos não entendem os conceitos do Cálculo já estudados anteriormente. Como uma das sugestões para o auxílio do aprendizado na disciplina, foi sugerida a criação de turmas de Pré-Cálculo para as Engenharias.

Macambira e Athayde (2014) apontam alguns métodos minimizadores para os problemas que os cursos de CDI enfrentam ao discutirem quais são as dificuldades encontradas pelos alunos de graduação. Nesse artigo, eles relatam outros estudos e experiências em diferentes IES do Brasil. Segundo os autores investigados nesses estudos, além da oferta de cursos de nivelamento com temas do Ensino Médio, outras estratégias para amenizar as dificuldades iniciais dos estudantes ingressantes seriam: uma melhor formação dos docentes de ensino superior para a prática pedagógica; supervisão pedagógica compartilhada, monitoria, tutoria e atividades complementares; uso de ferramentas tecnológicas, oficinas e laboratórios com o intuito de desenvolver a prática da construção do conhecimento, pesquisa/extensão; prática de ensino/aprendizagem.

Nos estudos de Diefenthaler (2017), percebe-se a importância dada à disciplina Pré-Cálculo pelos próprios discentes que participaram das turmas de oferta entre 2011 e 2016. Essa disciplina é feita antes do Cálculo 1 com a intenção de revisar e nivelar os alunos ingressantes nos cursos de Ciência da Computação, Engenharias e Matemática. Nesse artigo são mostrados dois lados do Pré-Cálculo. O primeiro foi que ele se tornou um problema assim como o CDI, pois a maioria dos alunos aprovados na disciplina possuía uma nota não satisfatória, ou seja, somente 27,16% dos alunos aprovados possuíam uma nota acima de 80 pontos (para aprovação é necessário ter de 60 a 100 pontos). O segundo lado destaca a importância desse curso para o preparo dos alunos para o Cálculo 1.

Bellettini e Souza (2018) confirmam a relevância de um curso de Pré-Cálculo, ao analisar o seu processo de implantação na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O projeto foi considerado uma inovação para a IES e denota a preocupação desta universidade com o elevado índice de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral.

Andrade, Esquincalha e Oliveira (2019) procuram entender a disciplina Pré-Cálculo em documentos oficiais a partir do que é prescrito nos Projetos Políticos e Pedagógicos (PPC) das IES do Rio de Janeiro. Nesse artigo eles chegaram à conclusão de que todas as IES do Rio de

Janeiro possuem uma disciplina ou projeto de extensão que auxiliam os alunos na graduação, preparando-os para o Cálculo.

Na Universidade Federal do Pará (UFPA) os integrantes do Programa de Educação Tutorial (PET) de Engenharia Civil ministram, desde 2010, um curso chamado de Cálculo Zero. O curso consiste em aulas introdutórias de Cálculo, ministradas no período que antecede a entrada dos alunos na Universidade, apresentando noções básicas de limite, derivada e integral aos recém-ingressos de Engenharia Civil da UFPA (BRASIL, 2014, p. 1). Conforme Oliveira, Coelho e Dias (2014), este curso tem atendido aos objetivos propostos e às expectativas dos alunos a respeito da disciplina, além de estreitar laços entre alunos do mesmo curso de graduação e fazer o acompanhamento dos recém-ingressos na UFPA.

Assim como na UFPA, na UnB os integrantes do PET do curso de Física vêm coordenando e desenvolvendo, há mais de dez anos, um curso de Pré-Cálculo aos alunos ingressantes. A ação acontece no primeiro mês de aulas de todo semestre com o objetivo de viabilizar aos calouros de Física a revisão ou o aprofundamento em temas matemáticos que os auxiliarão nos estudos das disciplinas de Matemática e de Física. Essa experiência está registrada no artigo de Dörr e Oliveira (2020) que aponta ainda outras iniciativas similares promovidas na mesma instituição pelos departamentos de Estatística e de Matemática aos respectivos estudantes iniciantes. Parte desses cursos tem se desenvolvido sistematicamente na modalidade de extensão, outros eventualmente. Os autores reforçam no texto que essas iniciativas institucionais revelam uma preocupação dos gestores educacionais em suprir as necessidades dos estudantes na busca por aprimoramento nesses temas a fim de que obtenham sucesso na carreira acadêmica.

Além disso, o departamento de Matemática da UnB, nos últimos semestres, tem ofertado uma disciplina optativa com conteúdos de Pré-Cálculo para alunos dos cursos de Matemática. O material usado nas últimas edições dessa oferta está contido no curso “Pré-Cálculo”, disponível no MOODLE[1]/MAT, plataforma de ensino institucional do Departamento de

1 O Moodle (*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*) é uma plataforma online de aprendizado à distância, um sistema de gerenciamento onde ficam disponíveis materiais de estudo e interações com os professores, de fácil acesso.

Matemática da UnB (MAT/UnB). O conteúdo desse curso também fica disponível a qualquer aluno matriculado em alguma turma de Cálculo 1 ofertada pelo MAT/UnB.

Pilotti, Cunha e Parmegiani (2014) lembram em seu estudo que a relação com o passado dos alunos na Educação Básica influencia o rendimento dos ingressantes na graduação. Eles analisam as tendências de rendimento acadêmico de quem veio da escola pública ou privada, e quais são os resultados, em termos de sucesso ou insucesso desses discentes, na disciplina niveladora chamada Matemática Fundamental. Também apresentam relatos relacionados às inseguranças dos alunos, à falta de entendimento de conceitos já trabalhados e à dificuldade de relacionar os conteúdos abordados em sala de aula com o cotidiano.

O objetivo de investigação apresentado em seu artigo foi mostrar as percepções de ingressantes e professores de Matemática dos cursos de engenharias sobre o desempenho acadêmico e a importância da disciplina Matemática Fundamental para o preparo em Cálculo. Por meio dos questionários aplicados em seu estudo, analisaram as respostas dos discentes de uma maneira crítica, revelando que aqueles alunos que se consideram com um melhor rendimento em Matemática Fundamental vieram de escolas particulares, indicando que os maiores investimentos realizados nestas instituições se reverteram em uma melhor formação. Concluíram, ainda, que a melhoria do ensino público na Educação Básica é fundamental para os bons resultados no Ensino Superior.

2 Metodologia

Neste estudo interessa-nos a compreensão de fenômenos associados à aprendizagem matemática. Seus resultados ligados à oferta de cursos, contendo temas da chamada Matemática Elementar, poderão servir como guias ou incentivos para ações práticas que estimulem a aprendizagem do Cálculo. Por essa razão, a pesquisa aqui apresentada é classificada como sendo qualitativa de caráter tanto exploratório quanto descritivo e que tem a pesquisa bibliográfica e documental como estratégias de coleta de dados e informações (SILVA; SILVEIRA, 2013).

A intenção desta investigação é catalogar as instituições públicas de ensino superior do centro-oeste brasileiro que ofertam o curso de Licenciatura em Matemática, que têm disponibilizado cursos que incluem em seus conteúdos programáticos tópicos matemáticos que são pré-requisitos para o estudo e a aprendizagem do Cálculo. A partir dessas informações, o objetivo seguinte é descrever, para cada um dos cursos encontrados, quais os seus respectivos conteúdos programáticos e o período em que os cursos aparecem na grade curricular, destacando se ocorrem antes ou simultaneamente a um curso inicial de Cálculo.

As instituições escolhidas localizam-se na mesma região de trabalho das pesquisadoras e representam locais que têm contribuído significativamente para a formação de professores de Matemática. São as seguintes: no Distrito Federal a Universidade de Brasília (UnB) e o Instituto Federal de Brasília (IFB). No estado de Goiás, são quatro IES: Universidade Estadual de Goiás (UEG), Instituto Federal de Goiás (IFG), Instituto Federal Goiano (IF Goiano) e Universidade Federal de Goiás (UFG).

As quatro instituições de ensino superior públicas no estado de Mato Grosso pesquisadas são: Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT), Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) e a Universidade Federal de Rondonópolis (UFR).

Do Mato Grosso do Sul ao todo são três instituições de ensino que ofertam o curso de Licenciatura em Matemática: Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS) e Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).

Considerando os campi associados a essas instituições, foram contabilizados 35 cursos de Licenciatura em Matemática. Esse quantitativo apresenta-se como uma amostra relevante que poderá apontar indícios sobre a natureza da preparação para o Cálculo em instituições de ensino superior na região. Dentre os 35 cursos, 33 ofertam uma disciplina de Pré-Cálculo para seus licenciandos, enquanto que 2 trabalham com o tema em projetos de Extensão.

A metodologia da pesquisa foi efetivada em duas etapas. Na primeira parte, foram pesquisadas e catalogadas as informações obtidas das universidades selecionadas. Para tanto, foram analisados alguns dos documentos oficiais, os chamados Projetos Políticos e Pedagógicos (PPC) dos cursos nas respectivas IES. O método usado nessa etapa foi o mapeamento de dados, que se constitui pela seleção e organização das principais informações, a fim de se observarem padrões. Além dos PPC dos cursos, foram considerados ainda nessa fase os respectivos planos de ensino e os ementários de disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática, disponíveis nos sites de cada instituição ou, quando necessário, disponibilizados pelos coordenadores contatados via e-mail. Ressaltamos que neste estudo não foram considerados cursos afins com possibilidade de habilitação em Matemática.

Na segunda parte, de posse dos dados das instituições, procedeu-se à organização e análise das informações para construção dos resultados e considerações, levando em conta os objetivos propostos. Nesse sentido, a próxima seção apresenta os resultados apurados pela investigação apresentados por estados da região Centro-Oeste.

3 Resultados

3.1 Distrito Federal

O curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial pode ser cursado nesta unidade federativa em duas IES públicas. São elas o Instituto Federal de Brasília (IFB) e a Universidade de Brasília (UnB).

No IFB, a Licenciatura em Matemática é oferecida na unidade do campus Estrutural. No projeto pedagógico do curso foi encontrada apenas uma disciplina entendida como Pré-Cálculo denominada de *Fundamentos da Matemática*. Os conteúdos abordados na disciplina são: Conjuntos; Conjuntos Numéricos; Números Reais; Funções Polinomiais; Função Modular; Funções Trigonométricas; Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas.

A UnB dispõe de dois cursos de Licenciatura em Matemática, um no turno diurno com duração de 4 anos e um de 5 anos no noturno, ambos realizados no campus Darcy Ribeiro. Ainda que o Projeto Político e Pedagógico (PPC) dos cursos não contenha uma disciplina de Pré-cálculo, tem sido ofertada, esporadicamente, nos últimos semestres uma disciplina optativa chamada *Seminário de Tópicos Especiais (STE)*, cujo conteúdo é o de Pré-cálculo.

A disciplina *STE* não possui ementa fixa, ficando a critério do professor o conteúdo e abordagem a serem utilizadas. Tem-se tentado uma uniformização, com a ementa das últimas 3 ofertas sendo: Retas e Parábolas; Polinômios; Funções; Funções inversas; Funções Exponencial e Logarítmica; Funções Trigonométricas; Funções Trigonométricas Inversas. Ainda nestas últimas edições, o material recomendado está contido no curso “Pré-Cálculo”, que está disponibilizado no MOODLE/MAT, plataforma de ensino institucional do Departamento de

Matemática da UnB (MAT/UnB). O material consiste de listas de exercícios autorais, bem como textos e vídeos constantes do material da OBMEP.

Apesar de o Pré-Cálculo para a Matemática (STE) não ser ofertado a todos os cursos da Universidade de Brasília que têm o Cálculo 1 em sua grade curricular, o curso "Pré-Cálculo" do MOODLE/MAT fica disponível para qualquer aluno que esteja matriculado em alguma turma de Cálculo 1 ofertada pelo MAT/UnB.

Um resumo do que foi descrito acima pode ser encontrado na Tabela 1.

Tabela 1- Disciplinas das IES do DF

Instituição	Campus	Disciplina	Carga Horária	Período	Relação ao Cálculo 1
IFB	Estrutural	Fundamentos da Matemática	96	1º	Antes de C1
UnB	Darcy Ribeiro	Não possui			

Fonte: Elaborado pelas autoras.

3.2 Goiás

Nesse estado foram analisadas quatro IES públicas que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial. São as seguintes: Universidade Estadual de Goiás (UEG), Instituto Federal de Goiás (IFG), Instituto Federal Goiano (IF Goiano) e Universidade Federal de Goiás (UFG). Ao todo, são 16 unidades universitárias (campi) que oferecem o curso.

A UEG possui dez unidades universitárias que ofertam o curso de Licenciatura em Matemática: Anápolis, Formosa, Cidade de Goiás, Iporá, Jussara, Morrinhos, Porangatu, Posse, Quirinópolis e Santa Helena.

Nos campi Anápolis, Formosa, Cidade de Goiás, Iporá, Morrinhos, Posse e Santa Helena, há duas disciplinas com conteúdo programático de Matemática básica, feitas no primeiro período de graduação na UEG, a saber, *Fundamentos da Matemática* e *Pré-Cálculo*. O curso *Fundamentos da Matemática* aborda os conteúdos de Trigonometria, Números Complexos e Polinômios. O *Pré-Cálculo* trata de Conjuntos, Funções, Equações e Inequações. Em geral, as disciplinas possuem a mesma ementa e as diferenças encontradas são em relação aos conteúdos de Números Complexos e Polinômios que não aparecem em todos os documentos do curso de *Fundamentos da Matemática*.

A unidade universitária de Porangatu traz em seu currículo as disciplinas de *Matemática Básica* e *Fundamentos da Matemática*. A ementa contém os conteúdos de Conjuntos, Funções, Equações e Inequações, além de conteúdos mais básicos como Potenciação e Radiciação. O segundo curso, *Fundamentos da Matemática*, é proposto com abordagem dos temas Trigonometria e Números Complexos.

Os cursos nomeados como *Fundamentos da Matemática* e *Pré-Cálcul*o são ofertados na unidade universitária de Quirinópolis. O primeiro curso aborda Trigonometria, Progressão Aritmética e Geométrica, enquanto o segundo traz os temas: Conjuntos, Funções, Potenciação, Radiciação, Equações e Inequações Logarítmicas.

O campus universitário de Jussara oferta aos licenciandos de Matemática somente o curso de *Pré-Cálculo*. Ele é feito no primeiro ano da graduação, tem mesma ementa e duração que o curso ofertado da unidade de Quirinópolis.

No IFG é ofertado o curso de graduação em Matemática no Campus Goiânia e no Campus Valparaíso. Em seu PPC, acha-se descrita uma disciplina básica entendida como Pré-cálculo nos cursos oferecidos por cada unidade chamada de *Estudos de Funções*. Os conteúdos abordados na disciplina são Conjuntos e Funções. As ementas desse componente curricular das duas unidades são comuns em sua maioria. A diferença apontada é a abordagem do conteúdo de Funções Hiperbólicas em Goiânia, enquanto que em Valparaíso ele não é considerado.

O IF Goiano oferta o curso de Licenciatura em Matemática somente no Campus Urutaí. Foram encontradas duas disciplinas de revisão dos conteúdos do ensino básico: *Matemática Elementar I* e *Matemática Elementar II.* Os conteúdos da disciplina *Matemática Elementar I* são: Teoria de Conjuntos; Estudo das Equações; Inequações e Funções: Polinomial do 1º e 2º grau; Modular; Exponencial e Logarítmica; Função Composta e Função Inversa; Estudo das Sequências Numéricas: lei de formação de uma sequência numérica; Progressão Aritmética e Progressão Geométrica e aplicações. Já no curso de *Matemática Elementar II,* os conteúdos abordados são: Trigonometria, Números complexos, Polinômios e Equações Polinomiais.

A Licenciatura em Matemática da UFG integra o rol de cursos em três das suas unidades acadêmicas, a saber, na cidade de Goiânia, Campus Samambaia, a Regional de Catalão (chamada agora de UFCAT) e a Regional de Jataí (chamada agora de UFJ).

Em Goiânia não há uma disciplina como o Pré-Cálculo, mas a Coordenação de Graduação informou que existe um projeto de nivelamento para os alunos da graduação que funciona por meio da disciplina nomeada de *Matemática Básica*. O curso tem sido oferecido no formato remoto, via *Moodle.* Seu conteúdo programático compreende assuntos como Aritmética; Operações Algébricas; Funções Exponencial, Logarítmica e Trigonométrica, distribuídos em 64 horas e 15 sessões.

Chamado de *Elementos da Matemática*, a UFCAT disponibiliza um curso aos seus licenciandos em Matemática. Os conteúdos estudados são: Noções de Lógica Matemática; Números reais; Valor Absoluto e Inequações; Sistema Cartesiano no plano e no espaço; Funções Elementares: polinomial, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica; Matrizes; Determinantes e Sistemas lineares. Ou seja, o curso propõe uma revisão geral em vários conteúdos, que serão necessários não somente no Cálculo.

Na Regional de Jataí, a UFJ, a disciplina ligada a temas de Pré-Cálculo é a *Princípios de Álgebra e Cálculo*. Sua ementa contém os seguintes conteúdos: Álgebra: Noções de sistemas lineares e matrizes; Princípios de lógica; Operações; Relações e aplicações; Cálculo: Conjuntos Numéricos, Intervalos numéricos, Valor absoluto de um número Real, Equações e Inequações; Funções; Gráficos de funções via Translação e Reflexão; Funções Elementares: funções constante, afim, quadrática, cúbica, polinomial, modular, raiz quadrada, maior inteiro, recíproca, exponenciais, logarítmicas. Tipos de Funções: função par, ímpar, composta, crescente, decrescente, injetora, sobrejetora, bijetora e inversa; Noções Intuitivas de Limite. Logo, percebe-se que esse curso alia uma revisão de conteúdos do Ensino Básico como uma introdução ao curso de Cálculo 1.

A Tabela 2 resume os objetos de estudo citados acima.

Tabela 2 – Disciplinas das IES do GO

Instituição	Campus	Disciplina	Carga Horária	Período/ ano	Relação ao Cálculo 1
	Anápolis	Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1
	Formosa	Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1

UEG	Cidade de Goiás	Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1
	Iporá	Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1
	Jussara	Pré-cálculo	60	1º ano	Antes de C1
	Morrinhos	Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1
	Porangatu	Matemática Básica	60	1º	Antes de C1
		Fundamentos da Matemática	60	2º	Concomitante
	Posse	Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1
		Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
	Quirinópolis	Fundamentos da Matemática	60	1º ano	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º ano	Antes de C1
	Santa Helena	Fundamentos da Matemática	60	1º	Antes de C1
		Pré-cálculo	60	1º	Antes de C1
IFG	Goiânia	Estudo de Funções	54	1º	Antes de C1
	Valparaíso	Estudo de Funções	54	1º	Antes de C1
IF Goiano	Urutaí	Matemática Elementar I	68	1º	Antes de C1
		Matemática Elementar II	68	1º	Antes de C1
UFG	Goiânia	Não possui			
	Regional Catalão (UFCAT)	Elementos de Matemática	96	1º	Antes de C1
	Regional Jataí	Princípios de Álgebra e Cálculo	64	1º	Antes de C1

Fonte: Elaborado pelas autoras.

3.3 Mato Grosso

As quatro instituições de ensino superior públicas no estado de Mato Grosso pesquisadas são: Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT), Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) e a Universidade Federal de Rondonópolis (UFR). Ao todo são sete unidades universitárias (campi) que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial, três na UNEMAT, duas no IFMT, uma na UFMT e uma na UFR.

Na UNEMAT as unidades são: o campus universitário de Barra do Bugres, o campus universitário de Cáceres e o campus universitário de Sinop.

Em Barra do Bugres, os cursos ofertados são o de *Fundamentos da Matemática I* e *II*. A primeira aborda conteúdos de Conjuntos, Relações e Funções; a segunda trata de Trigonometria e Números Complexos.

Em *Fundamentos da Matemática I* e *II* no campus de Cáceres, as ementas são mais detalhadas, entretanto contêm os mesmos tópicos citados anteriormente.

No PPC do campus de Sinop, a disciplina é chamada de *Matemática Básica Nivelamento*. Ela tem como objetivo fazer uma revisão de conteúdos gerais da educação básica, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Também nessa unidade, tem-se os cursos *Fundamentos da Matemática I* e *II*, no mesmo formato encontrado em Barra do Bugres, com a diferença que *Fundamentos da Matemática II* ocorre concomitantemente ao Cálculo 1.

Ligados ao IFMT temos o campus Campo Novo do Parecis e o campus Juína. Em Campo Novo do Parecis foram encontradas as seguintes disciplinas: *Introdução ao Cálculo*, *Matemática Básica 1* e *Matemática Básica 2*. Em *Introdução ao Cálculo* são abordados conteúdos de Conjuntos, suas relações e Funções. Já a disciplina *Matemática Básica 1* traz os conceitos de Trigonometria e Funções Trigonométricas como assuntos propostos. Em *Matemática Básica* 2 são apresentados os conteúdos de Técnicas de Contagem, Binômio de Newton, Números Complexos e Polinômios. As disciplinas *Introdução ao Cálculo* e *Matemática Básica 1* são feitas no primeiro período da graduação, antes do Cálculo 1. Já *Matemática Básica 2* é feita no segundo período concomitantemente ao Cálculo 1.

No campus Juína, encontra-se no seu PPC as disciplinas *Matemática 1* e *Matemática 2*. Em *Matemática 1* tem os temas Teoria dos Conjuntos e Funções. Enquanto que *Matemática 2* aborda tópicos gerais de Trigonometria e Funções Trigonométricas.

A UFMT oferta o curso de Licenciatura apenas na unidade de Cuiabá. Em documentos da instituição aparece a disciplina chamada de *Matemática Elementar*. Aborda os seguintes conteúdos: Revisão dos conteúdos de Aritmética; Problemas de Contagem; Álgebra; Geometria Euclidiana; Trigonometria; Números complexos; Polinômios e Equações Polinomiais.

O curso de Licenciatura em Matemática da UFR, possui os componentes curriculares *Matemática Elementar I* e *II* que tratam dos temas de Pré-Cálculo. O primeiro considera os temas de Noções de Conjuntos e Funções. E o segundo aborda Trigonometria, Funções Trigonométricas, Números Complexos e Polinômios.

Um resumo das informações obtidas no estado do Mato Grosso é descrito na Tabela 3.

Tabela 3 – Disciplinas das IES de MT

Instituição	Campus	Disciplina	Carga Horária	Período/ ano	Relação ao Cálculo 1
UNEMAT	Barra do Bugres	Fundamentos da Matemática I	60	1º	Antes de C1
		Fundamentos da Matemática II	60	2º	Antes de C1
	Cáceres	Fundamentos da Matemática I	90	1º	Antes de C1
		Fundamentos da Matemática II	90	1º	Antes de C1
	Sinop	Matemática Básica Nivelamento	60	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática I	60	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática II	60	2º	Concomitante
IFMT	Campo Novo do Parecis	Introdução ao Cálculo	120	1º	Antes de C1
		Matemática Básica 1	80	1º	Antes de C1
		Matemática Básica 2	80	2º	Concomitante
	Juína	Matemática 1	80	1º	Antes de C1
		Matemática 2	80	2º	Antes de C1
UFMT	Cuiabá	Matemática Elementar	180	1º	Antes de C1
UFR	Rondonópolis	Matemática	64	1º	Antes de C1

		Elementar I			
		Matemática Elementar II	64	2º	Antes de C1

Fonte: Elaborado pelas autoras

3.4 Mato Grosso do Sul

Nessa unidade federativa, ao todo são três instituições de ensino públicas que ofertam o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial e dez unidades universitárias (campi). As instituições são: Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS) e Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). A UFGD conta com uma unidade universitária associada, a UEMS com três unidades e a UFMS com seis unidades.

Na UFGD, sobre a existência de algum curso com temas de Pré-Cálculo, foi constatado nessa instituição a oferta do curso de *Introdução ao Cálculo*. Além desse, há ainda as disciplinas *Fundamentos da Matemática I*, *II* e *III.* A disciplina *Fundamentos da Matemática I* engloba os conteúdos de Números, Equações e Funções. Já *Fundamentos da Matemática II* aborda Trigonometria e Funções Trigonométricas, ambos feitos no primeiro período da graduação. E *Fundamentos da Matemática III* traz os assuntos dos Números Complexos e Polinômios. Em *Introdução ao Cálculo* são estudados componentes curriculares do ensino básico necessárias para o estudo de Cálculo e também são consideradas as definições e conceitos de Limites, Derivadas e Integrais. Essas duas últimas são feitas no segundo período da graduação.

Ligada à UEMS, a unidade universitária de Dourados tem quatro disciplinas com temas basilares para o Cálculo. Tratam-se de *Fundamentos da Matemática I, II, III e IV*. Em *Fundamentos da Matemática I* os conteúdos abordados são noções de Lógica, Teoria dos Conjuntos, Produto Cartesiano, Relações Binárias, Funções, Equações e Inequações. Em *Fundamentos da Matemática II* os temas listados são Trigonometria, Funções Trigonométricas, Números Complexos, Polinômios e Equações Polinomiais. Já em *Fundamentos da Matemática III* são estudados Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. Por sua vez, *Fundamentos da Matemática I*V traz em seu programa Sequências, Progressões Aritmética e Geométrica, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

Na unidade universitária de Nova Andradina é ofertada a disciplina *Matemática Elementar*. Em seu programa são elencados os temas de Lógica matemática, Trigonometria, Logaritmos, Progressões: aritmética e geométrica, Matrizes, Números complexos e Polinômios.

Na unidade universitária de Cassilândia pode-se encontrar uma disciplina chamada *Matemática Elementar*. Nela abordam-se os conteúdos de Trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência; Funções Trigonométricas; Logaritmos: equações e funções logarítmicas e exponenciais; Sequências Numéricas: progressões aritmética e geométrica; Números Complexos; Polinômios e Equações Polinomiais.

A UFMS possui seis unidades que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática, nas quais a oferta de cursos relacionados ao Pré-cálculo será descrita a seguir.

No Campus Aquidauana foram encontrados os cursos *Fundamentos de Matemática I, II, III* e *IV*. Em *Fundamentos de Matemática I* são estudadas Aritmética e Funções. *Fundamentos de Matemática II* trata de Análise Combinatória e Binômio de Newton, Função Exponencial e Logarítmica, Equações e Inequações. As duas disciplinas são feitas no primeiro semestre da graduação. Em *Fundamentos de Matemática III* são estudados conteúdos de Trigonometria. Por fim, em *Fundamentos de Matemática IV* são considerados assuntos como Números complexos, Polinômios, Equações Polinomiais e Algébricas. Ambas são feitas no segundo semestre da graduação.

O Campus Paranaíba oferece aos licenciandos duas disciplinas: *Fundamentos de Matemática Elementar I* e *II*. *Fundamentos de Matemática Elementar I* tem como foco os temas de Introdução à Teoria dos Conjuntos, Funções, Logaritmo e Exponencial, enquanto que *Fundamentos de Matemática Elementar II* aborda Trigonometria e Números complexos.

No campus de Ponta Porã os cursos de conteúdos de Matemática Básica são *Fundamentos da Matemática* e *Matemática Elementar*. Observa-se que, nessa IE, apesar de as disciplinas de nivelamento e revisão de conteúdos da educação básica serem ministradas no primeiro semestre, o Cálculo 1 só é realizado no 3º semestre da graduação. A disciplina *Fundamentos da Matemática* trata de Álgebra linear, Trigonometria e Números Complexos e a disciplina *Matemática Elementar* aborda Polinômios, Funções, Trigonometria e Números Complexos.

Denominadas como *Introdução ao Cálculo 1* e *2,* esses são cursos com conteúdos basilares para o Cálculo no Campus de Três Lagoas. A disciplina *Introdução ao Cálculo 1* traz em seu programa os assuntos de Conjuntos, Operações, Expressões e Equações; e *Introdução ao Cálculo 2* os temas são Equações e Inequações, Funções e Gráficos.

No Campus Pantanal foram encontradas as disciplinas *Matemática Básica* e *Introdução ao Cálculo*. A disciplina *Matemática Básica* aborda Análise Combinatória; Binômio de Newton; Probabilidade; Sequências; Séries Finitas; Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, enquanto que o programa de *Introdução ao Cálculo* tem listado Números reais; Equações; Inequações; Polinômios e Funções como temas principais de seu plano de ensino.

Por fim, a unidade em Campo Grande oferta a disciplina *Introdução ao Cálculo*. São os seguintes os conteúdos que compõem seu programa: Conjuntos Numéricos; Funções; Funções Polinomiais de Graus 1 e 2; Função Modular; Potenciação e Radiciação; Função Exponencial; Logaritmos e Função Logarítmica e Funções Trigonométricas. Aqui nota-se que além de *Introdução ao Cálculo*, existem também registradas no PPC do curso outras duas disciplinas chamadas de *Fundamentos de Matemática A* e *Fundamentos de Matemática B*, as quais também abordam conteúdos da educação básica necessários para o bom entendimento dos cursos de CDI. Na disciplina *Fundamentos de Matemática A* os conteúdos são: Matrizes, Sistemas Lineares, Determinantes, Geometria Analítica. Já *Fundamentos da Matemática B* aborda os temas da Trigonometria, Números Complexos, Polinômios e Equações Polinomiais.

A seguir, são trazidas na Tabela 4 um resumo das informações coletadas no estado do MS.

Tabela 4 - Disciplinas das IES de MS

Instituição	Campus	Disciplina	Carga Horária	Período/ ano	Relação ao Cálculo 1
UFGD	Grande Dourados	Introdução ao Cálculo	72	2º	Antes de C1
		Fundamentos da Matemática I e II	72	1º	Antes de C1
		Fundamentos da Matemática III	72	2º	Antes de C1
	Dourados	Fundamentos de Matemática I	153	1º ano	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática II	153	1º ano	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática III	85	1º ano	Antes de C1

UEMS		Fundamentos de Matemática IV	85	1º ano	Antes de C1
	Nova Andradina	Matemática Elementar	204	1º ano	Concomitante
	Cassilândia	Matemática Elementar	136	1º ano	Concomitante
UFMS	Aquidauana	Fundamentos de Matemática I	68	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática II	68	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática III	68	2º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática IV	68	2º	Antes de C1
	Paranaíba	Fundamentos de Matemática Elementar I	68	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática Elementar II	68	2º	Antes de C1
	Ponta Porã	Fundamentos da Matemática	68	1º	Antes de C1
		Matemática Elementar	102	1º	Antes de C1
	Três Lagoas	Introdução ao Cálculo 1	85	1º	Antes de C1
		Introdução ao Cálculo 2	68	2º	Antes de C1
	Pantanal	Matemática Básica	68	1º	Antes de C1
		Introdução ao Cálculo	68	2º	Antes de C1
	Campo Grande	Introdução ao Cálculo	68	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática A	68	1º	Antes de C1
		Fundamentos de Matemática B	68	1º	Antes de C1

Fonte: Elaborado pelas autoras

3.5 Os Pré-requisitos para o Cálculo Diferencial e Integral I

Outro fator considerado no estudo foi a verificação de que disciplinas de Pré-Cálculo ofertadas são pré-requisitos para a disciplina Cálculo 1. Na tabela 5, identificamos todas as IES que adotam o sistema de pré-requisitos, seu respectivo campus, e o nome da disciplina que é ofertada como pré-requisito à disciplina de Cálculo 1. Nos casos em que a disciplina de CDI não tem pré-requisitos, mesmo existindo a oferta de alguma disciplina com conteúdos de Pré-Cálculo, antes ou concomitantemente ao Cálculo 1, a situação aparece como "sem pré-requisitos" na Tabela 5.

Tabela 5 - Disciplinas que são consideradas pré-requisitos do Cálculo 1 nas IES estudadas

Instituição	Campus	Pré-requisitos C1
IFB	Estrutural	Fundamentos da Matemática
UnB	Darcy Ribeiro	Sem pré-requisitos
IF Goiano	Urutaí	Matemática Elementar I
IFG	Goiânia	Estudo de Funções
		Tópicos de Álgebra Elementar
		Fundamentos de Geometria
	Valparaíso	Sem pré-requisitos
UEG	Posse	Sem pré-requisitos
	Santa Helena de Goiás	Sem pré-requisitos
	Porangatu	Matemática Básica
	Formosa	Sem pré-requisitos
	Cidade de Goiás	Pré-Cálculo
	Morrinhos	Pré-Cálculo
	Anápolis	Pré-Cálculo
UFG	Regional Jataí	Princípios de Álgebra e Cálculo
	Regional Goiânia	Sem pré-requisitos
	Regional Catalão	Sem pré-requisitos
IFMT	Campo Novo do Parecis	Introdução ao Cálculo
	Juína	Pré-requisitos suprimidos
UFMT	Cuiabá	Matemática Elementar
UFR	Rondonópolis	Matemática Elementar I
		Matemática Elementar II
UNEMAT	Barra do Bugres	Fundamentos da Matemática I
	Cáceres	Fundamentos da Matemática I

		Fundamentos da Matemática II
		Geometria Analítica e Vetorial
	Sinop	Sem pré-requisitos
UFGD	Grande Dourados	Introdução ao Cálculo
UFMS	Pantanal	Introdução ao Cálculo
	Três Lagoas	Introdução ao Cálculo 1
		Introdução ao Cálculo 2
	Paranaíba	Sem pré-requisitos
	Ponta Porã	Matemática Elementar

Fonte: Elaborado pelas autoras

Observamos que a instituição UEMS não cita pré-requisitos em seus PPC's, portanto, não se encontra na tabela acima. Além disso, na UFMS os campi de Aquidauana e Campo Grande não aplicam o sistema de pré-requisitos. A respeito do IFMT, em Campus Juína estavam indicados nos seus documentos "pré-requisitos suprimidos". Nos documentos analisados da UEG, os campi de Iporá, Jussara e Quirinópolis não citam pré-requisitos. Na UNEMAT, em Cáceres, temos uma disciplina não considerada como um Pré-Cálculo. Entretanto, Geometria Analítica e Vetorial é dada como pré-requisito para o Cálculo 1. Isso também ocorre no IFG com Tópicos de Álgebra Elementar e Fundamentos de Geometria.

4 Discussão

Assinalamos nesta investigação o cuidado que as instituições de ensino superior têm tido nos últimos anos de fazerem a incorporação em seus currículos de Licenciatura em Matemática de cursos que geram suporte matemático aos estudantes iniciantes em conteúdos basilares aos seus futuros estudos e que, muitas vezes, não foram trabalhados ou o foram de modo superficial na Educação Básica. A esse respeito, temos corroboradas as experiências de Diefenthaler (2017) e Bellettini e Souza (2018), entre outros.

No geral, todas as Instituições de Ensino Superior públicas que foram apresentadas nesse artigo, oferecem ações relacionadas ao Pré-Cálculo. De maneira que assim, possam dar suporte e apoio aos alunos de Cálculo 1, seja por meio de disciplinas de graduação ou projetos de Extensão.

Notamos ainda as variadas denominações dadas a essas disciplinas consideradas como de "Pré-Cálculo". Da mesma forma, elas variam muito em suas cargas horárias. Algumas dessas disciplinas são sequenciais ou pré-requisitos uma das outras. Ademais, em uma mesma instituição foram encontradas até mesmo quatro disciplinas niveladoras.

Destaca-se que os conteúdos matemáticos mais abordados nesses cursos iniciais foram aqueles ligados às Funções. Em especial, as Funções Logarítmicas, Exponenciais e Trigonométricas. Com relação às ementas, algumas são detalhadas, porém outras apenas citam tópicos gerais sem os especificar.

Na maioria das unidades acadêmicas, as disciplinas contendo os assuntos de Matemática básica têm ocorrido antes do curso de Cálculo. Entretanto, em outras instituições, foi verificada a ocorrência de disciplinas concomitantes ao Cálculo 1, como na UEMS de Nova Andradina e Cassilândia, entre outras. Observamos ainda, que dentre as 13 IES analisadas, 94,3% ofertam alguma disciplina de Pré-Cálculo e 5,7% oferecem alguma outra atividade relacionada ao estudo de temas de Matemática básica, em cursos de extensão, por exemplo.

5 Considerações Finais

Este artigo buscou destacar e caracterizar cursos de Pré-Cálculo que têm sido ofertados em instituições de ensino superior do Centro-Oeste brasileiro, as quais incluem em seus conteúdos programáticos assuntos que podem trazer contribuições para a aprendizagem de estudantes iniciantes quando em contato com o Cálculo Diferencial e Integral.

A compreensão dos desafios e obstáculos enfrentados por estudantes ao se depararem com o curso de Cálculo tem sido tema frequente de pesquisa em Educação Matemática do Ensino Superior (RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2014; BRESSOUD, 2016). Cientes da necessidade de que sejam implementadas ações de acolhimento, suporte e incentivo aos discentes iniciantes para que persistam em seus estudos, investigações têm se dedicado à compreensão da estruturação desses cursos a fim de que eles sejam capazes de proporcionar algum tipo de suporte àqueles que necessitarem. Os cursos de Pré-Cálculo constituem-se como uma das possíveis alternativas. Nesse sentido, corroboramos com as ideias de Rasmussen, Apkarian, Hagman, Johnson, Larsen e Bressoud (2019) que postulam que para que essa ação prospere, ela tem que estar associada a outras ações que contem com a colaboração de gestores educacionais, os estudantes e outros agentes da comunidade acadêmica.

Os quadros-resumos apresentados no artigo poderão ser auxiliares em tomadas de decisões de gestores educacionais quando pensarem estratégias pela busca pela oferta de cursos de nivelamento para estudantes iniciantes que contribuam para amenizar os problemas dos elevados índices de evasão e reprovação em CDI.

Os resultados aqui expostos evidenciam que as instituições têm voltado seus esforços para oferecerem possibilidades de aprofundamento em assuntos matemáticos básicos aos estudantes por meio de cursos de Pré-Cálculo, especificamente para estudantes de Licenciatura em Matemática. Nessa linha investigativa, emergem questionamentos como: existem também nessas instituições disciplinas de Pré-Cálculo para outros cursos que também têm o Cálculo como componente curricular obrigatório? Em que medidas esses cursos têm ajudado os estudantes a terem sucesso no Cálculo? Ou ainda: existem outras estratégias de acolhimento a estudantes dessas instituições? Todos esses questionamentos são elementos motivadores para que continuemos com o aprofundamento de estudos nessa área.

Referências

ANDRADE, F. C.; ESQUINCALHA, A. C.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Pré-Cálculo nas Licenciaturas em Matemática das Instituições Públicas do Rio de Janeiro: O Prescrito. **VIDYA**, Santa Maria. Online, v. 39, n. 1, p. 131-151, jan./jun. 2019.

BALANIUK, R.; DO PRADO, H. A.; DA VEIGA GUADAGNIN, R.; FERNEDA, E.; COBBE, P. R. Predicting evasion candidates in higher education institutions. *In*: INTERNACIONAL CONFERENCE ON MODEL AND DATA ENGINEERING, 2011, **Springer**, Berlin, Heidelberg, p. 143-151, 2011.

BELLETTINI, M. T.; SOUZA, S. A implantação da disciplina de Pré-cálculo como política pedagógica de permanência nos cursos de graduação do centro tecnológico da UFSC. *In:* **XVIII Colóquio Internacional de Gestão Universitária**, 2018. Florianópolis. Anais […], 2018.

BITTAR, M.; OLIVEIRA, A. B.; SANTOS, R. M.; SILVA BURIGATO, S. M. M. A evasão em um curso de Matemática em 30 anos. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 3, n. 1, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia. Acesso em: 27 dez. 2021.

BONATO, G. C.; DE MELLO, K. B. Evasão no curso de Licenciatura do IFRS Campus Caxias do Sul. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Caxias do Sul, v. 3, n. 1, p. 26-37, 2017. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT. Acesso em: 27 dez. 2021. DOI: 10.35819.

BRESSOUD, D.; GHEDAMSI, I.; KUZNIAK, A.; MARTINEZ-LUACEZ, V.; TORNER, G. Teaching and learning of calculus. *In:* **13th International Congress on Mathematical Education,** Hamburg, p. 24-31, 2016. Disponível em: https://www.mathunion.org/icmi/conferences/icme-international-congress-mathematical-education. Acesso em: 27 dez. 2021.

BRESSOUD, D. M. The strange role of calculus in the United States. **ZDM - Mathematics Education**, v. 53, n. 3, p. 521-533, jun. 2021. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1299530. Acesso em: 27 dez. 2021.

CANAL, C. P. P.; FIGUEIREDO, Z. C. C. . Permanência na educação superior pública: experiência de Política de Acompanhamento do Desempenho Acadêmico de estudantes. **Revista Docência do Ensino Superior**, Belo Horizonte, v. 11, p. 1-20, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/rdes/article/view/24242. Acesso em: 27 dez. 2021. DOI: 10.35699/2237-5864.2021.24242.

CHAGAS, T. M. **Análise da evasão dos alunos dos cursos da UnB:** um estudo no âmbito da graduação. 2019. Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade de Brasília, Brasília, 2019. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/38239/1/2019_TiagoMedinaChagas.pdf. Acesso em: 27 dez. 2021.

DIEFENTHALER, A. T. Disciplina Pré-cálculo: Um olhar a partir do desempenho dos acadêmicos. **Biblioteca Digital da UNIJUÍ**, Ijuí, 2017. Disponível em: https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/xmlui/bitstream/handle/123456789/4238/Andressa%20Tais%20Diefenth%C3%A4ler.pdf?sequence=1. Acesso em: 27 dez. 2021.

DÖRR, R. C. **Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral:** um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira. 2017. 237 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

DÖRR, R. C.; OLIVEIRA, P. V. X. Estratégias e Metodologias de Suporte em Matemática Básica para Estudantes Iniciantes do Ensino Superior. *In*: NEVES, R. S. P.; DÖRR, R. C. (org.). **Ensino de Matemática:** estudos e abordagens práticas na educação básica e superior (p. 271-286). Jundiaí: Paco Editorial, 2020.

FEIJÓ, R. S. A. A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de Trigonometria:** um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação no curso de Cálculo da UFRGS. **Matemática Universitária**. n. 26/27, jun./ dez., 1999. Disponível em: http://mat.ufrgs.br/~alopes/pub3/algumasreflexoes.pdf. Acesso em: 27 dez. 2021.

MACABIRA, I.; ATHAYDE, L. Reprovação na disciplina cálculo nos cursos de engenharia: análise de dados e métodos minimizadores. *In:* **XLII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia.** Anais do XLII COBENGE, Juiz de Fora, 2014.

MACIEL, C. E.; VALDES, D. E. S.; LUSTOSA, B. M. M. Evasão na Educação Superior. **Interação - Revista de Ensino, Pesquisa e Extensão**, v. 22, n. 1, p. 131-145, 2020.

Disponível em: https://periodicos.unis.edu.br/index.php/interacao/article/view/343. Acesso em: 27 dez. 2021. DOI: https://doi.org/10.33836/interacao.v22i1.343.

NASSER, L.; ASSEMANY, D.; AZEVEDO, C. A. M.; TORRACA, M. A. A. A Transição do Ensino Médio para o Superior: Dificuldades em Problemas de Taxas Relacionadas, **XI Encontro Nacional de Educação Matemática.** Anais do XI ENEM, Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1421_814_ID.pdf. Acesso em: 27 dez. 2021.

OLIVEIRA, F. R.; COELHO, D. C.; DIAS, P. S. Monitoramento do curso de "Cálculo Zero" ministrado aos recém-ingressos na faculdade de Engenharia Civil na Universidade Federal do Pará. *In:* **XLII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. Anais do XLII COBENGE, Juiz de Fora, 2014. Disponível em: http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/index_old.php?ss=5. Acesso em: 27 dez. 2021.

PILOTTI, M.; CUNHA, G. F.; PARMEGIANI, R. Reflexões sobre a disciplina de Matemática Fundamental e o aprendizado de Cálculo em cursos de Engenharia. *In:* **XLII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia.** Anais do XLII COBENGE, Juiz de Fora, 2014. Disponível em: http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/index_old.php?ss=5. Acesso em: 27 dez. 2021.

RASMUSSEN, C.; APKARIAN, N.; HAGMAN, J. E.; JOHNSON, E.; LARSEN, S.; BRESSOUD, D. Brief. Report: Characteristics of Precalculus Through Calculus 2 Programs: Insights From a National Census Survey. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. *50,* n. 1, p. 98-111, 2019. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.50.1.0098. Acesso em: 27 dez. 2021.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM – Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 507-515, 2014. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0615-x. Acesso em: 27 dez. 2021.

RODRIGUES, L. Á.; NEVES, R. S. P. O Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo. **Revista de Ensino de ciências e Matemática – ReenCiMa**, v. 20, n. 2, p. 97-111, jun. 2019. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2341. Acesso em: 27 dez. 2021. DOI: https://doi.org/10.26843/rencima.v10i2.2341.

SILVA GARCIA, L. M. L. Da; LARA, D. F.; ANTUNES, F. Análise da retenção no ensino superior: Um estudo de caso em um curso de sistemas de informação. **Revista da Faculdade de Educação da Universidade do Estado de Mato Grosso**. v. 34, n. 2, p. 15-38. 2020. Disponível em: https://periodicos.unemat.br/index.php/ppgedu/article/view/5140. Acesso em: 27 dez. 2021. DOI: https://doi.org/10.30681/21787476.2020.34.1538.

SILVA, J. M.; SILVEIRA, E. S. **Apresentação de trabalhos acadêmicos**: normas e técnicas. Petrópolis: Vozes, 2013.

SILVA, L. G. **Evasão no ensino superior brasileiro:** riscos e arranjos institucionais. 2017. 68 f, Dissertação (Mestrado em Desenvolvimento, Sociedade e Cooperação Internacional) - Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

SOUZA, L. F. D. D. **Evasão do curso de Licenciatura em Matemática (noturno) da Universidade de Brasília.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Computação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/17291/1/2016_LavousierFerreiraDeSouza_tcc.pdf. Acesso em: 27 dez. 2021.

STEWART, J. **Cálculo:** volume 1. São Paulo: CENCAGE Learning, 2011.

TEIXEIRA, R. D. C. P.; MENTGES, M. J.; KAMPFF, A. J. C. Evasão no ensino superior: um estudo sistemático. **Repositório Institucional PUCRS.** Porto Alegre, 2019. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/15080/2/Evasao_no_Ensino_Superior_um_Estudo_Sistematico.pdf. Acesso em: 27 dez. 2021.

Autores:

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU).
Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU).
Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
Doutora em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB).
Tem experiência em Matemática na área de Geometria Diferencial e em Educação Matemática. Tutora do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da UnB.
Correo electrónico: luavila@unb.br
https://orcid.org/0000-0002-8952-0277

Raquel Carneiro Dörr
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV).
Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV).
Mestre em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB).
Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB).
Tem experiência em Matemática e Educação Matemática.
Correo electrónico: raqueldorr@unb.br
https://orcid.org/0000-0001-6453-7032

Thais Regina Duarte Marçal
Licencianda em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB),
Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da UnB.
Correo electrónico: thaisrdmarcal@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0193-0878

Como citar o artigo:

Rodrigues, L. M. D. A.; Dörr, R. C.; Marçal, T. R. D. Um levantamento sobre a oferta da disciplina Pré-Cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Públicas do Centro-Oeste Brasileiro. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 245 - 272, enero, 2022. DOI: 10.37618

Oportunidades de Aprendizaje Vividas por los Profesores de Matemáticas: Experiencias Derivadas de un Proceso de Formación Anclado en la Práctica Docente

Marcia Aguiar
marcia.aguiar@ufabc.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-5824-0697
Universidad Federal del ABC (UFABC)
Santo André, Brasil.

Alessandro Jacques Ribeiro
a.ribeiro@ie.ulisboa.pt
https://orcid.org/0000-0001-9647-0274
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (UL)
Lisboa, Portugal.

Recibido: 20/julio/2021 **Aceptado:** 20/octubre/2021

Resumen

Esta investigación adopta el entendimiento de que el desarrollo profesional y el aprendizaje docente posibilitan una mejora en su práctica docente, por lo que en este artículo presentamos resultados de investigación que buscan identificar y comprender cómo surgen las oportunidades de aprendizaje profesional cuando los docentes discuten y analizan colectivamente, clases que involucran estándares y regularidades en la escuela primaria. El estudio se desarrolló en una perspectiva cualitativo-interpretativa y los datos analizados están constituidos por protocolos de resolución de tareas de capacitación, audios y videos recolectados durante un proceso de educación continua. Los resultados nos muestran que las tareas de aprendizaje profesional favorecieron a los docentes para discutir el conocimiento de los estudiantes y la enseñanza sobre estándares y regularidades, y también muestran que los docentes participantes movilizaron y ampliaron sus conocimientos sobre la interpretación de diferentes formas de generalizar un estándar matemático, como así como ampliaron sus propios conocimientos matemáticos sobre este importante tema que será discutido en la escuela primaria.
Palabras clave: Enseñanza de álgebra. Formación de profesores. Tareas de aprendizaje profesional. Oportunidades de aprendizaje profesional. Generalización de estándares y regularidades.

Oportunidades de Aprendizagem Vivenciadas por Professores de Matemática: Experiências Advindas de um Processo Formativo Ancorado na Prática Docente

Resumo

Essa pesquisa adota o entendimento de que o desenvolvimento profissional e a aprendizagem do professor possibilitam uma melhora na sua prática docente, assim nesse artigo, apresentamos resultados de pesquisa que busca identificar e compreender como oportunidades de aprendizagem profissional emergem quando professores discutem e analisam, coletivamente, aulas envolvendo padrões e regularidades na escola básica. O estudo foi desenvolvido numa perspectiva qualitativa-interpretativa e os dados analisados são constituídos por protocolos de resolução de tarefas formativas, áudios e vídeos colhidos ao longo de um processo de formação continuada. Os resultados nos apontam que as tarefas de aprendizagem profissional favoreceram que os professores discutissem o conhecimento dos estudantes e do ensino acerca de padrões e regularidades e, mostram ainda, que os professores participantes mobilizaram e ampliaram seus conhecimentos sobre a

interpretação de diferentes formas de se generalizar um padrão matemático, assim como ampliaram seus próprios conhecimentos matemáticos acerca deste importante tema a ser discutido na escola básica.
Palavras-chave: Ensino de Álgebra. Formação de professores. Tarefas de aprendizagem profissional. Oportunidades de aprendizagem professional. Generalização de padrões e regularidades.

Learning Opportunities Lived by Mathematics Teachers: Experiences Arising from a Teacher Education Process Grounded in Teaching Practice

Abstract

This research adopts the understanding that professional development and teacher learning enable an improvement in their teaching practice, so in this paper, we present research results that seek to identify and understand how professional learning opportunities emerge when teachers collectively discuss and analyze classes involving patterns and regularities in elementary school. The study was developed in a qualitative-interpretative perspective and the analyzed data are constituted by protocols from professional learning tasks developed by teachers, audios, and videos collected during a continuing education process. The results show us that professional learning tasks favored teachers to discuss the knowledge of students and teaching about patterns and regularities, and also show that participating teachers mobilized and expanded their knowledge about the interpretation of different ways to generalize a mathematical pattern, as well as expanded their own mathematical knowledge about this important topic to be discussed in elementary school.
Keywords: Teaching of Algebra. Teacher education. Professional learning tasks. Professional learning opportunities. Generalization of patterns and regularities.

Introdução

Estudos tem mostrado que a compreensão sobre como se constituem e se desenvolvem oportunidades para a aprendizagem de professores é um tema de investigação recente e que se foca, em especial, na formação inicial (TATTO; SENK, 2011). Em complemento, pesquisas como as de Webster-Wright (2009) e de Russ, Sherin e Sherin (2016) buscam discutir quando, como e onde ocorre a aprendizagem do professor e, ainda, sobre o fato dessa aprendizagem se desenvolver ao longo de sua carreira.

Com isso, em nossa pesquisa adotamos um entendimento de que o desenvolvimento profissional e a aprendizagem do professor possibilitam uma melhora em seus conhecimentos, competências e atitudes (MARTINS; SANTOS, 2012; SERRAZINA, 2013), em especial, em situações que envolvam sua prática diária, incluindo-se aí, os momentos de sala de aula, planejamento, avaliação e colaboração com colegas e outros (DAVIS; KRAJCIK, 2005). Ressalta-se ainda, uma compreensão de que a aprendizagem do professor está distribuída entre os indivíduos e artefatos, como é o caso de tarefas preparadas para sua formação (PUTNAM; BORKO, 2000).

Sendo assim, tem-se por objetivo no presente artigo, identificar e compreender como oportunidades de aprendizagem profissional emergem quando professores discutem e analisam, coletivamente, aulas envolvendo padrões e regularidades na escola básica. Como forma de operacionalizar o objetivo delimitado neste artigo, propomo-nos a responder às seguintes questões de pesquisa: (i) *Como tarefas de aprendizagem profissional possibilitam aos professores discutir o conhecimento dos estudantes acerca de padrões e regularidades?* (ii) *Que conhecimentos para o ensino de padrões e regularidades são reconhecidos pelos participantes de um processo formativo quando analisam, coletivamente, as ações de 3 professores em aulas da escola básica?*

Fundamentado na perspectiva de aprendizagem apresentada acima, organizou-se um processo de formação continuada para professores, envolvendo também professores em formação inicial, o qual buscou favorecer uma vivência em espaços de discussão e de trabalho coletivo e, também, possibilitar a reflexão sobre seus conhecimentos profissionais, bem como, o compartilhamento de suas experiências da prática da sala de aula (BALL; COHEN, 1999). Essas oportunidades foram mediadas por tarefas que favoreçam sua aprendizagem profissional (SILVER et al., 2007; SMITH, 2001; SWAN, 2007).

As tarefas de aprendizagem profissional (TAP) utilizadas em nosso estudo foram desenhadas e realizadas no e para o processo formativo – contexto de recolha de dados para a pesquisa – e contemplavam situações matemáticas envolvendo diferentes tipos de padrões e regularidades, apresentando suas generalizações por meio de diferentes representações, incluindo-se aí as expressões algébricas (BRITT; IRWIN, 2011; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008; PIMENTEL; VALE, 2012). Além disso, as TAP exploravam conhecimentos profissionais dos professores para o ensino de padrões e regularidades na escola básica (BRANCO; PONTE, 2014; PONTE, 2012; ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002).

Referencial teórico

O uso de tarefas de aprendizagem profissional

Ao considerarmos em nossa presente pesquisa, que a aprendizagem profissional dos professores é um processo fortemente ancorado na prática da sala de aula (BALL; COHEN, 1999; PONTE; CHAPMAN, 2008; SMITH, 2001), e que deva proporcionar aos docentes, oportunidades de aprender ao longo de suas vidas profissionais (LOUCKS-HORSLEY, 1997), assumimos que o ambiente da sala de aula deve ser considerado como base para construir oportunidades de aprendizagem profissional, e que estas devem buscar levar em conta o desempenho e as dificuldades dos alunos (BRUCE et al, 2010). Oportunidades de aprendizagem profissional, em nossa perspectiva, são mediadas por tarefas de aprendizagem profissional (TAP) que, neste estudo, são assumidas como "tarefas que envolvem professores no trabalho do ensino, podem ser desenvolvidas a fim de encontrar um objetivo específico para a aprendizagem do professor e levam em consideração o conhecimento prévio e a experiência que os professores trazem de sua atividade" (BALL; COHEN, 1999, p. 27).

De modo a considerar as diferentes dimensões do conhecimento profissional docente, que será mais bem discutido na próxima seção, há de se considerar ainda na elaboração das TAP o uso de registros de prática (BALL; BEN-PERETZ; COHEN, 2014), tais como, protocolos de resoluções de estudantes, recortes de propostas curriculares, planos de ensino, entre outros, os quais devem vir acompanhados de questões que promovam discussões a respeito do conhecimento matemático para o ensino propiciados pelos registros de prática. Tais recursos propiciam trazer para o contexto dos processos formativos, aspectos da prática da sala de aula como um importante componente das tarefas de aprendizagem profissional (SMITH, 2001).

Conhecimento profissional docente

Na perspectiva de se constituir um tipo de conhecimento profissional específico para o ensino, diferentes modelos teóricos têm sido propostos no campo da Educação Matemática, os quais, normalmente, adotam como base o conceito de *Pedagogical Content Knowledge (PCK)* (SHULMAN, 1986). Esta noção tem se constituído como uma importante referência para muitos pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento, os quais a aprofundaram e/ou adaptaram em suas investigações. Uma perspectiva muito utilizada no âmbito da Formação de Professores de Matemática é o *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Em seu modelo, Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam seis domínios diferentes do MKT, entre os quais, o *Common Content Knowledge (CCK)*, o *Specialized Content Knowledge (SCK)*, o *Knowledge of Content and Students (KCS)* e o *Knowledge of Content and Teaching (KCT)*. Outro modelo baseado nas ideias de Shulman (1986) é o *Knowledge Quartet* (ROWLAND, 2013), o qual tem por objetivo identificar o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico que emergem do professor em uma sala de aula, e que são potencializadores para os processos de ensino e aprendizagem. Rowland (2013) propõe quatro dimensões do conhecimento que emergem na prática da sala de aula, *Fundamento*, *Transformação*, *Conexão* e *Contingência*.

Em específico nesta pesquisa, fundamentamo-nos nos estudos de Ponte (1999), o qual discute uma perspectiva de conhecimento profissional docente fortemente ancorado na prática letiva, argumentando que o conhecimento dos professores é orientado para a ação. Para o autor, este conhecimento "relaciona-se de um modo muito estreito com diversos aspectos do conhecimento pessoal e informal do professor, da vida quotidiana como o conhecimento do contexto (da escola, da comunidade, da sociedade) e o conhecimento que ele tem de si mesmo" (p. 3). Em sua perspectiva, o conhecimento profissional docente desdobra-se em diferentes domínios, dentre os quais: (1) o conhecimento da Matemática, "incluindo as suas inter-relações internas e com outras disciplinas e as suas formas de raciocínio, de argumentação e de validação" (PONTE, 1999, p. 61); (2) o conhecimento do aluno, incluindo os processos de aprendizagem bem como as suas estratégias de resolução e dificuldades diante de tarefas matemáticas propostas; e (3) o conhecimento dos processos de ensino, incluindo preparação, condução e avaliação da prática letiva.

Ao pensar nos conhecimentos dos professores para ensinar padrões e regularidades, e suas conexões com o ensino de álgebra, há de se considerar a relevância de os professores mobilizarem conhecimentos que possibilitem compreender o pensamento algébrico dos estudantes por meio do uso de diferentes representações matemáticas (BRITT; IRWIN 2011), na elaboração de conjecturas, argumentação e generalização (PIMENTEL; VALE, 2012; PIMENTA; SARAIVA; 2019) e, inclusive, pelo uso do pensamento recursivo para compreender os padrões (BLANTON; KAPUT, 2005; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Com isso, é possível que os professores auxiliem os estudantes diante de suas dificuldades em relação à generalização de padrões numéricos e geométricos (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002), e mesmo na escrita dessa generalização por meio de várias representações, incluindo-se aí a representação algébrica (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

Pode-se considerar, no intuito de se mobilizar e ampliar o conhecimento matemático para o ensino acerca da temática em questão, que processos de formação devam integrar TAP que explorem diferentes tipos de padrões e regularidades, nas quais os professores possam utilizar diferentes representações para expressar as generalizações, inclusive a representação algébrica. (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008; ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002). Além disso, há ainda de se considerar ao longo de uma formação, tarefas que possam ser desenvolvidas com professores e que favoreçam a articulação entre o conteúdo e a pedagogia, utilizando-se, por exemplo, de sequências pictóricas para se construir generalizações e, consequentemente, promover o pensamento algébrico (BRANCO; PONTE, 2014).

Metodologia da pesquisa

Contexto do estudo

O processo formativo no qual os dados foram recolhidos foi realizado ao longo de 15 encontros semanais de 4 horas cada, processo este que tinha por objetivo geral desenvolver e ampliar conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores participantes, acerca de padrões e regularidades na matemática escolar. Os encontros foram dinamizados pelos autores deste artigo e contaram com a parceria de um terceiro formador. Os encontros constituíam-se de momentos de trabalho (i) individual, (ii) em pequenos grupos, e (iii) em momentos de discussões coletivas. A maior parte das atividades foram realizadas na universidade, com três encontros realizados em escolas de educação básica. As sessões de trabalho contemplavam momentos de estudo teórico (totalizando 8 horas) e momentos de trabalho *hands on*, os quais eram mediados por TAP elaboradas pelos dinamizadores dos encontros. O processo formativo incluiu cinco TAP, sendo que as três últimas formaram um ciclo interativo de planejamento, desenvolvimento e reflexão de aulas elaboradas coletivamente pelo grupo de professores – *Ciclo PDR* (TREVISAN; RIBEIRO; PONTE, 2020). As três TAP que compunham o ciclo PDR pretendiam promover discussões matemáticas e didáticas a respeito do tema matemático escolhido e possuíam o seguinte formato: 3.ª TAP: Preparação, em pequenos grupos, de planos de aula destinados à anos escolares específicos; 4.ª TAP: Desenvolvimento das aulas selecionadas, por um dos professores participantes da elaboração da aula; e 5.ª TAP: Reflexão coletiva, mediada por registros de prática produzidos nas aula realizadas anteriormente, focando o papel e as ações do professor. Para esse artigo, traremos episódios das 5ª TAP das 3 aulas que foram elaboradas e desenvolvidas no processo formativo, durante denominado como ciclo PDR.

Participantes do estudo

Os participantes do estudo eram professores de matemática da escola básica atuantes na região metropolitana da cidade de São Paulo, Brasil. Durante a realização das 5ª TAP, contamos com a participação de 33 professores, sendo 7 em formação inicial e 26 formados (5 destes sem experiência em sala de aula). Para a realização das TAP, os professores foram divididos em 6 grupos (com 4 a 6 participantes), organização feita pelos formadores de modo que, em todos os grupos, houvesse (i) professores com e sem experiência em sala de aula e

(ii) professores formados e em formação inicial. Com a formação desses grupos pretendia-se propiciar a troca de experiências entre professores com vivências distintas em sala de aula.

Método de pesquisa e recolha de dados

O presente estudo segue uma abordagem de pesquisa qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), sob o paradigma interpretativo (CROTTY, 1998). Os dados foram recolhidos por meio de (i) registros escritos das discussões dos pequenos grupos de professores (designados por *protocolos*); (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos; e (iii) vídeo da discussão coletiva. As gravações em áudio e vídeo foram analisadas pelos pesquisadores em sua íntegra, articulando-se com os protocolos produzidos pelos professores. Tal abordagem favoreceu a organização e a análise dos dados de modo a identificar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores, acerca de padrões e regularidades contempladas nas TAP.

Na análise dos dados, apresentamos discussões que ocorreram nas 5.ª TAP das 3 aulas que foram elaboradas e desenvolvidas durante os Ciclos PDR realizados no processo formativo. Vale ressaltar que as 5.ª TAP foram elaboradas a partir dos registros de prática produzidos nas 4.ª TAP, cada 5.ª TAP é referente a uma das três aulas ministradas pelos professores. Apresentamos para análise de dados, um episódio de cada uma das três aulas, com destaque para o tipo de representação utilizada para a compreensão da generalização do padrão de uma sequência de figuras em uma tarefa matemática. Em cada um dos episódios os profesores se depararam com dificuldades dos estudantes, diante das diferentes formas de representar a generalização do padrão de uma sequência de figuras, sendo o 1º episódio: *Dificuldades na representação algébrica*; o 2º episódio: *Necessitando da representação tabular*; e, o 3º episódio: *Conhecendo a representação geométrica.*

Análise dos dados

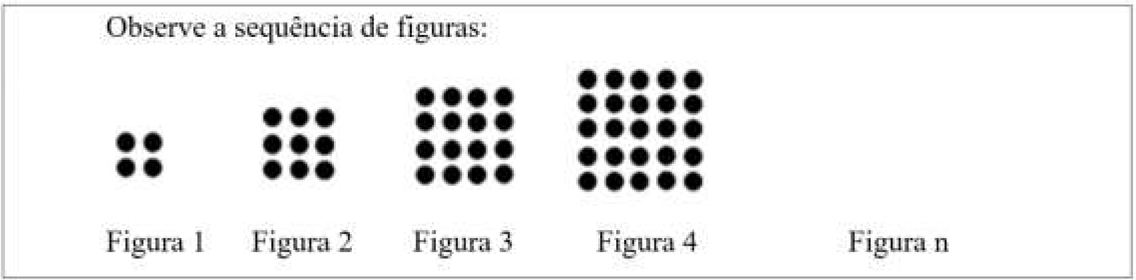
Buscamos evidenciar em cada episódio analisado, as discussões que emergiram no proceso formativo a partir dos registros da prática, bem como momentos em que se percebem ampliações nos conhecimentos dos professores a respeito das dificuldades dos estudantes, no que tange ao tema generalização de padrões e regularidades.

1º episódio: Dificuldades na representação algébrica

Esse episódio é referente a uma aula que foi elaborada coletivamente e realizada pelo professor Felipe[1] em sua sala de 9º ano do ensino fundamental (alunos com 13-14 anos de idade). Durante a aula os estudantes deveriam escrever a expressão algébrica da sequência de bolinhas apresentada na Figura 1.

No processo formativo, durante a discussão coletiva sobre essa aula, o formador chama a atenção dos professores para uma questão da TAP, na qual buscava-se comparar a resolução de dois grupos de estudantes, 9A e 9D (Figuras 2 e 3), em relação à expressão algébrica que representava a generalização da sequência de bolinhas (Figura 1).

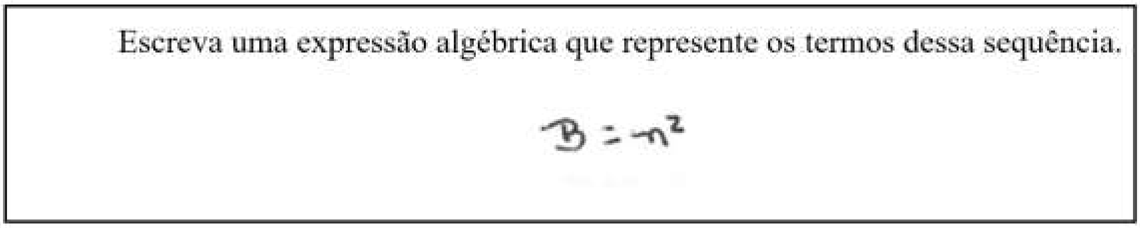
Figura 1 - Tarefa matemática para o 9º ano.



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Aparentemente tratavam de respostas diferentes, como podemos perceber nas Figuras 2 e 3:

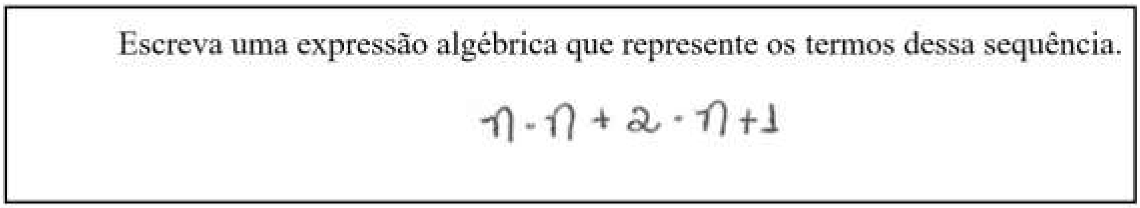
Figura 2 - Protocolo dos estudantes do grupo 9A.


Escreva uma expressão algébrica que represente os termos dessa sequência.

$B = n^2$

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Figura 3 - Protocolos dos estudantes do grupo 9D.


Escreva uma expressão algébrica que represente os termos dessa sequência.

$n \cdot n + 2 \cdot n + 1$

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

[1] Os nomes utilizados na pesquisa para os professores participantes do processo formativo e para o terceiro formador, João, são fictícios.

A solicitação do formador era para que os professores relacionassem as soluções apresentadas pelos grupos 9A e 9D, à luz das seguintes questões: (i) Qual comparação você estabelece entre as soluções apresentadas pelo Grupo 9A e pelo Grupo 9D? (ii) Existe diferença na forma de pensar sobre a tarefa matemática nas soluções do Grupo 9A e do Grupo 9D? (iii) As respostas encontradas foram as mesmas? Comente.

Durante a plenária, o formador Ribeiro[2] convida os professores para participar da discussão, de forma a mobilizar os conhecimentos matemáticos que haviam sido levantados anteriormente, nos pequenos grupos, a fim de que os professores compartilhassem suas reflexões com os demais participantes.

A professora Joana declarou sua reflexão sobre esse momento da aula, apontando a dificuldade dos alunos nas resoluções:

Joana: (. . .) *eu acho que o* [que] *"pega", pro aluno, é entender quem é "n". "N" é o que? É a figura? "N" é a posição, então, isso que a gente* [professores] *tem que colocar na cabeça deles* (. . .). *Eu acho que foi o que faltou a gente perguntar pra eles: "esse 'n' que você tá falando, quem é o 'n'? É a figura, é a posição?" E eles terem a ideia do que é a posição, porque, mesmo no nono ano, tem alunos que não entendem o que é posição*.

A professora mobilizou o seu conhecimento sobre as dificuldades dos estudantes e apontou para possíveis questionamentos que poderiam ter sido feitos pelo professor Felipe, de modo a auxiliar os estudantes na compreensão da representação algébrica da generalização da sequência apresentada. Contudo, a fala da professora foi impulsionada pelo formador Ribeiro, que teve o propósito de *provocar* essa reflexão nos demais professores sobre a generalização realizada pelos estudantes.

O formador aproveitou a fala da Joana ao dizer: *porque, mesmo no nono ano, tem alunos que não entendem o que é posição*. Assim, salientou que a situação envolve uma dúvida recorrente entre os estudantes; por isso, esta dúvida deveria ser prevista no planejamento do professor e, ainda, ser tratada em algum momento da aula:

Formador Ribeiro: *Então, se o professor sabe que é uma dificuldade recorrente na hora de interpretar o problema, talvez o professor, nas suas ações, seja no momento da apresentação da tarefa, porque daí poderia já trabalhar o grupo todo, ou* (. . .) *no momento em que eu passo pelos grupos* [separado], *porque aí, quando eu estou passando pelos grupos, aquele grupo que já percebeu quem é o "n", eu não vou intervir* (. . .).

[2] Os formadores, Ribeiro e Marcia, decidiram utilizar os nomes verdadeiros pois são os autores desse artigo.

Nesse momento, ainda tomando por base o relato de Joana, o formador lançou mais duas perguntas que poderiam ser utilizadas pelo professor, levando-se em conta a aula que vinha sendo observada e as ações dos estudantes do grupo 9A. Essas questões tinham a finalidade de direcionar a discussão dos professores para quais ações o professor Felipe poderia ter realizado em sua aula, de modo a auxiliar os estudantes com o pensamento matemático:

Formador Ribeiro: (. . .) *mas, se eu já sei que isso é uma dificuldade recorrente, quando eu passo pelos grupos eu posso observar; então, no caso do 9A, eu vou perguntar: "Mas quem que vocês estão chamando de 'n'? Por que que vocês estão chamando de 'n'?". Então, fazendo algumas questões que não dê a resposta, mas os faça refletir, pensar sobre aquilo.*

O formador tentou chamar atenção para a ação do professor em realizar questões aos estudantes, as quais os auxiliassem a compreender o significado das variáveis na representação algébrica da generalização, em especial por se tratar de uma aula que pretendia promover discussões coletivas. Com isso, o formador possibilitou aos professores ampliarem os seus conhecimentos sobre os estudantes, visto que tal alerta logo foi percebido por uma das professoras, que continuou a exemplificar como o professor poderia ter atuado durante o trabalho em grupo dos estudantes:

Hélia: (. . .) *por exemplo,* [o professor] *viu as duas respostas lá no monitoramento* [momento em que o professor acompanha as discussões nos pequenos grupos na sala de aula]*; aí* [se ele] *selecionasse as duas respostas para fazer a plenária e fazendo essa pergunta "quem é 'n'?", eles* [os estudantes] *pensariam antes da plenária, para responder: "Ah, o 'n' é de 2 para frente".* [O grupo 9A considera o n como sendo o número de bolinhas do lado da figura - ver Figura 2]. *O outro grupo* [afirma:] *"O 'n' é de 1 para frente"* [o 9D considera o *n,* a posição da figura, ver Figura 3]. *Aí* [poderiam] *pensar: por que, então, as expressões são diferentes* (. . .). *Só que aí daria para fazer o quinto passo, que é conectando* [no momento de síntese da aula, o professor deve conectar as resoluções apresentadas pelos estudantes] (. . .).

O formador aproveitou as falas das professoras Hélia e Joana, sobre a tarefa matemática apresentada na Figura 1, para exemplificar como a aula poderia ter sido realizada, buscando evidenciar uma articulação entre a dimensão matemática e a dimensão didática do conhecimento profissional do professor (RIBEIRO; PONTE, 2020):

Formador Ribeiro: (. . .) *quando eu* [o formador fala como se fosse o professor Felipe agindo no momento da aula] *decidi passar pelos grupos, lembra que tem (...), os* *conhecimentos que a Joana colocou aqui estão lá presentes — olha, eles têm dificuldade em reconhecer o 'n', então já vou ficar alerta sobre isso. No monitorando* [durante a discussão dos pequenos grupos], *eu começava a perceber Olha o grupo 9A tá interpretando o 'n' como sendo o lado, para que isso seja verdadeiro, o conjunto de onde eu vou tirar o valor de 'n' tem que ser diferente de uma outra interpretação, que é quando eu penso no 'n' como sendo a posição da figura.*

Em seguida, o formador direcionou a discussão para o papel do professor e para os conhecimentos matemáticos e didáticos que foram mobilizados e ampliados e eram esperados dele.

Nesse primeiro episódio, *Dificuldades na representação algébrica*, observamos que o registro de prática contido na TAP promoveu discussões sobre o trabalho do professor, voltado mais para questões pedagógicas, nas quais foi priorizado a necessidade de antecipar as dificuldades recorrentes dos estudantes e, ao mesmo tempo, as formas de atuação do professor na sala de aula. Com isso, percebemos que o formador incentivou o surgimento desse conhecimento sobre as dificuldades dos estudantes que estava sendo mobilizado e ampliado na discussão, e não aprofundou a discussão matemática que explicava a diferença entre as respostas dos estudantes, conforme estava previsto no planejamento dos formadores para a 5.ª TAP. Entretanto, ao observar os protocolos produzidos pelos professores durante a 5.ª TAP, constatamos que a discussão sobre os *possíveis valores de n* havia permeado todos os grupos, mas, em nenhum deles, foi apresentada uma relação direta sobre como os resultados das respostas dos estudantes poderiam ter auxiliado o professor Felipe durante a plenária com seus alunos.

Nessa circunstância, o formador poderia ainda ter aproveitado para colocar em destaque a aproximação entre os conteúdos matemáticos escolares e a matemática acadêmica (RIBEIRO; PONTE, 2020). Apesar de a tarefa matemática (Figura 1) tratar de conteúdos da matemática escolar, os equívocos apresentados pelos estudantes poderiam levar a uma discussão mais aprofundada, do ponto de vista matemático, com os professores durante a formação. Assim, o formador teria a oportunidade de promover ampliações do conhecimento matemático dos professores. Embora a discussão não tenha sido tão aprofundada a respeito do conhecimento matemático dos estudantes, foi possível aos professores compreenderem as dificuldades dos estudantes em perceber o significado das variáveis na representação algébrica de uma generalização, assim como discutirem sobre as suas possíveis ações na sala de aula.

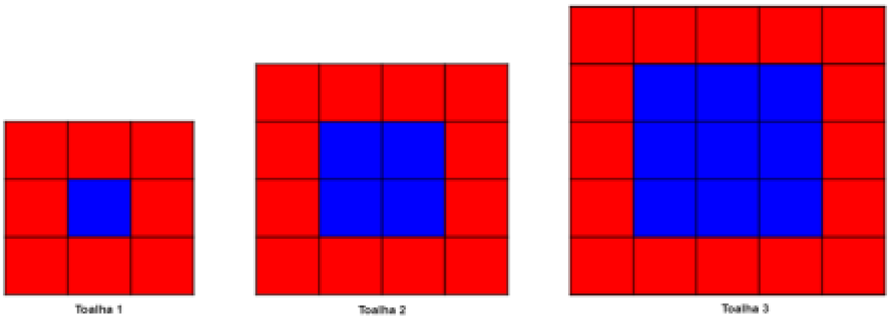
2º episódio: Necessitando da representação tabular

Esse segundo episódio já pertencente a aula da professora Maria, aula esta que foi realizada com a sua turma de 7º ano do ensino fundamental (estudantes com idade entre 12 e 13 anos). Trazemos nesse episódio, as discussões ocorridas na plenária realizada com os professores durante a formação, discussões estas sobre as ações da professora Maria durante a aula, bem como possíveis intervenções nas quais ela poderia ter auxiliado seus estudantes a compreenderem o padrão existente no cálculo da quantidade de quadradinhos vermelhos na 12.ª toalha (Questão 6 – Figura 4).

Figura 4 - Tarefa matemática do plano de aula do 7.º ano

Toalhas da Vovó

A vovó Ana é uma cliente fiel de uma loja de toalhas de mesa. Em sua última ida à loja, ela ficou encantada por um tipo de estampa que viu. Tendo diversos tamanhos ela ficou confusa tentando perceber se havia uma regra para a estampa das toalhas. Abaixo está representado os três primeiros tamanhos de toalhas:



Caros estudantes, ajudem a vovó a solucionar suas dúvidas. Discuta em seu grupo e tentem chegar a uma solução.

1º Com o material manipulável que receberam do professor represente as 3 primeiras toalhas nele.
2º Discuta no seu grupo e descreva abaixo o que vocês perceberam na construção da toalha 1, toalha 2 e toalha 3.
3º No material manipulável montem como vocês acham que serão as toalhas 4, 5, 6 seguindo o mesmo padrão.
4º Represente no quadriculado abaixo (o quadriculado foi retirado devido a limitação de páginas no artigo) os resultados encontrados pelo seu grupo no material manipulável (questão 3).
5º Descreva como o grupo chegou nas representações das toalhas 4,5 e 6.
6º A vovó descobriu que ela precisa da toalha 12. Discuta em grupo e descreva algebricamente quantos quadradinhos azuis e quantos quadradinhos vermelhos terá essa toalha.
7º Descreva uma regra que permita determinar o número total de quadradinhos em qualquer toalha (observação: a toalha deve ter o mesmo padrão e regularidade que a toalha da vovó Ana).
8º Escreva uma expressão algébrica que represente a regra que você descreveu no exercício anterior.

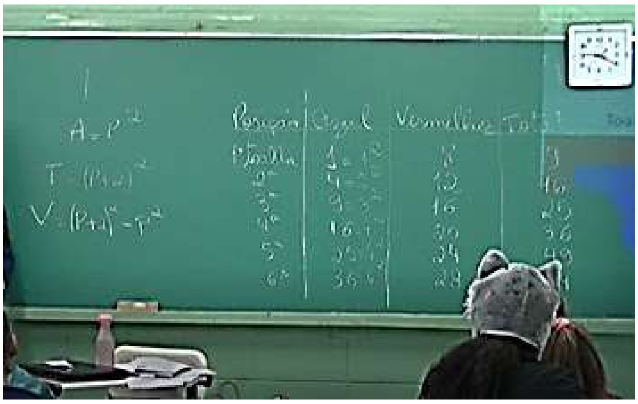
Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Quando o formador João questionou os professores sobre as ações da professora Maria para auxiliar os estudantes (que haviam sido analisadas durante a formação, com base nos trechos do vídeo da aula ministrada que pertenciam a TAP), Joana, uma das participantes, apresentou as discussões ocorridas em seu grupo (durante o trabalho autônomo):

Joana: O nosso grupo pensou montar uma tabela, porque eu acho que, dessa forma, eles conseguiriam perceber o padrão. Pela tabela, eles poderiam olhar a diferença de quadradinhos da 2.ª pra 3.ª toalha, da 3.ª para a 4.ª... Se você [professora Maria] tivesse dado esse toque para eles, talvez eles conseguiriam avançar mais facilmente, ou não.

Após o comentário de Joana, a professora Maria, juntamente com os dois professores que elaboram o plano e participaram do desenvolvimento da aula, declararam as suas escolhas durante o planejamento e expuseram as suas reflexões decorridas a partir das discussões na plenária (dos estudantes, durante o desenvolvimento da aula):

Figura 5 - Tabela e fórmula registradas pela professora no quadro na aula do 7º ano



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Profa. Maria: Na verdade, a ideia da tabela foi discutida com o grupo, no início [durante o planejamento da aula]. *Fazia parte inclusive da tarefa que a gente havia selecionado. Mas a gente ficou com medo de conduzir eles por algum caminho. Por isso, a gente não colocou a tabela* [tarefa matemática – Figura 4]. *Só que, agora, refletindo sobre o que ocorreu, a gente percebeu que a tabela teria ajudado eles a chegarem* [no padrão]. *Tanto que, na plenária* [em sala de aula – Figura 5], *a tabela ajudou muito. E aí foram eles que construíram junto comigo. Mas a gente só percebeu isso agora. Hoje, a gente colocaria a tabela.*

Antonia: Sem a tabela, eles não conseguiram estabelecer o raciocínio que nós esperávamos, que era, calcular os quadradinhos vermelhos, partindo do todo e tirando os azuis. Eles quiseram fazer a contagem dos vermelhos. Tanto que é curioso que, durante a *montagem das figuras da sequência* [com o material manipulável], *eles começavam montando pelo vermelho. Poucos grupos começaram montando pelos azuis. Eles não conseguiam perceber que seria mais "fácil" calcular o total e tirar os azuis. Eles ficaram patinando, tentando encontrar uma forma de localizar esse padrão nos vermelhos. Eles não conseguiram.*

Flávio: Avaliando o plano [de aula], *uma dificuldade que a gente teve foi o tempo. Se a gente incluísse alguma coisa, teria que tirar outra. A gente estava conversando que as duas ou três primeiras questões tinham a intenção de tentar deixá-los descobrir alguma coisa. Talvez fosse viável adaptar essa ideia da tabela, produzindo com eles, à medida que trabalhavam com o material* [manipulável], *num diálogo entre a professora e eles [os estudantes], para conseguir ganhar um pouco mais de tempo.*

É interessante notar na discussão acima, a qual foi propiciada pelos trechos de vídeos que compunham a TAP, que os professores reconhecem a importância da articulação entre diferentes tipos de representações para se compreender as generalizações, bem como a possibilidade de escrevê-las em linguagem algébrica, inclusive. Em especial, há destaque para o uso de tabelas, como uma representação que possibilita o desenvolvimento do pensamento algébrico e a superação de dificuldades que normalmente os estudantes possuem. Levando-se em conta a preocupação pelo uso das diferentes representações para a resolução de um problema, os professores mobilizam o seu conhecimento matemático para o ensino em relação a reconhecer as dificuldades dos estudantes e, com isso, auxiliá-los a superá-las. Essa é uma importante dimensão do conhecimento profissional dos professores.

Outro aspecto a se destacar relaciona-se à gestão da aula. Isso é percebido quando Antonia aponta para o fato de que, embora tenha sido disponibilizado material manipulável para que os estudantes representassem as três primeiras toalhas na tarefa, essa estratégia parece não ter sido eficiente para muitos deles. O fato de os estudantes terem iniciado a representação das toalhas pela parte vermelha (mais externa) dificultou (e, em alguns casos inviabilizou) a percepção de um padrão na construção dessas toalhas.

Na continuidade do trabalho com os professores, emerge a partir da discussão entre eles, outro aspecto também relacionado à gestão da aula: reconhecimento da importância de se antecipar soluções dos estudantes, no intuito de *prever* como eles, os professores, poderiam abordar matematicamente a tarefa solicitada, trabalhando o máximo de estratégias de soluções diferentes de resolução. Isso permitiria aos professores, antecipadamente, reconhecer equívocos comuns que os estudantes poderiam cometer, ou intervenções que poderiam ser realizadas. O formador Ribeiro aproveita esse momento da discussão para salientar que o planejamento foi feito coletivamente por todos eles, de modo a eles compartilhassem as escolhas feitas à priori.

Para além disso, o formador reforça a importância do planejamento da aula com a antecipação das ações do professor:

Formador Ribeiro: Essa aula foi discutida antes né, todo mundo participou. Por que não pensamos juntos, na preparação [da aula]*, sobre o uso da tabela?*

Joana: Eu achei que, no desenvolver da aula, quando viu que eles não estavam avançando, quando a professora foi ao grupo, poderia ter sugerido passar isso [o número de quadradinhos azuis e vermelhos nas várias toalhas] *para uma tabela.*

Formador Ribeiro: Isso precisa ser antecipado. O professor tomar essa decisão na hora, sem ter pensado nisso antes, nem sempre isso é natural. Então, por isso que, quando a gente vai preparar a aula [...] *a representação tabular realmente fez falta, porque ela ajuda a organizar o seu pensamento. É muito mais fácil você olhar o comportamento e a observação do padrão na tabela. Mas isso é uma decisão que não foi tomada. Foi algo que precisaria ter sido realmente planejado.*

Na continuação da discussão houve uma situação explícita de troca de experiências entre professores menos experientes (e que achavam que, de fato, era muito difícil esperar uma expressão algébrica) e aqueles com mais tempo de atuação (destacando que era possível se chegar à expressão algébrica). Tal vivência acabou por gerar uma decisão acerca da necessidade de o professor conduzir intervenções adequadas nesse sentido. Para o grupo, e para a própria professora Maria, *suas ações* – a partir da organização de uma tabela e a sistematização realizada pela professora durante a plenária – foram fundamentais para o desfecho que se chegou em aula:

Profa. Maria: Era necessário esse fechamento para que eles percebessem que, o que parecia tão complicado, não era tão complicado assim. Infelizmente, é um costume que eles têm, de achar que o negócio é muito mais difícil do que de fato é. E é um treino que a gente tem que estar sempre fazendo, de trazer essas atividades diferentes.

Ao apontar que *temos que sempre trazer essas atividades diferentes*, a professora atribui importância, na gestão da aula, ao trabalho com tarefas mais abertas e com caráter exploratório (PONTE, 2005), uma vez que os estudantes não estão habituados a esse tipo de abordagem em suas aulas. Isso, segundo ela, parece justificar parte das dificuldades por eles apresentadas. Por fim, buscando sistematizar alguns elementos que se fizeram presentes na discussão propiciada pela TAP, o formador finaliza a plenária destacando que, se o estudante não está acostumado a esse tipo de tarefa, é porque não se propõem aulas com esse formato.

3º episódio: Conhecendo a representação geométrica

O último episódio está inserido na TAP de reflexão da aula da professora Julia e contempla os registros de prática dessa aula. A aula aconteceu em sua sala do 3º ano do ensino médio (estudantes com idade entre 16 e 17 anos). Apresentamos aqui, discussões entre os professores durante a formação, a respeito da dificuldade dos estudantes em reconhecer uma função como a generalização de um padrão, tomando-se por ponto de partida a sua representação gráfica.

Para isso, trazemos registros da aula de Julia que mostravam dúvidas dos alunos que surgiram durante a aula e que se baseavam em: qual era a curva do gráfico formada pelos pontos da tabela: reta, parábola ou exponencial? Apresentamos os registros de prática que mostram os alunos discutindo essas questões e, em seguida, a reflexão dos professores subsidiada pela 5.ª TAP.

A aula desenvolvida no 3º ano se referia ao jogo da Torre de Hanói. A tarefa matemática consistia em conhecer e jogar o jogo da torre de Hanói, e preencher uma tabela, que estava proposta na tarefa, a qual continha três colunas representando: (1) a quantidade de discos, (2) o número mínimo de movimentos dos discos (que seria para transportar a torre de um pino para outro a partir de algumas regras), e (3) a formação do par ordenado com os dois valores das colunas anteriores. A partir dos pares ordenados elaborados na tabela, os estudantes eram convidados a construir um gráfico num plano cartesiano e, assim, dizer qual função já estudada anteriormente por eles, representava o gráfico traçado.

Durante a realização aula (momento caracterizado como 4.ª TAP), enquanto os alunos, em pequenos grupos, construíam o gráfico a partir dos pontos da tabela, algumas dúvidas foram surgindo, como: um grupo pensou que fosse uma reta; outro ficou em dúvida se o gráfico era uma parábola ou uma exponencial; e dois grupos, estranhando o gráfico, usaram o aplicativo Geogebra no celular, de modo a identificar que a curva era uma função exponencial. A professora Julia, percebendo essas dúvidas nos pequenos grupos, perguntou aos alunos no momento da discussão coletiva (Figura 6):

Figura 6: Registro de Prática – discussão coletiva na aula do 3º ano

Julia: Ela [a curva] poderia ter dado uma parábola?

Alunos: Não.

Julia: Por que não?

Aluna Bia: Porque ela não tem disco negativo.

Julia: Porque não tem disco negativo.

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Esse registro de prática (Figura 6) foi selecionado e inserido na 5.ª TAP para que os professores percebessem: (i) que só colocar os pontos num plano cartesiano não auxilia os alunos a identificarem o tipo de gráfico e (ii) a ação da professora Julia ao perceber a dúvida dos alunos. A intenção dos formadores ao utilizar esse registro, era levar os professores a perceberem que a curva desenhada gerou dúvidas entre os alunos e, por isso, a professora deveria lançar mão do seu conhecimento matemático sobre funções, e explicar por que esse gráfico não poderia ser uma parábola. Uma possibilidade que nos parece interessante, seria os alunos perceberem a diferença na taxa de variação desses tipos de funções. No processo formativo, durante a discussão coletiva, um professor identifica que a resposta da professora não resolve a questão:

Antonia: Você [professora] *comenta* [na aula] *que não é uma parábola porque não tem o x negativo, realmente, não tem. Mas o fato de não ser uma parábola é porque não é uma função de 2º grau e, sim, uma função exponencial que é outro tipo de gráfico. É só isso que eu queria…*

Julia: É! Talvez isso eu deveria ter continuado…

Antonia: É! Mas é que na hora a gente não pensa, mas o fato do domínio ser só positivo não quer dizer que não seja uma parábola.

Na discussão, os professores conseguem argumentar que os gráficos são distintos porque são determinados por funções algébricas diferentes. Mas, como os professores não conseguem chegar à taxa de variação, os formadores continuam insistindo na discussão. O professor Bruno ressalta a dificuldade de se diferenciar as curvas exponencial e parábola apenas pelo desenho do gráfico:

Bruno: Quando a curva é um pouco fechada, ela pode se confundir com uma parábola, mas a parábola é uma função quadrática então isso também é instigado nos alunos.

Nessa argumentação, Bruno valida a ação da professora Julia de instigar os alunos a pensar na diferença das funções, pois eles, provavelmente, já as conhecem. Como os formadores continuam a fomentar a discussão, os professores vão mobilizando os seus conhecimentos matemáticos para resolver a situação:

Bruno: Se eles colocassem mais pontos no gráfico eles teriam visto a exponencial.

Antonia: O fato do domínio ser só positivo não quer dizer que não seja uma parábola.

Bruno: Porque a parábola ela admite x negativo. Nesse caso concreto, não.

Formadora Marcia: Pessoal! Mas a exponencial também admite x negativo.

Neste ponto, a formadora Marcia tenta retomar a conversa para a função exponencial e, assim, o professor Bruno percebe que precisa buscar outro caminho para identificar a função exponencial e diferenciá-la da quadrática. Então ele ressaltou:

Bruno: Eles deveriam ter focado não no fato de não haver uma região negativa, mas no comportamento da curva.

Formadora Marcia: Eles deveriam olhar os valores da tabela para poderem entender o quanto [a função] *cresce.*

Julia: Mas o [Formador Ribeiro] *escreveu na lousa padrão de crescimento. É! Um aluno, não lembro quem, falou que é exponencial e crescente. Eu deveria ter explorado: é crescente por quê? Como? Foram várias coisas que eu deveria ter feito e não fiz.*

Os formadores instigaram a discussão até que Bruno mobiliza seu conhecimento matemático e ressalta que deveríamos olhar o comportamento da curva. A partir disso, a formadora Marcia completou a ideia sugerindo olhar o comportamento da curva a partir da tabela que os estudantes construíram. Com isso, a professora Julia lembrou de um momento da aula, em que um aluno falou que a função era crescente, mas que ela não aproveitou esse pensamento do aluno naquele momento.

Tomando esse conhecimento matemático sobre funções, o formador Ribeiro finalizou a discussão contemplando a diferença de crescimento entre as funções quadrática e exponencial, e que isso era o aspecto covariacional da função. Por outro lado, identificar que esse gráfico era de uma função exponencial auxiliava os alunos a pensar na representação algébrica da generalização. Os formadores perceberam uma dificuldade de natureza matemática neste momento da discussão coletiva, a qual pode ser advinda de os professores não terem se deparado antes com esse tipo de questionamentos conduzidos pelos formadores, o que pode ter gerado as dúvidas deles. Parece-nos que o registro de prática que apresentava uma dificuldade dos estudantes inserido na TAP, proporcionou a esse grupo de professores um importante momento de reflexão e ampliação sobre conceitos matemáticos. Destacamos que tais conhecimentos não surgem usualmente em livros didáticos que, via de regra, são a base de consulta do trabalho e das ações dos professores.

Discussões e conclusões

Com o objetivo de identificar e compreender como oportunidades de aprendizagem profissional emergem quando professores discutem e analisam, coletivamente, aulas envolvendo padrões e regularidades na escola básica, propomo-nos nesse artigo responder duas questões de pesquisa: (i) *Como tarefas de aprendizagem profissional possibilitam aos professores discutir o conhecimento dos estudantes acerca de padrões e regularidades?* (ii) *Que conhecimentos para o ensino de padrões e regularidades são reconhecidos pelos participantes de um processo formativo quando analisam, coletivamente, as ações de 3 professores em aulas da escola básica?*

Para isso, analisamos os dados das discussões que ocorreram nas 5.ª TAP elaboradas a partir de 3 aulas que foram elaboradas e desenvolvidas durante os Ciclos PDR realizados no processo formativo. Apresentamos um episódio de cada uma das três aulas, com destaque para o tipo de representação utilizada para expresar a generalização do padrão de uma sequência de figuras de uma tarefa matemática. Em cada um dos episódios, os professores tiveram oportunidade para se depararem com dificuldades dos estudantes diante das diferentes formas de representar a generalização do padrão de uma sequência de figuras (BRITT; IRWIN 2011; ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002).

No 1º episódio: *Dificuldades na representação algébrica*, os estudantes escreveram expressões algébricas diferentes (Figura 2) em relação à mesma sequência de figuras (Figura 1). Na discussão decorrente de tal fato, os professores apontaram para possíveis questionamentos que poderiam ter sido feitos pelo professor Felipe, de modo a auxiliar os estudantes na compreensão da representação algébrica da generalização da sequência apresentada (BRITT; IRWIN 2011). Salientaram ainda, que como a situação envolvia uma dúvida recorrente entre os estudantes, essa dúvida deveria ser prevista no planejamento do professor e ser tratada em algum momento da aula (PONTE, 1999). Assim, a partir dos registros de prática que compunham a TAP, os professores mobilizaram os seus conhecimentos sobre as dificuldades dos estudantes e os ampliaram quando discutiram sobre as ações do professor no planejamento e desenvolvimento da aula (PONTE, 1999). A partir de tal discussão, o formador buscou evidenciar uma articulação entre a dimensão matemática e a dimensão didática do conhecimento profissional do professor (RIBEIRO; PONTE, 2020).

No segundo episódio: *Necessitando da representação tabular,* as discussões permearam acerca das ações e das possíveis intervenções da professora Maria durante a aula, nas quais ela poderia ter auxiliado seus estudantes a compreenderem o padrão existente no cálculo da quantidade de quadradinhos vermelhos na 12.ª toalha (Questão 6 – Figura 4). Ao analisar esse episódio, os professores tiveram oportunidade de reconheceram a importância do uso de uma tabela para que os alunos consigam perceber o padrão existente na quantidade de quadradinhos vermelhos (Figura 4). Desta maneira, os professores percebem que o uso de diferentes representações, no caso, a tabular por exemplo, pode auxiliar os estudantes a compreender o padrão existente e a expressar a generalização que existe ali (BRITT; IRWIN, 2011; PIMENTA; SARAIVA, 2019; PIMENTEL; VALE, 2012).

Diante dessa discussão, os professores perceberam o papel que o uso de diferentes representações pode assumir no sentido de auxiliar os estudantes a sanar as suas dificuldades e para expressar o padrão e perceber a generalização (BRITT; IRWIN, 2011). Tal vivência acabou por gerar uma decisão acerca da necessidade de o professor conduzir intervenções adequadas nesse sentido (PONTE, 1999). Para o grupo, e para a própria professora Maria, suas ações – a partir da organização de uma tabela e a sistematização realizada pela professora durante a plenária – foram fundamentais para a compreensão do padrão ali existente (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008; ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002). Outro aspecto que ficou evidenciado na discussão é que o uso dessas diferentes representações dos padrões envolvidas, poderiam ser antecipadas no planejamento e serem incluídas de alguma maneira na tarefa matemática (PONTE, 1999). Tais discussões foram promovidas e potencializadas pela TAP ao conter, além dos registros da prática da aula da professora Maria, questões que oportunizassem um repensar sobre essa prática.

O último episódio: *Conhecendo a representação geométrica*, trata das discussões entre os professores durante a formação, a respeito da dificuldade dos estudantes em reconhecer a função como representação da generalização de um padrão, tomando-se por ponto de partida a sua representação gráfica. Os registros da aula da professora Julia mostravam as dificuldades dos estudantes em justificarem porque uma curva desenhada no plano cartesiano, a partir de pontos de uma tabela, era uma exponencial e não uma parábola.

Na discussão realizada em plenária, os professores percebem a diferença nas duas curvas e, numa discussão coletiva entre professores e formadores, mobilizam e aprofundam os seus conhecimentos matemáticos e percebem que a diferença entre uma função quadrática e uma exponencial está na diferença da taxa de variação das duas funções (BRUCE, et al., 2021). Com isso, concluiu-se que identificar que esse gráfico era de uma função exponencial auxiliava os alunos a pensar na representação algébrica da generalização (BRITT; IRWIN, 2011; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

A partir desses episódios, percebemos que as TAP desenvolvidas no processo formativo – e apresentadas neste artigo – proporcionaram aos professores perceberem que a articulação entre diferentes tipos de representações para se compreender as generalizações, bem como escrevê-las em linguagem algébrica, favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico e a superação de dificuldades que normalmente os estudantes possuem

(BRITT; IRWIN 2011; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Levando-se em conta a preocupação com o uso das diferentes representações para a resolução de um problema, os professores mobilizaram e ampliaram o seu conhecimento matemático para o ensino, nomeadamente reconhecer as dificuldades dos estudantes e auxiliando-os a superá-las (PONTE, 1999). Uma importante dimensão do conhecimento profissional dos professores.

Considerando-se os vários domínios que envolvem os padrões e as regularidades, identificamos e compreendemos como Oportunidades de Aprendizagem Profissional (RIBEIRO; PONTE, 2020) emergem das discussões coletivas fomentadas a partir das 5.ª TAP (Reflexão da aula). Por outro lado, e em complemento ao anterior, os professores mobilizam e ampliam o seu conhecimento sobre os processos de ensino, especialmente quando percebem a importância de antecipar as diferentes estratégias de resolução e as possíveis dificuldades dos estudantes para se planejar a tarefa matemática e as possíveis intervenções na sala de aula (PONTE, 1999).

Por fim, mas não menos importante, nosso estudo sugere que o uso das tarefas de aprendizagem profissional, articulado ao papel e ações dos formadores, permitiu aos professores participantes saírem do isolamento que vivem nas suas escolas e vivenciarem oportunidades de aprenderem uns com os outros (BALL; BEN-PERETZ; COHEN, 2014), favorecendo a mobilização e o aprofundamento de seus conhecimentos profissionais docente para o ensino de padrões e regularidades na escola básica (PONTE, 1999).

Referências

BALL, D. L.; BEN-PERETZ, M.; COHEN, R. B. Records of practice and the development of collective professional knowledge. **British Journal of Educational Studies**, v. 62, n. 3, p. 317–335, 2014.

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In: Sykes, G.; Darling-Hammond, L. (Eds.). **Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice**. San Francisco, CA: Jossey Bass, 1999. p. 3-32.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. **ZDM — International Journal on Mathematics Education**, v. 37, n. 1, p. 34–42, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRANCO, N.; PONTE, J. P. Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. In: Ponte, J. P. (Ed.).

Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2014. p. 379-408.

BRITT, M. S.; IRWIN, K. C. Algebraic Thinking with and without Algebraic Representation: A Pathway for Learning. In: Cai, J.; Knut, E. (Eds.). **Early Algebraization:** A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. p. 137-157.

BRUCE, C. D.; ESMONDE, I.; ROSS, J.; DOOKIE, L.; BEATTY, R. The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. **Teaching and Teacher Education,** v. 26, p. 1598-1608, 2010.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM— International Journal on Mathematics Education**, v. 40 n. 1, p. 3-22, 2008.

CROTTY, M. **The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process.** London: Sage, 1998.

DAVIS, E. A.; KRAJCIK, J. S. Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. **Educational Researcher**, v. 34, n. 3, p. 3–14, 2005.

LOUCKS-HORSLEY, S. Teacher change, staff development, and systemic change: Reflections from the eye of the paradigm. In: Friel, S. N.; Bright, G. W. (Eds.). **Reflecting on our work**: NSF teacher enhancement in K-6 mathematics. Lanham, MD: University Press of America, 1997, p. 133–150.

MARTINS, C.; SANTOS, L. O Programa de Formação Contínua em Matemática como contexto favorável para o desenvolvimento da capacidade de reflexão de professores do 1.º ciclo. **Quadrante**, v. 21, n. 1, p. 95-119, 2012.

PIMENTA, C. M. C.; SARAIVA, J. M. As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, v. 28, n. 1, p. 27-53, 2019.

PIMENTEL, T.; VALE, I. Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. **Quadrante**, v. 21, n. 2, p. 29-50, 2012.

PONTE, J. P. Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: Tavares, J. (Ed.). **Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE**, Porto: SPCE, p. 59-72, 1999.

PONTE, J. P. Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In: Planas, N. (Ed.). **Teoría, crítica y práctica de la educación matemática**, Barcelona: Graó, p. 83-98, 2012.

PONTE, J. P. D. Gestão curricular em Matemática. In: Grupo de Trabalho de Investigação da APM (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: English, L.D. (Ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. New York, NY: Routledge, 2008, p. 225-263.

PUTNAM, R.; BORKO, H. What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? **Educational Researcher**, v. 29, n. 1, p. 4–15, 2000.

RIBEIRO, A. J.; DA PONTE, J. P. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, v. *28*, p. 1-20, 2020.

ROWLAND, T. The knowledge quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. **Sisyphus – Journal of Education,** v. 1, n. 3, p. 15-43, 2013.

RUSS, R. S.; SHERIN, B. L.; SHERIN, M. G. What constitutes teacher learning? In: Gitomer, D. H.; Bell, C. A. (Eds.). **Handbook of Research on Teaching**. 5ª ed., Washington (D.C.): American Educational Research Association, 2016, p. 391-438.

SERRAZINA, M. L. O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. **Da investigação às práticas**, v. 3, n. 2, p. 75-97, 2013.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher,** v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVER, E. A.; CLARK, L. M.; GHOUSSEINI, H. N.; CHARALAMBOUS, Y. C.; SEALY, J. T. Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10, v. 4-6, 261-277, 2007. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9039-7

SMITH, M. S. **Practice-based professional development for teachers of mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2001.

SWAN, M. The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v, 10, p. 217-237, 2007.

TATTO, M. T; SENK, S. The Mathematics Education of Future Primary and Secondary Teachers: Methods and Findings from the Teacher Education and Development Study in Mathematics. **Journal of Teacher Education**, v. 62, n. 2, p. 121–137. 2011. Disponível em: https://doi.org/10.1177/0022487110391807

TREVISAN, A. L.; RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. D. Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. **International Electronic Journal of Mathematics Education,** v. 15, n. 2, 2020.

WEBSTER-WRIGHT, A. Reframing professional development through understanding authentic professional learning. **Review of Educational Research**, v. 79, 702-739, 2009.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 49, p. 379-402, 2002.

Marcia Aguiar
Licenciada en Matemáticas por el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de São Paulo (IME-USP). Máster en Didáctica por la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo (FE-USP) y Máster en Matemática por el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de São Paulo (IME-USP). Doctora en Educación por la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo (FE-USP). Realizó un posdoctoral en el Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa, Portugal

(IE-UL). Actualmente es profesora de la Universidade Federal do ABC (UFABC). Tiene experiencia en las áreas de Educación Matemáticas y formación de profesores que enseñan matemáticas.
Correo electrónico: marcia.aguiar@ufabc.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-5824-0697

Alessandro Jacques Ribeiro

Licenciado en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). Máster en Educación Matemática (2001) por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). Doctor en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). Realizó dos pasantías posdoctorales: en Rutgers, The State University of New Jersey, Estados Unidos; en el Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa, Portugal (IE-UL). Actualmente es profesor del Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-UL). Tiene experiencia en las áreas de Educación Matemáticas y formación de profesores que enseñan matemáticas.
Correo electrónico: a.ribeiro@ie.ulisboa.pt
https://orcid.org/0000-0001-9647-0274

Como citar o artigo:

AGUIAR, M; RIBEIRO, A. J. Oportunidades de Aprendizagem Vivenciadas por Professores de Matemática: Experiências Advindas de um Processo Formativo Ancorado na Prática Docente. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 273 – 296, enero, 2022. DOI: 10.37618

Estudio de clases e ingeniería didáctica en la formación de (futuros) profesores de matemáticas

Aluska Dias Ramos de Macedo
aluskadrmacedo@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0398-1097
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité, Brasil.

Paula Moreira Baltar Bellemain
pmbaltar@gmail.com
https://orcid.org/register
Universidade Federal de Pernambuco
Recife, Brasil.

Recibido: 15/agosto/2021 **Aceptado:** 15/octubre/2021

Resumen

En este artículo presentaremos una parte de la investigación doctoral sobre la transposición de elementos de la Ingeniería Didáctica (DE) a la formación de profesores de matemáticas a partir del Estudio de Lecciones (LS), realizada en 2018 en una universidad brasileña. DE es una metodología de investigación experimental en la enseñanza de las matemáticas, de fuerte arraigo y basada en la Teoría de Situaciones Didácticas. En concreto, presentamos un caso que involucra una clase en perímetro. El objetivo de esta investigación es analizar los aportes de elementos de ambos procesos para promover el desarrollo profesional de los futuros docentes y responsables de la pasantía curricular supervisada. La metodología es ED. Los resultados muestran que la LS en la formación de futuros docentes se puede mejorar con elementos de ED, y que esta combinación promovió la formación y el desarrollo profesional de los participantes.

Palabras clave: Estudio de lecciones. Ingeniería Didáctica. Desarrollo profesional de docentes.

Lesson Study e Engenharia Didática na Formação de (futuros) Professores de Matemática

Resumo

Neste artigo, apresentaremos uma parte da pesquisa de doutorado sobre a transposição de elementos da Engenharia Didática (ED) para a formação de professores de matemática com base na Lesson Study (LS), realizada em 2018 em uma universidade brasileira. A ED é uma metodologia para pesquisa experimental no ensino de matemática, com forte raiz e base na Teoria das Situações Didáticas. Apresentamos concretamente um caso envolvendo uma aula sobre perímetro. O objetivo desta pesquisa é analisar as contribuições de elementos de ambos os processos para promover o desenvolvimento profissional de futuros professores e responsáveis pelo estágio curricular supervisionado. A metodologia é ED. Os resultados mostram que, a LS na formação de futuros professores pode ser aprimorado por elementos da ED, e que essa combinação promoveu a formação e o desenvolvimento profissional dos participantes.

Palavras-chave: Lesson Study. Engenharia Didática. Desenvolvimento Profissional de Professores.

Lesson Study and Didactic Engineering in the Training of (future) Mathematics Teachers

Abstract
In this paper we will present a part of doctorate research about a transposition of DE elements to mathematics teacher education practicum based on Lesson Study (LS), carried out in 2018 at a Brazilian university. DE is a methodology for experimental research in mathematics education, with a strong root and base in the Theory of Didactic Situations. Concretely we present a case involving a research lesson on perimeter. The purpose of this research is to analyse contributions from elements of both processes to foster the professional development of future teachers and those responsible for the supervised curricular internship. The methodology is DE. The results show that LS in pre-service education can be enhanced by elements from DE and that this combination promotes the teacher education and professional development of the participants.
Keywords: Lesson Study. Didactical Engineering. Teacher Professional Development.

Introdução

A vivência daquilo que está sendo trabalhado nos componentes curriculares de Educação Matemática nas escolas é importante para romper com o mito de que "na prática a teoria é outra" (Pimenta & Lima, 2005/2006, p. 6). A inserção do licenciando em seu futuro ambiente de trabalho para a experimentação de situações profissionais diversas é essencial e está expressa na evolução das diretrizes curriculares para os cursos de licenciatura, especialmente, com relação ao Estágio Curricular Supervisionado, programas de iniciação científica e à docência (Brasil, 2001). No entanto, é preciso saber como a etapa do estágio está sendo desenvolvida e se está havendo uma real contribuição para a formação profissional dos sujeitos envolvidos.

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado que utilizou um processo formativo japonês chamado *Jugyou Kenkyuu*, também conhecido como Lesson Study (LS) (Silva, 2020). Basicamente tal processo se refere à união entre teoria e prática, sendo a teoria os conhecimentos didático-pedagógicos que os participantes possuem e a prática é a experimentação destes a partir do planejamento de aula até à reflexão pós-aula. Ao pensar sobre a necessidade de refletir e aprofundar os conhecimentos sobre todos os fenômenos que envolvem uma sala de aula, verificou-se a importância das especificidades da Engenharia Didática (ED) para a fundamentação dessa pesquisa. Para isso, foi selecionado o campo matemático específico das Grandezas e Medidas (G&M), nomeadamente, duas grandezas geométricas: comprimento e área. Neste artigo, iremos nos debruçar em um episódio sobre perímetro.

A LS e a ED têm em comum o fato de tratarem do planejamento de aulas, porém cada uma com características distintas que serão discutidas posteriormente. O nosso objetivo é analisar contribuições de elementos dos dois processos para fomentar o desenvolvimento profissional de futuros professores e responsáveis pelo estágio curricular supervisionado, em relação ao campo das Grandezas e Medidas.

A Formação, o Desenvolvimento Profissional do Professor e o Estágio Curricular Supervisionado

Refletindo sobre a formação de professores, Nóvoa (2017) enfatiza a necessidade de repensar a formação de professores, especialmente a formação profissional do professor, ou seja, olhar para e formar o professor como profissional. Para valorizar e progredir com essa formação é preciso criar modelos de formação que envolvam toda a comunidade educacional, construindo um espaço "de diálogo que reforce a presença da universidade no espaço da profissão e a presença da profissão no espaço da formação" (Nóvoa, 2017, p. 1116).

Sabe-se que a licenciatura em Matemática é uma tricotomia composta pela formação didático-pedagógica, matemática e prática escolar, sendo as duas últimas desenvolvidas sem apoio da primeira gerando uma incoerência no sentido geral do curso (Fiorentini & Crecci, 2015) e distanciando a teoria da prática em outra vertente. É necessário dar um sentido a tudo que se aprende nesses componentes no intuito de (re)significar a teoria discutida e aprendida com o olhar na sala de aula, na escola, nos ambientes de trabalho do professor.
Quando uma formação leva o professor a interrogar a si mesmo e modificar-se, logo passa a se desenvolver profissionalmente (Imbernón, 2011). O desenvolvimento profissional do professor lida, essencialmente, com a aprendizagem, sendo esta sinal de mudança/ampliação/avanço do conhecimento, e essa aprendizagem deve ser o foco quando se analisa o desenvolvimento profissional do professor (Matos, Powell, Sztajn, Ejersbo & Hoverwill; 2009). Segundo Ferreira (2009), o desenvolvimento profissional é "um processo que se dá ao longo de toda a experiência profissional [...] - envolve a formação inicial e a continuada, bem como a história pessoal como aluno e professor" (p.149-150).

Diante do exposto, adotamos como pressuposto nessa pesquisa que teoria e prática são extremamente relevantes em um processo formativo que visa o desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Tanto a formação como o desenvolvimento profissional envolvem elementos sociais, motivacionais, pessoais, cognitivos e afetivos.

Ainda, nosso interesse se volta para o Estágio Curricular Supervisionado, no âmbito do curso de licenciatura em matemática. O estágio possui um grande valor no curso de licenciatura, como componente obrigatório de 400 horas se faz presente no intuito de aproximar o futuro professor do seu campo de trabalho.

O Conselho Nacional de Educação buscou valorizar o estágio como espaço de aprendizagem profissional para o futuro professor, tentando romper a dicotomia entre teoria e prática:

> […] estágio curricular supervisionado de ensino entendido como o tempo de aprendizagem que, através de um período de permanência, alguém se demora em algum lugar ou ofício para aprender a prática do mesmo e depois poder exercer uma profissão ou ofício. Assim o estágio curricular supervisionado supõe uma relação pedagógica entre alguém que já é um profissional reconhecido em um ambiente institucional de trabalho e um aluno estagiário. Por isso é que este momento se chama estágio curricular supervisionado (Brasil, 2001, p. 10).

O professor supervisor tem o dever de acompanhar o estagiário procurando auxiliar em seu desenvolvimento profissional. Seu papel é intervir de maneira construtiva, mostrando estratégias de ensino, a postura na sala de aula, corrigir a parte do conteúdo quando necessário, a organização do quadro, entre outros fatores (Silva, 2020).

Dauanny (2015), em sua pesquisa de doutorado sobre Estágio, conclui que ainda é perceptível "a dicotomia entre teoria e prática, com uma perspectiva burocrática do estágio, e o entendimento do curso como tendo duas partes separadas: uma denominada de teórica, e outra, de prática" (p. 269), sendo menos relevante diante da teoria. Destarte, vê-se a dimensão do Estágio Curricular Supervisionado e o quanto necessita de um olhar mais cauteloso para os sujeitos envolvidos para que não seja um processo formativo sem formação e sem desenvolvimento.

Lesson Study e Engenharia Didática

Uma abordagem de desenvolvimento profissional dos professores se espalhou em todo Japão, a pedidos do governo, pelo fato de os professores começarem a assistir as aulas uns dos outros para refletirem e discutirem entre eles o que poderia ser melhorado. Stigler e Hiebert (1999) afirmam que LS é um "novo conceito para os professores que iniciam sua carreira. Se os métodos dos cursos de graduação fossem reestruturados [...] em um planejamento e experiências de aulas, novos professores estariam preparados" (p. 158). A formação inicial dos professores japoneses se dá por volta de quatro anos e, no início de sua carreira, a carga horária é reduzida para que outros professores assistam às suas aulas e todos participem em grupos de LS (Fernandez, 2002).

Esse processo japonês envolve de três a quatro fases: o planejamento da aula, a observação e execução da aula, a reflexão pós-aula e, em alguns casos, a reaplicação dessa aula pós-reflexão (Baptista, Ponte, Velez, Belchior & Costa; 2012), podendo ser utilizado por (futuros) profissionais da educação. O foco está na aprendizagem dos alunos e, consequentemente, no desenvolvimento profissional dos professores de qualquer área de ensino. O planejamento dessa aula é baseado na resolução de problemas envolvendo um estudo com os materiais didáticos como o kyouzai kenkyuu que é um componente de instruções de ensino como um livro didático e currículo japonês sobre os conteúdos incluindo tarefas e ferramentas (Takahashi & Mcdougal, 2019).

Na segunda etapa que é a *kenkyuu jugyou* (*research lesson*), ou seja, o ensino, observação e coleta de dados, Miyakawa e Winsløw (2009a) apresentam a estrutura da aula: hatsumom: o professor introduz um problema aberto; kikan-shido: o professor observa a resolução dos alunos em cada mesa, identificando os métodos utilizados e esclarecendo questões; takuto: o professor pede que os alunos apresentem suas soluções para toda a turma; neriage: discussão da validade e pertinência das ideias propostas, principalmente com base na contribuição dos alunos; matome: o professor recorda as principais ideias da aula apresentando ou reformulando os melhores ou novas estratégias encontradas.

A fase da reflexão pós-aula é o momento de discutir sobre tudo que foi experimentado a partir do planejamento, avaliando os processos de ensino e aprendizagem do professor e alunos.

Pesquisas com LS têm apontado uma potencialidade para desenvolver de modo aprofundado o conhecimento dos participantes sobre os conteúdos que ensinam, tanto na formação inicial (Burroughs & Luebeck, 2010; Macedo, Bellemain & Winsløw, 2019) quanto na formação continuada (Baldin, 2009; Clivaz, 2015; Bezerra, 2017).

Como dito inicialmente, a Engenharia Didática é o suporte teórico da pesquisa, visto que possui algumas semelhanças com a LS. No início da década de 80, surgiu o termo ED para nomear um tipo de pesquisa que influenciou e influencia o desenvolvimento da Didática da Matemática francesa, e está na essência da Teoria das Situações Didática de Guy Brousseau e outros quadros teóricos (Artigue, 1988). A ED faz a interligação entre a teoria e a prática de ensino em Matemática, sendo "um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de uma sequência de ensino" (p. 285).

Como metodologia de pesquisa é dividida em quatro fases: análises preliminares/prévias; concepção e análise a priori; experimentação de uma sequência didática e, análise a posteriori e validação (Artigue, 1988). A primeira fase envolve o quadro teórico didático geral e os conhecimentos previamente adquiridos no campo de estudo; e os pontos mais frequentes são: análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores do campo da pesquisa dos quais depende a construção didática efetiva.

A ED se caracteriza por validar suas experimentações em sala de aula a partir da confrontação entre a análise a priori das situações didáticas e a posteriori. Perrin-Glorian e Bellemain (2016) argumentam que o processo de elaboração de uma sequência didática, baseada no esquema experimental da ED, envolve uma construção teórica cuidadosa, uma análise minuciosa de possibilidades, uma argumentação fina de escolhas didáticas que supostamente favorecem a aprendizagem.

Em seguida, temos a experimentação que é a parte prática da engenharia. É nessa fase que ocorrem as observações das aulas, das produções dos alunos dentro e fora da sala de aula. A experimentação de uma sequência didática deve confirmar ou não a pertinência das escolhas feitas, as quais se baseiam fortemente no estudo sistemático do conhecimento teórico acumulado. Na análise a posteriori é possível analisar as diferenças entre o que foi esperado e o que foi observado. A confrontação com a análise a priori permite verificar se as escolhas didáticas realizadas provocaram a interação esperada entre os alunos e o que foi proposto.

Olhando para o ensino regular, a ED possibilita ao professor de tomar decisões e, consequentemente, ao pesquisador de compreender melhor os problemas do ensino para buscar soluções e auxiliar os professores em suas aulas (Perrin-Glorian & Bellemain, 2016). Discutindo a respeito da ED e LS, Miyakawa e Winsløw (2009b) afirmam que existem afinidades como interação social, antecipação das estratégias dos alunos, ciclo experimental e pensamento independente dos alunos. Entretanto, eles afirmam também que as diferenças são mais pertinentes do que as semelhanças, tanto em relação aos objetivos, quanto aos princípios para “boas” aulas.

As atividades na LS são orientadas a desenvolver e melhorar uma aula a partir da perspectiva das pessoas que participam dela. Neste processo, os professores se desenvolvem profissionalmente. Ao contrário da LS, a Engenharia Didática (baseada na TSD) visa estabelecer conhecimento científico: a aula é realizada para confirmar as condições de aprendizado que são antecipadas na análise a priori do conhecimento alvo e experiência anterior. Em suma, a ED propõe uma abordagem sistêmica para a pesquisa sobre as condições para a aprendizagem de matemática, enquanto a LS propõe uma abordagem sistemática para desenvolver a prática de ensino de matemática (Miyakawa & Winsløw, 2009b, p. 19).

Formulamos a hipótese que a ED e a LS, com aportes e limitações, os elementos complementares dessas duas perspectivas pode trazer contribuições para a pesquisa sobre o desenvolvimento profissional de estagiários, formadores e professores de educação básica, supervisores do estágio curricular supervisionado.

Grandezas e Medidas: Comprimento e Área

Desde a década de 1990, os documentos curriculares (Brasil, 1998) têm voltado um pouco mais da sua atenção para o ensino das G&M, por sua presença nos "usos sociais, com suas utilizações nas técnicas e nas ciências; as conexões com outras disciplinas escolares; e as articulações com outros conteúdos da Matemática" (Lima & Bellemain, 2010, p. 168).

Os pesquisadores argumentam que há dificuldades persistentes na aprendizagem de conteúdos desse campo pelas lacunas no ensino e complexidade conceitual do campo. Essas podem ser superadas com atividades que envolvam os conceitos matemáticos junto aos objetos físicos e às representações gráficas no estudo da geometria e das grandezas geométricas. Com isso, tem-se três tipos de objetos: matemáticos; físicos; gráficos. Para simplificar, denomina-se qualquer um deles de objeto geométrico a que está ligado a uma grandeza e esta, por sua vez, pode ser medida (Lima & Bellemain, 2010). Um mesmo objeto pode ser associado a várias grandezas e em vários objetos podemos considerar uma mesma grandeza.

Nos anos finais do ensino fundamental, é necessário reconhecer "grandezas como comprimento [...] e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria." (Brasil, 1998, p. 73). A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) apresenta como expectativa que "os alunos reconheçam comprimento, área [...] como grandezas associadas a figuras geométricas [...] e que estabeleçam e utilizem relações entre essas grandezas" (p. 271).

Da mesma forma que "um par (número, unidade de área) é uma maneira de designar uma área, a qual é considerada como uma classe de equivalência de superfícies" (Bellemain, 2004, p. 4), o perímetro pode ser designado com um par (número, unidade de comprimento). O comprimento é uma grandeza geométrica que, geralmente, é associada a objetos geométricos retilíneos. Entretanto, esses objetos podem ser curvas abertas ou fechadas, se estas curvas forem formadas por segmentos de retas, temos linhas poligonais ou um polígono.

Lima e Bellemain (2010) abordam que uma forma de medir o comprimento de uma curva é decalcá-la com fita de papel ou barbante e depois retificá-lo. Logo, os pesquisadores denotam que o comprimento de uma curva fechada ou do contorno de uma região é chamado de perímetro. O perímetro é, geralmente, trabalhado antes da grandeza área e não em conjunto o que pode acarretar erros e dificuldades por parte dos alunos na dissociação entre perímetro e área.

Algumas atividades (Lima & Bellemain, 2010) podem auxiliar na dissociação de área e perímetro e na construção de área e comprimento como grandezas, por exemplo: utilizar uma das peças do tangram como unidade de área; utilizar instrumentos comuns para medir o comprimento ou o perímetro de uma figura como barbante, palmo, passo e, também, com unidades de medida convencionais como centímetro com uso da régua; uso de malhas quadriculadas/triangulares/hexagonais para compreensão do conceito de área, entre outras. São esses tipos de atividades que esperamos das propostas dos participantes no planejamento da sequência didática.

Processos Metodológicos

A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática. Para esse estudo, os sujeitos participantes foram: uma turma de 7.º ano de uma escola federal do estado de Pernambuco, na qual os alunos serão identificados por An; um professor (S) da escola que atuou como supervisor dos estagiários; um formador (F) docente da disciplina Estágio Curricular Supervisionado III - estágio de regência no ensino fundamental II - do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade do mesmo estado; quatro estagiários (E1; E2; E3; E4) dessa turma; a primeira autora (P) deste artigo que atuou como mediadora do estudo (facilitadora), promovendo as discussões e reflexões sobre os conhecimentos envolvidos; e, a segunda como orientadora do estudo. A escolha dos participantes foi feita por afinidade com a pesquisa e disponibilidade.

Consideramos alguns aspectos relevantes da LS e ED que foram interligados para construir o processo formativo apresentado na figura 1.

Figura 1: fusão de elementos da LS e ED

1.ª etapa: Análises preliminares, concepção e análise *a priori* – estudo e planejamento

- Planejar individualmente uma aula
- Estudar os programas curriculares nacional e estadual, entre outros documentos oficiais
- Ler e discutir artigos que abordem os conteúdos propostos
- Analisar livros didáticos em relação aos mesmo conteúdos e nível de escolaridade
- Construir a(s) atividade(s) a partir da elaboração ou escolha de situações-problemas de acordo com o tema e com o nível de conhecimento dos alunos
- Pressupor respostas às questões das atividades escolhidas
- Pressupor dificuldades encontradas na resolução dos problemas
- Planejar uma sequência didática juntos
- Escolher ou sortear algum (futuro) professor para lecionar a aula

2.ª etapa: Experimentação, observação e coleta de dados

- Observar a aula de acordo ao que foi planejado
- Observar o que os alunos estão fazendo nas atividades
- O professor (escolhido) deve estar sempre como mediador na sala, questionando os alunos
- Tomar notas do que está sendo observado

3.ª etapa: Análise *a posteriori* e validação - reflexão

- Entrevistas individuais
- Discutir o que foi realizado em sala de aula de acordo com o planejamento
- Houve imprevistos? Quais foram?
- As concepções dos alunos evoluíram?
- Os objetivos e expectativas de cada situação-problema foram alcançados?
- O tempo estipulado para cada aula foi suficiente?
- O que pode ser alterado no planejamento?

Fonte: autoria própria

Esta proposta de pesquisa se deu em três etapas. A primeira e segunda fases da ED (preliminares, concepção e análise a priori) se entrelaçaram em uma junto com a primeira da LS em um conjunto de 11 reuniões com duração de 1-3 horas. Constituiu-se no planejamento individual de um conteúdo do campo das Grandezas e Medidas do 7.º ano; quadro teórico sobre grandezas comprimento e área para o 7.º ano, estudo e pesquisa nos programas curriculares e artigos que envolvessem essas grandezas; análise de livros didáticos; e, construção da sequência didática. Houve reuniões de planejamento com todos os participantes e só com os estagiários, presenciais e online, sem a presença da pesquisadora (P).

Para conduzir essa construção com as situações-problema foi utilizado um guia sistematizado pelo prof. Maurício Figueiredo Lima (Pernambuco, 1998) baseado na TSD. Esse guia trabalha com os aspectos epistemológicos, questionando sobre a história do conteúdo, o papel deste na Matemática, em outras disciplinas e nas práticas sociais. O estudo dos programas curriculares, de nove livros didáticos, dos exercícios e problemas que estão relacionados; as concepções iniciais dos alunos e com isso a presença de S se faz ainda mais importante. Os objetivos a serem alcançados em cada situação; a construção de uma nova noção para determinado conteúdo será possível a partir das construídas anteriormente pelos alunos?; a organização da sala em cada momento. A partir de que dados será feita a avaliação, o que aconteceu de acordo com o planejamento e o que poderia ter sido diferente para uma próxima aula. Vários questionamentos que nortearam a construção da sequência.

A experimentação, observação e coleta de dados integrou a implementação do planejamento por E1 e E2 em uma das turmas e a observação por parte de S, P, E3 e E4. A quantidade de aulas foi de 10horas/aula de acordo com as particularidades do Estágio que foram divididas em cinco encontro com duas aulas consecutivas.

Na quarta etapa, análise a posteriori e validação - reflexão, pretendeu-se discutir com todos os participantes quais os pontos positivos e negativos desde a análise a priori sobre cada problema/aula, e sobre o que e como modificar, replanejando o que fosse necessário. Cada replanejamento realizado iniciou um novo ciclo do processo. A coleta de dados foi efetuada por gravação em vídeo, registros de observação, planejamentos individuais e em conjunto. Para essa reflexão foram visualizadas algumas partes dos vídeos das aulas de forma que os participantes pudessem apresentar suas notas de observação ao longo do andamento do vídeo da aula.

Devido ao espaço limitado, recortamos um episódio do segundo encontro para apresentar neste artigo sobre perímetro que conduziu os alunos à introdução da dissociação de área.

Resultados e Discussões

Alguns recortes serão apresentados para exemplificar cada etapa vivenciada pelo grupo participante que deram suporte a este episódio. Esta seção será dividida em três seções: análise preliminares, concepção e análise *a priori* (estudo e planejamento); experimentação, observação e coleta de dados; análise *a posteriori* e validação (reflexão).

Análises Preliminares, Concepção e Análise a priori

A experiência, em sala de aula, de F e o conhecimento em relação as grandezas geométricas deram indícios em sua fala sobre o que os alunos, em geral, sabem e valorizam. As discussões foram norteando as decisões que influenciaram no planejamento das aulas. Assim, dando ênfase à teoria que F e S apontam junto com suas práticas profissionais em cada momento de reflexão com os estagiários, de aprofundamento de conhecimentos e de construção dos planos. Com isso, S relevou a importância do aluno

> fazer medição sem o instrumento de medida convencional, fazer comparação, encontrar medidas sem o uso de fórmulas. [...] A necessidade de dissociar perímetro de área. Algo que a meu ver é fundamental, que é o erro da medida, que pode ser pelo instrumento, de aproximação racional.

S fez referência a vários tópicos importantes para o decorrer da primeira etapa, a necessidade de trabalhar medição sem o uso de fórmulas com unidades de medida não convencionais, a dissociação de perímetro e área, e o erro de medição. Nessa mesma linha de raciocínio, E1 respondeu que

> uma das coisas que ele (S) falou agora, a ideia de medir, eu demorei muito para entender, até quando eu estava no ensino médio, eu só vim entender mesmo quando comecei a vim para o grupo essa ideia, assim eu tinha intuição, mas, por exemplo, se eu chegar para o menino e disser "Quanto é que mede essa folha aqui? Qual o comprimento dela?". Aí ele vai dizer o que? "Eu preciso de uma régua." Eu digo, "Não." Então, eu não preciso de uma régua para medir. Eu pego isso daqui [uma caneta] e consigo medir, fazendo uma aproximação.

F complementou que essa ideia de E1 remete a dissociação do tripé: grandeza, medida e objeto:

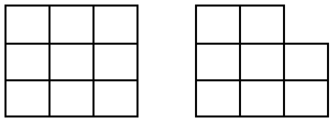
> é muito a ideia de dissociar. A questão da medida, que é um número, da grandeza, a grandeza área da própria figura. Você pedir para ele medir com essa tampinha essa mesa, aí "Quantas tampinhas vão ser preciso?", depois com essa caneta. "Será que o comprimento daqui para aqui mudou ou o que mudou foi a unidade de medida?" Então, é uma coisa que a gente vai trabalhando com eles, para eles saberem que a depender do instrumento que vai ser usado, a medida vai aumentar ou diminuir, mas o comprimento permanece o mesmo, por ser o atributo daquele objeto.

Percebe-se a importância de construir um conhecimento não apenas matemático, mas didático e pedagógico para trabalhar as grandezas comprimento e área com a utilização de objetos como instrumentos não convencionais de medida para medir outros objetos, dissociando estes da medida (número) e da grandeza determinada.

Seguida dessa fala, F mostrou que o instrumento utilizado para medição influencia totalmente no resultado e que isso pode ser utilizado em formato de atividade para trabalhar com os alunos essa dissociação. Além desta, a dissociação entre perímetro e contorno foi discutida como uma antecipação do que poderia surgir nas aulas. Percebe-se que a complexidade dos conceitos surgiu naturalmente na discussão que antecedeu o estudo dos documentos curriculares (BRASIL, 1998; BRASIL, 2018; PERNAMBUCO, 2012) e do artigo de Lima e Bellemain (2010) sobre Grandezas e Medidas.

Para o ensino de perímetro e área, entre os pontos que E1 destacou dos PCN estava: "construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência)" (Brasil, 1998, p. 89).

Figura 2: representação ilustrativa do exemplo dado por S baseado em Abrahão (2012)



Fonte: autoria própria.

> S: [...] a área disso aqui é 9, o perímetro é 3, 6, 9, 12. Se eu pegasse simplesmente apagasse e pegasse esse pedaço, para fazer isso aqui, a área diminuía uma unidade e o perímetro ainda seria o mesmo.

Esse é um exemplo bastante curioso e interessante, porque mostra dissociação de perímetro e área de uma forma clara e dinâmica. Este foi um ponto discutido e relevado pelos professores participantes que despertou a vontade dos estagiários de colocar na sequência didática algo semelhante. Antes de trabalhar com a dissociação, os estagiários questionaram sobre a definição de perímetro ao analisar um dos livros didáticos.

> S: "o perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados." A soma das medidas dos lados é a medida do perímetro. O perímetro é um atributo da figura. Não é um número. [...] perímetro é uma grandeza. Número é a medida da grandeza.
> E1: qual a definição de perímetro?
> S: eu não vou dizer não. [...] Mas todas as grandezas são atributos de...
> P: porque se for um círculo...
> S: fora essa bronca.
> [...]
> E1: então, uma definição para perímetro poderia dizer que é o contorno da figura ou não?
> S: não. [...] por exemplo, esse meu cordão, eu tenho isso aqui, se o perímetro é o contorno (faz um retângulo com o cordão), isso tem que ser diferente disso (triângulo), porque são contornos diferentes. Só que na verdade não, eles têm o mesmo perímetro. Esse perímetro é igual a esse perímetro. Ele não está associado ao contorno que é a forma.
> P: aquele livro de grandezas e medidas... Explorando o Ensino (Lima & Bellemain, 2010, p. 186) afirma que: "o comprimento de uma curva fechada é o que chamamos seu perímetro".
> S: o comprimento?
> E1: mas aí está associando a número, não?
> S: exatamente.
> P: não. A medida do comprimento é que é um número. O comprimento não é.
> S: ah, ele está dizendo o comprimento, desculpa, está certo.
> P: é. "O comprimento de uma curva fechada é o que chamamos seu perímetro."

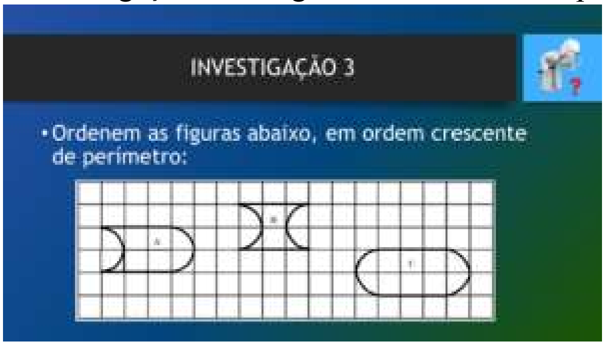
Embora pareçam conteúdos triviais para um (futuro) professor de Matemática, os participantes notaram a complexidade das grandezas à medida que estudavam documentos, artigos e analisavam os livros didáticos. O ensino voltado para fórmulas muitas vezes leva o próprio (futuro) professor a não saber a definição do que está sendo trabalhado. Isso evidencia a importância das análises preliminares e *a priori*, e do estudo para o planejamento (etapas da Engenharia Didática com a primeira da Lesson Study) para os participantes. Dessa forma a teoria e a prática se relacionaram durante todo o processo, pois a partir das análises dos livros, das leituras e discussões, foi possível pensar nas aulas a partir dos conhecimentos que foram construídos, aprofundados ou mesmo reconstruídos. A definição de perímetro é um exemplo de uma das reconstruções feita pelos estagiários quando confrontaram aquilo que tinham aprendido com o que o livro e o artigo (Lima & Bellemain, 2010) abordavam.

A leitura do trecho de Lima e Bellemain (2010) ajudou bastante ao grupo para entender a dissociação de objeto, comprimento, perímetro e contorno que gerou uma discussão interessante entre os alunos no segundo encontro. Com as discussões, o segundo encontro foi planejado e uma última atividade adaptada de um artigo (Rocha, Pessoa, Silva Filho & Pereira; 2014) foi acrescentada que será apresentada na seguinte seção.

Experimentação, observação e coleta de dados

A investigação 3 do segundo encontro (fig. 3) foi bastante discutida e serviu como início da dissociação de perímetro e área no terceiro encontro.

Figura 3: investigação 3 do segundo encontro sobre perímetro.



Fonte: slide utilizado no segundo encontro.

Embora a investigação 2 não tenha sido bem compreendida que foi uma atividade com palitos onde o perímetro se mantinha, os estagiários nem esperavam que a 3 fosse superar tão bem o que não pode ser construído na 2. Inicialmente, E1 começou falando que ia ser algo mais rápido por ser pensada e discutida com todos os alunos sem separar por grupos.

> E2: quem acha que tem uma figura que tem um perímetro maior que outra e quais?
> Aluno 1: tem umas maiores, tem umas figuras que tem o perímetro maior e outra que não.
> E2: alguém mais? Beleza. Alguém quer acrescentar alguma coisa?
> Aluno 2: é uma não certeza, porque olhando assim dá para perceber que as curvas não são retas como a diagonal, são curvas. Comparando com as curvas da figura C com as da figura B, as da figura C são um pouco maiores do que a da figura B. Então eu tenho quase certeza de que elas têm tamanhos diferentes.
> E2: perímetros diferentes.
> Aluno 2: é, perímetros diferentes.
> Aluno 3: eu acho que todas são iguais, porque está falando do perímetro e não da área. Olhando assim você pode dizer que a figura C tem maior perímetro, mas não, ela tem maior área. É diferente.

> Vários alunos: é, são todas iguais, tudo igual...
> Aluno 4: então, é porque tipo, eu pensei, pelo menos eu não fiz cálculo, eu pensei pelo menos assim...
> E2: o perímetro da C seria maior que o da B? só mais uma pessoa, está certo?
> Aluno 4: sim.
> Aluno 5: eu acho que tem sim um pouco de diferença [...] quando faz assim para entrar, tem uma diferença assim (faz gesto de curva para dentro e para fora). Aí eu acho que a C seria a menor, o A seria o segundo lugar e o B seria o maior.

Várias justificativas para dizer que os perímetros são diferentes e uma resposta só com a concordância de outros alunos afirmando que são iguais. O aluno 2 utiliza a palavra comparar como estratégia para justificar sua resposta, embora os outros alunos tenham feito o mesmo, mas não disseram. Além de usar a palavra tamanho e não perímetro, talvez se o estagiário não tivesse corrigido, ele chegasse a se corrigir mais tarde em outra fala, mas ao mesmo tempo E2 quis retomar ao que já estava no enunciado e por conta do pouco tempo que tinha para acabar a aula. O aluno 4 quando diz que não fez o cálculo já dá indícios de que se tivesse feito ele teria certeza de que seriam diferentes ou que o costume de os utilizar leva-o a crer que é mais correto. E o 5 acredita que no momento de 'dar a curva' o contorno é maior. Após isso outro aluno teve a ideia de comparar com um *band-aid* a partir da explicação de um colega, embora este tenha confundido um pouco com área, mas conseguiram resolver a investigação.

> Aluno 6: porque tipo assim, se você for ver assim essa curvatura, ela tem, mais ou menos, ela tem a mesma, o mesmo tamanho, o mesmo quadradinho que falta nesse aqui. Então se fosse inverter e colocar esse daqui para dentro é só você colocar ela para fora e terá a mesma unidade que essas aqui.
> Aluno 7: isso daí está parecendo um passo a passo de como abrir um *band-aid*.

Essa investigação foi para que os alunos percebessem que o perímetro não é a soma dos lados e não só as figuras poligonais possuem perímetro. Entretanto, no final da aula um aluno ainda questionou se contaria só as "partes retas" de uma figura ou o todo. E os estagiários deram o exemplo do comprimento do CD para discutir isso.

Análise a posteriori e validação (reflexão)

Ao final do segundo encontro, E1, E2, S e P comentaram um pouco sobre essa investigação e sobre as próximas aulas.

> E1: eu realmente estou com muito medo das próximas aulas.
> S: medo não...
> P: não, foi muito bom.
> E1: porque eles já estão falando de área. Cara, eles já têm muito conhecimento.
> [...]
> S: por exemplo, no começo era um monte que dizia que era a soma de todos os lados.
> P: é... foi.

> S: e agora no final... talvez, muitos até não tenham percebido que qualquer curva tem um perímetro.

S tenta mostrar para os estagiários que estavam aflitos com o conhecimento dos alunos que embora 'muitos alunos não tenham percebido que qualquer curva tem um perímetro', mas a ideia da soma de todos os lados foi um pouco escanteada e os alunos ficaram com essa reflexão.

Com isso, voltam para a aula de perímetro pensando no planejamento do terceiro encontro e próximos encontros.

> E2: [...] a gente estava pensando em amarrar mais essa questão de perímetro, deixar bem claro essa questão de perímetro porque a gente não chegou a dizer para eles realmente. Teve até uma aluna que disse que era a medida do contorno, já teve outra que falou que era o próprio contorno.
> S: e que ainda falou do polígono.
> E2: é, do polígono. Deixar essa coisa de polígono também.
> S: acho que isso precisa ser trabalhado. [...] São dois pontos chaves que eu acho: dizer que perímetro é a medida do contorno.
> P: comprimento.
> S: comprimento do contorno e a outra é que o contorno não precisa ser poligonal nem circular. Porque aí vocês trouxeram um círculo e, aparentemente, já vai servir para todos os outros. Aí pode ser que alguém pegue: se não for polígono tem que ser círculo.
> E1: verdade, tem que separar.
> S: são esses dois pontos que eu acho que são importantes.
> E2: a gente estava pensando nisso. De fazer na terceira aula essa...

Nesse trecho, ainda é possível perceber que até S, às vezes, se perde na definição de perímetro e o quanto eles se preocupam com isso. Ao mesmo tempo que analisam as respostas dos alunos e pensam em como levá-los a construir o conhecimento adequado à definição, seja com atividades trabalhando com barbante para medir o perímetro de uma folha (de árvore) ou desenhando curvas fechadas no intuito de desvincular a soma de todos os lados que foi uma resposta unânime da turma filmada.

S relembra o que pensou antes da última investigação do segundo encontro e faz uma observação:

> S: aí eles vão para a próxima, vamos para a próxima. Eu olhei assim e faltavam 15, vocês vão botar outra atividade aí? [...] colocou no quadro aí o debate começou a ficar massa e eles preocupados com a hora, só mais uma fala, só mais uma fala, só que as falas estavam muito interessantes. Se deixassem os 15 minutos inteiros só os alunos se colocando só do jeito que os alunos estavam fazendo, a aula tinha terminado de uma maneira triunfante, eu acho.

A preocupação de S quando os estagiários não conseguiram *feedback* da investigação 2 por falta de um enunciado adequado foi inevitável quando eles mudaram para 3. Esta tinha sido organizada pelos estagiários para ser impressa, mas eles pensaram no tempo da aula e resolveram discutir com a turma toda. Entretanto, ao longo das respostas dos alunos percebeu que o tempo era curto para tanta discussão interessante sobre perímetro que estava surgindo e que os estagiários tentavam controlar para não deixar a investigação sem resposta ao final da aula. E1 mostra a admiração sobre os comentários dos alunos com relação a área e perímetro sem ter sido pedido:

> E1: já surgiu naturalmente a área diminuindo o perímetro dá o mesmo, a área aumentando o perímetro dá o mesmo. [...] Só que a gente vai retomar essa ideia aí. Área provavelmente vai ser tranquilo porque a gente, provavelmente, já vai começar a misturar os dois.

A reflexão dos alunos em relação a dissociação de área e perímetro deixou E1 e E2 apreensivos por saberem além do que eles pensavam e ao mesmo tempo tranquilos com relação ao ensino de área. S ainda reforçou que no seu estágio ele utilizou questões parecidas com esses comentários e que levam os alunos a pensarem bastante sobre essa dissociação. Lendo suas anotações, S disse

> S: ele [aluno] disse assim: pode medir a área de algo que está dentro do perímetro? [...] porque perímetro não é objeto geométrico não, perímetro é a medida, é o comprimento, entende? Tipo, eu posso ver algo que está dentro do contorno, faz sentido. Agora dentro do perímetro?
> E2: o perímetro limita uma região interna e externa.
> S: contorno. Contorno tem a região interna e externa, mas o perímetro não. O perímetro é o comprimento daquela borda. Então como é que eu vou dizer que está dentro do comprimento?
> E1: é porque o que eu estava pensando na hora era isso de perímetro na minha cabeça quando eu falei será? E eu até concordei na hora era justamente isso que o perímetro delimita uma região interna e externa. Então se ele está delimitando isso.
> S: mas não é o perímetro que faz isso.
> E2: é por isso que eu to guardando a informação que aluno 7 e aluno 8 deram.
> S: perfeito. É isso, perfeito. É isso que tem que ser amarrado. Perímetro não é o contorno, perímetro é o comprimento do contorno.

Essas questões que S expôs contribuiu para que os estagiários pensassem e compreendessem mais sobre a dissociação de perímetro e contorno. Ao mesmo tempo que eles estavam lembrando das respostas dos alunos e pensando em como fazê-los chegar a essas conclusões a partir das discussões.

Embora tivesse sido estudado e discutido sobre as diferenças existentes entre perímetro e contorno, a prática levou os estagiários a retomarem o que havia sido visto na parte teórica. Ou seja, a confrontação da experimentação (execução do planejamento) com a análise *a priori,* a análise *a posteriori* e reflexão se fazendo presente para contribuir com (re)planejamento das próximas aulas. Assim, também é notório que há um desenvolvimento profissional dos estagiários ao refletirem sobre cada momento das aulas, sobre os conhecimentos envolvidos. A discussão prosseguiu com E1 o que esperava como resposta dos alunos e com S apresentando sua expectativa para com o estagiário:

> E1: porque o valor que eu estava esperando... se eles colocassem como resposta seria 6 unidades de comprimento, se eles utilizassem 6 tracinhos e 1 circunferência. Eu ia aceitar isso como perímetro.
> S: imagina só, para a gente concluir que tinha mesmo perímetro eu jurava que tu ias fazer um argumento que eu acho que todo mundo esperava. [...] Porque o de cima e o de baixo são iguais em todos e perceber que o comprimento disso aqui é igual ao comprimento disso aqui. E todas que aparecer assim (semicircunferência) ou assim vão ter o mesmo comprimento.
> E1: eu achei genial a resposta de uma menina lá que eu não tinha pensando nisso também. [...] pega aquele negócio e puxa e bota para fora e fica ali a figura C. Aí eu fiz: eita, é mesmo. Aí pega o outro e bota para dentro, tem a figura B, tem o mesmo perímetro, assim, são iguais. Eu não tinha pensando nisso não.

E1 explicou de um jeito que os alunos não entenderam, inclusive S também não, por isso S mostrou o que esperava dos estagiários, especificamente de E1 que estava no controle da discussão. O raciocínio de E1 estava correto para a linguagem dos alunos, mas a explicação não foi suficiente para que eles entendessem, então S sugeriu que quando fosse explicar novamente definisse uma semicircunferência. E4 concorda que devem começar a aula com essa explicação e elabora alguns questionamentos sobre a diferença entre perímetro e contorno.

> E4: a gente pode perguntar para eles se o perímetro se mantém. Aí eles: se mantém. E o contorno, se mantém? [...] Pode ter alguém com argumento: não, contorno é diferente. Um é diferente do outro.
> S: [...] essa questão que tu trazes é a mesma questão que os teóricos trazem das grandezas e medidas. Que se eu posso fazer essa diferenciação de que os contornos são diferentes e os perímetros são iguais, eu não posso dizer que perímetro é o contorno. Da mesma maneira que eu não posso dizer que área é um número, porque se eu mudo a unidade de medida, eu mudo o número e a área não é alterada.

S tentou utilizar as mesmas ideias de perímetro para refletir sobre área, pois a aula seria de área também. Além de enfatizar essa dissociação e a maneira como E1 estava pensando em trabalhá-la com os alunos a partir de alguns questionamentos ao longo das investigações. As discussões geradas com os problemas propostos em cada aula foram relevantes para que os estagiários analisassem o que ia ser ensinado em seguida e o foi estudado e aprendido com a primeira etapa do processo. O entrelace da teoria com a prática aconteceu desde o início da Engenharia Didática com a *Lesson Study*, pelo fato de que F e S abordaram suas experiências profissionais e seus conhecimentos matemático, didático e pedagógico para que os estagiários pudessem utilizar isto como teoria, construindo com os estudos uma prática bem-sucedida nesses aspectos.

Considerações Finais

Diante do estudo realizado, alguns pontos foram ressaltados. A questão da disponibilidade e interesse foi uma dificuldade presente desde o início da pesquisa. Primeiramente para encontrar os participantes e, segundo, para conseguir reuni-los várias vezes. Logo, em alguns momentos nem todos puderam estar presentes, o que era esperado. Outra dificuldade foi a gestão do tempo durante as aulas, o fato de o planejamento escrito ter se resumido aos slides das aulas com as investigações e espaço para resultados pode ter influenciado. Embora todos os tópicos tenham sido discutidos como objetivos, metodologia, tempo e avaliação isso levantou questionamentos na reflexão, o tempo de explicação ou execução de algumas atividades ou a forma de explicá-las poderiam ter sido melhor administrados.

Outro fator relevante para o início do segundo estudo foi o nervosismo dos futuros professores por ser a primeira regência dentro do Estágio e de uma pesquisa de doutorado, um deles expressou que isso pediu maior empenho e dedicação de cada um, e por estarem sendo observados.

Os estagiários demonstraram interesse em aprender as definições, pois tinham aprendido de maneira errônea algumas e, ao mesmo tempo, preocupação por não verem os alunos definirem da maneira como eles queriam. O professor supervisor e o formador apontaram que o processo de aprendizagem vai além de saber uma definição e que era mais importante.

A discussão sobre a avaliação foi pertinente, pois os estagiários não tiveram a certeza de que todos os alunos aprenderam ao longo das 10h/aulas. Isso os deixou um pouco insatisfeitos no final do Estágio. Concordaram que alguns objetivos não ficaram tão claros para todos nas discussões de cada atividade, esse foi um ponto que influenciou na maneira de avaliar. P também destacou que a falta do plano de aula escrito conduziu para isto. Esse modo de trabalho colaborativo entre formador, supervisor e estagiários fez uma diferença grande na aprendizagem dos estagiários, porque muitos questionamentos levantados por estes foram respondidos pelos professores.

Os principais elementos da ED para um estudo com elementos da LS são as análises preliminares, análise *a priori*, *a posteriori* e validação. Se olharmos apenas para LS, podemos encontrar implicitamente a dimensão epistemológica quando está sendo utilizado o *Kyouzai Kenkyuu* – livro didático com instruções curriculares e metodológicas sobre todos os conteúdos da Educação Básica. Entretanto, as dimensões didática e cognitiva são trabalhadas a partir das experiências dos professores, mas nesse estudo essas dimensões foram vistas a partir de artigos e documentos estudados também, buscando aprofundar os conhecimentos dos participantes.

As reuniões serviram para iniciar o processo de validação dos conhecimentos que os estagiários foram adquirindo e aprofundando com as discussões e estudos. Assim como a parte pedagógica que também foi desenvolvida desde o início do estudo. Percebe-se que as fases de planejamento e reflexão contribuíram para o desenvolvimento profissional dos participantes, especialmente, dos estagiários que era o objetivo geral da pesquisa.

Referências Bibliográficas

Artigue, M. Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1988, 9(3), 281-308.

Baldin, Y. Y. *O Significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil*. In: Simpósio Brasil – Japão, São Paulo/SP. Anais Simpósio Brasil – Japão. São Paulo/SP: Associação Brasil-Japão de Pesquisadores - SBPN, 2009. p. 1-5.

Baptista, M., Ponte, J. P., Velez, I., Belchior, M. & Costa, E. *O lesson study como estratégia de formação de professores a partir da prática profissional*. Anais: Encontro de Investigação em Educação Matemática. 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/7070 Acesso em: 15 de setembro de 2015.

Bellemain, P. M. B. *Um candidato a obstáculo à aprendizagem dos conceitos de comprimento e área como grandezas*. In: 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: IME – UERJ, 2004.

Bezerra, R. C. *Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study*. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia Presidente Prudente: [s.n.], 2017, 210 f.

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, MEC/SEF, 1998.

Brasil. *Parecer nº 28 de 02 de Outubro de 2001*. 2001. Disponível em http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/028.pdf. Acesso em 02 de agosto de 2017.

Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: jul. 2018.

Burroughs, E. A. & Luebeck, J. L. *Pre-service Teachers in Mathematics Lesson Study*. The Mathematics Enthusiast: 2010, vol. 7: No. 2, Article 15.

Clivaz, S. *French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a profitable dialogue?* International Journal for Lesson and Learning Studies, 2015, 4(3), 245-260.

Dauanny, E. B. *O Estágio no context dos processos formativos dos professors de Matemática para a Educação Básica: entre o proposto e o vivido*. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015, 375p.

Fernandez, C. *Learning from Japanese Approaches to Professional Development: The Case of Lesson Study*. Journal of Teacher Education, 53; 393. (2002). Disponível em: http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/53/5/393.

Ferreira, A. C.O Trabalho Colaborativo como Ferramenta e Contexto para o Desenvolvimento Profissional: compartilhando experiências. In: Nacarato, A. M. & Paiva, M. A. V. *A Formação do Professor que Ensina Matemática: perspectivas e pesquisas*. 2 ed. São Paulo: Editora Gutenberg, 2009.

Fiorentini, D. & Crecci, V. M. Aprendizagem Docente na Formação Inicial mediante análise de práticas de ensinar aprender Matemática. In: Lopes, C. E., Traldi, A. & Ferreira, A. C. (Org.). *A Formação do Professor que ensina Matemática. Aprendizagem Docente e Políticas Públicas*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015.

Imbernón, F. *Un Nuevo Desarrollo Profesional Del Profesorado para una nueva Educación.* Revista de Ciências Humanas, 2011, v. 12 n. 19, 75-86.

Lima, P. F. & Bellemain, P. M. B. *Coleção Explorando o Ensino: Grandezas e Medidas*. Volume 17. Brasília, 2010, 167-200.

Macedo, A. D. R., Bellemain, P. M. B. & Winsløw, C. Lesson Study with Didactical Engineering for Student Teachers in Brazil. In: *International Journal for Lesson and Learning Studies,* 2019, vol. 9 No. 2, pp. 127-138.

Matos, J. F., Powell, A., Sztajn, P., Ejersbo, L. & Hoverwill, J. Mathematics Teachers' Professional Development: Processes of Learning in and from Practice. In: Even, E. & Ball, D. L. (Org.). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. International Commission on Mathematical Instruction. Springer, 2009, v. 11.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. *Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: étude collective d'une leçon*. Éducation et didactique, 2009a, vol 3 - n°1 | pp. 77-90.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. *Didactical designs for students' proportional reasoning: an 'open approach' lesson and a 'fundamental situation'*, Educational Studies in Mathematics, 2009b, vol. 72 No. 2, pp. 199-218.

Nóvoa, A. *Firmar a Posição como Professor, afirmar a Profissão Docente*. (2017). Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/cp/v47n166/1980-5314-cp-47-166-1106.pdf.

Perrin-Glorian, M. J.; Bellemain, P. M. B. *L'Ingenierie Didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres*. (2016). Disponível em: http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/oficinas/CONFER%C3%8ANCIA%203%20-%20FRANC%C3%8AS.pdf.

Pernambuco. Diretoria de Educação Escolar. *Política de ensino de escolaridade*. Recife: SEE, 1998.

Pimenta, S. G., & Lima, M. S. L. *Estágio e docência: diferentes concepções*. Revista Poíesis (2005/2006)- vol 3, n. 3 e 4, 5-24

Rocha, C. A., Pessoa, G., Silva Filho, J. M., & Pereira, J. A. *Uma discussão sobre o Ensino de Área e Perímetro no Ensino Fundamental*. (2014). Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo2/rocha_et_al_area%20e%20perimetro_minicurso.pdf

Silva, A. D. R. M. Contribuições da Jugyou Kenkyuu e da engenharia didática para a formação e o desenvolvimento profissional de professores de matemática no âmbito do estágio curricular supervisionado. Recife, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/40028

Stigler, J. W., & Hiebert, J. *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press, 1999.

Takahashi, A., & Mcdougal, T. Using School-Wide Collaborative Lesson Research to Implement Standards and Improve Student Learning: Models and Preliminary Results. In: Huang, R., Takahashi, A. & Ponte, J. P. (Eds.) *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics*. Suíça: Springer, 2019, p. 263-284.

Autores

Aluska Dias Ramos de Macedo Silva

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Estadual de Paraíba (UEPB). Máster en Educación en el área de Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Lisboa (UL). Doctor en Educación Matemática y Tecnológica por la Universidad Federal de Pernambuco (UFPE). Actualmente es profesora de la Universidad Federal de Campina Grande. Tiene experiencia en Educación Matemática, con énfasis en Didáctica de las Matemáticas y Formación de Profesores.

Correo electrónico: aluskadrmacedo@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0398-1097

Paula Moreira Baltar Bellemain

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Federal de Pernambuco (UFPE). Doctorado en Didáctica de las Disciplinas Científicas - Especialidad Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Grenoble I.Tiene experiencias en las áreas de enseñanza, aprendizaje y formación docente sobre los contenidos del campo de Cantidades y Medidas, y la integración de tecnologías en la enseñanza, en aprendizaje y práctica docente en Matemáticas.

Correo electrónico: pmbaltar@gmail.com

https://orcid.org/0000-0002-2864-8883

Como citar o artigo:

MACEDO, A. D.; BELLEMAIN, P. M. B. Lesson Study e Engenharia Didática na Formação de (futuros) Professores de Matemática. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 297 - 317, enero, 2022. DOI: 10.37618

Talleres de pensamiento crítico y creativo sobre la formación del profesorado en matemáticas: una experiencia con alumnos de Pibid

Cleyton Hércules Gontijo
cleyton@unb.br
https://orcid.org/0000-0001-6730-8243
Universidade de Brasília (UnB)
Brasília, Brasil.

Mateus Gianni Fonseca
mateus.fonseca@ifb.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3373-2721
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília (IFB)
Brasília, Brasil.

Recibido: 28/junio/2021 **Aceptado:** 28/septiembre/2021

Resumen

Debido al escenario actual de creciente desarrollo tecnológico en el que estamos insertos, la necesidad de desarrollar nuestro pensamiento crítico y creativo, especialmente en matemáticas, se ha vuelto cada vez más presente, especialmente dada la aplicación de esta área del conocimiento. Por tanto, es necesario hablar no solo de mejorar nuestras metodologías de enseñanza de las matemáticas, sino también de insertar teorías y prácticas vinculadas a la estimulación de este tipo de pensamiento desde la formación inicial del profesorado. En este artículo reportamos una investigación realizada con un grupo de becarios del Programa Institucional de Becas de Iniciación Docente (Pibid), subproyecto Matemáticas, de una Universidad pública del Distrito Federal, cuya organización docente se basa en fomentar pensamiento crítico y creativo en matemáticas para estudiantes de secundaria. Se aplicaron cuestionarios con preguntas discursivas a los becarios, cuyas respuestas fueron tratadas desde la perspectiva del análisis de contenido. De los resultados se pudo inferir que los becarios llegaron a conocer no solo la temática y querían que se incluyera en sus programas de formación, sino que también recomendaron la aplicación del modelo de taller utilizado.
Palabras clave: Formación del Profesorado de Matemáticas. Pensamiento Crítico en Matemáticas. Pensamiento Creativo en Matemáticas. Talleres de Pensamiento Crítico y Creativo.

Oficinas de pensamento crítico e criativo na formação docente em matemática: uma experiência com estudantes do Pibid

Resumo

No atual cenário de crescente desenvolvimento tecnológico no qual estamos inseridos, tem se tornado cada vez mais presente a necessidade de desenvolvermos nosso pensamento crítico e criativo, em especial em matemática, dada tamanha aplicação desta área de saber. Sendo assim, há que se falar não apenas em aprimorarmos nossas metodologias de ensino de matemática, como também, inserirmos teorias e práticas ligadas ao estímulo deste tipo de pensamento desde a formação docente inicial. Neste artigo, relatamos uma investigação desenvolvida junto a um grupo de bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação

à Docência (Pibid), subprojeto Matemática, de uma Universidade pública do Distrito Federal, cuja organização didática está embasada no estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática de estudantes do ensino médio. Foram aplicados questionários com questões discursivas para os bolsistas, cujas respostas foram tratadas sob a perspectiva da análise de conteúdo. Por resultados, foi possível inferir a partir das respostas dos bolsistas que esses passaram não apenas a conhecer a temática e desejarem que seja incluída em seus programas de formação como também a recomendar a aplicação do modelo de oficinas utilizado.
Palavras-chave: Formação de Professores de Matemática. Pensamento Crítico em Matemática. Pensamento Criativo em Matemática. Oficinas de Pensamento Crítico e Criativo.

Critical and creative thinking workshops in teacher education in mathematics: an experience with Pibid students

Abstract

Due to the current scenario of increasing technological development in which we are inserted, the need to develop our critical and creative thinking, especially in mathematics, has become increasingly present, especially given the application of this area of knowledge. Therefore, it is necessary to talk not only about improving our mathematics teaching methodologies, but also, inserting theories and practices linked to the stimulation of this type of thinking since the initial teacher training. In this article, we report an investigation carried out with a group of grantees from the Institutional Scholarship Program for Initiation to Teaching (Pibid), Mathematics subproject, of a public university in the Federal District, whose didactic organization is based on stimulating critical thinking and creative in math for high school students. Questionnaires with discursive questions were applied to the scholarship holders, whose answers were treated from the perspective of content analysis. From the results, it was possible to infer that the scholarship holders came to know not only the theme and want it to be included in their training programs, but also recommended the application of the used workshop model.
Keywords: Mathematics Teacher Training. Critical Thinking in Mathematics. Creative Thinking in Mathematics. Critical and Creative Thinking Workshops.

Introdução

O papel da matemática como ferramenta para entender o mundo ganhou mais visibilidade com a aceleração do desenvolvimento tecnológico, pois, este tem um impacto quase imediato no cotidiano (Viana, 2020). Como exemplos, destacamos o desenvolvimento dos computadores, smartphones, tablets, GPS entre outros e, a partir desses, uma diversidade de aplicativos com finalidades diversas para facilitar a mobilidade urbana (acompanhar horários de ônibus, chamar um táxi ou outro serviço de transporte particular), pedir uma refeição, acessar plataformas de músicas e assistir a vídeos, controle de dietas e programas de atividades físicas etc.

Todavia, ainda temos muitos desafios quando tratamos do ensino de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática – STEM no século XXI, entre eles, Moreira (2018, p. 227-228), destaca:

> ajudar os alunos a explorar a relevância pessoal da ciência e da tecnologia e integrar o conhecimento científico a soluções de problemas, práticas e complexas, que muitas vezes não podem ser definidas em termos puramente científico tecnológicos; desenvolver nos estudantes a compreensão da base social e institucional da credibilidade científico-tecnológica; estimular e habilitar os estudantes a aprender ciências desenvolvendo seus próprios interesses, curiosidades e práticas científico-tecnológicas para toda a vida.

Considerando particularmente a área de matemática, percebemos uma situação paradoxalmente complexa, pois, conforme D'Ambrósio (2011) chama a atenção, temos no caso brasileiro uma pesquisa matemática no patamar mais elevado mundialmente, enquanto o desempenho escolar dos nossos estudantes se encontra no nível dos países menos desenvolvidos. Sobre a excelência da pesquisa, Vianna (2018, s/n), destaca que "o fato de a matemática brasileira estar agora ao lado dos países de maior expressão e relevância na matemática global representa o reconhecimento da qualidade da pesquisa matemática feita no país".

Por outro lado, o desempenho dos estudantes brasileiros da educação básica em matemática é considerado "fraco", conforme indica o desempenho dos nossos estudantes no teste da 7ª edição do Programme for International Student Assessment (Pisa), aplicado em 2018, realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP (Brasil, 2020, p. 107), "a média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no Pisa 2018 foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE (492)". Essa média, situa os estudantes brasileiros no ranking do PISA entre as posições 69-72, considerando os 78 países participantes da avaliação.

Para além do desempenho em matemática, o PISA 2018 (OCDE, 2021) revela que apenas 46% dos estudantes brasileiros declararam que a escola os preparou para reconhecer se as informações veiculadas especialmente por meio da internet são tendenciosas ou subjetivas, o que pode comprometer o exercício do pensamento crítico em contextos diversos e, especialmente, as crenças sobre a importância e validade do conhecimento científico, uma vez que circulam pelas redes sociais muitas informações falsas com conteúdo supostamente científicos.

Dados como os divulgados pela OCDE têm motivado a produção de pesquisas acadêmicas acerca do desenvolvimento de métodos e materiais de ensino que possam favorecer a aprendizagem da matemática – uma área importante para o exercício da cidadania e, portanto, necessária a todos, que deve fazer parte da vida das pessoas desde a mais tenra idade escolar até a vida adulta.

Além disso, as mudanças que ocorrem no mundo e as inovações que surgem a cada momento, mostram que os sistemas de ensino devem incorporar as novidades que surgem. Não se trata, portanto, de apenas aprimorar um ensino que é estático, mas de aprimorar um ensino que se encontra em movimento – é como abastecer um avião em pleno voo.

A inclusão de novas perspectivas na forma de abordar a matemática na educação de crianças e jovens requer, entre as principais medidas, alterações na formação inicial e continuada dos professores. Do ponto de vista normativo, a Resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019, que definiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e instituiu a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), apresenta dez competências gerais que os professores devem desenvolver, entre elas, destaca-se "pesquisar, investigar, refletir, realizar a análise crítica, usar a criatividade e buscar soluções tecnológicas para selecionar, organizar e planejar práticas pedagógicas desafiadoras, coerentes e significativas".

Para o desenvolvimento dessa competência, o processo formativo deve ser organizado por meio da "articulação entre a teoria e a prática para a formação docente, fundada nos conhecimentos científicos e didáticos, contemplando a indissociabilidade entre o ensino, a pesquisa e a extensão, visando à garantia do desenvolvimento dos estudantes" (Inciso V, art. 6º, Resolução CNE/CP Nº 2/2019), tendo como fundamentos pedagógicos, entre outros, o "reconhecimento da escola de Educação Básica como lugar privilegiado da formação inicial do professor, da sua prática e da sua pesquisa" (Inciso VII, Art. 8º, Resolução CNE/CP Nº 2/2019).

Uma iniciativa para a articulação entre teoria e prática no processo formativo que contempla a aproximação com o exercício profissional em escolas de educação básica é o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid). Considerando que o Pibid tem por finalidade inserir estudantes de cursos de licenciatura no cotidiano escolar de modo que possam ter contato com experiências metodológicas inovadoras, bem como contribuir com a articulação entre teoria e prática, relatamos neste artigo o trabalho que tem sido desenvolvido junto a um grupo de bolsistas do subprojeto Matemática de uma universidade pública do Distrito Federal, cuja organização didática está embasada no estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática de estudantes do ensino médio.

Ao relatar o trabalho desenvolvido no Pibid, esperamos responder aos seguintes questionamentos: quais as percepções deste grupo de bolsistas acerca do pensamento crítico e criativo em matemática? E como o trabalho embasado no estímulo ao pensamento crítico e criativo pode contribuir em seus itinerários formativos enquanto professores em formação?

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) foi criado em 2010 e tem por finalidade "fomentar a iniciação a docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes de nível superior e para a melhoria de qualidade da educação básica brasileira" (Brasil, 2010).

Dentre os objetivos do Pibid, destacamos:

> III - elevar a qualidade da formação inicial de professores nos cursos de licenciatura, promovendo a integração entre educação superior e educação básica;
> IV - inserir os licenciandos no cotidiano de escolas da rede pública de educação, proporcionando-lhes oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino-aprendizagem;
> VI - contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas nos cursos de licenciatura (Brasil, 2010).

Nesse programa, existem três papeis principais ligados à execução do projeto: coordenador de área; professor supervisor; e bolsista. Existe ainda o coordenador institucional que é o responsável por atividades burocráticas de interlocução entre a Instituição de Ensino Superior (IES) e a Capes. O coordenador de área é o responsável pelo planejamento, organização e execução das atividades, bem como do acompanhamento e orientação dos bolsistas e diálogo com a escola de campo; o professor supervisor tem o papel de acompanhar in loco as atividades que são desenvolvidas pelos bolsistas. E aos bolsistas cabe aprender fazendo.

O pensamento crítico e criativo em matemática e o modelo de oficinas

As demandas que se fazem presentes no século 21 clamam por uma educação que esteja atenta ao desenvolvimento de novas formas de pensar do estudante, de modo que essas compreendam a criatividade, a criticidade, a resolução de problemas e a tomada de decisões (Griffin, 2015, p. 7).

Após proceder análises acerca das orientações curriculares de diferentes países, Adamson e Darling-Hammond (2015, p. 308) inferiram que as nações têm avançado no que tange a infundir habilidades que o presente século tem defendido junto aos sistemas educacionais. Entre os países analisados, a maioria incorporou habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas, tomada de decisão, comunicação, colaboração e cidadania em estruturas curriculares ou documentos relacionados.

Duas iniciativas recentes da OCDE colocaram o tema pensamento crítico e criativo na pauta de discussão dos sistemas educacionais em diversos países. A primeira refere-se à inclusão da avaliação de habilidades de pensamento criativo na edição do Pisa de 2021/2022 (OCDE, 2019). A segunda foi a publicação da obra Fostering Students' Creativity and Critical Thinking: What it Means in School (Vincent-Lancrin et. al, 2019). Ambas as ações poderão dar visibilidade à temática, estimulando os países a incluírem de forma explicita essas habilidades em suas diretrizes curriculares. No que diz respeito às habilidades de pensamento criativo no teste do Pisa, A OCDE (OCDE, 2019) considerou, em seu documento norteador, a avaliação em quatro domínios: (a) expressão escrita, (b) expressão visual, (c) resolução de problemas sociais e (d) resolução de problemas científicos. Nesse último, as áreas de ciências, tecnologias, engenharia e matemática serão a base para a elaboração de situações-problema do teste.

A despeito das iniciativas indicadas, quando tratamos do campo da matemática, a ausência de uma definição consensual leva alguns a compreenderem este tipo de pensamento de diferentes formas. No Brasil, diretrizes curriculares oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), apesar de incluir o pensamento crítico e criativo entre as competências gerais que os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica, não apresenta uma caracterização desse tipo de pensamento e tão pouco oferece subsídios para que os professores possam estimulá-lo em sala de aula (Fonseca & Gontijo, 2020a). Todavia, em alguns países, as diretrizes curriculares tratam desse termo de forma pormenorizada, apresentando conceitos e métodos de operacionalização no contexto da matemática escolar (Fonseca, Gontijo & Zanetti, 2018; Gontijo, 2015, Gontijo, Silva & Carvalho, 2012, Fonseca & Gontijo, 2020a).

Sobre a importância da promoção e do reconhecimento do “pensamento crítico, criativo e colaborativo como um objetivo educacional e como um método de ensino e aprendizagem”, o Critical Thinking Consortium (TC²), pontua que quando os estudantes pensam criticamente em matemática “eles tomam decisões e fazem julgamentos sobre suas ações e ideias. Em outras palavras, eles consideram critérios e bases para uma decisão ponderada e não apenas tentam adivinhar ou aplicar uma regra sem avaliar sua relevancia” (s.d.).

Para o Critical Thinking Consortium, estimular o pensamento crítico e criativo em matemática é um meio para desenvolver a capacidade de matematização dos estudantes, levando-os a uma compreensão da matemática que vai além da mera aplicação de fórmulas, mostrando-a como uma área do saber aberta a interpretações e proposições. Nesse sentido, a matemática deixa de ser apenas um conjunto de tópicos a ser apreendido e/ou memorizado para ser compreendida como um processo de pensamento (Fridaus, Kailani, Bakar & Bakry, 2015). Objetiva-se com essa perspectiva, levar um estudante que ainda está na educação básica, a atuar como um matemático, obviamente dentro das suas possibilidades e considerando o conhecimento que possui até o dado momento (Aiken, 1973, Gontijo, 2007, Leikin & Pantazi, 2013, Fonseca, 2015).

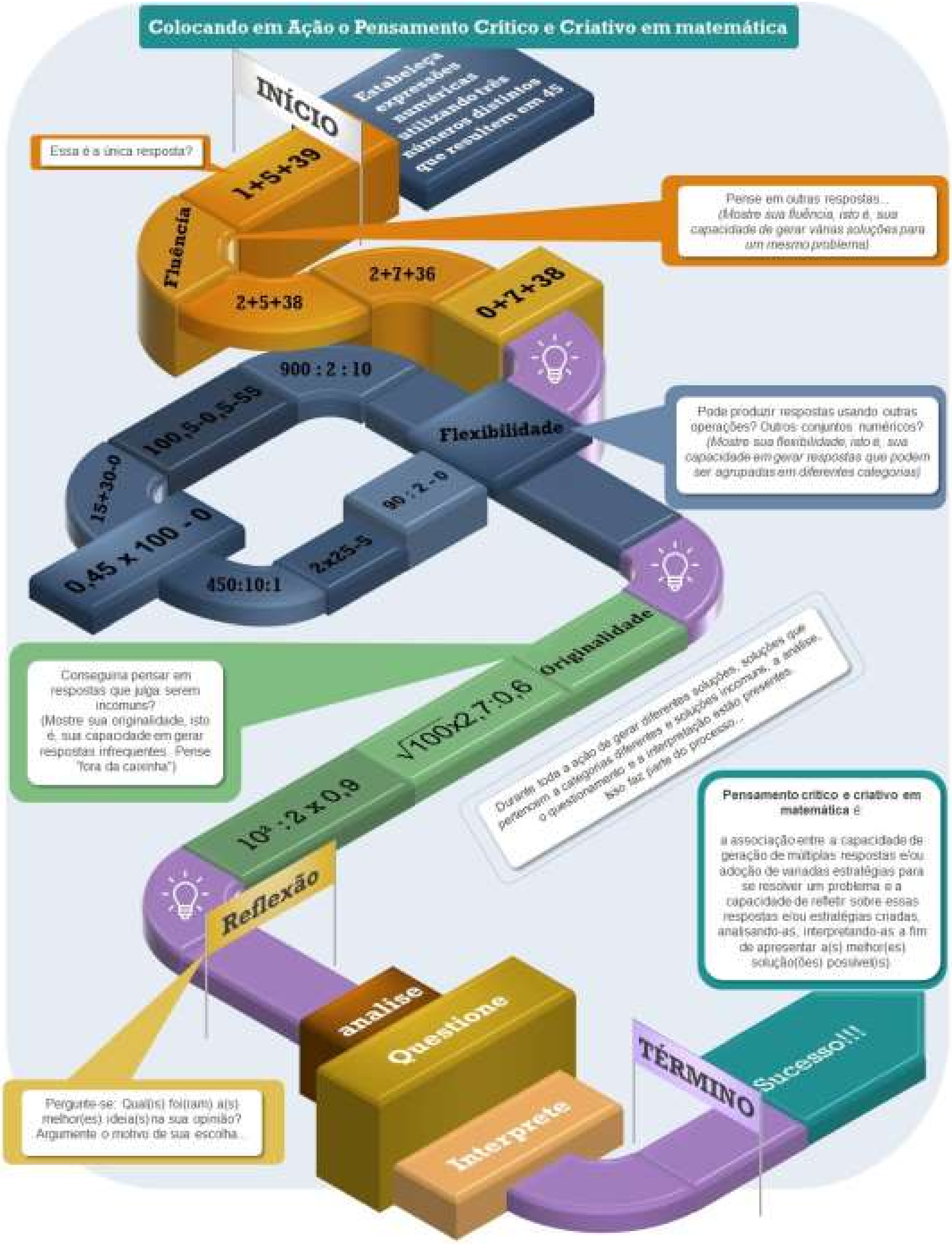
Nesta pesquisa, adotamos a definição proposta por Fonseca e Gontijo (2020a, p. 971) que apresentam o pensamento crítico e criativo como

> a ação coordenada de geração de múltiplas e diferentes ideias para solucionar problemas (fluência e flexibilidade de pensamento) com o processo de tomadas de decisão no curso da elaboração dessas ideias, envolvendo análises dos dados e avaliação de evidências de que os caminhos propostos são plausíveis e apropriados para se chegar à solução, argumentando em favor da melhor ideia para alcançar o objetivo do problema (originalidade ou adequação ao contexto). Em outras palavras, o uso do pensamento crítico e criativo se materializa por meio da adoção de múltiplas estratégias para se encontrar resposta(s) para um mesmo problema associada à capacidade de refletir sobre as estratégias criadas, analisando-as, questionando-as e interpretando-as a fim de apresentar a melhor solução possível.

Fonseca e Gontijo (2020b), apresentaram um infográfico (Figura 1) para mostrar a operacionalização desse conceito, explicitando como as características de pensamento criativo, isto é, fluência, flexibilidade e originalidade, operam na resolução de problemas, bem como favorecem as tomadas de decisão no curso do processo. Salienta-se que fluência de pensamento é a capacidade de gerar múltiplas respostas; flexibilidade é a capacidade de gerar respostas que contenham diferentes atributos, ou seja, que possam ser reunidas em diferentes grupos dadas suas características e, por originalidade, entende-se aquelas respostas consideradas infrequentes quando comparadas com as apresentadas por membros do grupo no qual o indivíduo está inserido.

Pontua-se que o pensamento crítico e o pensamento criativo em matemática se desenvolvem conjuntamente (Lipman, 2003), haja vista que se alternam durante a resolução de problemas, de modo que em alguns momentos recorremos à criatividade para gerar respostas e em outros à criticidade para avaliar e tomar decisões acerca das respostas geradas. Fonseca e Gontijo (2020b), ao construírem o infográfico para ilustrar o funcionamento do pensamento crítico e criativo em matemática, destacaram as ações de analisar, questionar e interpretar como última etapa, todavia, assim o fizeram apenas como recurso gráfico, mas consideram que não há linearidade entre as etapas e que essas ocorrem simultaneamente ao longo de todo o processo.

Figura 1: Infográfico – Colocando em ação o pensamento crítico e criativo em matemática

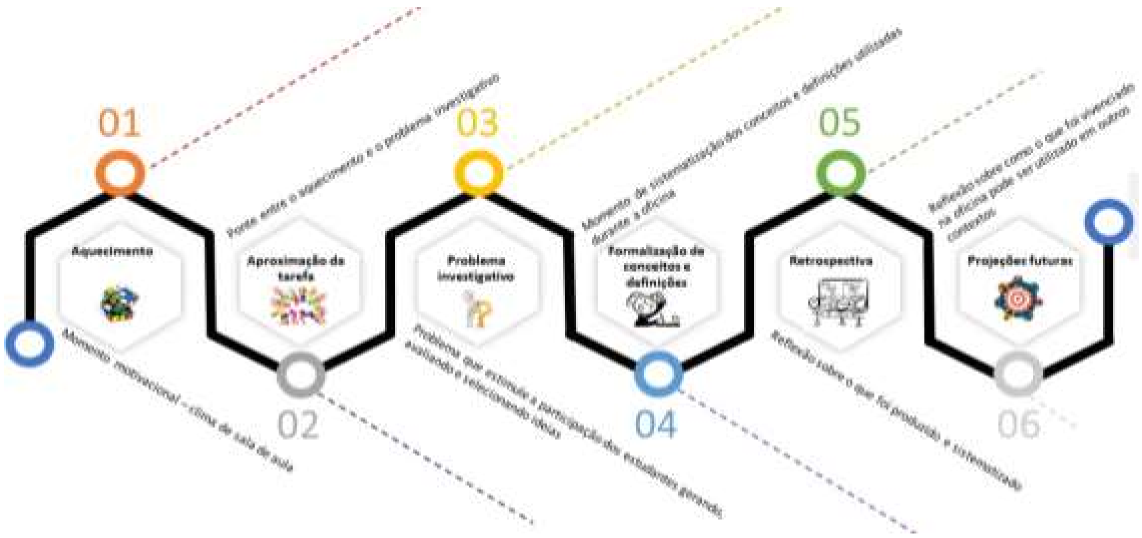


Fonte: Fonseca & Gontijo (2020b)[1]

[1] A figura pode ser melhor visualizada no endereço: <https://sites.google.com/etfbsb.edu.br/bibliotecapc2m/in%C3%ADcio/pensamento-cr%C3%ADtico-e-criativo-em-matem%C3%A1tica>.

Uma forma de organizar o trabalho pedagógico de forma a propiciar o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo em matemática foi proposta por Gontijo (2020), que sistematizou um modelo de oficinas com essa finalidade. A figura 2 o apresenta em suas diferentes fases:

Figura 2: Oficinas de estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática.



Fonte: Fonseca & Gontijo (2020c)[2]

Nesse modelo de oficina existem 6 fases. A primeira, de caráter motivacional, busca estimular a participação, envolvimento e interação entre os estudantes, criando um clima positivo para a aprendizagem em sala de aula, podendo envolver ou não atividades matemáticas. Na segunda fase são propostas atividades de cunho matemático, de menor complexidade, com o intuito de engajar os estudantes na tarefa e desenvolver uma percepção positiva acerca de suas habilidades matemáticas, com vistas ao trabalho da fase 3, que se caracteriza pela resolução de um problema de caráter investigativo. Nessa fase, o problema suscita a construção de diferentes respostas, possibilitando que os estudantes reflitam, levantem hipóteses, testem.

Na quarta fase, por sua vez, os conceitos utilizados são formalizados, partindo das produções dos estudantes. É uma fase importante, pois, lida com o tratamento formal dos objetos matemáticos explorados ao longo da atividade investigativa. Na quinta fase são promovidas reflexões acerca do trabalho realizado até o dado momento, solicitando aos alunos que partilhem as suas experiencias e sentimentos acerca de tudo o que foi vivenciado

---

[2] A figura pode ser melhor visualizada no endereço: <https://sites.google.com/etfbsb.edu.br/bibliotecapc2m/in%C3%ADcio/pensamento-cr%C3%ADtico-e-criativo-em-matem%C3%A1tica>.

na oficina. A sexta fase tem por finalidade prolongar as experiencias vivenciadas, sugerindo outras atividades para aplicação dos conteúdos explorados na oficina.

Metodologia

Trata-se de pesquisa qualitativa, desenvolvida junto a 10 estudantes de um curso de licenciatura em matemática, de uma universidade pública, membros do Pibid. Esses estudantes desenvolvem as atividades do Programa em um dos campi de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em turmas de Ensino Médio Integrado. A média das idades dos bolsistas é de 21,3 (dp = 0,8), sendo 4 do gênero feminino e 6 do gênero masculino.

A pesquisa foi desenvolvida por meio da aplicação de um questionário, no formato de formulário eletrônico, composto por 24 itens de caráter discursivo envolvendo aspectos relacionados à escolha da carreira acadêmica; percepções sobre o trabalho docente em matemática e sobre o tema pensamento crítico e criativo em matemática. O questionário também investigou sobre as contribuições do Pibid em seus processos formativos na licenciatura em matemática.

Adotou-se a perspectiva metodológica de análise de conteúdo (Bardin, 2011) para o tratamento das respostas obtidas. Assim, após leitura flutuante selecionando recorrências e demais elementos de destaque, foram construídos esquema que representassem as respostas obtidas.

Análises e resultados

As respostas obtidas junto aos estudantes, após submetidas à análise de conteúdo, possibilitaram a construção de 04 categorias de análise. A primeira compreende elementos relacionados à escolha acadêmica dos membros do Pibid; a segunda aborda elementos do campo de trabalho de docente em matemática; a terceira relaciona-se às percepções acerca do pensamento crítico e criativo em matemática e; a quarta categoria trata das percepções sobre as contribuições que do Pibid para a formação docente dos estudantes da licenciatura em matemática. A seguir, serão apresentados os resultados dessas categorias, bem como as análises das informações produzidas em cada uma delas.

1ª Categoria: Escolha acadêmica dos participantes

Em relação aos questionamentos sobre a escolha dos participantes em cursarem matemática, constatamos o consenso acerca do gosto pela área. Além disso, 4 relataram terem pensado na docência por gostar de ajudar os colegas a aprenderem a matéria e, dentre esses, um afirmou ter escolhido fazer licenciatura num primeiro momento e, em seguida, escolheu a área de matemática. Consideramos que o acesso ao curso superior de preferência, por parte dos estudantes, pode contribuir para maior sucesso profissional.

Considerando que a graduação em matemática pode ser realizada escolhendo uma das duas habilitações existentes para o curso: bacharelado e licenciatura, questionamos a razão pela qual os estudantes escolheram esta última. Predominou, como resposta, a preferência pelo campo da docência. Duas pessoas, apenas, não relataram terem escolhido a docência de imediato. Um justificou a escolha dizendo ter "facilidade na matéria e o gosto pela geometria", enquanto o outro afirmou que decidiu ser professor apenas após o ingresso no curso de matemática (que não era a primeira opção). No entanto, esse alega que ao começar a lecionar, gostou da experiência. Este estudante ainda havia dito na pergunta anterior que embora a matemática sempre tenha sido uma matéria que ele gostou, não tinha muito interesse pela área em si.

Em relação a experiência dos participantes ao longo de suas vidas escolares, perguntamos ainda se possuíam alguma recordação de professor criativo. Apenas dois dos respondentes afirmaram não terem lembrança de um professor criativo durante suas formações – embora um deles tenha destacado em outro questionamento que “os alunos acabam tomando como a principal referência o seu professor”, fornecendo assim pistas de que está empenhado em fazer diferente.

2ª Categoria: Sobre o trabalho docente em matemática

Em relação as características específicas que um professor de matemática precisa ter para exercer a atividade docente, as respostas apontaram a necessidade de possuir conhecimento no assunto, capacidade de relacionar-se com as pessoas e capacidade de realizar a transposição didática. A partir das respostas, procedemos com a composição de uma nuvem de palavras, ilustrada na figura 3:

Figura 3: Nuvem de palavras

Fonte: Elaboração dos autores

Na nuvem de palavras, os termos paciência, empatia e sensibilidade foram os destaques no que diz respeito ao trato pessoal. Didática e flexibilidade foram os termos centrais no que diz respeito ao saber profissional, saber especializado do professor para com o exercício da atividade de docente.

Nessa categoria ainda encontramos elementos relacionados às percepções sobre o que é necessário para se tornar um bom professor de matemática. Foram citadas diferentes percepções que convergem para o conhecimento do professor (que precisar dominar o assunto); a flexibilidade para com a comunicação e mediação pedagógica (haja vista a necessidade de explicações de diferentes formas); e a capacidade de cativar o estudante de modo a atrai-los.

Dois estudantes citam a necessidade de desenvolver a criatividade. Um desses menciona que o professor deve “apresentar o conteúdo de forma didática e criativa para seus alunos". O outro pontua que o professor deve "saber explorar o lado criativo dos alunos e o lado crítico também".

Todas as respostas trazem indícios de que a participação no Pibid tem contagiado estes estudantes, de modo que a palavra criatividade passou a fazer parte do seu vocabulário como uma preocupação no sentido de motivar os estudantes e de ampliar a flexibilidade de pensamento, entre outros aspectos. Isso também foi ratificado a partir das respostas de outro questionamento: o que caracteriza uma excelente aula de matemática? Para essa pergunta, predominaram respostas indicando que a aula deve propiciar um ambiente favorável ao questionamento. Entendem que o estudante deve se sentir à vontade para questionar e expor suas dúvidas enquanto constrói o conhecimento. Ainda associaram o lúdico e a apresentação de aplicações como elementos de uma boa aula. Houve consenso de que uma excelente aula contribui para o aprendizado de algo novo.

Ressalta-se que o processo formativo dos estudantes do Pibid para atuar na escola compreendeu estudos e vivências sobre pensamento crítico e criativo em matemática. Essa formação, certamente, influenciou algumas respostas, pois, citaram os passos das oficinas que estão sendo trabalhadas com os estudantes do ensino médio como formas de organizar as atividades em sala de aula. Outros, embora não os citem, mencionam que é importante que as aulas estimulem a pensar de forma crítica e criativa em matemática.

Por fim, foram indagados acerca dos motivos pelos quais acreditavam que muitos alunos possuem aversão à matemática. Isso nos permitiu identificar 4 tipos de motivos: traumas e/ou cultura (3 respostas); baixo autoconceito (1 resposta); metodologias inadequadas utilizadas nas aulas de matemática (4 respostas); e ausência de pré-requisitos (2 respostas).

3ª Categoria: Sobre o tema pensamento crítico e criativo em matemática

Os primeiros questionamentos dessa categoria focaram sobre a necessidade de um professor ser criativo para que ele consiga contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo em matemática em sala de aula. Houve consenso de que o professor deve ser criativo para isso.

Duas pessoas, no entanto, destacaram que tornar-se criativo é um processo, de modo que ao ingressar na licenciatura um estudante que se mostra pouco criativo, com o exercício de pensar criativamente, torna-se um professor criativo, como está ocorrendo com eles. Um dos estudantes revelou que o ingresso no Pibid e o uso de metodologias para estimular a criatividade o fez ser mais criativo. Outro aspecto ressaltado foi a influência de professores que se constituíram referência em função de sua ação criativa e motivadora de trabalhar, contagiando os estudantes.

Dessa forma a criatividade não seria um pré-requisito para o ingresso no curso, mas deve ser tratada como uma habilidade importante para ser aprimorada ao longo da trajetória formativa. As respostas apresentaram justificativas de que na medida que o professor se prepara para estimular tais habilidades junto aos estudantes, desenvolve a própria criatividade. Partindo deste mesmo entendimento, foi consenso entre os respondentes que para estimular o pensamento crítico e criativo em matemática há a necessidade de um trabalho que dê voz ao estudante - que o estimule a participar e não apenas a ser espectador.

Outro questionamento apresentado aos estudantes do Pibid foi: que fatores limitam ou inibem um trabalho de estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática na sala de aula? Os alunos relataram que aulas meramente expositivas centradas na apresentação de conteúdos tendem a não estimular a criatividade em matemática. Além disso, alguns mencionaram que não analisar de forma propositiva as respostas dos estudantes nas tarefas das aulas ou nas questões de avaliação acaba por inibir a sua criatividade e, que alguns professores punem os estudantes quando essas respostas não são compatíveis com a expectativa deles, inibindo ainda mais o processo criativo (Bezerra, Gontijo & Fonseca, 2021). A escola por si só, em função das suas regras e estrutura, pode ser inibidora da criatividade, segundo um dos participantes.

A seguir, a fala de dois participantes da pesquisa:

> *Incrivelmente eu acho que algumas escolas, simplesmente por serem uma escola, limitam esse trabalho. A sociedade já está muito acostumada ao ensino de o professor falar e os alunos copiam, que nem todos acreditam que um ensino*

> *construtivo seja realmente "eficaz". Então acredito que escolas tradicionais não entendem bem esse trabalho, e até mesmo dentro da escola outros docentes podem também não compreender e ainda tem os estudantes que não são acostumados com essa forma de aprender e podem acabar resistindo.*
>
> *Não acolher os estudantes e menosprezar suas respostas e vivências. Bem como julgar como inúteis as ideias que eles dão para solucionar um problema. Dizer "não" nesse processo é prejudicial. A falta de preparo do ambiente, iniciar o trabalho sem um "quebra-gelo" também pode inibir a participação dos alunos, o que prejudica todo o resto do trabalho.*

É predominante a presença de falas que mencionam que o professor precisa incentivar o grupo, indagando-os. Para estimular o pensamento crítico e criativo, faz-se necessário a intervenção docente, apresentando questionamentos apropriados para que os estudantes possam refletir acerca de suas escolhas e tomadas de decisões. Nesse sentido, Gontijo e Fonseca (2020) apresentam um conjunto de questões que podem favorecer o pensamento crítico e criativo durante a resolução de problemas de matemática:

> (a) Como você descobriu a solução?; (b) Por que você acredita que a solução está correta?; (c) Essa solução funciona para todos os casos?; (d) Esse é o único caminho para alcançar a solução?; (e) Você poderia encontrar outras respostas?; (f) O que você observa em suas respostas?; (g) Elas apresentam um mesmo padrão?; (h) Você poderia propor uma resposta completamente diferente das anteriormente apresentadas?; (i) Conseguiria pensar em uma resposta incomum?; (j) Dentre as respostas que você criou, qual você considera a melhor e por quê? etc (p. 737).

Questionamentos dessa natureza são possibilitam ao estudante analisar as suas produções e construir novas possibilidades de respostas, de forma crítica e criativa.

Outro aspecto a ser destacado nessa categoria, refere-se à percepção das contribuições do uso de problemas abertos no desenvolvimento do pensamento crítico e criativo em matemática. Surgiram respostas convergentes afirmando essas contribuições, sem perder de vistas que não se trata de apenas de trocar de um tipo de problema por outro, tratando-os de formas antagônicas (problemas abertos X problemas fechados), mas sim como modelos complementares. Embora os problemas abertos sejam mais utilizados para o estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática, os estudantes reconhecem o valor dos problemas fechados, o que está de acordo com a literatura da área (Bokhove & Jones, 2018; Gontijo & Fonseca, 2020).

4ª Categoria: Contribuições do Pibid para a formação docente dos estudantes da licenciatura em matemática.

Tratar de elementos que contribuem para uma melhor formação docente durante o curso de licenciatura não é simples, pois, a diversidade de atividades formativas (disciplinas, grupos de pesquisa, eventos, projetos de extensão etc.) vivenciadas ao longo do curso favorecem o desenvolvimento profissional dos estudantes. Nesse sentido, para verificar as contribuições que o Pibid trouxe para os estudantes, buscamos inicialmente conhecer as suas experiências em atividades docentes anteriores ao ingresso no Programa e, identificamos que 4 estudantes já atuaram como monitores; 3 já realizaram estágio supervisionado e; 2 participaram de atividades de extensão que envolviam em alguns momentos a apresentação de conteúdos escolares. Apenas um relatou não ter experiência alguma na área.

O quadro 1, apresenta um conjunto de verbalizações dos estudantes indicando como compreendiam o pensamento crítico e criativo em matemática antes de estudar o tema na Universidade e/ou ingressar no Pibid e como compreendem atualmente.

Quadro 1: Comparativo de respostas dos bolsistas

ANTES	DEPOIS
Eu tinha ideias sobre como queria ensinar a matemática, que não seria da forma padrão, mas não sabia ainda como fazer isso, o Pibid me mostrou como realizar o que eu idealizava.	*O Pibid me mostrou diversas formas de ensinar conteúdos importantes de forma didática, divertida e interessante.*
Era algo que eu não tinha muito conhecimento e nem desenvolvimento, de fato eu tinha muito bloqueio no quesito criativo e um pensamento crítico pouco usado.	*Algo de muita importância e valor, tanto no quesito aprendizagem quanto no ensino. A capacidade criativa abre muitas portas e possibilidades tanto para se ensinar quanto aprender, o pensamento crítico é mais importante ainda na matemática, ainda mais no ensino superior em que a necessidade de justificativas é muito forte.*
Tinha um pensamento raso sobre o assunto.	*O meu conhecimento sobre o assunto está em evolução a todo momento, com a experiência, com os colegas e professores.*
Não sabia que existia.	*Nossa acho incrível e como é outro mundo por trás do "planejamento" de uma aula para estimular o pensamento crítico e criativo.*
Eu sempre achei que a melhor forma de ensinar é aquela que desenvolve o pensamento crítico e criativo. Eu não conhecia talvez com essas palavras, mas aprender sobre me fez entender que era algo do qual já tinha pouca noção por estar em sala de aula.	*Considero algo fundamental na educação matemática. E agora ainda sabendo como colocar em prática. Com certeza, não conhecia tanto sobre o tema quanto aprendi no Pibid.*
A criatividade não fazia parte da minha vida.	*"Criatividade gera criatividade": foi uma das frases que ouvi no Pibid e isso de fato tem acontecido. Cada vez mais tenho vivido isso e apostado nesse caminho para a docência. Tal tema é fundamental e hoje isso é mais claro para mim.*
Não tinha tanta dimensão sobre sua importância e sobre suas possibilidades para com o ensino.	*Algo que com certeza planejo incluir na forma em que eu exerço minha profissão e que espero sempre exercitar também em meus próprios estudos.*
Antes eu não sabia o termo técnico, mas sempre admirei pessoas que conseguiam resolver questões de formas extraordinárias. Contudo, antes eu não tive muito contato com esse conceito.	*Essencial! Percebe-se que o aluno passa a progredir mais, pois ele mesmo vai atrás de pesquisar. Tem-se essa "sede pelo conhecimento" e ser capaz de aplicar esse conhecimento de diversas formas mostra o quanto o aluno tem domínio.*
Pensava muito pouco ou praticamente nada sobre o assunto, já tinha 'ouvido' sobre pensamento crítico, mas de forma bem superficial (acho que foi estudando para o Enem que conheci esse tema), e pensamento criativo não tinha ouvido ou parado para pensar sobre.	*Conheço bem mais o tema agora, mas acho que ainda tenho que aprender muito ainda, mas sei que o pensamento crítico e criativo é algo que quero sempre estimular nos meus alunos.*

Considerava a criatividade como métodos alternativos para o ensino da matemática.	*Continuo com o mesmo pensamento de que a criatividade está relacionada a métodos alternativos para o ensino da matemática, mas agora tenho mais certeza sobre isso.*

Fonte: Elaboração dos autores

As novas perspectivas apresentadas pelos estudantes acerca do pensamento crítico e criativo em matemática devem ser vistas como transformações positivas e necessárias, pois, conforme apontam Cachia e Ferrari (2010), existe uma grande distância entre o modo como os professores percebem a criatividade e a forma como dizem estimulá-la na prática escolar, de modo que as suas práticas revelam menos sobre criatividade do que os seus discursos. Segundo as autoras, isto implica que há muito espaço para melhorias na forma como a criatividade é fomentada nas escolas. Um boa forma para promover as mudanças é trabalhar com atividades que estimulem o pensamento crítico e criativo desde a formação inicial para a docência.

Os bolsistas indicam que o pensamento crítico e criativo possui utilidade por ajudar no aprendizado e na capacidade de resolução de problemas em diferentes áreas. E destacam que pensamento crítico e criativo, especificamente em matemática, pode contribuir para a aprendizagem dessa área na medida que "vende" uma imagem de uma matemática mais próxima da realidade, uma matemática dinâmica e que permite que os estudantes percebam seu potencial em matematizar, compreendendo que existem métodos alternativos para a solução de problemas.

Avaliando especificamente o roteiro de oficinas de pensamento crítico e criativo em matemática, todos relataram aprovação em suas falas, tecendo elogios:

> *Muito bom, completo, bem explicado, com todas as informações necessárias.*
>
> *Excelente, creio que o roteiro transforma a oficina em algo bem diversificado, cada parte tem sua importância e está ligada a outra, são partes de uma construção só que conseguem unir desde um incentivo a participação e momentos mais lúdicos distantes dos conteúdos até o momento mais rigoroso que transforma aquele conhecimento em algo sólido.*
>
> *Completo e lógico, apesar da dificuldade de planejar atividades para algumas partes do roteiro.*
>
> *Um pouco complicado no começo, mas foi dando certo.*
>
> *Eu achei maravilhoso, acredito que nunca tinha aprendido algo parecido. Já havia trabalhado em escola antes, mas sempre foi de uma forma bem autônoma. A orientação sobre esse modelo de ensino me fez aprender muito mais.*
>
> *Achei completo. Se os docentes seguirem tal roteiro, com certeza seus trabalhos serão mais criativos e críticos e formarão estudantes com tais habilidades. Eu pretendo levar isso comigo, mesmo após o Pibid.*

> *Achei algo bastante original, diferente de algo que já havia visto em matérias de educação e, principalmente, eficiente devido ao feedback das oficinas.*
>
> *Achei muito interessante. Pois traz uma forma de seguir com a oficina de tal forma que os alunos já comecem interessados e estejam trabalhando no assunto como sendo algo que faz parte de seu cotidiano. Assim, só lá no meio da oficina eles veem a formalização do conteúdo que eles estudaram. Isso faz com que o aluno não se desinteresse pela oficina e permaneça sempre atento.*
>
> *Gostei muito desse modelo, ainda mais porque ele funciona. Pelo menos as poucas vezes que eu a apliquei, a oficina foi sempre bem-sucedida e aceita pelos alunos.*
>
> *Excelente.*

Um questionamento mais direto foi apresentado aos bolsistas acerca do impacto da experiência atual que estão vivenciando no Pibid para com o processo formativo do futuro professor de matemática. Todas as respostas sinalizam aspectos positivos:

> *O Pibid foi e está sendo extremamente importante, me mostrou formas de ensinar a matemática mais leve, mais didática. As oficinas com certeza serão levadas para os meus alunos. Acredito que isso ajudará no processo de ensino e aprendizagem.*
>
> *Um impacto muito positivo e relevante na formação. Sinto que o PIBID me tornou muito mais capaz em alguns quesitos, como por exemplo elaboração de atividades mais atrativas aos alunos.*
>
> *Pensamento crítico e criativo, experiência com os outros colegas na produção de atividade e feedbacks dos colegas e professores sobre todo o trabalho realizado.*
>
> *Nossa, achei muito legal ter as experiências mesmo que no ensino remoto, em sala de aula com as oficinas.*
>
> *De fato, o Pibid tem um grande impacto na minha formação como professora. É a primeira vez que sinto que realmente aprendi com qualidade como devo ensinar em sala de aula, como se constrói um verdadeiro conhecimento. Eu não me considerava criativa quando entrei no Pibid, mas aprendi tanta coisa, fui estimulada a desenvolver tanta pesquisa e realizar tantos trabalhos que nunca nem havia parado para pensar antes. Hoje me considero criativa, e acredito que aprendi o meu papel no desenvolvimento dos estudantes.*
>
> *O impacto é gigantesco, tenho crescido exponencialmente através do Pibid. Minha mente está aberta para possibilidades que antes eu não via. Sabia que a criatividade era importante, mas com o Pibid tenho aprendido a ser criativa, a aplicar essas habilidades na prática e a passar as mesmas adiante na docência.*
>
> *Tenho certeza de que essa experiência foi de grande valor para o âmbito profissional. Além de poder ter contato com os alunos, a experiência de trabalhar com outros futuros professores para o desenvolvimento das oficinas foi algo único. Espero poder aplicar os conhecimentos adquiridos em sala de aula de forma a motivar os alunos a pensarem fora da caixa.*
>
> *O Pibid me ensinou muito em como conduzir uma aula, em como planejar uma aula. Levar em consideração a participação dos alunos e ter empatia por eles. Mostrou o pensamento crítico e criativo em matemática e como ele é importante para a formação do aluno.*
>
> *O Pibid teve e está tendo um grande impacto em minha formação como professor, pois me estimulou a conhecer novas maneiras de ensino, a ter um nova maneira de*

> *estimular os alunos, creio que o Pibid até mesmo me animou novamente a ser um professor.*
>
> *Descobri outras ferramentas para a elaboração de aulas.*

E ao serem indagados sobre a importância de ter uma disciplina no currículo da licenciatura cuja ementa trate do pensamento crítico e criativo em matemática, todos responderam que consideram isso importante – o que ratifica a aprovação do tema, dada a experiência positiva que demonstraram estar vivenciando durante o Pibid.

O consenso não se mantém quando o questionamento versa a respeito do currículo da licenciatura favorecer ou não o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo em matemática para o exercício da docência. Dos 10 estudantes, 3 afirmaram categoricamente que o currículo favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo e 3 afirmaram categoricamente que não. Um dos estudantes que disse que o curso não favorece, registrou que “a maioria dos professores não deve nem saber o que é isso”. Os outros 4 estudantes afirmaram que em algum momento, ou em algumas disciplinas, há o favorecimento do pensamento crítico e criativo em matemática, mas isso não acontece em todas e que depende do professor que está ministrando a disciplina. A atuação do professor, conforme destaca Soh (2017), desempenha um papel fundamental na promoção da criatividade dos alunos.

Acerca do papel do professor na promoção da criatividade dos estudantes, Cropley (1997) destaca algumas atitudes que colaboram para isso, como:

> (a) incentivar os estudantes a aprender de forma independente; (b) ter um estilo de ensino cooperativo e socialmente integrador; (c) motivar seus estudantes a dominar o conhecimento factual para que eles tenham uma base sólida para o pensamento divergente; (d) não julgar as ideias dos estudantes até que elas tenham sido cuidadosamente trabalhadas e claramente formuladas; (e) incentivar o pensamento flexível; (f) promover a autoavaliação pelos estudantes; (g) oferecer oportunidades para os estudantes trabalharem com uma ampla variedade de materiais e sob diferentes condições e; (h) auxiliar os estudantes a aprender a lidar com a frustração e fracasso para que eles tenham a coragem para experimentar o novo e o incomum (Gontijo & Fonseca, 2020).

Considerações finais

Buscamos, ao longo do texto, relatar o trabalho desenvolvido com um grupo de licenciandos de uma universidade pública do Distrito Federal, vinculados ao subprojeto Matemática do Pibid, cuja organização didática está embasada em fundamentos teórico-práticos sobre pensamento crítico e criativo em matemática. Investigar as concepções e práticas de professores e de futuros professores de matemática em relação ao pensamento crítico e criativo é fundamental para estabelecer programas formativos que possam subsidiar o trabalho pedagógico tanto nos cursos de formação quanto nas ações desenvolvidas nas escolas de educação básica.

Ao olharmos para as informações produzidas em nossa pesquisa e, ao mesmo tempo, para realizadas em outros países, reafirmamos a importância das investigações sobre pensamento crítico e criativo em matemática, especialmente por se tratar de um campo emergente na área da educação matemática e com potencial para contribuir com novas práticas pedagógicas que podem favorecer tanto o pensamento crítico e criativo como a aprendizagem e a motivação em matemática (Fonseca, 2019; Gontijo, 2007, 2020).

Os nossos argumentos são reforçados por pesquisas como a conduzida por Leikin, Subotnik, Pitta-Pantazi, Singer e Pelczer (2013), que buscou compreender como professores de etapas escolares equivalentes ao ensino médio brasileiro, em seis países (Chipre, Índia, Israel, Letônia, México e Romênia), concebiam: (1) Quem é um estudante criativo em matemática; (2) Quem é professor de matemática criativo; (3) De que forma a criatividade em matemática está relacionada à cultura e, (4) Quem é uma pessoa criativa. Os pesquisadores concluem o estudo dizendo que a análise das diferenças nas características relacionadas à criatividade em matemática nos diferentes países mostra claramente que as diferenças nos sistemas educacionais se refletem nas concepções dos professores. Com base nas conclusões do estudo, argumentam que mais atenção deve ser dada à criatividade na matemática escolar ao nível de (1) política educacional, (2) materiais de instrução e (3) formação de professores.

Em relação a pesquisas desenvolvidas com estudantes universitários de cursos para formação de professores, Bolden, Harries e Newton (2010) relatam um investigação com o objetivo de explorar e documentar as concepções de professores primários sobre criatividade no ensino de matemática no Reino Unido. A investigação foi desenvolvida durante um curso de formação e um questionário foi aplicado no início das atividades para identicar as concepções dos professores e, posteriormente foram realizadas entrevistas semiestruturadas. A análise das respostas indicou que as concepções dos professores em formação eram estreitas, predominantemente associadas ao uso de recursos e tecnologia e vinculadas à ideia de 'ensinar criativamente' em vez de 'ensinar para a criatividade'. As concepções tornaram-se menos restritas à medida que os professores em formação se preparavam para ingressar nas escolas como recém-qualificados, mas ainda tinham dificuldade em identificar maneiras de estimular e avaliar a criatividade em sala de aula. Essa dificuldade sugere que as concepções de criatividade precisam ser abordadas e desenvolvidas durante a formação inicial para que os professores atendam às expectativas das diretrizes curriculares do Reino Unido.

Outra pesquisa realizada no âmbito da formação inicial foi desenvolvida por Panaoura e Panaoura (2014). O objetivo deste estudo foi investigar as concepções dos professores em formação sobre a criatividade em matemática e, principalmente, sobre a transposição dessas concepções para o planejamento de aulas que contemplassem a criatividade matemática por meio de atividades práticas. A amostra do estudo foi um grupo de professores que tinham um interesse especial pelo ensino de matemática. Os resultados da análise qualitativa dos dados indicaram que suas concepções iniciais sobre a criatividade foram afetadas por suas experiências anteriores e o valor da criatividade na matemática foi subestimado. O curso permitiu-lhes propor atividades de ensino caracterizadas pela fluência e flexibilidade; no entanto, preferiram usar atividades matemáticas de rotina quando foram solicitados a desenvolver planos de aula devido à ausência de crenças de autoeficácia para propor atividades originais e relacionar suas ações com a autorreflexão. Os autores recomendam, a partir da pesquisa, que os cusos de formação de professores contemplem a exploração e a investigação de ideias matemáticas com o objetivo de estimular o pensamento criativo de forma a favorecer a familiarização dos professores com novas ideias pedagógicas e formas de aplicá-las na prática.

A pesquisa de Yazgan-Sağ e Emre-Akdoğan (2016) teve como objetivo explorar as diferentes visões sobre criatividade em matemática entre futuros professores e em um de seus professores no que diz respeito às características e práticas de professores criativos e às características de alunos criativos em matemática. Os autores coletaram dados por meio de entrevistas com quatro futuros professores de matemática e um professor de matemática. Os resultados do estudo revelaram que suas perspectivas sobre a criatividade variaram muito e foram influenciadas principalmente pelas características de suas diversas origens socioculturais e práticas de ensino. As opiniões dos futuros professores de matemática com relação à criatividade estavam relacionadas às atividades em sala de aula preparadas pelos professores e às abordagens dos alunos para a resolução de problemas. O professor não considerou a natureza de ser criativo uma necessidade para um futuro professor de matemática e, consequentemente, as preferências do professor em relação aos materiais de sala de aula afetaram as visões dos futuros professores sobre a criatividade.

Esses relatos de pesquisas colaboram com a argumentação desenvolvida ao longo do texto, reafirmando a necessidade de incluir, já na formação inicial, elementos sobre o pensamento crítico e criativo em matemática. Esperamos, com as reflexões propostas, ampliar os debates sobre a temática e, particularmente, inspirar práticas pedagógicas que contemplem essas habilidades de pensamento, colaborando com a formação de professores mais críticos e criativos e, por sua vez, com estudantes também mais críticos e criativos em matemática.

Referências

ADAMSON, F. & DARLING-HAMMOND, L. Policy Pathways for Twenty-First Century Skills. In: GRIFFIN, Patrick; CARE, Esther (Edts.). **Assessment and Teaching of 21st Century Skills**: Methods and Approach. P. 293-310. Dordrecht: Springer, 2015.

AIKEN, L. R. Ability and creativity in mathematics. **Review of Education Research**, n. 43, v. 4, p. 405-432, 1973.

BARDIN, L. Análise de conteúdo. São Paulo: Edições 70, 2011.

BEZERRA, W. W. V., GONTIJO, C. H. & FONSECA, M. G. Promovendo a criatividade em matemática em sala de aula por meio de feedbacks. **Acta Scientiae**, n. 23, v.1, p. 1-17, 2021.

BOKHOVE, C. & JONES, K. Stimulating mathematical creativity through constraints in problem solving. In: AMADO, Nélia; CARREIRA, Susana; JONES, Keith (Eds.). **Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. Research in Mathematics Education**. P. 301-319. Springer, 2018.

BOLDEN, D. S., HARRIES, T. V. & NEWTON, D. P. Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 73, p. 143-157, 2010.

BRASIL. **Decreto nº 7.216, de 24 de Junho de 2010**, 2010 Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/decreto/d7219.htm. Acesso em 20 mai. 2021.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Brasil no Pisa 2018** [recurso eletrônico]. Brasília: INEP, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CACHIA, R. & FERRARI, A. **Creativity in schools**: a survey of teachers in Europe. European Commission / Joint Research Centre, Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2010.

CROPLEY, A. J. Fostering creativity in the classroom: General principles. In M. A. Runco (Ed.) **Creativity research handbook** (83-114). Cresskill, N. J.: Hampton Press, 1997.

D'AMBRÓSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

FIRDAUS, F., KAILANI, I., BAKAR, N. B. & BAKRY, B. Developing Critical Thinking Skills of Students in Mathematics Learning. **Journal of Education and Learning**, n. 9, v.3, p. 226-236, 2015.

FONSECA, M. G. & GONTIJO, C. H. Pensamento crítico e criativo em Matemática em diretrizes curriculares nacionais. **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, 27(3), 956-978, 2020a.

FONSECA, M. G. **Aulas baseadas em técnicas de criatividade: efeitos na criatividade, motivação e desempenho em matemática com estudantes do ensino médio**. 175f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

FONSECA, M. G. **Construção e validação de instrumento de medida de criatividade no campo da matemática para estudantes concluintes da educação básica**. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Brasília, 2015.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H. Infográfico: **Colocando em ação o pensamento crítico e criativo em matemática**, 2020b. Disponível em: https://bit.ly/pensamentocriticoecriativoemmatematica. Acesso em 28 mai 2021.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H. **Infográfico**: Oficinas de estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática de Gontijo, 2020c. Disponível em: <https://bit.ly/pensamentocriticoecriativoemmatematica. Acesso em 28 mai 2021.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H.; ZANETTI, M. D. T. Estimulando o Pensamento Crítico e Criativo em Matemática a partir da 'Forca Numérica' e o Princípio Fundamental da Contagem. **Coinspiração - Revista de Professores que Ensinam Matemática**, n.1, v.2, p. 241, 2018.

GONTIJO, C. H. **Criatividade(s) em Matemática**: Bases teóricas e aplicações pedagógicas. Grupo de Pesquisas em Didática da Matemática (Universidade Estadual da Paraíba). Vídeo com 105 minutos [Live]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6sRkhq16wbM&t=202s. Acesso em: data de acesso 20 de maio de 2021, 2020.

GONTIJO, C. H. Relações entre criatividade e motivação em matemática: a pesquisa e as implicações para a prática pedagógica In: GONTIJO, Cleyton Hércules; FONSECA, Mateus Gianni (Orgs). **Criatividade em Matemática: lições da pesquisa,** p. 153-172. Curitiba: CRV, 2020.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio**. 194f. Tese (Doutorado em Psicologia) - Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

GONTIJO, C. H. Técnicas de criatividade para estimular o pensamento matemático. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 135, p. 16-20, 2015.

GONTIJO, C. H.; FONSECA, M. G. O lugar do pensamento crítico e criativo na formação de professores que ensinam matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, n. 3, v.3, p. 11, 2020.

GONTIJO, C. H.; SILVA, E. B.; CARVALHO, R. P. F. A criatividade e as situações didáticas no ensino e aprendizagem da matemática. **Linhas Críticas**, n.35, v. 18, p. 29-46, 2012.

GRIFFIN, P.; CARE, E. (Edts.). **Assessment and Teaching of 21st Century Skills**: Methods and Approach. Dordrecht: Springer, 2015.

LEIKIN, R., SUBOTNIK; R., PITTA-PANTAZI, D.; SINGER, F. M.; PELCZER, I. Teachers' views on creativity in mathematics education: an international survey. **ZDM Mathematics Education**, n. 45, p. 309-324, 2013.

LEIKIN, R.; PANTAZI, D. P. Creativity and mathematics education: The state of the art. **ZDM Mathematics Education**. N. 45, p. 159-166, 2013.

LIPMAN, M. **Thinking in education**. Cambridge University Press, 2003.

MOREIRA, M. A. O ensino de STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) no século XXI. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, n. 11, v. 2, p. 224-233, 2018.

OCDE. **Framework for the Assessment of Creative Thinking in PISA 2021**. Third Draft. OECD Publishing, Paris, 2019.

OECD. **21st-Century Readers**: Developing Literacy Skills in a Digital World. OECD Publishing: Paris, 2021.

PANAOURA, A.; PANAOURA, G. M. **Teachers' awareness of creativity in mathematical teaching and their practice**: issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, n. 4, p. 1-11, 2014.

SOH, K. **Fostering student creativity through teacher behaviors**: thinking Skills and Creativity, n. 23, p. 58-66, 2017.

VIANA, M. **Avanços tecnológicos realçam papel da matemática**. Disponível em: https://impa.br/noticias/avancos-tecnologicos-realcam-papel-da-matematica/. Acesso em 20 mai. 2021, 2020.

VIANA, M. **Brasil é promovido à elite da matemática mundial**. Disponível em https://impa.br/noticias/brasil-e-promovido-a-elite-da-matematica-mundial/. Acesso em 20 mai. 2021, 2018.

VINCENT-LANCRIN, S.; GONZÁLEZ-SANCHO, C.; BOUCKAERT, M.; DE LUCA, F.; FERNÁNDEZ-BARRERA, M.; JACOTIN, G.; URGEL, J.; VIDAL, Q. **Fostering Students' Creativity and Critical Thinking**: What it Means in School, Educational Research and Innovation. Paris: OECD Publishing, 2019.

YAZGAN-SAĞ, G.; EMRE-AKDOĞAN, E. Creativity from two perspectives: Prospective mathematics teachers and mathematician. **Australian Journal of Teacher.**

Autores:

Cleyton Hércules Gontijo
Licenciatura em Ciências e Matemática pelo Centro Universitário de Brasília (UniCEUB),
Especialização em Administração da Educação pela Universidade de Brasília (UnB),
Mestrado em Educação pela Universidade de Brasília (UnB),
Doutorado em Psicologia pela Universidade de Brasília (UnB).
Atualmente é Professor do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: criatividade em matemática, pensamento crítico e criativo em matemática, avaliação em matemática e resolução de problemas.
Correio eletrônico: cleyton@mat.unb.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6730-8243

Mateus Gianni Fonseca
Licenciatura em Matemática pela Faculdade Santa Terezinha (Fast),
Especialização em Educação Matemática com Novas Tecnologias pela Faculdade de Tecnologia e Ciências (FTC)
Mestrado em Educação pela Universidade de Brasília (UnB),
Doutorado em Educação pela Universidade de Brasília (UnB).
Atualmente é Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília (IFB).
Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: criatividade em matemática, pensamento crítico e criativo em matemática e resolução de problemas.
Correio eletrônico: mateus.fonseca@ifb.edu.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3373-2721

Como citar o artigo:

GONTIJO, C. H.; FONSECA, M. G. Oficinas de pensamento crítico e criativo na formação docente em matemática: uma experiência com estudantes do Pibid. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 1-26, janeiro, 2022. DOI: 10.37618

Visión de estudiantes de matemáticas de una universidad pública brasileña sobre el uso de recursos didácticos en la enseñanza-aprendizaje

Josinalva Estacio Menezes
jomene@bol.com.br
https://orcid.org/0000-0002-0468-5858
Universidade de Pernambuco (UPE)
Olinda, Brasil.

Maria Dalvirene Braga
dalvirenebraga@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0948-8228
Universidade de Brasília (UnB)
Brasília, Brasil.

Rui Seimetz
rseimetz@mat.unb.br
https://orcid.org/ 0000-0001-6639-9366
Universidade de Brasília (UnB)
Brasília, Brasil.

Recibido: 01/agosto/2021 **Aceptado:** 15/octubre/2021

Resumen

En este artículo presentamos los resultados de una investigación cuyo objetivo general fue recoger las impresiones y necesidades de los estudiantes de matemáticas de una universidad pública brasileña sobre el uso de los recursos didácticos en las clases de enseñanza a distancia. Invitamos a los estudiantes de ese curso a la sala de comunicación de una plataforma virtual disponible en la universidad y accesible a todos, y seleccionamos una muestra representativa de veintiún estudiantes del curso para investigación empírica correspondiente a un estudio exploratorio. Ante la pandemia del Virus Corona-COVID 19, se aplicó un cuestionario en línea, en la plataforma *googleforms*, con preguntas cerradas y abiertas, analizadas cuantitativamente según las ideas de Chizzotti (2017) y cualitativamente, según los lineamientos de Bardin (2016), respectivamente. Los resultados apuntan a la validez del uso de recursos para apoyar la enseñanza y el aprendizaje, con necesidades de adaptaciones y la amplitud de la dinámica con las tecnologías educativas, con algunos obstáculos relacionados con fallas en las tecnologías de la información y la comunicación digitales. Concluimos por la necesidad de profundizar y compartir más investigaciones y experiencias sobre el tema, considerando la falta de trabajo y la necesidad urgente y real de dicho trabajo.

Palabras clave: Enseñanza Remota. Licenciada en Matemáticas. Recursos Didácticos. Enseñanza Superior. Tecnologías.

Visão de estudantes de matemática de uma universidade pública brasileira sobre o uso de recursos didáticos no ensino-aprendizagem

Resumo

Neste artigo apresentamos os resultados de uma pesquisa cujo objetivo geral foi coletar as impressões e necessidades de alunos de matemática de uma universidade pública brasileira sobre o uso de recursos didáticos em aulas na modalidade ensino remoto. Convidamos os alunos do referido curso na sala de comunicação de uma plataforma virtual disponível na universidade e acessível a todos, e selecionamos uma amostra representativa de vinte e um alunos do curso para a pesquisa empírica correspondendo a um estudo exploratório. Em vista da pandemia do Corona Virus-COVID 19, aplicamos questionário *online*, em plataforma *googleforms*, com perguntas fechadas e abertas, analisadas quantitativamente segundo as ideias de Chizzotti (2017) e qualitativamente, segundo as orientações de Bardin (2016), respectivamente. Os resultados apontam a validade do uso de recursos no apoio ao ensino aprendizagem, com necessidades de adaptações e amplidão das dinâmicas com tecnologias educacionais, com ocorrência alguns entraves relativos a falhas nas tecnologias digitais de informação e comunicação. Concluímos pela necessidade de aprofundar e compartilhar mais pesquisas e experiências no tema, considerando a pouca constatação de trabalhos e a necessidade urgente e real de tais trabalhos.

Palavras chave: Ensino Remoto. Licenciatura em Matemática. Recursos Didáticos. Ensino Superior. Tecnologias.

View of mathematics students at a Brazilian public university on the use of didactic resources in teaching-learning

Abstract

In this article, we present the results of a research whose general objective was to collect the impressions and needs of mathematics students in a Brazilian public university about the use of teaching resources in remote teaching classes. We invited the students of that course into the communication room of a virtual platform available at the university and accessible to all, and we selected a representative sample of twenty-one students of the course for empirical research corresponding to an exploratory study. In view of the Corona Virus-COVID 19 pandemic, we applied an online questionnaire, on *googleforms* platform, with closed and open questions, analyzed quantitatively according to the ideas of Chizzotti (2017) and qualitatively, according to the guidelines of Bardin 2016), respectively. The results point to the validity of the use of resources to support teaching and learning, with needs for adaptations and the breadth of dynamics with educational technologies, with some obstacles related to failures in digital information and communication technologies. We conclude by the need to deepen and share more research and experiences on the subject, considering the little finding of work and the urgent and real need for such work.

Keywords: Remote learning. Graduation in Mathematics. Didactic resources. Higher education. Technologies.

Introdução

É consenso entre os profissionais da educação a utilidade dos recursos tecnológicos no ensino. Esses elementos assumem grande importância em relação a facilitar a compreensão dos conteúdos que estão sendo apresentados pelo professor, o que contribui para a aprendizagem dos referidos conteúdos pelos estudantes, o que lhes confere um grande valor.

Até pouco tempo, os estudos e aplicações de recursos didáticos no ensino eram mais direcionados para a criação e aplicação desses em material concreto, com a insurgência recente de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), as quais ganharam mais impulso nas últimas duas décadas. A educação a distancia, que foi incentivada a partir de políticas públicas e outras iniciativas, tem sido usuária e beneficiada por esse advento, de modo que as TDIC ganharam lugar de destaque no cenário educacional.

Surge, então, um novo elemento completamente inesperado no contexto: uma pandemia devastadora, que impactou de forma profunda o contexto educacional. Por causa disso, aulas presenciais foram suspensas por algum tempo, depois algumas tentativas de retomada foram feitas com consequências adversas, tendo sido canceladas.

Esta situação levou à necessidade de buscar estratégias para retomar a vida social, econômica e acadêmica com os elementos disponíveis. Rapidamente foi ampliada a difusão do aparato tecnológico existente até então, e as instituições de ensino, em todos os níveis de ensino, empreenderam um esforço quase insano de continuar o processo educacional com o que fosse possível. Algumas iniciativas governamentais emergiram, e tecnologias foram disponibilizadas para um número muito maior de estudantes.

Nesse cenário, emerge o ensino remoto. Uma vez que os recursos didáticos são utilizados por docentes e discentes, a nova empreitada passou a ser criar ou adaptar e usar recursos didáticos nesta modalidade de ensino, que é a mais utilizada atualmente no país. Ainda não se estabeleceu um plano nacional de funcionamento do sistema educacional, de modo que o ensino remoto e o ensino presencial são vigentes na atualidade.

Os docentes foram imersos nesse enorme turbilhão de fatos, o que aconteceu em quase todo o mundo. Com a nova situação, e sem preparo anterior, os professores tentaram adaptar seu trabalho às necessidades novas no proceso de ensino e de aprendizagem.

No caso do ensino remoto, as aulas são síncronas, com alunos e professores em um mesmo ambiente virtual de interação, como o *google meet*, ou assíncronas, onde os alunos fazem as atividades sem interação sistemática com o professor e fora de um ambiente onde todos interajam. Isso leva à questão de como criar, elaborar e aplicar de forma eficiente recursos didáticos para essa nova modalidade de ensino. Sendo muito ampla, e nas condições postas, consideramos, enquanto docentes, buscar responder à seguinte questão de pesquisa: De que forma os recursos didáticos elaborados/criados/utilizados até então contribuem de forma positiva para o processo de ensino e aprendizagem no modo remoto?

No contexto da Educação, a pandemia fez sentir um grande impacto na rotina das atividades. As aulas presenciais foram inicialmente interrompidas, e instalou-se o dito Ensino Remoto Emergencial (ERE), "caracterizado pela mudança temporária do ensino presencial para o ensino remoto" (Appenzerller, et al., 2020, p. 4) e "à principal alternativa de instituições educacionais de todos os níveis de ensino, caracterizando-se como uma mudança temporária em circunstâncias de crise" (Rondini, et al., 2020, p.3). Diferente do ensino a distancia, e que requereu fortemente o uso das TDIC. Em todos os níveis de ensino, as aulas passaram a ocorrer nessa modalidade de ensino, e a comunidade acadêmica foi envolvida numa urgente e intensa discussão sobre as mudanças advindas da situação. Professores e autoridades educacionais empreenderam uma intensa busca de metodologias e recursos de ensino que suprissem as demandas emergentes do ERE no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem, a exemplo de Ferreira et al. (2020).

Atuando no ensino superior, específicamente em cursos de licenciatura em matemática, nosso interesse é saber qual a contribuição dos recursos didáticos usados atualmente nesse contexto.

A partir dessas considerações, realizamos uma pesquisa cujo objetivo geral foi coletar as impressões e necessidades de alunos de matemática em uma universidade pública brasileira a respeito do uso de recursos didáticos em aulas na modalidade ensino remoto.

Nosso foco foi saber que recursos estão chegando aos alunos na modalidade de ensino remoto, e como estão vivenciando, com o propósito de continuar nossa tarefa de oferecer o que melhor contribua para que nossos estudantes possam continuar o seu processo acadêmico nesse aspecto didático. É nessa direção que vamos prosseguir.

Referencial teórico

Nesse segmento vamos discutir as principais ideias que nortearam nosso trabalho. Explanaremos brevemente sobre os recursos didáticos e o ensino de matemática, depois passaremos a tecer considerações em relação as TDIC pertinentes ao nosso artigo, para em seguida, versarmos a respeito do ensino remoto e os recursos disponíveis mais comuns.

Recursos didáticos e ensino de matemática

Não são poucos os pesquisadores e estudiosos que são favoráveis ao uso de recursos didáticos em sala de aula (Freitag, 2017), o que inclui as tecnologias digitais de comunicação (Braga, Menezes & Seimetz, 2019) e também o lúdico (Braga et al., 2019). Autores como Libâneo (2017) e Menezes (2013) destacam os recursos em suas publicações sobre Didática, como elementos preciosos ao professor no auxílio ao seu trabalho cotidiano, incluindo o ensino superior.

Na Educação Matemática, contexto específico também concernente ao ensino, autores como Rêgo & Rêgo (1999), Smole et al. (2006) e Menezes, Braga & Seimetz (2019) destacam a importância dos recursos didáticos como auxiliadores no ensino por parte do professor e facilitadores da aprendizagem por parte do aluno. Para esses últimos, os recursos didáticos, quando bem utilizados, podem atuar de forma muito positiva e benéfica no processo de ensino e aprendizagem.

Convém lembrar que isso requer organização anterior, adequação aos objetivos, clarificação dos conteúdos, segurança no manejo, condições apresentáveis de utilização, entre outros (Rêgo &Rêgo, 1999). Um recurso didático deve servir de auxílio ao professor, e não empecilho para o trabalho em sala de aula (Menezes, Braga & Seimetz, 2019).

As tecnologías digitais de informação e comunicação-TDIC e o ensino de matemática

As discussões em torno das tecnologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem, inicialmente tecnologias educacionais vêm crescendo dentro deste contexto. Com o vertiginoso avanço tecnológico, existe uma demanda cada vez maior acerca da compreensão e das formas de utilização destes elementos de modo mais efetivo para o processo educacional.

Skovsmose (2015, p. 14) descreve que "Tecnologia não é algo *adicional* que podemos pôr de lado, como se fosse uma peça, um martelo. Vivemos em um ambiente tecnologicamente estruturado, uma tecnonatureza". E, por sua vez, a Matemática também faz parte desta "tecnonatureza", pois foram produzidos a partir de vários conhecimentos matemáticos.

Ponte (1995, p. 2) ressaltou que o uso de tecnologias no ensino da Matemática trouxe vários ganhos ao processo de ensino e aprendizagem, entre eles, "um crescendo de interesse pela realização de projetos e atividades de modelação, investigação e exploração pelos estudantes, como parte fundamental da sua experiência matemática".

Para Menezes, Braga & Seimetz (2019), o ensino de matemática por meio das TDIC proporciona ao professor uma ferramenta adicional para trabalhar em sala de aula em diferentes contextos e elas têm favorecido significativos avanços, tanto com respeito à compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos quanto no aprimoramento da prática docente pelo professor.

Acrescentemos ainda dois trabalhos que consideramos merecer destaque. Kaleff (2006), publicou um livro no qual discute as novas tecnologias para o ensino de matemática, no qual traz diversos recursos para o processo de ensino e aprendizagem. Já a coleção Metodologias de Ensino em Matemática (Menezes, Braga & Seimetez, 2019), traz num de seus volumes uma coletânea de artigos com foco em práticas pedagógicas, advindas do uso dos recursos didáticos que denominamos de jogos matemáticos, alguns deles no modo virtual. Acreditamos que a formação continuada seja um caminho necessário para que isso ocorra de fato em sala de aula.

Enquanto professores atuando em cursos de licenciatura, bacharelado, matemática, mestrado profissional e especialização em matemática, nas modalidades presencial e EaD, partilhamos das inquietações concernentes à inserção das TDIC no processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Nessa perspectiva, desde a concepção do programa, o computador tem sido um recurso didático valioso para práticas educacionais mais significativas e alinhadas às demandas da sociedade que utiliza, cada vez mais, aparatos tecnológicos (Braga, et al., 2019).

O estímulo ao uso de computadores e outras tecnologias está amparado pelos principais documentos oficiais voltados para o ensino, incluindo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (LDBEN), entre outros, como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), onde o uso das tecnologias enquanto recurso de ensino faz parte das orientações aos docentes.

Acompanhando a produção tecnológica e as buscas de melhoria no processo de ensino e aprendizagem, encontramos trabalhos e pesquisas de professores sobre os efeitos da utilização de programas, jogos e aplicativos em *tablets*, redes sociais, smartphones (especialmente grupos de *WhatsApp*) e outros aparatos tecnológicos. Além disso, nas unidades de ensino, as TDIC permitem ampliar as possibilidades didático pedagógicas no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, no contexto da Educação Matemática, quando selecionadas e utilizadas adequadamente, as TDIC podem se constituir num potente recurso didático para criar novas relações entre o aprendiz e o objeto do conhecimento, podendo até mesmo, ser usado como meio de lutar contra o insucesso escolar, motivando os alunos, permitindo-lhes revelar melhor seus talentos, além de facilitar o acesso as informações.

Alunos e professores em contato com as TDIC tornam-se investigativos e não apenas receptivos, eles encontram novas fontes de ideias que vão além dos seus próprios pensamentos, começam a observar, refletir e atribuir significados, criando suas próprias conjecturas. Portanto, a inserção das TDIC pode levar à quebra de paradigmas e também modificar significativamente a qualidade do ensino, assim as aulas se tornam mais criativas, motivadoras e dinâmicas.

O ensino remoto e os recursos didáticos: um grande desafio atual

Atualmente, o ensino remoto é alvo de uma das mais efervescentes discussões no cenário acadêmico educacional em todos os níveis, em vista do advento da pandemia do Coronavírus, a COVID-19. A sociedade se viu tomada de surpresa por esse vírus, manifestado inicialmente na China e depois expandido por todo o mundo, com suas posteriores variantes.

Em todo o mundo, não havia aparato hospitalar para receber tantos doentes, o que levou a uma mudança da chamada "vida normal": as aulas foram suspensas, instalou-se o distanciamento social, o livre ir e vir, as saídas de casa limitaram-se aos casos de extrema necessidade e alguns setores ligados a serviços essenciais continuaram a funcionar.

Para Behar (2020) o Ensino Remoto Emergencial (ERE) significa *distante*, no aspecto geográfico; "uma modalidade de ensino que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e alunos" (p. 1), definição dada também por Ferreira (2020).

De acordo com Silva (2020), para pais e filhos é uma mudança repentina, em vista da convivência mais constante e necessidade de acompanhamento das atividades acadêmicas por ambos, um realizando outro participando na orientação.

Convém destacar que esse modo não deve ser confundido com educação a distância (EaD): ele é assim considerado pelo impedimento de alunos e professores, sem poderem frequentar as instituições de ensino via decreto emergencial porque o planejamento anual foi engavetado.

Mediadas pelas TDIC, as escolas particulares logo reiniciaram as aulas nessa nova modalidade de ensino, com retorno imediato de seus efeitos e implicações no processo ensino-aprendizagem.

Nas escolas públicas, o ERE iniciou no nível básico, e no ensino superior ficou inicialmente restrito a discussões pontuais e replanejamentos. Nesse período, nas instituições de ensino superior, em especial nas universidades públicas, a comunidade acadêmica/científica, além de atuar especificamente no combate à pandemia através da área de saúde, com pesquisas, tratamento de doentes e produção de medicamentos e outros produtos para o combate ao Coronavírus, como medicamentos, realizou diversas reuniões para debater as formas de atuação em tempos de pandemia e, no segundo semestre de 2020, a maioria das instituições iniciou as atividades nesta modalidade de ensino remoto junto aos discentes.

Enquanto docentes e discentes, também nos sentimos desafiados ante essa nova e inusitada situação, de modo que não ficamos indiferentes a todos os aspectos dessa nova realidade. O advento do Coronavírus também impactou de forma inequívoca nosso contexto profissional.

Embora ainda muito poucas, algumas contribuições se fazem presentes no ensino da matemática nessa modalidade. Em seu artigo intitulado "138 iniciativas, recursos e inspirações para o ensino online em tempos de pandemia" (Cunha, 2021) traz uma lista de sugestões de sites que trazem links para atividades, cursos, sugestões de exercícios, tudo no modo remoto. Destacamos também o artigo de Ferreira et al. (2020), que traz uma discussão sobre práticas docentes educativas para o ensino de matemática em tempos de pandemia.

Fomos então levados a encarar nossa atuação profissional nessa nova perspectiva, onde a nossa prática era redirecionada enquanto íamos constatando as mudanças. Por tudo isso, consideramos pertinente realizar uma pesquisa como essa que fizemos. Esperamos, com isso, contribuir efetivamente para a discussão em relação as mudanças no processo de ensino e aprendizagem a partir dessa nova situação.

Metodologia

Escolhemos para nossa pesquisa uma das principais universidades públicas do nosso país, cuja região onde está situada fica na capital. A referida universidade tem quatro campus distribuídos por todo o Distrito Federal (DF), um dos quais tem o curso de matemática, e teve situações bastante extremas com relação ao andamento da pandemia.

No campus pesquisado, estudam cerca de 200 alunos do curso de matemática, distribuídos pelos três turnos: manhã, tarde e noite. A faixa etária dos estudantes vai dos 16 aos 45 anos, alguns trabalham e outros apenas estudam ou são bolsistas da universidade.

Optamos por fazer um estudo exploratório, não participante e sem intervenção. Isso não só traz a possibilidade de fazermos um retrato o mais fiel possível da situação, como está adequado aos tempos que vivemos.

Também em vista da situação de pandemia, e de acordo com orientações oficiais de coletas de dados *online*, optamos por aplicar um questionário na plataforma *google*, como formulário no modo *googleforms*, o que corrobora com as orientações atuais de distanciamento social. O referido questionário é composto de perguntas fechadas e abertas, algumas com opções de justificativa e outras com a possibilidade de marcar mais de uma opção ou alternativa. O modelo do questionário encontra-se anexo e no link: https://forms.gle/ej3Ffti5XYkkGt18.

Para analisar os dados, advindos das respostas às perguntas do questionário, optamos por fazê-lo da seguinte maneira: as respostas às questões fechadas, correspondendo à parte quantitativa, foram sistematizadas e analisadas segundo as orientações de Chizzotti (2017), a partir das quais faremos as possíveis inferências e, as respostas às questões abertas, relacionadas às justificativas e explicações, bem como as opiniões, foram categorizadas e organizadas para análise segundo as orientações de Bardin (2016). Estas últimas formam a parte qualitativa. Depois, então, procederemos à conclusão e os encaminhamentos.

Resultados

A partir desse momento, procederemos à análise dos dados obtidos nas respostas ao questionário. Apresentamos a análise questão a questão, e depois faremos a síntese.

Vamos iniciar caracterizando os participantes. Os alunos seleccionados para a amostra de 21 participantes pertencem todos ao curso de matemática. Tal amostra correspondeu a 10% do total de alunos que cursaram o semestre, de modo que a amostra é pertinente (Chizzotti, 2017). Entre eles, há ingressos desde 2013 até 2020. A universidade oferece aulas nos três turnos, repetindo disciplinas em alguns turnos, pois as entradas dos ingressos são feitas duas vezes por ano e aos alunos é dada a possibilidade de cursarem disciplinas fora do seu turno de entrada, o que reforça a representatividade da amostra.

Assim, oito alunos declararam cursar disciplinas pela manhã, oito cursavam disciplinas à tarde e dezessete à noite, o que sinaliza que encontramos alunos cursando disciplinas em mais de um turno. De fato, seis deles declararam cursar disciplinas distribuídas pelos três turnos; outros quatro declararam cursar disciplinas em dois turnos e os restantes onze que estudam em apenas um turno são todos do período noturno. Aqui inferimos que provavelmente esses últimos trabalham além de estudar, pois é bastante comum isso acontecer em cursos de graduação noturnos.

Destacamos também que para preservar a identidade dos alunos participantes e melhor compreensão das análise, denominaremos os participantes de Aluno 1 até Aluno 21.

Passamos a analisar as questões, lembrando que para melhor análise, optamos por dividir as questões, o que concorre para melhorar a sua compreensão. Inicialmente perguntamos: *Em sua aula presencial você vivenciava disciplinas com uso de recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador?* Tivemos 10 respostas "*Sim*", sete "*não*" e três "*raramente*" um participante não respondeu. Sabemos que o uso de recursos didáticos costuma ser comum em disciplinas da licenciatura voltadas para o ensino, mas não é tão comum em disciplinas específicas da matemática e isso foi destacado nas respostas. Transcrevemos aqui uma das respostas*: "Nas disciplinas ofertadas pelo Mat muito raramente tinha algum recurso além do quadro/pincel/marcador. Um ou outro professor trazia objetos ou livros para mostrar"* (Aluno 9, 2021).

Pedimos então a justificativa para a respostas afirmativa e negativa. A primeira foi: *Em caso negativo, você gostaria de ter vivenciado? Por que?* Apenas um dos participantes respondeu negativamente, razão pela qual transcrevemos aqui: "*Não, tive excelentes professores de forma alguma me senti prejudicado por não utilizarem recursos além do quadro"* (Aluno 3, 2021).

Os demais participantes responderam afirmativamente, algumas respostas remetendo a um ou mais aspectos. Três respostas remeteram à melhoria da interação entre professor e aluno na sala de aula; duas outras remeteram à melhoria da formação profissional; mais três respostas ao potencial de auxiliar nos estudos e na aprendizagem, e três remeteram à diversificação de técnicas para as aulas. Todos esses aspectos são enfatizados por professores de Didática e professores estudiosos dos recursos didáticos em geral, com participação ativa dos alunos, a respeito de Kaleff (2006). Essa autora vem se dedicando a estudar o efeito dos recursos didáticos, em especial o material concreto na aprendizagem com resultados e constatações bastante encorajadoras para os professores em formação e para a contribuição com a melhoria do ensino e aprendizagem. Destacamos aqui uma resposta esclarecedora, onde o aluno mostra a valorização que dá à dinamização da atividade docente:

> *Quando paro para recordar todos os momentos de aulas no departamento, posso citar as matérias de educação matemática do departamento como regências e álgebras para ensino e geometrias para ensino. Nessas aulas, existia um contexto que trazia o conteúdo de forma lúdica, com atividades que fugiam da ideia do quadro e pincel* (Aluno 17, 2021).

As justificativas apresentadas pelos alunos geraram fragmentos de fala, que foram organizadas em categorias, de acordo com as orientações de Bardin (2016).

Buscamos também saber como foi a vivência dos que tiveram recursos didáticos além do quadro em suas aulas na indagação: *Em caso afirmativo, quantas disciplinas em média por semestre? O que achou da vivência das aulas com recursos didáticos?* Como tivemos participantes ingressos desde 2013, segundo declaração dos mesmos, o número de disciplinas declaradas variou de um até oito. Dentre as categorias que enquadramos as respostas (Bardin, 2016), temos menção a facilitar a aprendizagem (quatro respostas), trazia mais dinamismo ao aprendizado (cinco) e tinham uma função motivadora (quatro respostas). As respostas dos alunos reforçam o aumento da dinâmica da aula, uma vez que com recursos didáticos os alunos têm menos rotina e tédio, maior participação, podendo desenvolver suas potencialidades e criatividades na execução das tarefas e também contribuem para compreenderem melhor os conteúdos ministrados. Essa ideia é defendida por autores com Smole (2005) em especial nas atividades com jogos e materiais concretos, também corroborada por Menezes (2013). Transcrevemos duas respostas para ilustração:

> *... Gostava muito, pois sou relutante aos recursos didáticos conservadores, acredito que didáticas mais interativas são benéficas em todas as áreas do conhecimento e devem ser exploradas, também, no ensino de matemática* (Aluno 7, 2021).
>
> *Além do processo de vivencia que muitas dessas matérias me proporcionou, me recordo de várias atividades que posso comentar que fugiam do modelo tradicional de ensino. Cursando a matéria de geometria para ensino a turma confeccionou várias oficinas voltadas para o lúdico e conteúdo matemático, como o sudoko e o tangram* (Aluno 18, 2021).

Na próxima questão, indagamos: *"No último semestre presencial, quantas disciplinas você cursou nas quais vivenciou recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador? ".* A essa pergunta, um participante não respondeu e três declararam não haver tido nenhuma; nove deles vivenciaram apenas uma disciplina com recurso didático, quatro vivenciaram duas disciplinas e os quatro restantes vivenciaram três ou mais disciplinas. Pedimos encaminhamentos nas duas direções. Primeiro, indagamos: "*Caso não tenha vivenciado o uso de recursos didáticos, gostaria de ter vivenciado? Por que?*

Todos os seis que responderam afirmativamente justificaram os aspectos motivadores, facilitadores da compreensão do conteúdo e da dinamização das aulas, o que inclui o aumento da interação entre os atores da sala de aula. Vamos destacar duas respostas que ilustram essas considerações:

> *Gostaria, uma vez que alguns recursos auxiliam assimilar o conteúdo e facilita o acesso à materiais didáticos* (Aluno 5, 2021).
>
> *Quando o professor acrescenta recursos didáticos a sua aula, ele acaba por ter mais ferramentas para transmitir o conhecimento ao aluno, Seja uma atividade diferenciada ou algo que prenda a atenção, não somente na aula, também no conteúdo* (Aluno 8, 2021).

Na outra direção, indagamos: "*Caso tenha vivenciado, o que achou?".* Constatamos que apenas uma das dezesseis opiniões apresentadas foi negativa, pois o Aluno 4 relatou: *"Muito pesado no final fiquei apenas com 4*"; as demais apontam que os recursos didáticos vivenciados foram favoráveis nas atividades acadêmicas dos alunos. Os aspectos apontados foram a interação entre professor e aluno, o auxílio na fixação dos conteúdos, novamente o caráter dinâmico da aplicação dos recursos, da otimização do trabalho docente, da motivação que traz ao contexto. O que constatamos aqui reforça bastante as ideias dos autores que lidam com o recurso didático nas aulas. Destacamos alguns trechos de respostas, transcritos a seguir:

> *Facilitou a comunicação professor x aluno o acesso à materiais, e auxiliou na assimilação do conteúdo* (Aluno 15, 2021).
>
> *Achei positivo, pois auxilia na dinâmica da aula e no aprendizado dos estudantes - já que nos permite perceber o conteúdo de formas diferentes* (Aluno 2, 2021).
>
> *Achei interessante pois com a utilização de slide o professor poderia apresentar por exemplos gráficos e imagens para maior compreensão e clareza* (Aluno 6, 2021).
>
> *De maneira geral trouxe vários recursos que proporciona opção para o professor em sala de aula. É fantástico!* (Aluno 15, 2021).
>
> *Os recursos didáticos deixam as aulas mais atrativas e dinâmicas* (Aluno 17, 2021).
>
> *Recursos como o Kahoot ou dinâmicas em sala de aula eram muito divertidos deixavam a aula muito mais interessante e desafiadora. Gostava bastante* (Aluno 9, 2021).

Indagamos então sobre a compreensão dos alunos com recursos didáticos, cuja pergunta foi: "*Você acha que aulas com recursos didáticos ajudam você a entender melhor as aulas? Por que?* "Todos os participantes responderam à questão, 16 afirmando sim e cinco não responderam *"não"* nem *"sim*". Quanto a estes últimos, um respondeu *"depende da matéria"* (Aluno 3, 2021), e inferimos que a resposta dos outros quatro deram uma conotação de aprovação, conforme as transcrições que apresentamos agora:

> *Com certeza, é mais uma maneira diferente de apresentar o conteúdo* (Aluno 1, 2021).
>
> *É possível rever diversas vezes* (Aluno 6, 2021).
>
> *Acho que foge do ensino tradicional, e envolve mais o aluno com a aula* (Aluno, 2021).
>
> *Com certeza. O aluno fica mais interessado* (Aluno 18, 2021).
>
> *Os recursos didáticos trazem a aula, em alguns momentos, um ar mais descontraído, tirando aquele clima da sala de aula que usa quadro. No geral somam no aprendizado* (Aluno 17, 2021).

Os demais anunciaram sua resposta afirmativa. Categorizando as respostas, vemos que cinco delas remetem a aspectos metodológicos do ensino-aprendizagem, como melhorar a compreensão e foco no estudante. Outras duas respostas remeterem a diversidade de materiais que os recursos didáticos proporcionam e as demais nove respostas remeteram ao aspecto motivador e estimulante dos recursos didáticos. Vamos destacar aqui uma resposta de cada aspecto, para melhor compreensão.

> (Focando na diversidade). *Acho. Apesar de não ter nada contra a aula com giz e quadro, acredito que qualquer método de ensino que seja repetido durante todo o semestre tende a falhar, então penso que a variedade seria o ideal* (Aluno 5, 2021).
>
> (Focando na metodologia). *Sim. Ajudam a compreender, assimilar e memorizar o conteúdo* (Aluno 8, 2021).
>
> (Sobre motivação e ensino). *Os recursos didáticos trazem a aula, em alguns momentos, um ar mais descontraído, tirando aquele clima da sala de aula que usa quadro. No geral somam no aprendizado* (Aluno 17, 2021).

Sabemos da existência de docentes que têm uma prática forte de quadro e giz/pincel apoiada por um livro-texto. No senso comum, a aula expositiva com estes elementos é suficiente para o aluno aprender, e os recursos funcionam como decoração. Por isso, perguntamos: *Você acha que aulas com recursos didáticos ajudam a resolver problemas? Por que?* Dois participantes não responderam. Um demonstrou dúvida, tendendo para a resposta negativa, justificando: *"Não sei, acho que não"*. (Aluno 3, 2021). Os demais participantes responderam "sim" ou expressão afirmativa como *"Com certeza"* (Alunos 11 e 14, 2021). As justificativas remeteram a aspectos semelhantes aos das justificativas da questão anterior, mas algumas delas focaram na contextualização, visualização da situação-problema, estímulo à criatividade e ao raciocínio, além de melhorar a relação professor-aluno, apenas uma resposta afirmativa não foi justificada. Destacaremos quatro respostas que ilustram a ideia.

> *Sim. É notável que recursos didáticos estimulam a criatividade, habilidade essencial na resolução de problemas* (Aluno 4, 2021).
>
> *Sim. Diferentemente das aulas de só quadro e giz, essas têm ferramentas que auxiliam numa melhor visualização* (Aluno 10, 2021).
>
> *A depender da aula a forma como o professor aborda a aula ou uma dúvida de aluno pode influenciar, principalmente positivamente, no resultado do mesmo* (Aluno 12, 2021).

> *Sim, pois o professor pode trabalhar problemas cotidianos em sala de aula de forma participativa com os alunos* (Aluno19, 2021).

Ainda buscando saber a utilidade dos recursos, colocamos mais uma questão, assim enunciada: "*Você acha que aulas com recursos didáticos ajudam você quando estuda sozinho(a)? Em caso afirmativo, de que maneira? Em caso negativo, como os recursos didáticos o impediram de resolver os problemas?"* Das dezenove respostas já com justificativas obtidas, duas foram neutras, iniciando com "*depende",* da metodologia ou da disciplina; uma negativa e as restantes foram positivas. A única resposta negativa sinaliza que o participante (Aluno 4, 2021) tem um método de estudo individual que parece funcionar melhor para ele, conforme a transcrição: *"Não. Meus estudos individuais são bastante tradicionais e só funcionam desta forma, porém o uso de recursos didáticos não atrapalha nos estudos individuais".* As demais respostas positivas, remeteram à propiciação da autonomia, utilidade em tempo de ensino remoto, a possibilidade de revisar sempre, a citação de elementos da TDIC que ajudam, o aspecto motivador e a facilidade do aprendizado. Destacamos uma resposta mais referente as TDIC que também enfocamos neste artigo, e outra referente aos aspectos cognitivos:

> *Sim. Por conta própria aprendi a utilizar diversos plotadores gráficos, calculadoras, GAP, criar programas em python, escrever textos em latex e muitos outros recursos. Eles me ajudam a compreender melhor o que estudo, resolver problemas, testar hipóteses, abstrair problemas e muito mais* (Aluno 7, 2021).
>
> *Depende da forma que o recurso didático é feito e qual sua efetividade tanto para passar o conteúdo, quanto para trazer a atenção do discente à aula. Se o recurso didático foi efetivo o aluno conseguiu "pegar o conteúdo" e a partir disso tomar rumo nos seus estudos. Agora, se não for tão efetivo no aspecto de passar o conteúdo ao aluno, dificilmente vai ajudar quando o aluno estuda sozinho. (*Aluno 17, 2021).

Para saber se os professores desses alunos usam recursos didáticos, indagamos: *"No último semestre remoto, quantas disciplinas você cursou nas quais vivenciou o uso de recursos didáticos além do quadro e giz//pincel/marcador?* As quantidades de respostas para cada número de disciplinas foram: *"nenhuma" seis; "uma", duas; duas, cinco respostas e as quatro restantes apontam três ou mais disciplinas".* Levando em conta que os alunos de matemática cursam em média cinco ou seis disciplinas por semestre, consideramos que ainda pode ser ampliado o uso de recursos em salas de aulas de matemática. Em seguida, fazendo referência aos que tiveram disciplinas com recursos didáticos, perguntamos: *"Caso tenha vivenciado, o que você achou? Caso não tenha vivenciado, gostaria de vivenciar"?* Nas respostas, constatamos que dois alunos responderam que não gostariam de vivenciar recursos didáticos: um deles vivenciou apenas uma disciplina e o outro vivenciou três. Os demais alunos declararam apenas que gostaram de ter vivenciado sem comentários adicionais.

Na próxima questão pedimos para os alunos explicitarem os recursos que vivenciaram. "*Caso você tenha vivenciado aulas ou atividades na universidade com recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador, por favor, cite quais foram eles".* Houve grande ênfase em elementos remetentes às TDIC, que discutimos neste artigo, e que também seria esperado, já que vivenciamos o ensino remoto há mais de um ano, citados em dez das dezesseis respostas. Assim, destacamos uma resposta diferente de tecnologia dada por Aluno 18: *"Aulas com metodologias ativas".* A resposta aponta um conhecimento do aluno acerca de questões educacionais, como metodologias. Este tipo de metodologia (Soares, 2021) existente desde a década de 1930, embora pouco difundida, de forma que sinaliza uma atualização do aluno.

A próxima questão foi a seguinte: "*Você vivenciava livros paradidáticos nas aulas ou atividades? ( ) Sim ( ) Não."* Sete alunos declararam *"sim"*, terem vivenciado livros paradidáticos nas aulas ou atividades; treze alunos declararam *"não"* e um deles não respondeu. Lembramos que livros paradidáticos são considerados recursos didáticos que ainda são pouco utilizados pelo professor, embora sejam recomendados aos alunos de licenciatura para aplicação no ensino básico, e são indicados ou mencionados no ensino superior.

Passamos à próxima questão, cujo enunciado é: *"Você vivenciava aulas práticas? Sim ( ) Não ( )."* Tivemos doze respostas afirmativas, oito respostas negativas e um aluno não respondeu. Complementando a questão, perguntamos: *"Caso tenha vivenciado aulas práticas, que material era utilizado nas aulas além do quadro e giz/pincel/marcador?"* As respostas remeteram à interação com aplicativos de comunicação, ferramentas de aula, fóruns de dúvida, vídeos e materiais interativos. Aqui, destacamos que, com exceção dos materiais interativos, citados por Aluno 13, os elementos citados não se aplicam a aulas práticas, de modo que talvez os alunos não tenham a clareza do que seja aulas práticas em tempos de ensino remoto. Passamos a transcrever o enunciado integral da próxima questão, por ter várias alternativas, das quais o participante pôde assinalar mais de uma:

"Você considera que atividades com recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador são (pode assinalar mais de uma alternativa):

( ) mais interessantes

( ) mais dinâmicas

( ) mais esclarecedoras

( ) sou indiferente, tanto faz

( ) atrapalham o andamento das aulas

( ) não fazem falta"

Apenas um participante deixou essa questão em branco e os demais assinalaram apenas uma alternativa, sendo que dois deles assinalaram a opção *"esclarecedora"*, dez outros assinalaram a opção *"mais dinâmicas"* e os oito restantes assinalaram a alternativa *"mais interessantes"*. O que notamos aqui é que todas as escolhas correspondem a características positivas dos recursos, como defendida pelos autores que citamos neste artigo. Então, passamos ao enunciado da questão seguinte:

"*Você gostaria que houvesse mais atividades com recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador nas suas aulas? ( ) sim ( ) não Por que?"*

A esta questão observamos que quatro deles não responderam. Das respostas obtidas, apenas o Aluno 4 respondeu negativamente, afirmando: *"balanceado é melhor"*. Dois outros participantes informaram que depende da disciplina, um deles acrescendo que seria possível visualizar o conteúdo de outra forma. Os participantes restantes responderam afirmativamente, com justificativas referentes aos aspectos já trazidos por eles em questões anteriores, de modo que destacamos aqui uma resposta, pois alerta para o aspecto dispersivo do ensino remoto: "*Sim, especialmente no ensino remoto, onde as distrações são muitas mais, pois a mudança de ritmo da aula recaptura a atenção dos alunos* (Aluno 5, 2021).

Na penúltima questão, indagamos os outros tipos de atividade nas quais os alunos participaram na universidade onde estudaram no modo remoto. Havia a opção outros, momento em que solicitamos que explicitasse quais. Quanto às respostas, apenas um aluno (Aluno 6) não assinalou nenhuma alternativa. Todos os demais declararam ter participado das *lives*, nove deles assinalaram oficinas, todos assinalaram seminários e catorze assinalaram "cursos". Infelizmente, nenhum deles detalhou a atividade "outros". Do que conhecemos da universidade e por respostas anteriores, inferirmos que podem ter se referido a cursos sobre *software*, plataformas de aprendizagem virtual e outras habilidades e competências voltadas para as TDIC, como o *Kahoot*. Estas tecnologias, que fazem parte das TDIC, têm sido reforçadas por vários autores a exemplo de Behar (2020), Cunha (2020) e Kaleff (2006). Vale registrar a ocorrência de atividade intensa de *lives* de professores nas várias universidades brasileiras com palestras temáticas e/ou mesas redondas online sobre temas acadêmicos, bem como eventos antes ocorridos na forma presencial, passando a ocorrer na forma online, de âmbito local, estadual, nacional ou internacional. As respostas também revelaram o grande interesse dos alunos em continuar sua instrução acadêmica mesmo durante a pandemia e da importância da tecnologia, já destacada por Freitag (2017), nas suas vivências.

Finalmente, propomos uma questão aberta onde os alunos poderiam fazer comentários adicionais que julgassem pertinentes e não foram contemplados nas questões anteriores. Responderam os alunos 12, 16, 17 e 18. As respostas do primeiro e dos dois últimos remetem a valorização e importância conferida por eles aos recursos didáticos nas aulas de matemática, tanto no modo presencial quanto no modo remoto, pelos demais alunos. Vale destacar aqui um fragmento de fala em que o aluno 19 considera a necessidade de melhoria dos recursos no ensino remoto, conforme a transcrição: *"... Agora no ensino remoto isso deu uma leve mudada, mas ainda há caminhos a trilhar. Parabéns pela Pesquisa, Obrigado"*. Registramos o último comentário pelo fato de o mesmo reconhecer os esforços dos pesquisadores quanto a buscar saber as necessidades dos alunos para podermos trabalhar a respeito, no sentido de contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Registramos uma resposta longa que revela questões muito pertinentes, vivenciadas pelos alunos e sobre a qual nós professores já temos nos debruçado desde o advento dessa modalidade de ensino, e que vemos perpassar muitas instituições de ensino. Fizemos o destaque em vista dos detalhes do seu pensamento, com sugestões, como era solicitado na questão, conforme a transcrição que segue:

> *Acho que os professores poderiam aproveitar esse momento que está sendo EaD e tentar fazer algo mais interativo, é notável que vários professores tentam replicar o mesmo método aplicados em sala de aula nas plataformas online, mas se um aluno já tinha dificuldade antes presente em uma sala de aula, por que em casa com seu conforto ele iria conseguir focar ?... Muitos alunos trabalham e chagam cansados em casa (eu por exemplo) e ter que ficar sentado na cadeira por duas horas vendo uma aula "normal" acaba não chamando muito a atenção dos estudantes que em muitos casos preferem não assistir as aulas e estudar sozinho em outro momento. Professores poderiam utilizar aplicativos como o GeoGebra ou apresentar algum vídeo que possa ao mesmo tempo desperta o interesse do aluno, fazer com que a aula tenha um bom rendimento. Então mesmo que a situação atual esteja complicada, é possível ensinar de formar diferente, acho que chega ser necessário sair dos padrões já estabelecidos na forma de ensino, acredito que talvez a pandemia possa ajudar nesse empurrãozinho para a mudança. Peço desculpas caso encontre algum erro* Aluno 17, 2021).

Sintetizando o que encontramos nas respostas temos que os alunos participantes da pesquisa mostram uma interação positiva com os recursos didáticos, inclusive no ensino remoto, onde é forte a presença das tecnologias (Ponte, 1995). O aparato tecnológico utilizado por eles em seus relatos aponta o esforço dos professores em incluir no seu trabalho docente as novas tecnologias cabíveis nas instituições de ensino (Cunha, 2020). Os alunos mostraram-se no geral, receptivos aos recursos didáticos e também a novas metodologias, tanto tecnológicas quanto não tecnológicas. De acordo com as respostas, os recursos didáticos utilizados foram considerados favoráveis ao processo de ensino e aprendizagem, em vista da receptividade aos recursos sugerida por a quase totalidade deles.

Os autores que estudam ou pesquisam os recursos didáticos sempre reforçam os aspectos motivadores e incentivadores citados aqui (Braga, et al., 2019). Acresça-se a isso o uso das metodologias ativas, discutidas por Soares (2021) e também em *lives* disponíveis em plataformas como o *YouTube*, que conta com uma enorme variedade de canais desenvolvidos por professores, empresas de educação, instituições de ensino superior – como a própria instituição onde foi realizada a pesquisa, e afins. Acrescendo a isso o reconhecimento pelos alunos do valor dos recursos didáticos, avançamos pela importância dos mesmos no ensino, em qualquer modalidade de ensino, no curso de matemática.

Conclusão

O momento que vivemos é a continuidade de uma situação crítica social mundial que vivemos e que afeta profundamente o sistema educacional a ponto de alterar todo um cotidiano de funcionamento. Sem dúvida, a rotina das pessoas, em todos os países do mundo, passa por alterações em vista da pandemia que vivenciamos.

O objetivo geral de nossa pesquisa foi coletar as impressões e necessidades de alunos de matemática em uma universidade pública brasileira sobre o uso de recursos didáticos em aulas na modalidade ensino remoto. Indagamos sobre a eficiência dos recursos didáticos utilizados no ensino remoto na visão dos alunos participantes da pesquisa. Constatamos o reconhecimento dos alunos quanto ao esforço dos professores em apresentar bons materiais e tecnologías eficientes para o ensino.

Os resultados e discussões apresentados, juntamente com as opiniões dos alunos junto com as respectivas análises, acrescidas das discussões feitas sinalizam que alcançamos nosso objetivo. Ainda mais, consideramos que nossa busca foi profícua, e avançamos pela validade de continuar esse trabalho. Também podemos considerar termos respondido à questão de pesquisa.

Enquanto isso, nós docentes seguimos perseguindo cada vez mais fazer nosso trabalho, buscando uma adaptação à situação vigente, pesquisando, desenvolvendo e aplicando novas metodologías, novos materiais que permitam aos estudantes realizarem sua formação acadêmica.

Desse modo, avançamos na necessidade de aprofundar nossas pesquisas e o surgimento de outras investigando mais a fundo a tecnología já existente, bem como tentando novos materiais, visando oferecer ao aluno oportunidades de acessar o conhecimento e completar sua formação também no modo remoto. Ao mesmo tempo, alertamos para a necessidade urgente de adaptação das políticas públicas para o ensino, que propiciem aos atores da educação, profesores e alunos, tenhamos condição de desenvolver nossas funções com plenitude e eficiencia, gerando os melhores frutos, o que beneficiará significativamente todo o contexto social.

Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 3ª reimp., 2016.

BEHAR, P. A. **O ensino remoto emergencial e a educação a distância**. Criado em 06.07.2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coronavirus/base/artigo-o-ensino-remoto-emergencial-e-a-educacao-a-distancia. Acesso em: 05 nov.2020.

BRAGA, M. D.; MENEZES, J. E.; SEIMETZ, R., SILVA, W. P. (orgs). **Metodologias do Ensino em Matemática:** ações lúdicas, vol. II. Brasília: Paco Editorial, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC / CONSED / UNDIME, 2018.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. 12 ed. São Paulo: Cortez, 2017.

CUNHA, G. **138 iniciativas, recursos e inspirações para o ensino online em tempos de pandemia.** Disponível em < https://aulaincrivel.com/kitcovid19/>. Acesso em 27.06.2021.

FERREIRA, L. A.; CRUZ. D. S.; ALVES, A. O.; LIMA, I. P. de. Ensino de matemática e COVID-19: práticas docentes durante o ensino remoto. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 11 - número 2 – 2020.

FERREIRA, G. **Pedagoga explica diferença entre ensino remoto e EaD.** Disponível em: https://www.uninassau.edu.br/noticias/pedagoga-explica-diferenca-entre-ensino-remoto-e-ead. Acesso em: 05jun.2020.

FREITAG, I. H. A importância dos recursos didáticos para o processo ensino-aprendizagem**. UEM**, arquivos, v.21 n. 2(2017). Disponível em: https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ArqMudi/article/view/38176. Acesso em: 25 jun. 2021.

KALEFF, A. M. M. R**. Novas tecnologias no ensino da matemática**: Tópicos em ensino de Geometria: A sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da Geometria. 2 ed. Niterói: CEAD/UFF, 2006.

LIBÂNEO, J. C. **Didática.** (Livro Eletrônico). São Paulo: Cortez, 2017. Disponível em: https://www.google.com.br/books/edition/Did%C3%A1tica/q3MzDwAAQBAJ?hl=pt-BR&gbpv=1&printsec=frontcover. Acesso em: 25 jun. 2021

MENEZES, J. e.; BRAGA, M. D.; SEIMETZ, R. A formação de licenciandos em matemática com o ensino mediado pelas TDIC: visões estudantis e perspectivas profissionais. In: NEVES, R. S. P., DÖRR, R. C. (orgs). **Formação de Professores de Matemática**: desafios e perspectivas. Brasília: Appris, 2019.

MENEZES, J. E. (org.). **Jogos no ensino de matemática**: experiências exitosas na pós-graduação. Recife: UFRPE, 2013.

PONTE, J. P. Novas tecnologias na aula de matemática. **Educação e Matemática***,* 34, 2-7, 1995.

REGO, R. G. do; REGO, R. M. do. **Matematicativa.** Brasília: INEP, 1999.

RONDONI, C. A.; DUARTE, C. S.; PEDRO, K. M. Pandemia do covid 19 e o Ensino Remoto Emergencial: mudanças na práxis docente. **Interfaces Científicas**, Aracaju, v. 10, n. 1, p´. 41-57. Número Temático, 2020. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/educacao/article/view/9085. Acesso em: 10 dez. 2021

APPENZELLER, S.; MENEZES, F. H.; SANTOS, G. G.; PADILHA, R. F.; GRAÇA, H. S.; BRAGANÇA, J. F. Novos Tempos, Novos Desafios: Estratégias para Equidade de Acesso ao Ensino Remoto Emergencial. **Revista Brasileira de Educação Médica** 44 (sup.1): e0155, 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbem/a/9k9kXdKQsPSDPMsP4Y3XfdL/?lang=pt. Acesso em: 10 dez. 2021

SKOVSMOSE, O. Um convite à Educação Matemática criativa. Campinas: Papirus. **Perspectivas em Educação Matemática**, - SBEM. E-book, 2015.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema**: Jogos de matemática 3, Ensino Médio. São Paulo: Penso, 2008.

SOARES, C. **Metodologias ativas:** uma nova experiênca para a aprendizagem. São Paulo: Cortez Editora, 2021.

Link para o formulário de pesquisa: https://forms.gle/ej3Fffti5XYkkGt18

Anexo: Modelo do questionário aplicado aos participantes da pesquisa

Curso: ________________________________

Campus onde estuda: ___________________________

Período de ingresso na universidade (EX.; 2019.2) : ___________

Horário das atividades: ( ) manhã ( ) tarde ( ) noite

Caríssimo (a):

Estamos realizando uma pesquisa para conhecer suas vivências e impressões sobre o ensino remoto na UnB. O estudo objetiva coletar suas expectativas sobre o ensino remoto, quanto às suas vivências, dificuldades e superações com a modalidade de ensino no que se refere aos recursos materiais e tecnológicos e quanto às metodologias utilizadas no processo e comparativamente nos dois últimos períodos letivos. Para essa pesquisa, solicitamos-lhe encarecidamente que responda a esse questionário. Consideramos sua participação muito importante, pois você contribuirá para que tenhamos uma visão do ensino remoto na nossa universidade, quanto aos recursos utilizados. Se você aceitar participar de nossa pesquisa, clique em sim para continuar. Agradecemos sua colaboração. ( ) Sim

Em sua aula presencial você vivenciava disciplinas com uso de recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador? Em caso negativo, você gostaria de ter vivenciado? Por que? Em caso afirmativo, quantas disciplinas em média por semestre? O que achou da vivência das aulas com recursos didáticos? ____
No último semestre presencial, quantas disciplinas você cursou nas quais vivenciou recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador? Caso não tenha vivenciado o uso de recursos didáticos, gostaria de ter vivenciado? Por que? Caso tenha vivenciado, o que achou?
Você acha que aulas com recursos didáticos ajudam você a entender melhor as aulas? Por que? ____
Você acha que aulas com recursos didáticos ajudam a resolver problemas? Por que? _____
Você acha que aulas com recursos didáticos ajudam você quando estuda sozinho(a)? Em caso afirmativo, de que maneira? Em caso negativo, como os recursos didáticos o impediram de resolver os problemas? ____
No último semestre remoto, quantas disciplinas você cursou nas quais vivenciou o uso de recursos didáticos além do quadro e giz//pincel/marcador? Caso tenha vivenciado, o que você achou? Caso não tenha vivenciado, gostaria de vivenciar? ______________________
Caso você tenha vivenciado aulas ou atividades na universidade com recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador, por favor, cite quais foram eles. ____________________
Você vivenciava livros paradidáticos nas aulas ou atividades? ( ) Sim ( ) Não
Você vivenciava aulas práticas? ( ) Sim ( ) Não
Caso tenha vivenciado aulas práticas, que material era utilizado nas aulas além do quadro e giz/pincel/marcador? ____
Você considera que atividades com recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador são (pode assinalar mais de uma alternativa):
( ) mais interessantes
( ) mais dinâmicas
( ) mais esclarecedoras
( ) sou indiferente, tanto faz
( ) atrapalham o andamento das aulas
( ) não fazem falta
Você gostaria que houvesse mais atividades com recursos didáticos além do quadro e giz/pincel/marcador nas suas aulas? ( ) sim ( ) não
Por que? ____
De qual ou quais tipos de atividades você participou na universidade no modo remoto? ____
Por favor, fique à vontade para utilizar esse espaço no sentido de fazer comentários, críticas, elogios ou sugestões. Mais uma vez, agradecemos. ______________________________

Autores:

Josinalva Estacio Menezes

Licenciada en Matemáticas de la Universidad Federal de Pernambuco (1979), Maestría en Matemáticas de la Universidad Federal de Paraíba (2000), Maestría en Educación de la Universidad Federal de Pernambuco (1996), Doctor en Educación por la Universidad Federal de Rio Grande do Norte (2004) y Postdoctorado en el área de Educación Matemática en la misma universidad. Actualmente es profesora asociada en la Universidad de Pernambuco-UPE. Tiene experiencia en Matemática y Educación, con énfasis en Métodos y Técnicas de Enseñanza, actuando en los siguientes temas: Formación de profesores de Matemática, Computación Educativa, Juegos matemáticos, Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, Historia de las Matemáticas, Medios en Educación Matemática y Teoría de las Representaciones Sociales. Integra el Grupo de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas - GIEM /CNPq / UnB).

Correo electrónico: jomene@bol.com.br

Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0468-5858

Maria Dalvirene Braga

Licenciada en Matemáticas de la Universidade Católica de Brasília. Especialista en Educación Matemática de la Faculdade Jesus Maria José. Magíster en Educación de la Universidad de Brasilia (UnB). Actualmente es profesora voluntaria del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Brasilia y Consultora Externa del Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia - UNICEF. Tiene experiencia en el campo de la Educación, trabajando principalmente en los siguientes temas: educación matemática, matemática y lengua materna, resolución de problemas, currículo y formación docente. Integra el Grupo de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas - GIEM / CNPq / UnB.

Correo electrónico: dalvirenebraga@gmail.com

Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0948-8228.

Rui Seimetz

Licenciado y Máster en Matemáticas de la Universidad de Brasilia (1984) y Doctor en Matemáticas - Universidad de California, Los Ángeles (1997). Actualmente es profesor asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Brasilia. Tiene experiencia en Matemáticas, con énfasis en Álgebra. Evaluador ad hoc BASIS / SINAES / INEP. L es el lder de la Grupo de Investigación 'Grupo de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas - GIEM' (CNPq / UnB). Fue Coordinador Académico de la Maestría Profesional en Matemáticas de la Red Nacional PROFMAT en el Departamento de Matemáticas - UnB (Mar.2012 a Jun.2017).

Correo electrónico: rseimetz@mat.unb.br

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6639-9366

Como citar o artigo:

MENEZES, J. E.; BRAGA, M. D.; SEIMETZ, R. Visão de estudantes de matemática de uma universidade pública brasileira sobre o uso de recursos didáticos no ensino-aprendizagem. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 342 - 363, enero, 2022. DOI: 10.37618

Análisis fundamentado de un taller de Trigonometría: las contribuciones para el desarrollo profesional

Vania Batista Flose Jardim
vaniaflose24@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7325-267X
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Instituto Federal de São Paulo (IFSP)
São Paulo, Brasil

Eduardo Goedert Doná
eduardogdona@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7549-5066
Universidade Federal do ABC (UFABC)
São Paulo, Brasil

Janaína Mendes Pereira da Silva
jana.mendes.ps@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6540-1521
Universidade Federal do ABC (UFABC)
São Paulo, Brasil

Recibido: 08/junio/2021 **Aceptado:** 08/octubre/2021

Resumen

A partir de una oficina destinada a los alumnos del segundo grado, que tenía como objetivo oportunizar la visualización de los padrones existentes entre los ángulos y arcos de circunferencia trigonométrica y su relación con los valores del seno, coseno y tangente, con el uso de materiales manipulables y recursos visuales, este estudio tuvo el objetivo de comprender las posibles contribuciones del planeamiento, del desarrollo y de la reflexión de esa oficina para el desarrollo profesional de un grupo de profesoras. En esa práctica, estuvieron juntas una profesora formadora, que actúa en la educación básica y en la licenciatura en matemática, y dos futuras profesoras de matemática. Se trata de un informe de experiencia que se utilizó de los materiales disponibilizados por la profesora responsable y de un grupo de diálogo con todas las personas envolvidas. Se observó que la oficina contribuyó para la formación de las futuras profesoras, en el sentido de envolverlas con los conocimientos de la didáctica de la matemática, evidenciados en sus relatos y, posteriormente, puestos en nota, por la búsqueda de la formación continuada. En relación a la profesora responsable, se nota que, a partir de la referida oficina, la docente también buscó la información continuada y pasó a destinar una atención más grande al planeamiento de sus clases.

Palabras-clave: Didáctica de la Matemática; Formación de Profesores; Análisis de la Práctica; Trigonometría.

Grounded analysis of a Trigonometry workshop: contributions to professional development

Abstract
Based on a workshop intended for high-school students with the objective of promoting the visualization of the existing patterns between the angles and arcs of the trigonometric circumference and its relation to sine, cosine and tangent through the use of manipulative materials and visual resources, this study aims to understand the possible contributions of planning, development of, and reflection upon this workshop to the professional and academic development of a group of teachers. This practice involved a teacher trainer who works in elementary education as well as in math graduation courses and two future math teachers. It consists of a experience report which relied on materials provided by the responsible trainer and on a roundtable with all involved parties for data collection. It was observed that the workshop had contributed to the future teachers' formation by providing them with knowledge of didactics for mathematics, which was made evident through their accounts of the process, and notable in their seek for further academic development. As far as the responsible teacher trainer is concerned, it was also noted that she pursued continued education and dedicated more attention to her lesson planning subsequently to the aforementioned workshop.

Keywords*:* Mathematics didactics; Teacher training; Practice analysis; Trigonometry.

Análise fundamentada de uma oficina de Trigonometria: as contribuições para o desenvolvimento profissional

Resumo
A partir de uma oficina destinada a alunos do ensino médio, que visava oportunizar a visualização dos padrões existentes entre os ângulos e arcos da circunferência trigonométrica e sua relação com os valores do seno, cosseno e tangente, com o uso de materiais manipuláveis e recursos visuais, este estudo teve o objetivo de compreender as possíveis contribuições do planejamento, do desenvolvimento e da reflexão dessa oficina para o desenvolvimento profissional de um grupo de professoras. Nessa prática, estiveram envolvidas uma professora formadora, que atua na educação básica e na licenciatura em matemática, e duas futuras professoras de matemática. Trata-se de um relato de experiência que, utilizou-se dos materiais disponibilizados pela professora responsável e de uma roda de conversa com todas as envolvidas. Observou-se que a oficina contribuiu para a formação das futuras professoras, no sentido de envolvê-las com os conhecimentos da didática da matemática, evidenciados em seus relatos e notabilizados, posteriormente, pela busca da formação continuada. Em relação à professora responsável, nota-se que, a partir da referida oficina, a docente também buscou a formação continuada e passou a destinar maior atenção ao planejamento de suas aulas.

Palavras-chave: Didática da Matemática; Formação de professores; Análise da prática; Trigonometria.

Introdução

A trigonometria[1] é um conteúdo bastante valorizado como componente do currículo de matemática, pois a aplicação de seus métodos já existia muito antes do século XXI. Prova disso é a utilização de seu conteúdo em outras áreas do conhecimento, tais como a física, a astronomia, a computação gráfica, a óptica e as engenharias que requerem compreensão de suas funções. Na prática, os princípios da trigonometria estão presentes no trabalho de carpinteiros, agrimensores, navegadores, arquitetos etc. (JESUS; SOUZA, 2016; SOUZA, 2018). Apesar da sua importância para o ensino, os conceitos da trigonometria provocam desafios na aprendizagem na sala de aula, as opções da prática docente contribuem para o distanciamento deste conteúdo quando não aplicados à realidade dos estudantes (ALVES, 2016; FEIJÓ, 2018).

Como uma alternativa ao tradicionalismo velado no ensino da trigonometria, ainda existente e perpetuado entre os professores de matemática (JESUS; SOUZA, 2016; ALVES, 2016) este estudo propõe-se compreender as possíveis contribuições do planejamento, do desenvolvimento e da reflexão de uma oficina para o desenvolvimento profissional de um grupo de professoras. Para a produção dos dados, utilizou-se dos materiais disponibilizados pela professora responsável, também autora deste artigo, acerca do planejamento e desenvolvimento da oficina, como notas, materiais didáticos e fotografias, bem como o vídeo de uma roda de conversa sobre a avaliação com a própria professora e as duas futuras professoras de matemática, envolvidas na prática. O aspecto relevante deste estudo foi o trabalho desenvolvido pela professora responsável ao realizar uma oficina pedagógica que une o ensino para alunos da educação básica e futuros professores de matemática.

Para a elucidação deste trabalho, apresenta-se o referencial teórico que nos serviu de aporte, os percursos metodológicos, as análises e, por fim, as discussões. Encerramos o trabalho com as considerações finais, discorrendo acerca do que foi feito e das contribuições da oficina analisada.

[1] Ramo da matemática que trata do cálculo dos elementos de um triângulo plano pelos dados numéricos, e da aplicação dessas funções ao estudo das figuras geométricas (DICIONÁRIO ONLINE DE PORTUGUÊS) https://www.dicio.com.br/trigonometria/.

Referencial Teórico

Nesta seção, apresentamos algumas caracterizações relacionadas ao ensino de trigonometria com o uso de recursos didáticos; posteriormente, trazemos alguns referenciais da didática da matemática que elucidam a importância do planejamento, do desenvolvimento e da reflexão da oficina para a prática docente. Por fim, discorremos sobre a teoria dos Três Mundos e da importância da demonstração em sala de aula, demonstração esta que guiará a análise.

A trigonometria e seu ensino por meio de materiais manipuláveis

A trigonometria se origina no estudo da geometria, concentra-se no triângulo retângulo por meio da constituição de proporções entre os comprimentos de seus lados e entre seus semelhantes. Com a observação da relação entre uma corda de um círculo e seu arco, com auxílio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo, é possível ampliar a ideia para os ângulos de uma circunferência (HERTEL; CULLEN, 2011).

Historicamente, muitos dos resultados geométricos, que agora declaramos trigonométricos, receberam uma abordagem inicial e exclusiva da geometria de Euclides. Ptolomeu foi um dos primeiros astrônomos que foi além de Euclides, utilizando uma tábua de cordas para construir uma tabela com os valores de seno dentro do intervalo de 0º e 90º (ALVES, 2016; SILVA, 2013). A construção da primeira tabela trigonométrica, nos moldes de como conhecemos hoje, é atribuída à Hiparco, o que o levou a ser conhecido como “o pai da Trigonometria” (JESUS; SOUZA, 2016, p. 2).

O conteúdo da trigonometria, no Brasil, é abordado de forma explícita somente a partir dos anos finais do ensino fundamental e a trigonometria é considerada uma área da Matemática importante para a educação básica, pois seus elementos encontram-se facilmente em aplicações no cotidiano. O ensino da trigonometria inicia-se com o desenvolvimento das relações trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).

> O estudo da trigonometria normalmente começa com o foco nas proporções formadas pelos lados dos triângulos retângulos. Nesta abordagem moderna, considera o ensino tanto dos triângulos quanto dos círculos, ao longo de um período de três anos, conforme os alunos progridem nos anos finais da Educação Básica (ALVES, 2016, p. 26).

Porém, os conceitos e aprofundamentos deste conteúdo são estudados com mais ênfase apenas no ensino médio, período de escolaridade em que se introduz o uso do radiano como uma unidade de medida relacionada ao ângulo. Entretanto, é possível observar dificuldades como a falta de domínio com o conceito de radiano e dificuldades na visualização de ângulos maiores que $\pi/2$ ou negativos (FEIJÓ, 2018).

Visando contribuir com a compreensão dos conteúdos de trigonometria por parte dos estudantes do ensino médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento orientador dos currículos escolares no Brasil, direciona para a contextualização dos conteúdos dos componentes curriculares. O documento indica que cabe ao professor identificar estratégias, contextualizar/apresentar/representar/exemplificar esses conteúdos:

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área (BRASIL, 2018, p. 470).

No mesmo sentido apontado pela BNCC, estudos refletem a utilização de materiais manipuláveis e recursos tecnológicos para o ensino da matemática (FIORENTINI; MIORIM, 1990; LORENZATO, 2006; PASSOS, 2006) e, em especial, o uso destes materiais e recursos para o ensino de trigonometria (CARDOSO, 2013; SOUZA, 2018).

Nesse sentido, Souza (2018) afirma que, para o ensino de trigonometria, é possível utilizar materiais didáticos manipuláveis e agregar os recursos digitais, como aplicativos gratuitos para uso em sala de aula, tais como o *Winmat, Winplot* e o *GeoGebra*, e propõem que ambos podem ser experimentados simultaneamente:

> Considerando, por exemplo, o ensino de Trigonometria, os dois enfoques podem ser considerados com a construção de um material manipulável e na sequência a representação computacional deste modelo prático por meio de um software de geometria dinâmica tal como o GeoGebra (SOUZA, 2018, p. 17).

Ainda sobre os materiais manipuláveis, Lorenzato (2006, p. 18) apresenta que o material didático pode ser compreendido como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem", bem como destaca que o material didático concreto pode ter duas explanações "ao palpável, manipulável e a outra, mais ampla, inclui também imagens gráficas" (LORENZATO, 2006, p. 22-23).

Pensando dessa forma, Lorenzato (2006) ainda estabelece duas classificações para os tipos de materiais didáticos: (i) material manipulável estático, que é aquele que não é possível ser transformado, pois sua estrutura física não pode ser alterada, mas permite o sujeito apenas manusear e observar o objeto e o (ii) material manipulável dinâmico, que seria um material concreto que proporciona a transformação, visto que sua estrutura física se modifica à medida em que sofre alterações, por meio de operações realizadas pelo sujeito que o manipula (LORENZATO, 2006). Ao analisar as duas classificações de materiais, o autor considera vantajoso o segundo material em relação ao primeiro, pois observa que a transformação se torna um facilitador para as possíveis percepções de propriedades.

Sem perder de vista o que foi colocado por Souza (2018) e Lorenzato (2006) sobre a utilização de materiais manipuláveis como recursos em sala de aula, atualmente, tem-se à disposição diversas possibilidades de uso de recursos digitais, como calculadoras, lousas digitais, projetores, computadores, *laptops* e *smartphones*. Tais recursos podem ser de uso tanto dos professores, quanto dos alunos. A apropriação e o desenvolvimento de ferramentas digitais com vistas a contribuir e/ou potencializar o ensino da matemática tem se mostrado um espaço frutífero em meio as pesquisas na área (BORBA, 1999; BORBA; VILLARREAL, 2005; NÓBRIGA, 2015; SOUZA, 2018).

Nesse sentido, os materiais manipuláveis e digitais se tornam significativos no processo de ensino e de aprendizagem da trigonometria, visto que, ao serem empregados, eles se caracterizam como uma alternativa metodológica que permite visualização e representação geométrica por meio do movimento e da interatividade. Constata-se que tanto o uso dos materiais manipuláveis e/ou uso de recursos tecnológicos, quando fazem parte do planejamento do professor, contribuem no ensino dos conteúdos de trigonometria (SOUZA, 2018).

Dedicamos essa primeira subseção à compreensão e apresentação elementar de aspectos relacionados ao ensino da trigonometria na educação básica. Após compreendermos a importância da utilização de materiais manipuláveis e/ou recursos digitais para o ensino da trigonometria, direcionamos os olhares aos elementos da didática da matemática que contribuirão para pensarmos a formação de professores, voltada ao ensino da matemática, em especial da trigonometria. Esse elemento se faz importante nesse trabalho, pois a oficina também envolve duas futuras professoras, que têm a oportunidade do contato direto com a prática, conforme será apresentado na sequência deste texto.

Alguns elementos da didática da matemática

A didática é um caminho para o desenvolvimento do "aprender a ensinar" que não é atrelado apenas ao conhecimento científico, mas visa atingir o desenvolvimento dos alunos quanto a sua capacidade intelectual. Para Libâneo (2019), a didática estabelece uma relação com a aprendizagem prática do professor, visto que, "ela é o meio mais importante para um profissional aprender a ensinar visando o desenvolvimento das capacidades intelectuais dos alunos e o desenvolvimento da personalidade" (LIBÂNEO, 2019, p. 159).

Sobre a didática da matemática, D'Amore (2007, p. 183) a considera como a "arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito". O autor acrescenta a necessidade de compreensão como "um conjunto de modificações de comportamentos" e que carece de gestão de diversos domínios, conhecimentos e representações, permeadas de práticas didáticas. No sentido apontado pelo autor, também, ressaltamos a importância de desenvolver os aspectos relacionados à didática da matemática durante a formação inicial e compreendemos que um meio de oportunizar essa concretização é dispondo de espaços de prática, como é o caso da oficina em que as futuras professoras foram convidadas a participar.

Nesse sentido, Ponte (1999) descreve como as experiências vividas pelos professores podem proporcionar momentos de aprendizagem, pois:

> [...] um aluno aprende Matemática trabalhando em tarefas matemáticas que define para si próprio ou que lhe são propostas pelo professor e falando sobre elas com os seus colegas ou reflectindo sobre os seus raciocínios e os seus resultados [...] Também os professores e os futuros professores aprendem sobretudo a partir da sua actividade e da reflexão sobre a sua actividade realizada num contexto de práticas enquadradas numa cultura profissional bem definida. (PONTE, 1999, p. 7).

Ao apontar a importância da participação em práticas profissionais na formação de professores, seja inicial ou continuada, Ponte (2000) define a didática da matemática como um campo científico misto, que se apoia em teorias e metodologias de outros campos das ciências sociais e humanas, porém com seus desafios e problemas próprios, dentro do ensino, da aprendizagem da matemática e dos profissionais inseridos nela, que são docentes que atuam na formação de professores, na academia e na escola básica. O autor também reflete sobre o papel da didática da matemática associado ao domínio de problemas sociais, na análise, formulação e no modo como se comporta ou:

> [...] defronta o ensino e a aprendizagem desta disciplina, proporcionando conceitos, estratégias e instrumentos que podem ser de algum modo úteis para os que actuam no

> terreno profissional e na formação, para a administração educativa e para todos os que se interessam pelos problemas do ensino (PONTE, 2000, p. 330).

Ainda enfatizando o "aprender a ensinar", Serrazina (2017) indica a importância do planejamento. Segundo a autora, é necessário envolver futuros professores em práticas de ensino exploratório[2], de modo que eles sejam capazes de delinear objetivos de aprendizagem, planejar e avaliar o seu ensino. Para Serrazina (2017), tais ações contribuem para a formação do professor e, assim, possibilita a implementação de métodos de ensino diferentes daqueles aos quais foram submetidos quando alunos da educação básica.

Serrazina (2017) apresenta um conjunto de orientações para o planejamento de uma aula que utilize o ensino exploratório. Dentre essas orientações, a autora enfatiza que a antecipação do professor quanto às possíveis resoluções dos alunos, interpretações e equívocos devem ser refletidos e, quando planejados adequadamente, tais etapas possibilitarão uma melhor participação no processo de ensino.

Nesse sentido, também entendemos que a didática da matemática, de maneira específica devido ao conhecimento matemático que a envolve, pode estabelecer caminhos para a aprendizagem do professor, ou seja, auxilia no aprender, como promover boas práticas, ainda durante a formação inicial, e permanece como uma impulsionadora no desenvolvimento profissional do professor durante o exercício de sua profissão FIORENTINI; CRECCI, 2013, p. 13).

Na próxima subseção, apresentaremos a teoria dos Três mundos da matemática (TALL, 2008) e as reflexões sobre as demonstrações no ensino, que serviram como aporte teórico para a análise da oficina a qual nos propusemos apresentar e tecer as fundamentações.

A teoria dos três mundos e a demonstração no ambiente escolar

A teoria de David Tall (2008), intitulada "*Três mundos da Matemática",* apresenta estruturas para o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático avançado com base nas atividades humanas de percepção, ação e reflexão na construção de processos e no entendimento de conceitos até o uso da linguagem formal na relação entre o objeto e o indivíduo.

[2] Segundo Ponte (2005), o ensino exploratório é uma metodologia de ensino que tem como característica principal deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem.

Os mundos descritos por ele são: *mundo conceitual-corporificado,* que tem por base a percepção e a reflexão sobre as propriedades dos objetos vistos no mundo real e interiorizados pela mente; o *mundo simbólico-proceitual,* que cresce fora do mundo real por meio da ação e é simbolizado como conceitos concebíveis que funcionam, tanto como processos realizados quanto como conceitos (preceitos), e o *mundo axiomático-formal,* que tem por base as definições e provas que invertem a sequência de construção de significado e que partilham de definições baseadas em objetos conhecidos para conceitos formais, baseados em definições teóricas.

David Tall (2008) aponta para a importância de se discutir a relação entre os mundos, de modo que a corporificação e o simbolismo podem servir como uma base de ideias para o mundo formal, assim como teoremas de estrutura, concebidos de forma axiomática, podem revelar aspectos de uma estrutura matemática de forma corporificada ou simbólica, o que proporciona um aprendizado transitório entre os mundos. Porém, o autor defende que nem sempre o ensino da matemática deve objetivar alcançar o mundo formal, mas a consolidação dos conceitos dependerá da idade e da série em que eles estão sendo trabalhados, por isso, a importância da transição entre os mundos.

O mundo formal é caracterizado pela demonstração; nesse sentido, Boavida (2001) considera as várias e possíveis funções atribuídas a este ato no contexto escolar. Ela relaciona que uma boa demonstração vai além do convencimento, pois pode elucidar, como uma relação funcional, ou ainda se esta estabelece uma verdade na busca de compreensão de resultados. Para a autora, "mais importante do que o formato final de uma demonstração é a atividade de a produzir, é a sensibilidade ao seu interesse e necessidade, é a comunicação clara e correta das ideias matemáticas que estão em jogo" (BOAVIDA, 2001, p. 11).

Boavida (2001, p. 13) indica que os argumentos, para que sejam "matematicamente válidos", necessitam utilizar fatos anteriormente conhecidos, aceitos como verdadeiros, baseados em justificações logicamente deduzidas a partir de conclusões. Sobre a "gênese da aprendizagem da demonstração" nos primeiros anos escolares, a autora reflete que:

> Aceitar que a aprendizagem da actividade de demonstrar se deve iniciar muito cedo remete para a importância de dedicar, desde os primeiros anos, uma atenção especial à seleção de tarefas que ajudem os alunos a criarem, descreverem e examinarem padrões para detectarem regularidades, a formularem conjecturas, a explorarem estas conjecturas e a produzirem argumentos para as validarem ou rejeitarem baseados no trabalho que desenvolvem (BOAVIDA, 2001, p. 15).

Para finalizar, a autora enfatiza que as ações do professor devem possibilitar que os alunos sejam responsáveis pelas articulações de seus raciocínios, bem como suas ações também devem criar oportunidades para o envolvimento deles nas discussões matemáticas, de forma que fomentem a apresentação de modos de justificação que estejam ao alcance dos estudantes, apoiadas em propriedades e relações matemáticas (BOAVIDA, 2001).

Pensando na importância apresentada pela demonstração (BOAVIDA, 2001) e no modo como Tall (2008) nos chama a atenção para transitar entre os mundos, acreditamos no equilíbrio entre as ideias de forma a trabalhar na educação básica com demonstrações que partam do mundo corporificado, transite no mundo proceitual e culmine no mundo formal, dentro do que é esperado para a idade escolar dos alunos. Após termos apresentado o referencial teórico que nos servirá de aporte para a análise da oficina, partimos para o percurso metodológico, visando apresentar o desenho do estudo e as informações referentes a ele.

O percurso metodológico: produção e organização dos dados

O presente artigo trata-se de um relato de experiência, o qual foi necessário estar em contato com as experiências diretas dos envolvidos como agentes formadores de uma prática docente, no caso a oficina, para ser analisado (LUDKE; ANDRÉ, 2015).

A produção dos dados constituiu-se por uma roda de conversa[3] na busca das memórias individuais dos sujeitos[4], bem como os registros de preparação e de prática, disponibilizados pelas professoras envolvidas. É preciso considerar que a roda de conversa, neste caso específico, possui as mesmas características de uma entrevista estimulada (LUDKE; ANDRÉ, 2015), porém, ela é viabilizada sem um roteiro definido em um ambiente virtual descontraído. Utilizamos dessa ferramenta para que as professoras, envolvidas na oficina, pudessem relatar sobre a prática de maneira mais livre. Vale ressaltar que este relato apresenta a visão das três professoras que apresentam como as memórias de tal experiência contribuíram para o seu desenvolvimento profissional.

[3] A roda de conversa ocorreu em um ambiente virtual e a gravação foi realizada por meio do aplicativo de reuniões remotas “Zoom” (Videoconferência Empresarial e Web Conferência), https://zoom.us/pt-pt/meetings.html.

[4] Como sujeitos integrantes dessa oficina enquanto formadoras têm-se três professoras, sendo que duas delas na época em que foi desenvolvida a oficina eram estudantes de licenciatura em matemática, como já foi reforçado e a outra, professora responsável pelas turmas e também formadora no referido curso de licenciatura.

Durante a conversa, os principais tópicos abordados pelas professoras foram o planejamento, o desenvolvimento e a reflexão da oficina.

Contexto

A referida oficina foi planejada e desenvolvida para duas turmas do ensino médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), campus São Paulo. Nessa instituição de ensino, é oferecida a educação profissional e tecnológica desde o nível médio até a pós-graduação.

O IFSP, como é popularmente conhecido, foi instituído em 2008, mediante transformação do Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo por meio da Lei nº 11.892 em Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, juntamente com outros 38 institutos em todo o país. Nele, metade das vagas é destinada à oferta de cursos para a educação profissional técnica de nível médio, prioritariamente na forma de cursos integrados e o mínimo 20% das vagas para cursos de licenciatura e programas de formação pedagógica.

O campus São Paulo é o maior e o mais antigo dos 37 campi que compõem o IFSP, e os trabalhos neste campus iniciou-se em 1909, como Escola de Aprendizes Artífices, passou a ser a Escola Técnica Federal de São Paulo em 1965 e, após a implementação dos primeiros cursos de nível superior em 1999, recebeu a denominação de Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo (CEFET-SP). Martins (2016) complementa que o Campus São Paulo é

> [...] o que possui maior gama de cursos ofertados pelo IFSP. É também o mais antigo, tem sua história diretamente relacionada com a sua fundação em 1909, onde se deu origem a primeira escola desse sistema educacional no estado de São Paulo. O IFSP foi criado em conformidade com a Lei 11.892, de 29 de dezembro de 2008 (MARTINS, 2016, p. 10).

Atualmente, o campus oferece cinco cursos técnicos integrados ao ensino médio, sendo quatro deles com a duração de quatro anos (mecânica, eletrônica, eletrotécnica e informática) e um na modalidade de educação de jovens e adultos de técnico de qualidade, com duração de três anos. Os alunos matriculados nos cursos integrados ao ensino médio cursam as disciplinas da Educação Básica, concomitantemente ao curso profissionalizante, em um período de três ou quatro anos, dependendo do plano de cada curso que é elaborado nos diversos campi.

Também em nível médio, são oferecidos ainda os cursos técnicos de edificações, eletrotécnica e telecomunicações. Em nível superior, são oferecidos cinco cursos de tecnologia, sete cursos de bacharelado na área de engenharia e arquitetura e seis cursos de licenciatura, entre eles, o curso de licenciatura em matemática, em andamento desde 2008.

Em um ambiente educacional com tamanha variedade de níveis e modalidades em seus cursos, algumas vantagens são proporcionadas aos estudantes quanto ao seu desenvolvimento profissional. Por exemplo, um aluno do curso de licenciatura tem, no seu espaço de formação, o contato com os alunos da educação básica que, por sua vez, podem participar de atividades, como nas feiras e semanas acadêmicas[5], em conjunto com os alunos dos cursos de nível superior de áreas correlatas ao seu curso técnico.

A oficina

Foi no contexto descrito anteriormente, que uma das autoras deste artigo, professora de matemática de duas turmas de 1º ano do curso técnico integrado ao médio durante o ano de 2018, também formadora do curso de licenciatura em matemática deste campus, encontrou a oportunidade para desenvolver uma oficina para seus alunos, com duração de quatro horas, durante a Semana de Educação Ciência e Tecnologia. Intencionada em reservar um tempo maior em relação ao período de aula[6], a oficina, baseada no ensino exploratório (SERRAZINA, 2017), tinha o objetivo de oportunizar a visualização dos padrões existentes entre os ângulos e arcos da circunferência trigonométrica e a relação deles com os valores do seno, cosseno e tangente, a partir dos materiais manipuláveis e recursos visuais. Desse modo, a oficina foi destinada apenas aos alunos destas turmas, já que eram poucas as opções no evento com foco principal nestes alunos, mas era aberta para a observação dos alunos da licenciatura em matemática.

Aproveitando a proximidade com os cursos de licenciatura, proporcionada pela instituição, a professora convidou duas alunas do curso de licenciatura em Matemática para o planejamento e a implementação da oficina, o que possibilitou momentos de discussão durante o planejamento, o que nem sempre é possível fazer nas aulas recorrentes. Esse fato, possivelmente, contribuiu para a formação docente das alunas de licenciatura, bem como para o desenvolvimento profissional da professora, o que buscaremos descrever a partir de agora. Nas próximas subseções, descrevemos detalhadamente a oficina. Portanto, trazemos os

[5] Um desses eventos trata-se da Semana de Educação Ciência e Tecnologia, que acontece geralmente no mês de setembro. Os centros acadêmicos, professores e técnicos-administrativos do campus promovem palestras, minicursos, mesas redondas e oficinas relacionadas às áreas de atuação profissional e diversos temas ligados à atualidade. Neste evento, os professores têm a liberdade de promover oficinas tanto para os alunos quanto para a comunidade acadêmica e, assim, proporcionar momentos de integração e inovação.

[6] As aulas no campus São Paulo possuem 45 minutos cada.

objetivos que foram traçados para a mesma, os métodos e recursos utilizados, bem como a avaliação. Para operacionalizar tal detalhamento e facilitar as análises, dividimos a apresentação da oficina em três partes: (i) planejamento, (ii) desenvolvimento e (iii) reflexão.

Planejamento

A escolha do conteúdo de trigonometria se deu pela sua proximidade com o currículo, visto que o plano dos cursos técnicos integrados ao médio do IFSP coloca que este conteúdo deve ser tratado ao final do 1º ano. Além disso, a escolha também foi pautada nas dificuldades apresentadas pelos alunos ao trabalharem com tal conteúdo, o que vai de encontro ao que foi descrito por Feijó (2018).

Para dar início ao planejamento da oficina, o grupo de professoras[7] optou em partir das dificuldades apresentadas pelos alunos acerca do conteúdo de trigonometria, que foram observadas pela professora responsável durante anos anteriores de sua docência. Desse modo, elas discutiram como seria abordado os conhecimentos prévios dos alunos e como eles seriam direcionados em determinados momentos da oficina, bem como quais estratégias de ensino seriam utilizadas. Com vistas ao que foi discutido, optou-se pelo uso de materiais manipuláveis dinâmicos, confeccionados pelas próprias professoras (Figura 1) com o intuito de tornar "mais visível" o objeto matemático que seria trabalhado, além do uso recorrente do *software Geogebra,* como uma alternativa tecnológica.

Figura 1 – Materiais confeccionados pelas professoras

Fonte: Acervo próprio, 2021.

Os recursos escolhidos, durante o planejamento, visavam auxiliar os alunos na construção de uma circunferência trigonométrica, que apresentasse seus ângulos, arcos e valores das principais razões (seno, cosseno e tangente). Entretanto, foi discutido pelo grupo de

[7] Durante a descrição e análise da oficina, optamos por utilizar o termo "grupo de professoras" para se referir à professora responsável pelas turmas e as duas futuras professoras envolvidas, pois entendemos que a primeira deu voz às demais na construção e desenvolvimento da oficina.

professoras a necessidade em retomar alguns conceitos a partir da trigonometria no triângulo retângulo, que foi revisado com os alunos no início do ano letivo, e o conceito de arco. Para a retomada desses conceitos, utilizaram-se materiais manipuláveis (triângulos coloridos) e, na sequência, com o uso de barbantes e papéis coloridos, desenvolveram-se estratégias para facilitar o entendimento do conceito de arco de circunferência.

A oficina foi dividida em três partes: i) revisão sobre trigonometria no triângulo retângulo, ii) definição de radiano e relações entre radianos e ângulos; e iii) a construção da circunferência trigonométrica com auxílio de quatro tabelas abordadas na tarefa matemática. Em síntese, o grupo de professoras, em seu planejamento, procurou articular materiais manipuláveis combinados com questões e tabelas em uma tarefa matemática para oportunizar discussões que amparassem os alunos na construção da circunferência, ao mesmo tempo em que se utilizasse dos recursos como uma forma de justificar algumas propriedades referentes à circunferência da trigonométrica.

Para orientação dos alunos e sistematização dos resultados que seriam encontrados por eles, foi elaborada pelo grupo de professoras uma tarefa matemática com a finalidade de nortear os momentos de *"hands-on"*[8], que os auxiliou na observação dos padrões e regularidades e serviram como um registro que possibilitou, posteriormente, uma avaliação do entendimento dos alunos sobre o conteúdo matemático abordado. A tarefa matemática apresentava tabelas a serem preenchidas e questões norteadoras que visavam auxiliar o entendimento dos alunos quanto às relações entre ângulos e os arcos na circunferência trigonométrica.

Desenvolvimento

A oficina foi ministrada duas vezes (uma para cada turma do 1º ano) e teve duração de três horas cada. No início da oficina, os alunos eram instruídos a se organizarem em grupos com 5 ou 6 integrantes. Em seguida, cada grupo recebia um conjunto de materiais, contendo régua, compasso, tesoura, cola, barbantes, folhas de sulfite coloridas e a tarefa matemática.

Na primeira parte da oficina, houve uma conversa entre a professora responsável e os alunos. Para direcionar e ilustrar os conceitos envolvidos na conversa, ela utilizou os triângulos coloridos. Após a conversa, os alunos foram convidados para o preenchimento da primeira

[8] Expressão utilizada na educação e/ou empresa que indica “mão na massa” ou “aprender fazendo”, com vistas ao favorecimento da aprendizagem.

tabela da tarefa matemática, sobre os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos notáveis.

A segunda parte da oficina contou com dois momentos: i) o entendimento do conceito de radianos, e ii) o preenchimento de uma outra tabela que relaciona valores de ângulos e seus arcos correspondentes. Para o primeiro momento da segunda parte, foi pedido aos alunos que desenhassem com o compasso uma circunferência de raio qualquer; depois, sem o uso da régua, eles deviam cortar pedaços de barbantes com o mesmo tamanho do raio, demarcado na folha de sulfite, e colocar sobre a circunferência (Figura 2).

Figura 2 – Circunferência feita pelos alunos

Fonte: Acervo próprio, 2021.

Como antecipado e planejado pelo grupo de professoras, todos os grupos de alunos utilizaram seis pedaços de barbante; entretanto, uma pequena parte da circunferência ainda ficou descoberta. O grupo de professoras circulava pelos grupos de alunos, fazendo questionamentos como: *Existe alguma explicação matemática para isso? Quanto do pedaço de barbante, com medida igual ao raio, vocês estimam que ainda precisa para cobrir o resto da circunferência? Vocês já fizeram isso [a atividade de cobrir a circunferência] antes?*

Para chegar à estimativa solicitada, alguns alunos utilizaram um pedaço do barbante com a mesma medida do raio e dobraram em três partes, observando que a medida faltante era próxima de 30% do raio. Fazendo uma comparação com a fórmula já conhecida por eles de anos escolares anteriores e a atividade desenvolvida, a professora justifica o porquê do comprimento de uma circunferência ser dado por 2π vezes o raio, utilizando-se do desenho da circunferência coberta por barbantes.

Além desta justificativa, a construção dirigida pelo grupo de professoras, também, permitiu a construção do conceito de radiano, o qual se refere à medida de um arco a partir do tamanho do raio da própria circunferência. O tratamento dado ao conceito de radiano permitiu aos alunos um entendimento a partir da manipulação com os materiais e a corporificação de uma fórmula já conhecida por eles, mas aparentemente sem significado.

Após o entendimento do conceito de radiano e da relação do comprimento da circunferência com o ângulo de 360°, iniciou-se o segundo momento da segunda parte da oficina, na qual foi solicitado aos alunos o uso da proporção para encontrar os valores, em radianos, para os ângulos que seriam utilizados na circunferência trigonométrica, no caso, alguns múltiplos dos ângulos notáveis.

A estratégia adotada pelo grupo professoras, nesse momento, consistiu na disposição dos valores dos ângulos, por exemplo: na primeira linha pedia-se o valor em radianos para *360°* seguido da sua metade, *180°* que resulta em $\pi\, radianos$. De forma semelhante, voltou-se a comparar os ângulos *60°* com *180°* e em seguida *120°* com *60°*, o que leva ao triplo e o dobro do valor em radianos para o ângulo de *60°*, respectivamente. De forma recorrente, os alunos encontraram os valores em radianos dos ângulos propostos, realizando divisões e multiplicações a partir de uma relação já conhecida entre ângulos e radianos.

A intenção do grupo de professoras, nesta parte da tarefa, era que os alunos chegassem ao valor em radianos para um determinado ângulo a partir dos valores de ângulos já conhecidos anteriormente. Os alunos realizaram tal tarefa de forma recorrente, apenas utilizando a divisão ou a multiplicação entre os valores já conhecidos para encontrar os valores (em radianos) dos ângulos pedidos na tarefa. Para essa observação acerca das possíveis semelhanças entre os valores listados, foi elaborada a seguinte questão para a tarefa: *Se você fosse agrupar esses ângulos levando em consideração a medida em radianos, como você faria?*

A terceira parte da oficina abordou o estudo da circunferência trigonométrica. Para tal, o grupo de professoras utilizou três recursos, além da tarefa matemática, quais sejam: i) a circunferência confeccionada por elas fixa na lousa (Figura 1), ii) a projeção do *software Geogebra,* e iii) uma folha de sulfite, acompanhada de régua e compasso para que cada aluno pudesse confeccionar sua própria circunferência trigonométrica a partir das instruções e discussões direcionadas pelas professoras.

Na tarefa matemática, além de completar a tabela com os valores requeridos, os alunos deveriam apresentar uma justificativa para as semelhanças nos valores observados. Neste momento da oficina, o grupo de professoras direcionou uma discussão com o uso dos materiais manipuláveis para que, junto dos alunos, fosse estabelecida uma justificativa, ainda que visual, para a igualdade entre os valores de sen 30° e sen 150°, que era consequência da simetria da circunferência trigonométrica em relação ao eixo das ordenadas. A partir dessa discussão, os alunos, ainda em seus grupos, desenvolveram o restante da tarefa, que solicitava os valores em radianos e das razões trigonométricas de todos os ângulos que foram trabalhados na segunda parte, agrupados em quatro tabelas, sendo a primeira para 30°, 150°, 210° e 330°, a segunda para 45°, 135°, 225° e 315°, a terceira para 60°, 120°, 240° e 300° e a última com 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Para auxiliar na realização dessa etapa da oficina, durante todo o processo de preenchimento das tabelas e de construção da circunferência, os alunos recorreram aos materiais que ficaram expostos na lousa para explanar suas dúvidas. Da mesma forma, as professoras também dispuseram desses materiais para responder sobre os questionamentos que visassem à compreensão das relações entre os valores das razões trigonométricas na circunferência.

Finalizando a oficina, os alunos foram direcionados a responder as últimas questões norteadoras da tarefa, de forma a sistematizar os conhecimentos oportunizados. Para conduzir a sistematização, o grupo de professoras formulou as seguintes questões: *Você observou alguma relação entre os valores obtidos para seno, cosseno e tangente dos ângulos, quais? Como você explicaria isso? O que você observou ao completar essas tabelas? Existe alguma relação entre os ângulos escolhidos para cada tabela? Descreva.*

Com essas questões, acredita-se que o objetivo do grupo de professoras foi atingido, isto é, oportunizar aos alunos a visualização dos padrões existentes entre os ângulos e arcos da circunferência, além de explorarem esses padrões com os valores do seno, cosseno e tangente a partir dos materiais manipuláveis e recursos visuais. Mediante o propósito e o contexto no qual a oficina foi oferecida, a professora responsável pela turma deu continuidade ao conteúdo de trigonometria em suas aulas subsequentes. Algumas impressões, decorrentes da participação dos alunos na oficina, foram mencionadas na roda de conversa que foi analisada para este artigo. Algumas destas impressões estão descritas na subseção de reflexão.

Reflexão

Para a reflexão sobre a oficina, utilizamos dos relatos feitos pelo grupo de professoras durante a roda de conversa. Visando operacionalizar a apresentação, além do termo “grupo de professoras”, optamos por utilizar um codinome para identificar cada uma das participantes; esses codinomes representam nomes de flores. Portanto, a partir desse momento, o grupo de professoras é constituído pela professora responsável, Flor de Maio (uma das futuras professoras) e Lavanda (a outra futura professora).

Durante a conversa realizada com o grupo de professoras, foi possível observar a reflexão que elas realizaram acerca da oficina. Elas relataram a importância da realização de aulas que envolvam discussões e materiais manipulativos e do engajamento no planejamento mais detalhado das ações a serem tomadas, bem como no uso de recursos e estratégias que oportunizem a maior participação dos alunos.

A professora responsável relatou que, nas aulas posteriores à oficina, ao tratar sobre trigonometria na circunferência, os alunos apresentaram melhor desenvoltura no uso de valores das razões trigonométricas e nas relações entre ângulos e radianos em comparação a outras experiências vivenciadas anteriormente por ela. Foi percebido pela professora que os alunos, quando indagados sobre o conteúdo, buscavam lembrar-se das construções realizadas durante a oficina para encontrar as respostas, o que demonstrou uma aderência à proposta realizada na oficina ao utilizar os recursos didáticos manipuláveis de modo a ajudar no entendimento dos conceitos por parte dos alunos.

> *[...] eles [os alunos] estavam mais seguros, mais tranquilos [...]. Até quando entramos na parte de funções trigonométricas, eles já entraram mais seguros, [...] como eles a começaram a pensar com o conteúdo de trigonometria vendo que tinha padrões, quando nós começamos a tratar das funções trigonométricas, eles ja já foram procurando por padrões, [a oficina] ajudou até nisso (Professora responsável, roda de conversa).*

Conforme relatado pela professora, os alunos se mostraram mais confiantes em relação ao conteúdo em comparação aos outros bimestres e apresentaram, além de melhor envolvimento durante as aulas, um desempenho superior nas avaliações institucionais sobre o tema em comparação a outras turmas que não participaram da oficina.

Em relação às professoras em formação, que participaram do planejamento e do desenvolvimento da oficina, há relatos sobre a importância da participação nas experiências em aulas durante a formação inicial com a utilização de diversos materiais e abordagens didáticas exploratórias e investigativas. Para elas, além da aprendizagem profissional, referente ao uso de diversos recursos e da gestão da sala de aula, que lhes foi oferecida, foi possível entender a importância da Didática da Matemática para sua futura prática como professora.

Flor de Maio enfatizou o uso de materiais manipuláveis em sala de aula como positivo, pois acredita que os alunos, apesar de não manifestarem essa necessidade, precisam do visual na construção de alguns conceitos, ainda que tal prática demande por mais tempo para a preparação ou desenvolvimento; as discussões, questões e curiosidades, promovidas nesses momentos, ajudam no processo de sistematização da matemática. Ela ainda afirmou que:

> *[o planejamento da oficina] para a minha formação contribuiu muito. Foi um começo para pensar na educação matemática durante a minha formação. Foi daí que eu vi que tudo o que eu fazia deveria ter um sentido para o aluno eu não poderia simplesmente dar a minha aula [...] e esperar que o aluno venha com uma dúvida (Flor de Maio, roda de conversa).*

Lavanda afirmou que, em sua prática atual, como docente dos anos finais do ensino fundamental, tem utilizado recursos que valorizam o visual, além de propor trabalhos e atividades de investigação, mesmo atuando no ensino remoto, devido à pandemia. Ela tem buscado investigar junto dos alunos conceitos matemáticos com o uso do *software Geogebra*. Além disso, Lavanda reforçou a importância da participação na oficina para a sua prática:

> *[...] o que eu mais gostava era do preparo [planejamento da oficina], imaginar como eles iriam reagir, o que eles iam tentar pensar para tentar descobrir alguma coisa e como atuar [desenvolver] [...] isso foi o que mais agregou para mim [...] eu tive uma experiência durante a minha formação que me ajudou [no que faço] hoje [...] saber preparar uma atividade, saber lidar com ela em sala de aula, foi essencial (Lavanda, roda de conversa).*

Quanto ao desenvolvimento profissional, a professora responsável, afirma que a oficina elucidou a sua suspeita quanto ao uso dos materiais visuais como um recurso "*poderoso*" para a compreensão de alguns conceitos matemáticos, fato que a incentivou a utilizar recursos manipuláveis com mais frequência em suas aulas.

Análise Fundamentada da oficina

Diferentemente da apresentação da oficina, neste espaço, apresentamos nossa análise fundamentada em um único texto, pois buscamos estabelecer relações e evidências entre as partes descritas (planejamento, desenvolvimento e reflexão) e a teoria estudada. Porém, para operacionalizar a escrita, damos início à análise do planejamento, levando-se em conta que se trata do primeiro passo da oficina.

O planejamento da oficina se deu ainda na seleção de um conteúdo que fosse interessante para os estudantes e que se apresentasse como demanda dentro do currículo do curso. Nesse sentido, o grupo de professoras se mostrou cauteloso, optando pela escolha da trigonometria, levando-se em consideração a importância desse conteúdo (CARDOSO, 2013; SOUZA, 2018) e a dificuldade que os alunos do ensino médio apresentam no que tange à aprendizagem dele (FEIJÓ, 2018).

Ao selecionar a trigonometria como conteúdo da oficina, é interessante notar, conforme evidências do planejamento, a preocupação que o grupo de professoras teve com os conteúdos de requisito, os conhecimentos prévios dos alunos. Ou seja, elas questionaram a necessidade de retomar alguns conceitos antes de adentrar no que realmente a oficina se propunha a trabalhar. Esse fato, além de fornecer indícios sobre o nível em que os alunos se encontram, com vistas a contribuir no desenvolvimento do pensamento matemático acerca da trigonometria e o estabelecimento das relações entre os conteúdos já vistos pelos alunos, em outros momentos, para posterior formalização (BOAVIDA, 2001), também contribui com as antecipações, que é uma importante etapa do planejamento, pois é a partir dela que o professor consegue levantar algumas previsões sobre a aula, deixando-o mais seguro e confiável para o seu desenvolvimento (SERRAZINA, 2017).

Outro passo importante, levantado por Serrazina (2017) sobre o planejamento, é a escolha pela metodologia. Desse modo, constatamos que o grupo de professoras se dedicou em buscar metodologias alternativas para o ensino da trigonometria, ou seja, elas foram autocríticas com o modo como a trigonometria é tradicionalmente ensinada nas escolas de educação básica e buscaram, por meio de materiais manipuláveis (LORENZATO, 2006) e o uso das tecnologias, outras possibilidades de ensino do conteúdo (BORBA, 1999; BORBA; VILLARREAL, 2005; CARDOSO, 2013; NÓBRIGA, 2015; SOUZA, 2018).

No desenvolvimento da oficina, a análise se torna um desafio, pois as evidências e os instrumentos que temos para realizar tal ação podem não apresentar a riqueza de detalhes requerida. Percebe-se que as professoras executam cada parte do planejamento, recorrendo-se aos acontecimentos da aula como subsídios para a discussão (BOAVIDA, 2001; SERRAZINA, 2017). Esse fato é interessante, pois possibilita o envolvimento dos alunos na discussão e construção dos conceitos trigonométricos, desenvolvendo o pensamento matemático avançado por meio da corporificação e da inserção no mundo simbólico (TALL, 2008). Essa transição entre os mundos é algo evidenciado pela atividade proposta, visto que partia da ideia do comprimento da circunferência com o uso de barbantes (com o tamanho do raio) e, posteriormente, foi realizada uma sistematização da fórmula com o uso de símbolos, de acordo com a linguagem matemática e o mundo simbólico (TALL, 2008).

Outra estratégia recorrente, na prática do grupo de professoras, foi a utilização de questionamentos para instigar os estudantes, ou seja, a partir das conclusões a que eles chegavam com a construção geométrica, o grupo de professoras levantava questões direcionadas à construção do conhecimento (BOAVIDA, 2001). Essas questões oportunizaram aos estudantes transitar entre o mundo corporificado, representado pelo material manipulável, o mundo simbólico, quando inseriram os símbolos para o papel, e o mundo formal, mesmo que timidamente, quando partiam para a generalização evidenciada nas respostas às questões da tarefa matemática (TALL, 2008; BOAVIDA, 2001). Essa estratégia possivelmente foi prevista durante o planejamento, levando-se em conta a importância de se transitar enquanto ocorre o trabalho em pequenos grupos e a realização de uma sistematização com a turma toda (SERRAZINA, 2017). Dessa forma, observamos que podem ser trabalhadas as dúvidas pontuais dos grupos de alunos para, posteriormente, haver uma discussão visando à consolidação dos conhecimentos abordados pela oficina.

Por fim, ao avaliar a oficina, a professora responsável pelas turmas recorreu a aspectos posteriores, como a mudança de postura dos alunos e o modo como eles passaram a participar das aulas de matemática. Quanto às futuras professoras, atualmente formadas, elas relataram a utilização das práticas com uso de recursos visuais ou manipuláveis com seus alunos, bem como apontaram como positiva a experiência de planejamento vivida por elas. Desse modo, constatamos que tal experiência pode ter contribuído para o desenvolvimento profissional das envolvidas no que diz respeito ao uso de recursos e à autonomia na condução da sala de aula (D'AMORE, 2007; LIBÂNEO, 2019; SERRAZINA, 2017).

Percebemos assim que o grupo de professoras envolvidas nesta experiência apresentaram indícios de aprendizagem referentes a profissão docente, e o momento em que estiveram compartilharam suas ideias, bem como trabalharam em conjunto desenvolveram habilidades ligadas à pratica profissional, como apontado por Ponte (1999). Dessa forma, a importância dada ao uso de metodologias diferenciadas no ensino da matemática para ensiná-la na educação básica (LORENZATO, 2006; BORBA, 1999; BORBA; VILLARREAL, 2005; CARDOSO, 2013; NÓBRIGA, 2015; SOUZA, 2018), o cuidado ao realizar do planejamento de uma aula (SERRAZINA, 2017) e o quanto aprender a planejar, ainda durante a formação inicial, apresenta bons resultados, de modo a incentivar os futuros professores a inserir metodologias diferenciadas em suas aulas, reforça que "a didática é a ciência profissional dos professores" (LIBÂNEO, 2019, p. 159).

Considerações finais

Podemos observar neste relato como uma prática pode considerar os vários mundos da matemática, propostos por Tall (2008), à medida que os alunos apresentam sua compreensão sobre um determinado conceito matemático e o professor disponibilize recursos (materiais ou didáticos) que proporcionem reflexões quanto à construção e ao entendimento deste conceito pelos alunos, desde os mais intuitivos até alguns mais formais ou carregados de simbolismos destinados a seu ano escolar.

Acreditamos que o conhecimento do professor sobre as relações entre os três mundos da matemática pode auxilia-lo nas práticas adotadas, para assim mediar o processo de aprendizagem dos alunos e, se combinadas, como foi o caso na experiência analisada por meio da corporificação com o uso de materiais manipuláveis e do uso da tarefa matemática como mediadora para o simbolismo. Tais práticas são capazes de promover oportunidades de um ensino, no qual os alunos tenham uma maior compreensão acerca do objeto matemática trabalhado.

Assim, Tall (2008) apresenta tanto elementos de pensamento, envolvidos na transição da matemática escolar para a prova formal em matemática acadêmica na universidade, como termos e noções da combinação da matemática escolar e suas representações visuais, juntamente com cálculos e manipulações simbólicas. O conhecimento da didática torna possível essa transição entre os mundos, pois a partir do momento que o professor conhece o objeto matemático e como o pensamento matemático do aluno pode desenvolver-se (TALL, 2008; D'AMORE, 2020), ele é capaz de planejar diversas ações com base na antecipação e, assim, propor uma aula que promova o engajamento dos alunos e, ao mesmo tempo, que desenvolve sua prática profissional.

O envolvimento de duas futuras professoras (Flor de Maio e Lavanda) com uma professora formadora (responsável pela oficina) em uma experiência na educação básica, contribuiu para o desenvolvimento profissional de todas as envolvidas, ao passo que a formadora desempenha seu papel, ao mesmo tempo, ela participa de discussões com outros pares, já que também é professora da educação básica e, por sua vez, as futuras professoras vivenciam uma experiência na educação básica, aprimorando seus conhecimentos para o ensino por meio da prática, ainda durante a formação inicial.

Acredita-se, também, que, além dos conhecimentos que devem ser desenvolvidos, relativos à Didática da Matemática, os docentes tendem a aprender com o planejamento e o desenvolvimento de suas aulas diante das inquietações surgidas nas nuances de sua profissão, visto que essas podem oportunizar o desenvolvimento profissional (PONTE, 1999; 2000, FIORENTINI; CRECCI, 2013). Neste sentido, a prática escolhida para análise também serviu para as professoras envolvidas incorporarem a reflexão sobre sua ação em sua prática, e dessa forma, recomenda-se a reflexão sobre a prática como ato essencial ao exercício da docência (SERRAZINA, 2017; PONTE, 1999), pois acreditamos que, a partir dela, o professor possa buscar seu desenvolvimento profissional e se comunicar com os pares, sempre visando o ensino no espaço em que atua.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. À Universidade Federal do ABC (UFABC), ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo em apoio financeiro ao projeto identificado pelo Comitê de ética em pesquisa, sob o parecer 3.233.148, apreciado sob o número 96044518.4.0000.5594.

Referências

ALVES, R. da S. **Proposta metodológica para o ensino da trigonometria baseada na psicologia pedagógica**. 2016. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2016.

BOAVIDA, A. M. Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. **Educação e Matemática**, n. 63, p. 11-15, maio/jun. 2001.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. *In*: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo, UNESP, 1999.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BRASIL. **Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008**. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, e dá outras providências. Brasília, 2008. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11892.htm. Acesso em: 10 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 18 de maio de 2021.

CARDOSO, J. J. A Utilização de Materiais Manipuláveis para o Ensino de Trigonometria. In: Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE - Produções Didático-Pedagógicas. **Cadernos PDE**. v. II, p. 1-20, 2013. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uem_mat_pdp_joaquim_jose_cardoso.pdf. Acesso em: 30 nov. 2020.

D'AMORE, B. Epistemologia, Didática e Práticas de Ensino. **Bolema**, Rio Claro, v.20, n. 28, p.1179-1205, 2007. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1537. Acesso em 13 out. 2020.

FEIJÓ, R. S. A. A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. Brasília, 2018. 108 p. Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, 2018.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Desenvolvimento profissional docente: um termo guarda-chuva ou um novo sentido à formação? **Formação docente –** Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores, v. 5, n. 8, p. 11-23, 2013.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática,** São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

HERTEL, J.; CULLEN, C. Teaching trigonometry: A directed length approach. In: **Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education**. 2011. p. 1400-1407.

JESUS, L. O. M; SOUZA, L. M. Materiais manipuláveis no ensino da trigonometria: investigação a partir da régua trigonométrica. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12. 2016, São Paulo, **Anais** [...]. São Paulo, 2016.

LIBÂNEO, J. C. Presente e futuro do campo disciplinar e investigativo da didática: que conteúdos? *In:* D'AVILA, C.; MARIN, A. J.; FRANCO, M.A.S.; FERREIRA, L.G. (Orgs.) **Didática:** saberes estruturantes e formação de professores. v. 3. Salvador, BA: EDUFBA, 2019. p. 149-160.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, p. 3-37, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. 2. ed. São Paulo: EPU, 2015.

MARTINS, E. R. Formação Inicial de Professores de Matemática no Instituto Federal de São Paulo. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20. 2016, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba, 12 a 14 nov. 2016. Disponível em http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd7_Egidio_Martins.pdf. Acesso em 25 nov. 2020.

NÓBRIGA, J. C. C. **GGBOOK:** uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica geogebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas. 2015. 246 f., Tese (Doutorado em Educação)-Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, p. 77-92, 2006.

PONTE, J. P. A investigação em didáctica da matemática pode ser (mais) relevante? *In*: PONTE, J.P.; SERRAZINA, L. (Eds.). **Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália.** Lisboa: SEM-SPCE, 2000. p. 327-336.

PONTE, J. P. Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In TAVARES J.; PEREIRA A.; PEDRO A. P.; SÁ H. A. (Eds.). **Investigar e formar em educação**: Actas do IV Congresso da SPCE. Porto: SPCE, 1999. p. 59 -72.

SERRAZINA, L. Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In: GTI (Ed.). **A prática dos professores:** Planificação e discussão coletiva na sala de aula, Lisboa: APM, 2017. p. 9-32.

SILVA, W. **O ensino de trigonometria:** Perspectivas do ensino fundamental ao médio. 2013, 93p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Matemática - PROFMAT)- Universidade Estadual Paulista, 2013.

SOUZA, P. C. T. de. **Materiais manipuláveis e recursos digitais no ensino de trigonometria.** 2018, 54p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Matemática - PROFMAT)- Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, 2018.

TALL, D. The transition to formal thinking in mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.

Autores

Vania Batista Flose Jardim

Licenciada e Mestra em Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Atualmente é professora no Instituto Federal de São Paulo e aluna de doutorado em Ensino e História das Ciências e da Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC). Possui experiência na Educação Básica e na formação de professores.

Correio eletrônico: vaniaflose24@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0x00-0003-0707-493X

Eduardo Goedert Doná

Licenciado em Pedagogia e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS). Mestre em Educação pela Universidade Federal de Lavras (UFLA). Atualmente é Doutorando em Ensino e História das Ciências e da Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC).

Correio eletrônico: eduardogdona@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7549-5066

Janaína Mendes Pereira da Silva

Licenciada em Matemática e pedagogia. Especialista em Metodologias de Ensino de Matemática pelo Departamento de Matemática da UnB. Mestre em Educação pela UnB. Doutoranda no programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática pela UFABC. Com experiência no ensino de matemática nos anos finais da Educação Básica.

Correio eletrônico: jana.mendes.ps@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6540-1521

Como citar o artigo:

JARDIM, V. B. F.; DONÁ, E. G.; SILVA, J. M. P. P. Análise fundamentada de uma oficina de Trigonometria: as contribuições para o desenvolvimento profissional. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 364 – 389, enero, 2022. DOI: 10.37618

Preparación de materiales didácticos complementarios de matemática para la escuela primaria II

Thamyres Ribeiro Medeiros
thamyres.medeiros@educacao.mg.gov.br
https://orcid.org/0000-0002-4471-9127
Escola Estadual Raul de Leoni
Viçosa, Brasil.

Aparecida de Fátima Andrade da Silva (*)
aparecida.silva@ufv.br
https://orcid.org/0000-0002-8619-498X

Guilherme Flaviano Pereira
guilherme.flaviano@ufv.br
https://orcid.org/0000-0002-2367-1857

Letícia Pereira de Almeida
leticia.p.almeida@ufv.br
https://orcid.org/0000-0002-5177-3877
(*) *UFV – Universidade Federal de Viçosa*
Viçosa, Brasil.

Recibido: 15/julio/2021 **Aceptado:** 15/septiembre/2021

Resumen

Este trabajo presenta la elaboración de materiales didácticos complementarios desarrollados sobre la orientación de los autores por los residentes de matemáticas de E. E. Raul de Leoni, Viçosa-MG, durante el período comprendido entre octubre de 2020 y enero de 2021. Buscamos con los residentes, estudiantes del curso de matemáticas de la UFV (Universidad Federal de Viçosa, MG), la preparación de algunas clases que pudieran ser atractivas para los estudiantes para revisar diversos contenidos. Así, nuestro trabajo consiste en la elaboración de un pequeño libro, al que se abordan varios contenidos del currículo del noveno curso de educación básica, en el ámbito de las matemáticas. Cada contenido se aborda de una manera única, a través de juegos, software matemático, lista de ejercicios y desafíos, que se pueden utilizar como un más interactivo y que facilita la comprensión de estos conceptos. La preparación del material se basó en material didáctico del PETs (Programa de Educación Tutora) puesto a disposición por el Departamento de Educación del Estado de Minas Gerais - SEE/MG. Las subareas de matemáticas abordadas fueron: Geometría y Álgebra. En Geometría, el contenido específico presentado fue: Teorema de cuentos, similitud de triángulos y ángulos notables en el triángulo. En álgebra, los contenidos específicos realizados fueron: resolución de ecuaciones de segundo grado, función relacionada y función cuadrática. Todo este contenido se ha presentado para que los alumnos participen más en las clases donde se pueda abordar dicho contenido. Una de las ventajas de aplicar los contenidos descritos en el libro es el hecho de que pueden ser utilizados dentro de este contexto remoto, donde la interacción con los estudiantes es más limitada, pudendo así llamar la atención de los estudiantes para adquirir un aprendizaje más significativo.

Palabras clave: material didáctico, matemáticas, metodologías activas, enseñanza remota.

Elaboração de Materiais Didáticos Complementares de Matemática para o Ensino Fundamental II

Resumo

Este trabalho apresenta a elaboração de materiais didáticos complementares desenvolvidos com a orientação e supervisão das autoras pelos residentes de matemática da E. E. Raul de Leoni, Viçosa-MG, durante o período de outubro de 2020 a janeiro de 2021. Buscamos junto aos residentes, estudantes do curso de matemática da Universidade Federal de Viçosa (UFV), MG, a elaboração de algumas aulas que pudessem ser atrativas aos alunos para revisar diversos conteúdos. Desta forma nosso trabalho consiste na elaboração de um material didático complementar, um pequeno livro, com vistas a abordar diversos conteúdos da matriz curricular do 9º ano da Educação Básica, na área da matemática. Cada conteúdo é abordado de forma singular, por meio de jogos, softwares matemáticos, lista de exercícios e desafios, que podem ser usados como uma forma mais interativa e que facilita a compreensão destes conceitos. A elaboração do material teve por base os PETs (Programa de Ensino Tutorado) material didático disponibilizado pela Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais – SEE/MG. As subáreas da Matemática abordadas foram: Geometria e Álgebra. Em Geometria, os conteúdos específicos apresentados foram: Teorema de Tales, semelhança de triângulos e ângulos notáveis no triângulo. Já em álgebra os conteúdos específicos tratados foram: resolução de equações do segundo grau, função afim e função quadrática. Todos estes conteúdos foram apresentados para fazer com que os alunos participassem mais das aulas, nas quais esses conteúdos foram abordados. Umas das vantagens da aplicação dos conteúdos descritos no livro é o fato de eles poderem ser utilizados dentro deste contexto remoto, onde a interação com os alunos é mais limitada, podendo assim chamar a atenção dos alunos para eles desenvolverem uma aprendizagem mais significativa.

Palavras chave: material didático, matemática, metodologias ativas, ensino remoto.

Preparation of complementary teaching materials of Mathematics for remote teaching during the pandemic

Abstract

This paper presents the elaboration of complementary teaching materials developed on the orientation of the authors by the residents of mathematics of E. E. Raul de Leoni, Viçosa-MG, during the period from October 2020 to January 2021. We sought with the residents, students of the mathematics course of UFV (Federal University of Viçosa, MG), the preparation of some classes that could be attractive to students to review various contents. Thus our work consists in the elaboration of a small book, which addresses several contents of the curriculum of the 9th year of basic education, in the area of mathematics. Each content is approached in a unique way, through games, mathematical software, exercise list and challenges, which can be used as a more interactive and that facilitates the understanding of these concepts. The preparation of the material was based on PETs (Tutored Education Program) didactic material made available by the State Department of Education of Minas Gerais - SEE/MG. The subareas of mathematics addressed were: Geometry and Algebra. In Geometry, the specific contents presented were: Tales theorem, similarity of triangles and notable angles in the triangle. In algebra, the specific contents performed were: resolution of second-degree equations, related function and quadratic function. All of this content has been presented to get students to participate more in classes where such content can be addressed. One of the advantages of applying the contents described in the book is the fact

that they can be used within this remote context, where interaction with students is more limited, thus being able to draw students' attention to acquiring a more meaningful learning.
Keywords: didactic material, mathematics, active methodologies, remote teaching.

Introdução

A Formação de Professores para atuarem na Educação Básica tornou-se um campo de importantes e necessárias discussões não só na Academia e associações científicas interessadas no desenvolvimento da Educação e no desenvolvimento profissional de professores, bem como em órgãos públicos federais, estaduais e municipais, principalmente a partir da Lei de Diretrizes e Bases 9.394 de 1996, quando foi instituído que a formação do professor deverá ser feita em Nível Superior, em cursos de Licenciatura (Art. 62 da LDB 9394/1996). E, a partir daquele momento, novas políticas públicas educacionais foram elaboradas, com o Conselho Nacional de Educação (CNE) a frente dessas ações, sendo o responsável pela definição das diretrizes curriculares nacionais para a Formação de Professores para a Educação Básica (FPEB).

Assim, de acordo com a RESOLUÇÃO Nº 2, de 1º de julho de 2015, que define as *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores*, no Artigo 2º, em seus parágrafos primeiro e segundo, temos:

> § 1º Compreende-se a docência como **ação educativa** e como **processo pedagógico intencional e metódico**, envolvendo conhecimentos específicos, interdisciplinares e pedagógicos, conceitos, princípios e objetivos da formação que se desenvolvem na construção e apropriação dos valores éticos, linguísticos, estéticos e políticos do conhecimento inerentes à sólida formação científica e cultural do ensinar/aprender, à socialização e construção de conhecimentos e sua inovação, em diálogo constante entre diferentes visões de mundo.
>
> § 2º No exercício da docência, a ação do profissional do magistério da educação básica é permeada por dimensões técnicas, políticas, éticas e estéticas por meio de sólida formação, envolvendo o domínio e manejo de conteúdos e metodologias, diversas linguagens, tecnologias e inovações, contribuindo para ampliar a visão e a atuação desse profissional (Brasil, 2015, p. 3).

Já no texto da RESOLUÇÃO CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019, o qual reorganiza as *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores*, temos:

> Parágrafo único. As competências gerais docentes, bem como as competências específicas e as habilidades correspondentes a elas, indicadas no Anexo que integra esta Resolução, compõem a BNC-Formação. Art. 4º As competências específicas se referem a três dimensões fundamentais, as quais, de modo interdependente e sem hierarquia, se integram e se complementam na ação docente. São elas: I - conhecimento profissional; II - prática profissional; e III - engajamento profissional. (BRASIL, 2019, p. 2).

Diante desse contexto de novas políticas públicas para a Educação brasileira desde a década de 1990 do século XX, a Política Nacional de Formação de Professores que vem sendo desenvolvida com o apoio da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Nível Superior (CAPES) representa um importante marco na história da Educação, na formação dos futuros professores. No processo formativo docente, saber ensinar, requer dos licenciandos e dos professores um repertório para mediar as inúmeras situações possíveis que ocorrem em uma sala de aula. Essa mediação acontece de forma efetiva quando os licenciandos já tiveram oportunidades de articularem reflexões e vivências durante a sua formação e/ou atuação profissional, permitindo assim construir um vasto repertório que facilite e, ao mesmo tempo, favoreça a eles o desenvolvimento das ações docentes em sala de aula.

Assim, o Programa de Residência Pedagógica lançado pela CAPES em 2018, oferece a oportunidade aos licenciandos dos diversos cursos de Licenciatura vivenciarem diferentes situações da vida profissional docente na realidade cotidiana escolar a partir de uma imersão no ambiente escolar e a realização de importantes reflexões acerca do trabalho desenvolvido pelo professor.

Os objetivos do Programa de Residência Pedagógica são:

> I - incentivar a formação de docentes em nível superior para a educação básica, conduzindo o licenciando a exercitar de forma ativa a relação entre teoria e prática profissional docente;
> II - promover a adequação dos currículos e propostas pedagógicas dos cursos de licenciatura às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC);
> III - fortalecer e ampliar a relação entre as Instituições de Ensino Superior (IES) e as escolas públicas de educação básica para a formação inicial de professores da educação básica; e
> IV - fortalecer o papel das redes de ensino na formação de futuros professores. (BRASIL, CAPES, Edital n. 1/2020)

A partir da proposta do Programa de Residência Pedagógica, a Universidade Federal de Viçosa desde 2018, em convênio com a CAPES, vem desenvolvendo inúmeras ações didático-pedagógicas para a Formação de Professores para as escolas do século XXI. Importantes competências docentes estão sendo desenvolvidas pelos licenciandos possibilitando assim a construção de um novo perfil profissional docente, com vistas a realização de uma futura prática profissional que favoreça ações adequadas para o planejamento, realização e administração de projetos educacionais que possibilitem a aprendizagem significativa pelos estudantes da Educação Básica, no estudo dos diferentes conteúdos curriculares.

Diante da necessidade de formarmos e desenvolvermos um novo perfil docente, diversas atividades estão sendo realizadas, as quais contemplam uma visão mais ampla e adequada do processo de ensino e de aprendizagem, dos problemas práticos do cotidiano escolar enfrentados pelo professor, além dos conteúdos didático-pedagógicos e específicos da área de conhecimento, visando o domínio de diferentes conhecimentos e uma atuação apropriada e responsável do profissional do magistério para a Educação Básica.

Um dos exercícios mais importantes e significativos para a formação de professores é justamente o planejamento de Materiais Didáticos, pois de acordo com Sanchez Blanco et al. (1997), possibilitar aos futuros professores a vivência da construção de materiais didáticos propicia situações educativas para os mesmos ao refletirem acerca dos conteúdos curriculares a serem abordados e quais os recursos didáticos e metodologias a serem desenvolvidos para favorecer a aprendizagem significativa pelos alunos, conforme as reformas educacionais propõem desde as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica no final do século XX.

Assim, foi solicitado aos residentes a elaboração de um planejamento de aulas para o ensino de Matemática para o Fundamental II a partir do uso de *softwares* para o ensino, vídeos e outros recursos didáticos pertinentes para a situação de ensino remoto, devido a Pandemia do Covid-19.

Este trabalho relata a elaboração de materiais didáticos complementares pelos residentes para o ensino de matemática para a 9º ano do Ensino Fundamental abordando os conteúdos curriculares Geometria e Álgebra a partir dos materiais PET's disponibilizados pela Secretaria Estadual de Educação de Minas Gerais em 2020.

Referencial Teórico

Diante de um mundo tão complexo e em constante mudança, é fundamental formar cidadãos capazes de se adaptar ao seu meio e de saber se posicionar de maneira consciente, responsável e crítica diante dele. Além disso, no contexto atual, vivenciamos uma revolução cultural que influencia a cultura da aprendizagem: as novas tecnologias da informação, conjuntamente a outras mudanças socioculturais, estão abrindo espaço para uma nova cultura da aprendizagem. Já no início do século XXI Pozo e Crespo (2009) apontaram que esta nova cultura da aprendizagem já estava se estabelecendo e é caracterizada por três aspectos: *(i) sociedade da informação; (ii) sociedade de conhecimento múltiplo e descentralizado e (iii) sociedade do aprendizado contínuo*.

A escola não mais desempenha o papel de primeira fonte de informações de diversas áreas do conhecimento para os alunos na *sociedade da informação*. As informações chegam por diferentes fontes, em diferentes formatos, geralmente, mais atraentes daqueles utilizados nas escolas. A escola no contexto atual precisa formar os alunos para que tenham acesso a informação, de modo que saibam buscar a informação responsavelmente, bem como possam organizá-la e interpretá-la criticamente. Além disso, na *sociedade de conhecimento múltiplo e descentralizado*, não há mais pontos de vista absolutos, que os alunos devam assumir. Há que se ter em mente também que estamos vivendo na *sociedade do aprendizado contínuo.* Cada vez mais é necessário, além da formação obrigatória, a formação profissional permanente, diante de uma grande demanda de novos e diferentes perfis para o trabalho no mundo atual globalizado. Assim, o sistema educacional deve satisfazer uma demanda importante deste século XXI: o "aprender a aprender".

É necessário que os professores em formação inicial e em serviço busquem articular suas práticas pensando em estratégias que permitem aos alunos lidar com a complexidade dos problemas cotidianos. Os professores seriam capazes de estabelecer um relacionamento de intercâmbio intenso na sala de aula. De acordo com Tardif (2002), a compreensão de que a prática de ensino não ocorre em um objeto, de um fenômeno a ser conhecido ou de um trabalho a ser realizado. É realizada concretamente entre as interações com outras pessoas, num contexto em que o elemento humano é crucial e dominado por símbolos, valores, sentimentos, atitudes, os quais estão sujeitos à interpretação e a tomada de decisão.

Entretanto, desde 2020, a revolução cultural se intensificou! A Pandemia do Covid-19 que se desenvolveu por todo o mundo provocou várias mudanças no modo de vida de todos nós, uma situação que exigiu que utilizássemos bem mais as tecnologias digitais de informação e comunicação, as quais possibilitaram a comunicação entre as pessoas em todas as regiões do planeta. A partir da necessidade do isolamento social, aprendemos muito mais a utilizar as tecnologias digitais, as quais foram muito importantes na área de Educação em todos os níveis justamente para dar continuidade as atividades iniciadas em todas as escolas do mundo no início de 2020. Assim, nós professores passamos a utilizar diferentes plataformas de comunicação (Google Meet, Zoom) para realizar aulas, reuniões e encontros virtuais, o que possibilitou a realização do nosso trabalho e o desenvolvimento das disciplinas via sistema remoto.

Diferentes estudos e pesquisas têm oferecido propostas teórico-metodológicos que possibilitam a superação das dificuldades manifestadas por professores e estudantes ao longo do processo educativo da Matemática, nos diferentes níveis de ensino. Além disso, diferentes avaliações oficiais de ensino apontam uma grande defasagem entre os resultados esperados e os alcançados pelos alunos na disciplina de matemática. Os professores de matemática preocupam-se cada vez mais com a aprendizagem significativa dos alunos, pois, está cada vez mais difícil encontrar alunos interessados e motivados nas aulas de matemática, em todos os níveis de ensino (LAMAS, 2015).

Diante desse contexto, torna-se cada vez mais importante a vivência por parte dos futuros professores de exercícios reflexivos para favorecer uma prática profissional adequada. Um desses exercícios é justamente a construção de Materiais Didáticos (MD), a qual propicia diferentes e pertinentes reflexões acerca dos conteúdos curriculares, metodologias de ensino, recursos didáticos, bem como oportunas reflexões sobre o desenvolvimento cognitivo dos alunos que serão envolvidos na situação de aprendizagem.

Os Materiais Didáticos (MD) são recursos didáticos muito pertinentes no desenvolvimento da aprendizagem, ao serem trabalhados para possibilitar aos estudantes diversas oportunidades de aprender adequadamente os diversos conceitos matemáticos. Tal como Lorenzato (2006, p. 21) aponta bem, ‘‘o MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático”, possibilitando assim o despertar da curiosidade e envolvendo-o melhor nas situações de aprendizagem Matemática. A elaboração de materiais didáticos (MD) nos cursos de formação docente é fundamental, já que os futuros professores devem aprender a construir materiais didáticos manipuláveis, bem como saber aplicá-los, com vistas a saber promover a participação ativa dos alunos e um melhor aproveitamento de suas aulas. Um dos mais importantes papéis do professor é justamente o planejamento, a seleção de conteúdos, bem como de materiais didáticos e estratégias para a utilização dos mesmos em sala de aula.

De acordo com Matos e Serrazina (1996), a manipulação apenas de Materiais Didáticos (MD) pelos alunos não garante a aprendizagem significativa pelos mesmos, é necessário que a seleção do material a ser utilizado, ou mesmo a sua construção, seja feita bem cuidadosamente pelo professor, além, é claro, da orientação adequada do professor para a devida aplicação do MD, com vistas a atingir os objetivos traçados pelo próprio professor.

A elaboração de Materiais Didáticos (MD), bem como a aplicação dos mesmos, possibilita aos futuros professores que tomem consciência dos objetivos das atividades e do que os alunos devem aprender, o que faz muito mais sentido para a dinâmica estabelecida nas aulas. Ao tornar mais evidente os processos que os alunos irão fazer para realizar certas tarefas, para que os alunos possam analisar o estudo e perceberem tudo o que foi apreendido, o professor valoriza a sua atuação mediadora ao longo de seu trabalho didático-pedagógico.

Na atualidade, a formação acadêmica inicial de futuros professores no Brasil tem sido articulada com base em modelos que promovem reflexões efetivas sobre práticas de ensino, como a execução do planejamento de Materiais Didáticos (MD). Essas atividades contemplam exercícios de conscientização dos professores em formação inicial para desenvolver estratégias múltiplas em sala de aula para promover a mediação do conhecimento. Desta forma, também favorece a promoção do pensamento criativo, pensamento crítico, habilidades e autonomia do professor para tomar as decisões necessárias sobre os problemas práticos da vida escolar diária, bem como saber como alcançar os objetivos planejados. Com vistas a superar a rigidez da ação docente de práticas didático-pedagógicas na sala de aula com foco na abordagem tradicional de ensino, considerando que a Educação Matemática sempre foi caracterizada pela atividade de memorização, reforçando a abordagem disciplinar e não contextualizada.

Metodologia

O nosso trabalho tem por objetivo apresentar as propostas de material didático complementar utilizado durante um cenário de Pandemia do COVID-19, onde o ensino teve a migração para a modalidade remota. O ensino remoto iniciado no estado de Minas Gerais em maio de 2020, contou com muitos desafios, dentre eles, o contato com os alunos da escola de forma virtual. Somente através da organização do contato com o aluno, que seria possível planejarmos as propostas de aprendizagens. Esse contato com os alunos da escola se deu por meio de telefonemas, e-mails, WhatsApp, e o uso do aplicativo Conexão Escola, disponibilizado pelo governo com opções de chat e aulas gravadas que também eram transmitidas pela TV REDE MINAS.

Essas aulas disponibilizadas pelo aplicativo Conexão Escola utilizava o material didático disponibilizado pelo governo a toda rede estadual de Minas Gerais, os PETs (Planos de ensino tutorados). Os PETs tinham seus volumes mensais contemplando o currículo de Minas Gerais de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018). Tivemos 7 volumes de PETs e o PET 300 ANOS, representando a homenagem aos 300 anos do estado de Minas Gerais e o PET final avaliativo. Mesmo diante do material didático disponível e das aulas da TV REDE MINAS que os alunos foram orientados a acompanhar houve a necessidade de complementação deste material de acordo com as dúvidas dos alunos apresentadas pelo chat. A iniciativa dessa complementação ocorreu com atendimentos síncronos aos alunos da escola através do Google Meet.

O Programa Residência Pedagógica atual desenvolvido pela UFV conjuntamente com as escolas da rede estadual e municipal iniciou em outubro de 2020. Na Escola Estadual Raul de Leoni, na cidade de Viçosa, MG, oito estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFV foram acompanhar a prática didático-pedagógica da autora 1 deste artigo, sob a orientação institucional da autora 2 deste artigo, com vistas a desenvolver as atividades necessárias para a formação de professores de Matemática para as escolas do século XXI.

Quando os residentes iniciaram seus trabalhos em outubro de 2020, os PET's já estavam em desenvolvimento e estava sendo iniciado o PET final avaliativo, que contava com o diagnóstico de todos os conteúdos desenvolvidos durante o ano. Nessa perspectiva, decidimos realizar aulas síncronas de 50 minutos revisionais retomando os conteúdos dos PET's mensais trabalhados durante o ano. Para planejamento desses planos de aulas pensamos no uso de metodologias ativas, a partir de jogos, tecnologias digitais, desafios e listas de exercícios dinâmicas para atraírem a atenção dos alunos e dinamizar as aulas.

Durante o ensino remoto a participação dos alunos aconteceu de forma limitada, as aulas aconteceram de forma síncrona pelo Google Meet, fizemos a gravação das aulas e enviamos aos alunos disponibilizando o link da gravação. As aulas foram ministradas pelos residentes de matemática na modalidade de regência, em três aulas de 50 minutos durante o mês de janeiro de 2021.

A elaboração do material didático complementar, em especial para a série do 9º ano, teve por base os PET's disponibilizados pela Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais – SEE/MG. As subáreas da Matemática abordadas foram: Geometria e Álgebra. Em Geometria, os conteúdos específicos apresentados foram: Teorema de Tales, semelhança de triângulos e ângulos notáveis no triângulo. Já em álgebra os conteúdos específicos tradados foram: resolução de equações do segundo grau, função afim e função quadrática. Todos estes conteúdos foram apresentados para fazer com que os alunos participassem mais das aulas onde esses conteúdos podem ser abordados, como por exemplo, para abordarmos sobre o Teorema de Tales, foi utilizado o software Geogebra para trazer o teorema de forma mais dinâmica, e depois é apresentado um desafio, onde os alunos deveriam calcular a altura deles utilizando o Teorema de Tales. Uma das vantagens da aplicação dos conteúdos nesse material didático complementar é o fato de eles poderem ser utilizados dentro deste contexto remoto, onde a interação com os alunos é mais limitada, podendo assim chamar a atenção dos alunos para eles adquirirem uma aprendizagem mais significativa.

Os planos de aulas elaborados foram organizados como Material Didático complementar adequado para três encontros, que foram desenvolvidos em aulas de 50 minutos cada, no sistema remoto, por meio do Google Meet. Essas aulas síncronas aconteceram em janeiro de 2021 e contou com o seguinte cronograma: 06/01/2021 Revisional PET 1, 2 e 3; 13/01/2021 Revisional PET 4 e 5; 20/01/2021 Revisional PET 6 e 7.

Assim, os residentes responsáveis pela turma do 9º. ano do Ensino Fundamental II elaboraram um Material Didático complementar para enriquecer os conteúdos apresentados nos PET's. Apresentaremos um quadro síntese do Material Didático complementar planejado e desenvolvido em três aulas. Em seguida, apresentamos o Plano da primeira aula. Os demais estão em anexo através de um link que dá acesso aos arquivos no drive.

Quadro 1 – Síntese das 3 aulas de Matemática – 9º. ANO/ E.F. II

Aulas	PET's	Conteúdos	Metodologias/Estratégias
Aula 1	PET 1	Unidades de medida	História da Matemática: uso de história em quadrinhos e de charge abordando a história das unidades de medida.
	PET 2	Teorema de Tales	Tecnologias digitais: Uso do software Geogebra para representação do teorema. Atividade prática experimental: Os alunos deveriam calcular sua altura de acordo com algumas orientações que foram dadas a eles.
	PET 3	Resolução de equações do 2º grau	Jogos: aplicação de um jogo intitulado “jogo das expressões algébricas”, composto por 3 rodadas, em que cada rodada os alunos deveriam resolver uma equação do 2º grau, com nível de dificuldade crescente. Cada resolução possuía uma pontuação, sendo a maior pontuação a que continha a resposta correta. O ganhador era o que conseguisse a maior pontuação geral.
Aula 2	PET 4	Função Afim	Tecnologias digitais: Uso do software geogebra para representar o gráfico da função afim destacando seus elementos e como a variação coeficientes alteram o comportamento do gráfico da função.
	PET 5	Função quadrática	Jogos: Aplicação do jogo intitulado “Parábola nas estrelas” que foi apresentado através de slides em power point. Neste jogo, os alunos deveriam utilizar os conhecimentos aprendidos em um momento anterior da aula para resolver situações lhes eram apresentadas.
Aula 3	PET 6	Semelhança de triângulos	Resoluções de problemas: Uso de exercícios retirados do banco de questões da OBMEP com o intuito de desenvolver a lógica matemática dos alunos.
	PET 7	Ângulos notáveis do triângulo retângulo.	Atividade prática experimental: Os alunos deveriam procurar um objeto em suas casas que se assemelhasse a um triângulo retângulo. Em seguida eles utilizariam seus conhecimentos aprendidos em momento anterior da aula e iriam calcular os ângulos internos deste triângulo.

Fonte: Elaboração dos autores

AULA 1: TEMA DA AULA: Grandezas e medidas; Geometria e Equações do 2º grau.

SÉRIE: 9º ano

DURAÇÃO DA AULA: 1 h/aula

PRÉ-REQUISITOS: Notação científica, Teorema de Tales e Equação do 2º Grau (a aula será uma revisão dos conteúdos do PET 1, 2 e 3).

OBJETIVOS: Entender a utilização das unidades de medidas, entender o Teorema de Tales no cotidiano e resolve equações do 2º grau.

MATERIAIS E RECURSOS UTILIZADOS: Geogebra, história em quadrinhos, imagem, régua, Google Meet.

DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO:

A aula foi ministrada pelos autores 1, 3 e 4 como co-regência orientada, proposta do Programa Residência Pedagógica. Dividimos o plano e o desenvolvimento da aula em três momentos. A aula foi gravada e enviada aos alunos que não participaram da aula síncrona. Dessa forma, durante a aula fomos orientando os alunos para que no momento que estiverem assistindo as revisões conseguissem cumprir o desenvolvimento por nós planejado.

1° momento: Grandezas e medidas

Inicialmente foi feita a apresentação de história em quadrinhos falando sobre o surgimento das unidades de medidas. De forma a motivar os alunos e resgatar os conhecimentos prévios que os alunos poderiam partilhar de acordo com seus conhecimentos sobre o assunto.

Figura 1 – História em quadrinhos

Fonte: Elaboração pelos autores

Em seguida foi feita a apresentação de uma questão sobre como escrever um número em notação científica. Buscamos utilizar sempre da linguagem visual e oral para incentivar a interação com os alunos principalmente por estarmos num período remoto e muitas vezes os alunos precisam assistir a gravação das aulas, pois não estão presentes no momento síncrono.

Figura 2 – Questão sobre notação científica

Fonte: Elaboração pelos autores

Após a apresentação da questão envolvida na tirinha sobre notação científica, foi feita uma revisão sobre como escrever um número em notação científica e os alunos foram conduzidos a resolver a questão.

Solução da questão: $0{,}0000000253 = 2{,}53 \times 10^{-8}$.

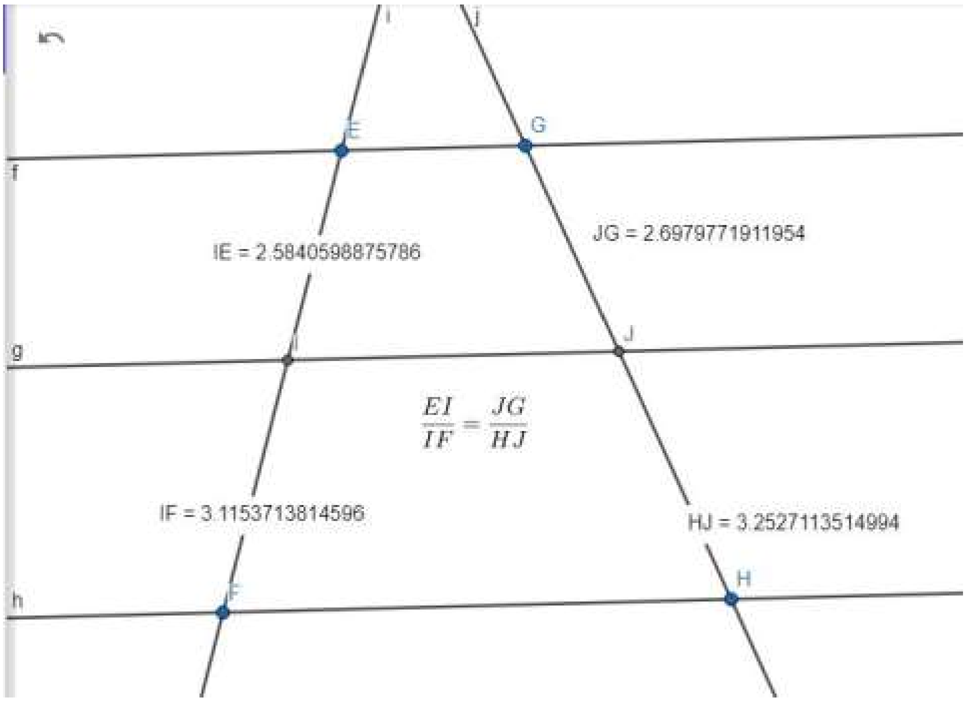
Prosseguindo com o desenvolvimento da aula, foram feitas reflexões com os alunos sobre como utilizar as unidades de medidas. As reflexões foram conduzidas por meio das perguntas: Quais objetos podemos medir utilizando centímetros? Porque não é útil calcular a altura de uma casa utilizando centímetros?

Em seguida foi proposto aos alunos através da informação em relação a distância entre a Escola Estadual Raul de Leoni e o Hospital São Sebastião em Viçosa ser de 2 km, que eles escrevessem a distância em metros e em centímetros, utilizando notação científica.

2° momento: Geometria

Com o uso do software geogebra foi feita a construção da figura a seguir e utilizamos ela para enunciar o Teorema de Tales, onde a intersecção de um feixe de retas paralelas por duas retas transversais forma segmentos proporcionais.

Figura 3 – Teorema de Tales



Fonte: Elaboração pelos autores

Em seguida, foi apresentado um desafio aos alunos envolvendo o Teorema de Tales. O desafio será calcular a sua altura usando o Teorema de Tales. Os alunos terão que tirar uma foto com algum objeto que possa ser medido com uma régua que ele tenha em casa. Então eles irão medir a altura real do objeto, a altura do objeto na foto e a sua altura na foto e realizar o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{Altura real do aluno}}{\text{Altura real do objeto}} = \frac{\text{Altura do aluno na foto}}{\text{Altura do objeto na foto}}$$

O objetivo deste desafio era promover a interação do conteúdo com a prática, mostrando que podemos calcular uma medida desconhecida a partir da proporção. Pedimos aos alunos para fazer a atividade em casa e nos enviar os dados, os cálculos e as imagens.

Figura 4 – Proporção

Fonte: Elaboração pelos autores

Foi também utilizado em seguida a proposta do desafio, este exemplo, a altura do pote de café na foto é de 3,4 cm e a altura do pote de arroz na foto é de 5 cm. Assim, utilizando a proporção teremos:

$$\frac{x}{16} = \frac{5}{3,4}$$

Onde x será aproximadamente 23,52 cm, a medida da altura aproximada do pote de arroz no real

3º Momento: Equações do 2º grau

A proposta deste momento revisional é através de um jogo desenvolver resoluções de equações do 2° grau. Começamos a aula explicando as regras do jogo e fizemos uma primeira rodada de exemplo.

O jogo consistiu em 3 rodadas. Em cada rodada os alunos precisavam resolver uma equação do 2º grau. A cada rodada, o nível de dificuldade foi aumentando, utilizando equações do 2º grau incompletas e completas, a mesma equação era proposta para todos os alunos. A equação era escolhida através do sorteio realizado por um dado que determinava uma das seis equações propostas para a rodada. Três alunos voluntários poderiam jogar um dado ou ditar um número entre 1 e 6, e o número da face superior correspondia ao número de uma equação daquela rodada. Os alunos que não resolverem a equação, não ganharão nenhum ponto. Os alunos que tentarem resolver a equação mas não acharem o resultado correto, ganharão 10 pontos. Os alunos que conseguirem encontrar o resultado correto, ganharão 20 pontos. Os pontos serão somados ao final do jogo. Ganha o jogo aquele que conseguir a maior pontuação.

Pela falta de alunos de forma síncrona desenvolvemos o jogo entre os autores 1, 3 e 4, simulando o jogo e orientando aos alunos a pausarem o vídeo no momento que estiverem assistindo para resolver as equações revisionais e após a conclusão acompanhar a correção da resolução das equações.

A aula 2 foi destinada à revisão dos PETs 4 e 5. Para abordar o conteúdo do PET 4, cujo tema foi função afim, utilizamos o software Geogebra para apresentar os principais elementos desta função. Ao variar os valores de a e b da função, apresentamos o que é o crescimento e decrescimento da função como também os pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos. Ao fim dessa apresentação trouxemos uma situação problema para a resolução dos alunos. Já na apresentação do PET 5 que abordou função quadrática, foi revisado os principais elementos desta função e logo após apresentamos um jogo intitulado “Parábola nas Estrelas”. Neste jogo os alunos teriam que usar de seus conhecimentos a respeito do tema para resolver algumas situações problemas como por exemplo, encontrar a lei de formação de uma parábola dado os pontos no gráfico.

Na aula 3 revisamos os PETs 6 e 7, cujos temas foram Semelhança de triângulos e Trigonometria no triângulo retângulo, respectivamente. Para abordamos a semelhança de triângulos, lembramos aos alunos os principais casos de semelhança de triângulos e depois propomos alguns exercícios da OBMEP, para resolução em conjunto com os alunos, devido à complexidade e rigor matemático das questões. Com esses exercícios tivemos o propósito de desenvolver melhor a lógica matemática dos alunos.

Na revisão do PET 7, foi revisado como calcular o seno, o cosseno e a tangente, as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Logo após, foi apresentado um desafio aos alunos, onde eles deveriam encontrar em sua residência um objeto que tivesse a forma de um triângulo retângulo e com uma régua medir as suas dimensões. Em seguida, eles deveriam utilizar seus conhecimentos sobre trigonometria no triângulo retângulo para calcular os valores de seno, cosseno e tangente em relação aos dois ângulos agudos do triângulo retângulo. Foi feito um exemplo para auxiliar os alunos e foi passada as instruções de uso da tabela trigonométrica para que os alunos pudessem relacionar os valores das medidas trigonométricas com o valor dos ângulos agudos internos do triângulo retângulo.

O conjunto das três aulas estão disponíveis no drive para acesso pelo endereço: https://drive.google.com/file/d/1g1SApXl0esIjdRWL7KcjAQoWchxF9AGM/view?usp=sharing

Considerações Finais

Os alunos da E. E. Raul de Leoni de Viçosa MG, precisavam para computar a carga horária de suas atividades enviar por meio de Formulários Google as questões referentes aos PET's. As aulas utilizando o Material Didático complementar foram muito importantes, embora não tenhamos muitos registros das presenças síncronas dos alunos, percebemos que eles acessaram os vídeos gravados e tivemos um bom retorno das atividades referentes ao PET final avaliativo. Paras o PET final avaliativo todos os alunos da turma precisavam fazer e entregar impresso e resolvido na escola, ou através do Google formulário. Este PET comtemplava a carga horária para aprovação, visto que os alunos que entregaram apenas ele, ficaram aprovados com progressão parcial; os alunos que entregaram todos os PET's além do PET final avaliativo foram aprovados para a série seguinte.

Ressaltamos nossa grande preocupação com a aprendizagem significativa, com o uso do currículo de Minas Gerais em conformidade com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular, 2018) e com o ensino de matemática contínuo e processual. Buscamos diante do cenário de ensino remoto a maior aproximação possível com os alunos de forma on-line, para desenvolver nossas propostas de ensino complementar as orientações e aulas que já estavam previamente organizadas pelo sistema estadual de ensino.

Acreditamos que além de atender aos alunos da rede estadual da E. E. Raul de Leoni de Viçosa, MG, também oportunizamos uma grande e enriquecedora experiência aos residentes de Matemática que também puderam contribuir com suas regências e planejamentos para o desenvolvimento de toda atividade. A vivência de situações de ensino e aprendizagem pelos residentes possibilitou uma nova compreensão da realidade escolar durante esse período de Pandemia do Covid-19, em que as interações interpessoais são bastante restritas. A elaboração e desenvolvimento de Materiais Didáticos possibilitou aos residentes refletirem acerca dos diversos conteúdos a serem abordados sobre a Geometria e a Álgebra para o 9º. ano do Ensino Fundamental II, de acordo com a BNCC (2018), além de tomarem consciência da importância de saberem selecionar materiais didáticos apropriados, ou mesmo construírem esses materiais para desenvolverem uma aula dinâmica e promover a aprendizagem significativa.

Além disso, importantes competências docentes foram desenvolvidas com vistas ao desenvolvimento de um novo perfil docente para as escolas do século XXI. Um perfil reflexivo e crítico que possibilite ao futuro professor ser um profissional qualificado para realizar uma prática didático-pedagógica inovadora, sabendo planejar, realizar e administrar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos curriculares pertinentes para os diferentes anos da Educação Básica.

Agradecimentos

Agradecemos a toda a comunidade escolar da Escola Estadual Raul de Leoni pela oportunidade de desenvolvermos o Programa de Residência Pedagógica conjuntamente. Também agradecemos aos residentes de Matemática pelo comprometimento na realização das diversas atividades.

Referências

CAPES – Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Programa de Residência Pedagógica**. Edital no. 1/2020. 2020.

LAMAS, R. C. P. Jogos e Materiais Didáticos para o Ensino de Matemática. XXVII Semana da Matemática: 03 a 06 de novembro de 2015. Departamento de Matemática, IBILCE-UNESP.

LORENZATO, S. Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006, p. 15-30.

MATOS, J, M. SERRAZINA, M, L. Didática da Matemática. Universidade de Lisboa, 1996.

POZO, Juan Ignacio; CRESPO, Miguel Ángel Gómez. **A Aprendizagem e o Ensino de Ciências: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico.** 5.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009, 296 p.

OLIVEIRA, M. M. Sequência Didática Interativa no processo de formação de professores. Petrópolis, RJ: Editora Vozes.Paro, V. H. (2010). Educação como exercício de poder: crítica ao senso comum em educação. 2ª Ed. São Paulo: Cortez. Coleção questões da nossa época (v. 4), 2013.

OLIVEIRA, H. L. G; Leiro, A. C. R. Políticas de formação de professores no Brasil: referenciais legais em foco. **Pro-Posições**, V. 30, p. 1-26, Campinas, 2019.

Secretaria Estadual de Educação de Minas Gerais. **Planos de Estudos Tutorados** (PET's). 2020. Disponível em: https://estudeemcasa.educacao.mg.gov.br/pets/ens-fund-anos-finais

Resolução CNE/CP nº 02, de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília: Conselho Nacional de Educação. 2015.

Resolução CNE/CP nº 02, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília: Conselho Nacional de Educação. 2019.

SANCHEZ BLANCO, G.; De Pro Bueno, A.; Valcárcel Pérez, M. A. V. A Utilização de um Modelo se Planejamento de Unidades Didáticas: O Estudo das Soluções na Educação Média. **Enseñanza de Las Ciencias**, V. 15, n. 1, p. 35-50, 1997.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Autores:

Thamyres Ribeiro Medeiros

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV). Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Atualmente, professora de matemática na rede pública estadual e privada no município de Viçosa – MG.

thamyres.medeiros@educacao.mg.gov.br

https://orcid.org/0000-0002-4471-9127

Aparecida de Fátima Andrade da Silva

Doutora em Ensino de Ciências/Química pela Universidade de São Paulo (USP).

Atualmente, professora do Departamento de Química da Universidade Federal de Viçosa (UFV), em Viçosa, MG.

aparecida.silva@ufv.br

https://orcid.org/0000-0002-8619-498X

Guilherme Flaviano Pereira
Graduando do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV)
guilherme.flaviano@ufv.br
https://orcid.org/0000-0002-2367-1857

Letícia Pereira de Almeida
Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (UFV)
leticia.p.almeida@ufv.br
https://orcid.org/0000-0002-5177-3877

Como citar o artigo:

MEDEIROS, T. R.; SILVA, A. F. A.; PEREIRA, G. F.; ALMEIDA, L. P. Elaboração de Materiais Didáticos Complementares de Matemática para o Ensino Fundamental II. **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 390 - 408, enero, 2022. DOI: 10.37618

***Lesson Study* presencial y la pasantía curricular supervisada en matemáticas: contribuciones al aprendizaje docente**

Regina da Silva Pina Neves
reginapina@mat.unb.br
https://orcid.org/0000-0002-7952-9665
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília (UnB)
Brasília/DF, Brasil.

Dario Fiorentini
dariof@unicamp.br
https://orcid.org/0000-0001-5536-0781
Faculdade de Educação, Universidade de Campinas (Unicamp)
Campinas/SP, Brasil.

Janaína Mendes Pereira da Silva
jana.mendes.ps@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-6540-1521
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Santo André/SP, Brasil.

Recebido: 20/julio/2021 **Aprovado:** 20/octubre/2021

Resumen

Uno de los desafíos en el desarrollo de la pasantía curricular supervisada en los cursos de pregrado es promover un diálogo equitativo entre la teoría y la práctica vivida en la formación inicial en la Escuela Básica. En este contexto, el presente estudio tiene como objetivo comprender los aprendizajes y aprendizajes construidos por los futuros docentes en el contexto de la Pasantía Curricular Supervisada en Matemáticas (en portugués, Estágio Curricular Supervisionado em Matemática – ECSM), desarrollada en el proceso de *Lesson Study* (*LS*). Se trata de una investigación cualitativa interpretativa, desde la perspectiva de la Teoría Social del Aprendizaje, ubicada en Comunidades de Práctica (CoP), centrada en una investigación narrativa de un grupo de pasantes que laboraban en un colegio privado, en el sexto y séptimo año de enseñanza fundamental. Se utilizaron datos de grabaciones de audio y video de las clases, acciones colaborativas de estudio, planificación, docencia, reflexión sobre la docencia y diarios reflexivos de los aprendices durante el proceso de formación. Los resultados muestran que los internos se apropiaron de discursos y formas de trabajo pedagógico en matemáticas al tiempo que demarcaron la centralidad de la planificación como acción intencional y científica de la profesión docente. Asimismo, revelan el potencial de la *LS* adoptada como un proceso de desarrollo profesional que puede ser adoptado en otras materias de la formación inicial de los docentes de matemáticas, hecho que aún es incipiente en Brasil.

***Palabras-clave*:** Pasantía Supervisada. Futuro Profesor de Matemáticas. *Lesson Study*. Aprendizaje Docente.

Lesson Study **presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: contribuições à aprendizagem docente**

Resumo

Um dos desafios no desenvolvimento do estágio curricular supervisionado nos cursos de licenciatura é promover um diálogo equânime entre a teoria e a prática vivenciada na formação inicial junto à Escola Básica. Nesse contexto, o presente estudo tem como objetivo compreender as aprendizagens e os aprendizados construídos por futuros professores no contexto do Estágio Curricular Supervisionado em Matemática (ECSM), desenvolvido em processo de *Lesson Study* (*LS*) presencial. Trata-se de uma investigação qualitativa interpretativa, sob a perspectiva da Teoria Social de Aprendizagem, situada em Comunidades de Prática (CoP), focada em uma pesquisa narrativa de um grupo de estagiários que atuaram em uma escola privada, no sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental. Utilizou-se dados provenientes de gravações em áudio e em vídeos das aulas, das ações colaborativas de estudo, planejamento, docência, reflexão sobre a docência e diários reflexivos dos estagiários no decorrer do processo formativo. Os resultados evidenciam que os estagiários se apropriaram de discursos e de formas do trabalho colaborativo em matemática, ao mesmo tempo em que demarcam a centralidade do planejamento enquanto ação intencional e científica da profissão docente. Do mesmo modo, revelam o potencial do *LS* adotado enquanto processo de desenvolvimento profissional que pode ser utilizado em outras disciplinas da formação inicial do professor de matemática, fato ainda incipiente no Brasil.

Palavras-chave**:** Estágio Curricular Supervisionado. Futuro Professor de Matemática. *Lesson Study*. Aprendizagem Docente.

In-class Lesson Study and the internship program in Mathematics: contributions to teacher education

Abstract

One of the challenges of designing the internship program for undergraduate courses is to promote theory and practice equanimously in initial teacher education in basic education. Thus, the present study aims to understand the learning and apprenticeship of future teachers in the context of the internship in Mathematics (SATPM), developed in the in-class Lesson Study (LS) process. This is a qualitative interpretative investigation, from the perspective of the Social Theory of Learning, situated in Communities of Practice (CoP), focused on narrative research of a group of interns who worked in the sixth and seventh grade of a private elementary school. It was used data from audio and video recordings of the classes, collaborative actions of study, planning, teaching, reflection on teaching, and interns' reflective diaries during the training process. The results show that the interns make use of discourses and forms of pedagogical work in mathematics while demarcating the centrality of planning as an intentional and scientific action of the teaching profession. Likewise, they reveal the potential of LS adopted as a process of professional development that can be embraced by other subjects of the initial formation of mathematics teachers, a fact still incipient in Brazil.

Keywords**:** Internship Program. Future Teachers of Mathematics. Lesson Study. Teacher Education.

Introdução

O Estágio Curricular Supervisionado em Matemática (ECSM) é um componente obrigatório da formação inicial presente nos Projetos Pedagógicos dos Cursos visando, entre outros aspectos, promover a compreensão da docência em matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Geralmente é oferecido contemplando ora a observação, ora a participação na prática de outro professor e ora assumindo a regência de classe; de modo a possibilitar ao futuro professor o contato com a escola, com os estudantes e com a profissão docente.

Quando o espaço formativo do ECSM é constituído de maneira que favoreça uma atitude investigativa por meio da reflexão e da intervenção em questões educacionais, este cria momentos oportunos de aprendizagem da profissão docente e de construção da identidade profissional. Tal disposição se evidencia na forma como se consideram os conhecimentos específicos e pedagógicos do conteúdo que será ensinado, as diretrizes curriculares, as relações estabelecidas entre os estudantes e os futuros professores, entre estes e os professores orientadores e supervisores, bem como o contexto social no qual estes sujeitos estão inseridos (TEIXEIRA; CYRINO, 2015; BARROSO DAUANNY, 2020).

Atentos a essas possibilidades, temos orientado nossas ações de docência e de pesquisa, tendo por base a perspectiva social da Aprendizagem Situada em Comunidades de Prática (CoPs) (LAVE; WENGER, 1991; WENGER, 1991), interessados em promover a aprendizagem profissional de futuros professores, haja vista sua fecundidade enquanto espaço compartilhado de coprodução de conhecimentos (CRECCI; FIORENTINI, 2013; CYRINO, 2013). Logo, entendemos a aprendizagem do professor e do futuro professor como um processo: i) de participação em uma prática profissional; ii) de negociação de significados; e iii) de identificação e pertença a uma comunidade de prática docente. O estabelecimento destas CoPs, sua consolidação e o acesso às suas práticas têm sido favorecidos pelo *Lesson Study* (*LS*) devido à sua natureza reflexiva e colaborativa (CRECCI; FIORENTINI, 2018).

Cientes disso, temos desenvolvido o ECSM em processo de *LS* presencial e on-line no âmbito do projeto intitulado "*Lesson Study* e aprendizagem profissional docente de professores e futuros professores que ensinam matemática no Distrito Federal"[1]. O projeto

[1] Vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação, linha de pesquisa Educação em Ciências, Matemática e Tecnologias, da Universidade de Campinas, ao Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM), da

integra formadores de professores que atuam na disciplina de ECSM (professores orientadores), futuros professores de matemática (estagiários) e professores supervisores que atuam em escolas da educação básica, públicas e privadas. Nesse espaço formativo, os estagiários interagem entre si e também com os professores orientadores e supervisores, ao longo de um semestre letivo, em espaços físicos na universidade e na escola, bem como em espaços virtuais, por meio de computadores e celulares. Para tanto, eles estudam, planejam, socializam, realizam e analisam aulas, ao mesmo tempo em que produzem relatos orais e escritos sobre os significados que atribuem a essas experiências, sendo estes elementos a base para a pesquisa narrativa empreendida (CLANDININ; CONNELLY, 2015). Todo este trabalho tem sido guiado pelos seguintes questionamentos: (i) A organização do ECSM em processo de *LS* promove práticas reflexivas e colaborativas entre os estagiários e entre estes e os professores orientadores e supervisores?; e (ii) Em que medida as etapas do *LS* são contributivas à aprendizagem docente?

Assim, o presente artigo, como parte desses estudos, tem por objetivo compreender as aprendizagens e os aprendizados produzidos por estagiários ao cursarem o ECSM em processo de *LS*, no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental em uma escola privada.

A organização textual deste artigo é composta por cinco seções, nas quais, inicialmente, discutimos a aprendizagem profissional, entendendo-a como participação e reificação, mediante negociação de significados, em comunidades de prática. Em seguida, discorremos sobre o processo de *LS* e as características do ECSM. Por fim, descrevemos os aportes metodológicos e discutimos as possíveis evidências de aprendizagem profissional e de aprendizados docentes no âmbito do grupo investigado.

1 Aprendizagem profissional de futuros professores em comunidades ou espaços híbridos

Embora tenhamos avançado muito em relação às concepções, modelos e fundamentos teóricos e epistemológicos nos estudos dos processos de formação do professor, de seus conhecimentos profissionais docentes, de seu desenvolvimento profissional e de sua identidade profissional, ainda não possuímos uma mesma base conceitual e epistemológica que dê suporte e ferramentas analíticas consistentes acerca do estudo da aprendizagem e dos

Universidade de Brasília, e apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAP-DF). O projeto integrou os estudos de pós-doutoramento realizados pela primeira autora sob a supervisão do segundo autor, sendo este artigo um de seus resultados.

aprendizados do professor como campo de estudo e pesquisa, sobretudo em uma perspectiva sociocultural e em comunidades profissionais que têm a investigação sobre sua prática como processo de desenvolvimento profissional e aprendizagem docente. Essa dificuldade tem sido recorrente e percebida não só nos estudos desenvolvidos por Fiorentini e colaboradores, mas também nos demais estudos brasileiros e internacionais.

Sob a perspectiva da *Teoria Social da Aprendizagem* (LAVE; WENGER, 1991; WENGER, 1991), toda aprendizagem é situada em uma prática social que acontece mediante participação ativa em práticas de comunidades sociais e construção de identidades com essas comunidades. Os saberes em uma CoP são, portanto, produzidos e evidenciados através de formas compartilhadas de fazer e entender dentro da comunidade, as quais resultam de dinâmicas de negociação de significados, envolvendo *participação* e *reificação* na (ou a partir da) CoP.

A *participação,* conforme interpretação de Fiorentini (2013, p. 157),

> é um processo pelo qual os membros de uma comunidade compartilham, discutem e negociam significados sobre o que fazem, falam, pensam e produzem conjuntamente. Participar, portanto, significa engajar-se na atividade própria da comunidade; apropriar-se da prática, dos saberes e dos valores da mesma e também contribuir para o desenvolvimento da própria comunidade, sobretudo de seus membros e de seu repertório de saberes. Reificação significa tornar em coisa, a qual não se refere apenas a textos, tarefas, materiais didáticos. Refere-se também a conceitos, ideias, rotinas, registros escritos e teorias que dão sentido às práticas da comunidade.

Neste contexto, para Wenger (1991; 2004), as comunidades de prática são formadas por pessoas engajadas em um empreendimento comum, envolvendo esse duplo processo da participação e reificação. No envolvimento destas na ação, produzem-se formas de reificação, refletindo experiências compartilhadas num processo de aprendizagem coletiva, no qual desenvolvem conhecimento, "[...] compartilham uma preocupação ou uma paixão por algo que fazem e aprendem a fazê-lo melhor quando elas interagem regularmente" (WENGER, 2004, p. 1, tradução nossa). Assim, as CoPs aparecem como potenciais facilitadoras da cooperação entre os sujeitos, tanto para o professor experiente quanto para o professor em início de carreira e o futuro professor na formação inicial (ACEVEDO RINCÓN; FIORENTINI, 2016).

Pensar a aprendizagem na perspectiva situada é entender que o aprendizado do professor envolve o desenvolvimento e a integração de uma base de conhecimentos sobre o conteúdo, sobre o ensino, sobre a própria aprendizagem e as "relações entre pessoas, contextos e práticas" (HONORATO; FIORENTINI, 2021, p. 3). O professor torna-se capaz de desenvolver esse conhecimento em tempo real, relacionado à tomada de decisões no momento em que ele está atuando em sala de aula (CRECCI; PAULA; FIORENTINI, 2019).

Entretanto, cabe esclarecer que, neste artigo, conceituamos, com base em Honorato e Fiorentini (2021) e Cristovão e Fiorentini (2021), a *aprendizagem* do professor como o processo ou modo de ele aprender mediante participação, negociação de significados, reificação e transformação durante uma experiência formativa (*Lesson Study*) desenvolvida por uma comunidade docente. Já os *aprendizados* docentes são os resultados/produtos desse processo ou modo de o professor aprender na comunidade. Esses aprendizados docentes podem ser evidenciados, durante o processo formativo, mediante interpretação e análise da mudança de atitude e postura do professor e, sobretudo, dos conhecimentos profissionais produzidos ou ressignificados (portanto, reificados ou objetivados) nesse processo e que norteiam o ensino dos conteúdos específicos e a prática pedagógica. Essa prática pedagógica compreende o processo de estudo de um tema e a respectiva elaboração de tarefas e desafios matemáticos que oportunizam a exploração e aprendizagem do tema, passa pela gestão da aprendizagem dos alunos em aula e chega à reflexão e avaliação do trabalho pedagógico realizado.

Na relação universidade-escola, as comunidades de aprendizagem podem se constituir de múltiplas formas, podendo ser endógenas, colonizadoras/colonizadas ou colaborativas, conforme Fiorentini e Carvalho (2015). Embora em todas essas CoPs possam ocorrer aprendizagens docentes, pesquisas mais recentes (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999; FIORENTINI, 2013) têm, no entanto, evidenciado maior potencial de aprendizagem e de aprendizados docentes (ressignificações e conhecimentos profissionais) nas CoPs colaborativas e investigativas fronteiriças ou híbridas (ZEICHNER, 2010). Isso porque nessas acontece participação conjunta e colaborativa de profissionais da escola (supervisores de estágio) e acadêmicos da universidade (formadores de professores e estagiários). Zeichner (2010), por exemplo, parte do pressuposto de que os conhecimentos docentes são possíveis de serem criados, mediante interação dialógica da universidade com a escola, sendo este um terceiro espaço na formação de professores. Desse modo, propõe a "criação de espaços híbridos nos programas de formação inicial de professores que reúnem professores da Educação Básica e do Ensino Superior, e conhecimento prático profissional e acadêmico em novas formas para aprimorar a aprendizagem dos futuros professores" (ZEICHNER, 2010, p. 487).

Tendo por base a teoria da aprendizagem situada de Lave e Wenger (1991) e os diferentes aprendizados de professores em relação à prática profissional docente (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999; ZEICHNER, 2010), Cristovão e Fiorentini (2021, p. 42) conjecturam que "o modo como o professor aprende e o que ele aprende na formação inicial (primeiro espaço de formação docente) é diferente do modo como ele aprende na prática escolar (segundo espaço de formação docente) e, também, difere da aprendizagem que acontece em espaços híbridos" ou fronteiriços entre universidade e escola (terceiro espaço de formação profissional).

Além disso, conforme Fiorentini (2013), "o processo de problematização e desnaturalização das práticas cotidianas de ensinar e aprender nas escolas, as comunidades de aprendizagem profissional heterogêneas podem ser úteis, sobretudo se envolverem pessoas com diferentes conhecimentos e práticas sociais" (p. 159). Já Cristovão e Fiorentini (2021, p. 42) defendem também que "o confronto entre diferentes pontos de vista e a diversidade de experiências dos participantes destas comunidades podem proporcionar maior empoderamento no sentido de analisar e transformar as práticas, gerando aprendizados mais profundos e relevantes profissionalmente".

Essa compreensão de terceiro espaço, junto ao processo de formação inicial, possibilita relacionar as ideias que estão intimamente ligadas ao *Lesson Study* e se incorpora a elas; e nela se engajam colaborativamente os professores da Escola Básica e os professores formadores e os estudantes em formação inicial. Observa-se, assim, o processo ou o efeito de aprender, no caso as práticas para o aprendizado da docência, sejam dos professores ou dos futuros professores sobre a reflexão e o aprimoramento de possíveis práticas de ensino promovidas e da própria ação docente (CRECCI; PAULA; FIORENTINI, 2019).

Nesta perspectiva, o processo *Lesson Study*, em função de sua natureza reflexiva, investigativa e colaborativa entre universidade e escola, tem favorecido a constituição de comunidades docentes híbridas, envolvendo futuros professores e formadores da universidade e professores da educação básica, que têm como *eixo* comum "a problematização das práticas de *ensinaraprender* dos professores envolvidos" (CRECCI; FIORENTINI, 2018, p. 289).

2 O processo Lesson Study (LS) de investigação do professor e aprendizagem docente

O *LS* teve origem no Japão, em meados do século XX, e, com o tempo, passou a fazer parte da cultura escolar japonesa, sendo desenvolvido a partir de três etapas originais: (1) planejamento – estruturação da aula e da tarefa a ser realizada de maneira colaborativa e coletiva entre os professores ou futuros professores; (2) desenvolvimento da aula – o responsável por uma turma aplica a tarefa elaborada na etapa anterior, enquanto os demais observam, registram, com foco na aprendizagem dos estudantes; e (3) análise – analisar, refletir, discutir entre os professores, com base nas observações realizadas na sala de aula (PINA NEVES; FIORENTINI, 2021). O *LS* pode ser desenvolvido de maneira integrada na formação inicial e na continuada de professores, no sentido de que ambos – professores da escola (supervisores) e estagiários – têm a oportunidade de se aprimorarem profissionalmente mediante estudo e planejamento conjunto e colaborativo de tarefas relevantes para o ensino e sua respectiva implementação em sala de aula (PONTE *et al*., 2016).

A aula, nesse processo, é tomada não apenas como objeto de trabalho do professor, mas também como objeto de estudo e investigação. A aula, nessa perspectiva investigativa, pode ser desenvolvida de modo a permitir análises e problematizações que resultam em alterações, modificações, complementações e melhorias, sendo possível ministrá-la novamente na mesma turma ou em uma turma diferente, em um mesmo nível de escolarização. Esse movimento contínuo de estudo da aula é chamado de Espiral do *Lesson Study*, uma vez que cada novo ciclo gera novos conhecimentos sobre a aula em desenvolvimento, proporcionando novas compreensões a cada vez que for realizada e estudada (QUARESMA; PONTE, 2019). Assim, o *Lesson Study* passou a ser reconhecido internacionalmente como um processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional de professores, centrado no estudo de suas próprias práticas letivas.

Lewis *et al.* (2004), ao sistematizarem as principais contribuições educativas desse processo, afirmam que pesquisadores e os próprios professores percebem que o *LS* promove melhorias relativas: (a) ao conhecimento do conteúdo curricular e do ensino; (b) à capacidade de observar e perceber as dificuldades e possibilidades dos alunos; (c) ao fortalecimento dos vínculos entre os professores; (d) ao fortalecimento da relação entre a prática cotidiana e os objetivos de ensino, a longo prazo; (e) ao fortalecimento da motivação; e (f) do senso de eficácia e, ainda, à melhoria da qualidade dos planos e atividades de aula.

Em relação à comunicação em sala de aula, evidencia-se que os professores passam a valorizar as discussões coletivas com todos os estudantes da sala, assim como as realizadas em pequenos grupos expandem o número de questionamentos que fazem aos estudantes, tornando-os mais provocativos e complexos e passam a reconhecer a importância de os alunos assumirem papel ativo na comunicação na sala de aula (ROBINSON; LEIKIN, 2012).

Atualmente, observa-se o desenvolvimento de *LS* em vários países do mundo, em distintos contextos sociais e culturais, em processos de formação inicial e continuada de professores de matemática (PONTE *et al.*, 2016). No Brasil, os primeiros estudos em *LS* foram realizados, em sua maioria, na Região Sudeste e em contextos de formação continuada (BALDIN, 2009; FELIX, 2010; MERICHELLI; CURI, 2016; FIORENTINI *et al*., 2018; CRECCI *et al*., 2019; RICHIT *et al*., 2019; WANDERLEY; SOUZA, 2020, entre outros). Todavia, observa-se que o número de estudos realizados em outras regiões tem crescido, ao mesmo tempo em que se amplia o interesse pelo desenvolvimento de *LS* na formação inicial, como mostram as investigações de Coelho, Vianna e Oliveira (2014), Bezerra (2017), Macedo, Bellemain e Winslow (2020), Pina Neves e Fiorentini (2021), entre outras.

De modo geral, observa-se que esses estudos têm assumido características específicas diante das adaptações que se fizeram necessárias aos contextos culturais e profissionais próprios do país, pois têm adotado diferentes aportes teóricos e apresentado resultados promissores diante das históricas dicotomias: conhecimento matemático-pedagógico, teoria-prática, individual-coletivo, entre outras, como discutido por Gatti (2000), Zeichner (2010) e Fiorentini e Oliveira (2013). No caso do ensino da matemática, a superação dessas dicotomias pode ser alcançada por meio de ações colaborativas nos cursos que propõem um currículo com conteúdos, e/ou atividades de estágio, vinculados à realidade escolar, envolvendo participação conjunta de professores da escola básica e de formadores e futuros professores da universidade (ZEICHNER, 2010; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021).

3 O ECSM em processo de Lesson Study na Licenciatura em Matemática da UnB: contexto e escolhas metodológicas

O *Lesson Study*, adotado no âmbito deste estudo, assume características próprias pelo fato de ser aplicado na disciplina de ECSM na formação inicial de professores de matemática. Tais características foram construídas a partir da literatura da área e, particularmente, em diálogo com a experiência em *Lesson Study Híbrido* (*LSH*) desenvolvida pelo Grupo de Sábado (GdS) da Universidade de Campinas, predominantemente, na formação continuada de professores que ensinam matemática (FIORENTINI *et al*., 2018; CRECCI; PAULA; FIORENTINI, 2019; LOSANO *et al*., 2021).

Desse modo, o *LSH* diferencia-se do *LS* usualmente adotado no Brasil e em outros países em função do número de etapas e do modo de desenvolvê-las, especialmente, pela presença da análise narrativa dos professores como resultado da sistematização de sua experiência de aprendizagem docente e a ampliação de "diálogos e negociações de significados sobre o que e como ensinar e aprender Matemática na Educação Básica, com análises e discussões, tanto *a priori* como *a posteriori* a partir das próprias demandas profissionais dos participantes" (ARAÚJO; RIBEIRO; FIORENTINI, 2017, p. 2).

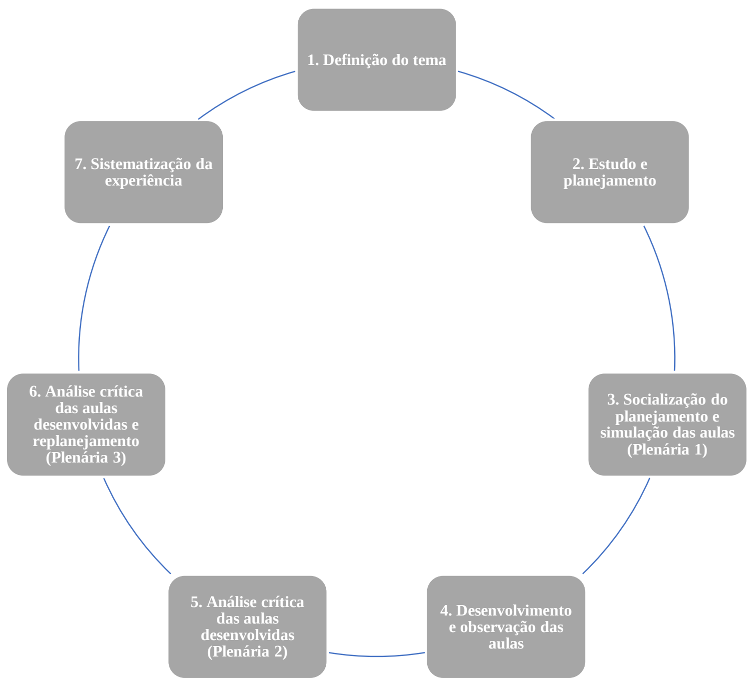
Outro detalhe da experiência de *LSH* no GdS que nos pareceu favorável ao ECSM é a forma como o estudo/planejamento da aula é desenvolvido, gerando uma proposta de aula exploratório-investigativa[2] piloto, a qual é primeiramente apresentada/discutida/validada no espaço híbrido do Grupo de Sábado para, então, ser aplicada na escola (FIORENTINI *et al*., 2018). Essa ação de planejar e simular a aula antes de realizá-la na escola mostrou-se compatível com a realidade do ECSM em nossa instituição, visto que os futuros professores e o professor orientador têm encontros semanais de quatro horas, configurando-se em um momento propício para estudos, debates, simulações e análises críticas. Além disso, a adoção de tarefas exploratório-investigativas interessava-nos pelo fato de estas oportunizarem o protagonismo dos alunos e a problematização das ações docentes e discentes na aula de matemática, sobretudo, a resolução de problemas e a comunicação durante as aulas.

Além disso, o LSH nos ajudava a discutir o próprio ESCM e a necessidade de construirmos redes de apoio mútuo entre futuros professores, professores orientadores e os supervisores da escola, de modo que a universidade e a escola pudessem caminhar de maneira mais dialógica, mediante negociação de significados, respeitando reciprocamente as práticas

[2] Uma aula **exploratório-investigativa,** conforme Fiorentini (2012), ocorre quando são propostas e desenvolvidas tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de resolução e significação. O uso da expressão composta justifica-se, pois, "dependendo do modo como essas aulas exploratório-investigativas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase das explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a exploração, formulação de questões, hipóteses ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de investigação, seguidas de tentativas de justificação ou de prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação típica de investigação matemática" (FIORENTINI, 2012, p. 72).

do mundo acadêmico e do mundo da escola. Assim, motivados por essas possibilidades, iniciamos, em 2019, um processo gradativo de reconstrução das etapas de observação, de participação colaborativa nas aulas do/a supervisor/a e regência própria do ECSM em processo de *Lesson Study*, como mostra a Figura 1, assumindo-o como campo de estudo e pesquisa, buscando compreender a aprendizagem profissional dos futuros professores ao vivenciarem o desafio de promover a aprendizagem matemática de seus estudantes.

Figura 1 – Etapas do ciclo de *Lesson Study* adotado no âmbito da disciplina de ECSM



Fonte: Pina Neves e Fiorentini (2021)

Em função dessas escolhas, a professora orientadora[3] buscou as condições necessárias para esse desenvolvimento em termos de: aspectos legais e éticos para a realização do ECSM, contato prévio com escolas e prováveis professores supervisores, apoio institucional para que os futuros professores tivessem livre acesso aos laboratórios de ensino e de informática, podendo, inclusive, utilizá-los em horários além do estabelecido para a disciplina, como também tomar por empréstimo materiais didáticos, livros e revistas. Nesse contexto, um primeiro ciclo de *LS* presencial foi desenvolvido na disciplina de ECSM I[4], Anos Finais do Ensino Fundamental, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Brasília

[3] A primeira autora deste artigo foi a única orientadora deste ECSM I.
[4] Esse estágio contempla a parte comumente conhecida como observação e regência, incluindo o planejamento. Porém, para este artigo, optamos por abordar somente as etapas 1, 2 e 3 do ciclo de LS.

(UnB), no 7º semestre do curso, dispondo de 120 horas semestrais, sendo quatro horas semanais realizadas no Departamento de Matemática (MAT) e quatro horas semanais na escola. Essa etapa contou com a participação de 17 futuros professores, sendo cinco mulheres e doze homens, com idades entre 19 e 47 anos, sendo que a maioria estava entre 20 e 22 anos.

Os primeiros encontros da disciplina versaram sobre as negociações e as decisões coletivas que culminaram na formação dos grupos e na definição das escolas. Logo, respeitando anseios e afinidades pessoais, interesses por escolas, por ano escolar, disponibilidade de tempo, compatibilidade de agendas, entre outros aspectos, foram constituídos quatro grupos e definidas quatro escolas, sendo o espaço de atuação do primeiro grupo uma escola privada, do segundo uma escola privada do Sistema S[5], do terceiro uma escola pública federal, e do quarto uma escola pública distrital. Cada grupo constituiu-se em uma pequena CoP[6] engajada no estudo, no planejamento e na análise de aulas de um tópico de matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental em diferentes culturas escolares, e, nesse processo, cada CoP de futuros professores se aproximava da profissão docente e de suas rotinas, interagindo e compartilhando suas aprendizagens e seus aprendizados com a Comunidade mais ampla, formada por todas as CoPs vinculadas à disciplina.

O transitar entre a escola e a UnB (MAT), o diálogo constante entre os membros dos grupos, a professora orientadora e os professores supervisores delimitaram, primeiramente, dois espaços de participação: um na escola e outro na UnB (MAT). Dois outros espaços se constituíram em resposta às necessidades do *LS* em desenvolvimento, que foram: um espaço físico para uso dos grupos, além dos horários da disciplina, e um espaço virtual para a troca de informações, registro e reflexão sobre a experiência, escrita compartilhada de textos, diários, relatórios, enfim, um espaço no qual o diálogo entre os futuros professores e a professora orientadora se mantivesse para além dos momentos já instituídos. Desse modo, quatro espaços de participação foram constituídos no estudo, como apresentado na Tabela 1.

[5] O sistema S é um conjunto de organizações e entidades voltado para o treinamento profissional, assistência social, consultoria, pesquisa e assistência técnica.

[6] De acordo com Wenger (1991) e Acevedo Rincón e Fiorentini (2016), as comunidades de prática são grupos de pessoas que compartilham uma preocupação comum (por exemplo: estudar um tópico de interesse comum, visando desenvolver uma experiência de ensino) e que aprofundam seus conhecimentos e experiência nesta área, interagindo de forma contínua e construindo históricas compartilhadas de aprendizagem.

Tabela 1 – Descrição dos espaços de participação

Espaços de Participação	Grande Grupo	Grupos no MAT	Grupos na Escola	Grupos no Espaço Virtual (WhatsApp + drive)
Participantes	Professora orientadora Futuros professores	Futuros professores	Professora supervisora Futuros professores Ocasionalmente, professora orientadora.	Professora orientadora Futuros professores
Contexto e Duração	Sextas-feiras, das 8 às 12h, nas instalações do MAT, totalizando 15 encontros no semestre (60 horas).	Horário e dias livres. Em salas de aulas ou nos Laboratórios de Ensino e informática.	4 horas semanais, em horário negociado com o(a) professor(a) supervisor(a), de acordo com os horários dele(a) nas turmas em foco.	Semanalmente Horário e dias livres
Práticas	Estudo, planejamento, simulação e análise coletiva de aulas que seriam ministradas e/ou já ministradas.	Conversa, estudo, digitação, planejamento, simulação de aulas, reclamação, indignação, comemoração, etc.	Observação e colaboração em aulas ministradas pelo professor supervisor; regência e análise crítica de aulas ministradas pelos futuros professores.	Compartilhamento de artigos, planejamentos, livros, documentos curriculares, horários, resoluções, notações matemáticas de estudantes, avaliações escritas em branco e respondidas, etc. Escrita compartilhada de relatório semanal das vivências. Compartilhamento de vídeos e áudios de aulas e de análise crítica de aulas
Etapas do *Lesson Study*	1, 2, 3, 6 e 7	1, 2, 7	4, 5	1, 2, 7
Organização do trabalho pedagógico	Dois encontros para encaminhamentos administrativos, éticos e legais do ECSM; três encontros para estudos sobre as orientações curriculares e o livro didático de cada escola; dez encontros de estudo, planejamento e análise crítica de aulas de acordo com a Figura 1.	Espaço gerido pelos futuros professores em função de demandas semanais ou diárias que exigiam deles o encontro, a conversa e a tomada de decisão.	Visitas semanais à escola com 4h de duração Registro escrito do observado e do vivido Reuniões semanais com a professora supervisora Reuniões (ocasionais) das professoras orientadora e supervisora	Registro de falas, ações Escrita compartilhada Acompanhamento e devolutivas da produção de cada grupo pela professora orientadora
Recursos utilizados	Artigos científicos, avaliações escritas, excertos dos diários da professora orientadora e	Artigos científicos, materiais didáticos, áudio e vídeos de aulas ministradas.	Livro didático, planos de aula, Notações matemáticas dos estudantes, Avaliações escritas.	Grupo no WhatsApp Pasta no Drive para cada grupo Arquivos semanais por grupos para relato e análise crítica da vivência

	dos estagiários, relatos de observações, vivências e dados construídos nas escolas (vozes de professores e estudantes).			
Foco da interação	Observações realizadas nas escolas; aos conceitos matemáticos, às justificativas dos algoritmos de modo a antecipar dúvidas, perguntas, dificuldades; como também, as análises das aulas e da experiência, problematizando as dificuldades e os desafios e buscando compreensão para o futuro campo de atuação.	Conversas sobre: permanência ou não na docência; a qualidade de vida de alguns professores devido à sobrecarga de aulas; as demissões de professores; a diminuição do número de estudantes em algumas escolas privadas; o fechamento de escolas, entre outros.	A docência: Conteúdos, abordagens didáticas, avaliação, currículo, necessidades conceituais e pessoais dos estudantes; necessidades, alegrias e frustrações da carreira docente. A escola: O ambiente escolar, a coordenação pedagógica, o conselho de classe, a sala de professores, o sistema de avaliação; alguns participaram de reunião de pais e de festividades da escola. Os estudantes: como eles estudavam, como lidavam com a aula do professor e com os colegas, como lidavam com os futuros professores; quais conteúdos mostravam-se mais e menos motivados; circunstâncias nas quais participavam mais ou menos das aulas; entre outros aspectos.	A edição possibilitada no Drive criou diálogos entre os futuros professores no grupo, entre estes e os demais grupos e entre os grupos e a professora orientadora. Os vínculos foram se estabelecendo de modo a respeitar e a acolher a produção do outro, entendendo que todos estavam em momento de desenvolvimento e que aprenderiam, também, ao observar como cada um significava a experiência.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O tratamento dos dados foi realizado por meio de uma pesquisa narrativa[7] (CLANDININ; CONNNELLY, 2015; CRECCI; FIORENTINI, 2018; CRISTOVÃO; FIORENTINI, 2021), sobretudo por ela viabilizar a investigação da aprendizagem sob a perspectiva da Teoria Social de Aprendizagem, situada em Comunidades de Prática (CoP) (LAVE; WENGER, 1991), pois a aprendizagem "pode ser melhor descrita e analisada examinando a história de participação e reificação dos participantes em comunidades" (CRECCI; FIORENTINI, 2018, p. 279). Crecci e Fiorentini (2018, p. 280) complementam que o diferencial da pesquisa narrativa consiste no reconhecimento de que "viver, contar e recontar é um processo artesanal, por sua gênese, único para compreender experiências vividas, não sendo possível subtrair o autor do estudo".

Nesse sentido, a narrativa, na perspectiva de Clandinin e Connelly (2015), pode ser vista como um fenômeno a ser investigado e como um método de pesquisa. Em outras palavras, na interpretação de Freitas e Fiorentini (2007, p. 64), a narrativa é tanto um "modo de refletir, relatar e representar a experiência vivida, produzindo sentido ao que somos, fazemos, pensamos, sentimos e dizemos", como um "modo de estudar/investigar a experiência, isto é, como um modo especial de interpretar e compreender a experiência humana, levando em consideração a perspectiva e interpretação de seus participantes".

Segundo Clandinin e Connelly (2015), a pesquisa narrativa como metodologia possibilita a transição dos textos de campo (dados) para textos de pesquisa, no meio de um espaço tridimensional localizado em algum lugar ao longo do processo, envolvendo três dimensões relativas: (a) ao tempo, (b) ao lugar que situa o contexto do fenômeno que será estudado e (c) ao pessoal e ao social (interações). Os autores complementam que este processo de transformação dos textos de campo em textos de pesquisa segue um caminho de interpretação e análise narrativa, que pode ser considerado por três aspectos relacionados, quais sejam: "considerações teóricas; considerações práticas e orientadas para o texto de campo; e considerações analítico-interpretativas, na medida em que fazemos a transição dos textos de campo para os textos de pesquisa" (p. 172).

[7] "[...] é uma forma de compreender a experiência. É um tipo de colaboração entre pesquisador e participantes, ao longo de um tempo, em um lugar ou série de lugares, e em interação com *milieus*. Um pesquisador entra nessa matriz no durante e progride no mesmo espírito, concluindo a pesquisa ainda no meio do viver e do contar, do reviver e recontar, as histórias de experiências que compuseram as vidas das pessoas, em ambas as perspectivas: individual e social". (CLANDININ; CONNNELLY, 2015, p. 51, grifo dos autores).

Portanto, a pesquisa narrativa, como opção metodológica para o presente estudo, configura-se como o caminho pelo qual buscamos compreender a experiência de colaboração entre a professora orientadora, os professores supervisores e estagiários, e, principalmente, as aprendizagens e os aprendizados docentes dos estagiários. Os textos de campo que utilizamos para compor a narrativa deste estudo são dados construídos ao longo de todo o processo formativo do ECSM e consistem em: (i) protocolos contendo registros escritos e fotografias das etapas do *LS*; (ii) vídeos das discussões nas aulas e nos grupos; (iii) vídeo das aulas e das Plenárias; e (iv) diários dos estagiários. Os vídeos foram transcritos na íntegra e por meio deles foi possível fazer leituras, selecionando episódios significativos, mediante a organização de alguns depoimentos ou episódios relevantes para evidenciar, pela análise, indícios de aprendizagem e de aprendizados.

As escolhas possibilitaram, ao presente estudo, atentar-se aos momentos nos quais os futuros professores e a professora orientadora se engajaram em ações de estudo, planejamento e simulações de aulas, enfatizando a preparação para a regência. Compõem, assim, a organização dos variados textos provisórios situados nos dados que constituem este estudo, que, a partir das leituras, escritas, releituras e reescritas possam formar o texto de pesquisa (CLANDININ; CONNNELLY, 2015). Cada espaço de participação no contexto do ECSM possibilitou maior ou menor interação entre os futuros professores, entre eles e os professores supervisores e a professora orientadora; permitiu mais liberdade de fala; incentivou a possibilidade de escrita de forma narrativa sobre as vivências e o significado que cada um atribuiu a elas.

Logo, lançamos luz ao que os estagiários do segundo grupo vivenciaram e às mudanças que esta vivência proporcionou às aprendizagens e aos aprendizados docentes construídos por eles ao longo do ECSM. Selecionamos, para a análise do vivido, alguns episódios de suas interações – os quais serão relatados na seção a seguir – nos quatro espaços de participação descritos acima, ao desenvolverem as Etapas 1, 2 e 3 do *LS* (Figura 1).

1. Narrativas de participação

O segundo grupo foi formado por duas estagiárias e três estagiários que já se conheciam do convívio em outras disciplinas do curso e/ou projetos extensionistas. A escola foi escolhida por eles, dentre as opções apresentadas pela professora orientadora, considerando os seguintes aspectos: a) interesse em conhecer uma cultura escolar diferente da escola pública já conhecida por eles, enquanto estudantes da educação básica e futuros professores em atividades de prática como componente curricular; b) interesse comum da turma de ECSM em acessar diferentes culturas escolares; e c) proximidade de suas residências.

Os estagiários desenvolveram as etapas do *LS* adotado no estudo ao longo de um semestre letivo, cumprindo quatro horas semanais na escola e quatro horas semanais na universidade. A Tabela 2, a seguir, reúne informações sobre a escola e sobre a prática pedagógica em matemática da professora supervisora, observada pelos estagiários.

Tabela 2 – Descrição do espaço de atuação do Grupo 2

	A sala de aula/ a turma	**A professora supervisora**	**A organização do trabalho pedagógico**
Observações realizadas pelos estagiários durante a Etapa 1.	– Espaço físico da sala de aula pequeno, o que limitava algumas ações. – Sala fixa para os estudantes; os professores trocam de sala. – Possui quadro branco, televisão e projetor.	– Licenciada em Matemática – 10 anos de docência na escola – Coordenadora de projetos de tecnologia	– Estudantes organizados ora em fileiras, ora em duplas. – A escola defende o trabalho em duplas “padrinho e afilhado”, com alternância de papéis. – A professora utiliza a plataforma *Khan Academy* com atividades/vídeos para acesso em casa pelos estudantes e analisa os *feedbacks gerados pela plataforma.* – A média da escola é 7,0. Parte da nota dos estudantes é de participação (em sala, nas atividades extraclasse, na plataforma, etc.). – A escola adota plano de ensino anual da rede, com a descrição das competências e das habilidades a serem desenvolvidas a cada trimestre. – A escola adota apostilas da rede.
Percepção dos estagiários	Unidade escolar ampla, com muitos espaços e sala de aula pouco confortável	Comprometida, atenta aos estudantes e suas necessidades. Incomodada com a pressão dos pais/coordenação sobre aspectos do seu trabalho, especialmente, os resultados das avaliações.	O estar em dupla estimula o diálogo e a cooperação entre os estudantes em turmas menos agitadas; em outras, favorece a conversa paralela, o que era motivo de *stress* para a professora. A professora cumpre o estabelecido pelo plano de ensino e se orienta pelas apostilas e materiais complementares. A professora nos recebeu de modo respeitoso, acolhedor e cativante.

Fonte: Elaborada a partir dos diários dos estagiários do grupo

A presença dos estagiários na sala de aula, na sala dos professores, nas reuniões com a coordenação e em outros espaços da escola permitiu que eles acessassem elementos da prática pedagógica da professora supervisora, da proposta pedagógica e avaliativa da escola.

> [...] num primeiro momento ela faz alguns exemplos com muitos alunos participando respondendo o passo a passo que ela deveria fazer e em um segundo instante pedindo para que os alunos fossem resolvê-los no quadro. Neste momento um aluno disse "acho muito legal essa forma de correção é bem mais divertida" e a professora respondeu "sim, é uma pena não conseguir fazer isso sempre, por que algumas vezes é muita coisa para corrigir". (Diário[8], ambientação, 10/09)

> Outra coisa observada foi a ênfase que a professora dá ao entendimento do aluno, permitindo que ele se expresse, questione e expresse a maneira como fez uma determinada questão. Não se prende a uma resolução específica, e além de deixar isso claro aos alunos, também faz algumas das possíveis. O plano de aula utilizado, não só por ela, mas por todos os professores, é virtual. E pode ser acessado pelos pais, os permitindo conferir se os filhos estão tendo o conteúdo proposto. (Diário, ambientação, 11/09)

> A correção foi feita pela professora no quadro, mas com a participação de todos os alunos. Ela lia os exercícios, discutia com eles como se poderia fazer e colocava as soluções bem detalhadas no quadro. (Diário, ambientação, 18/09)

Os estagiários trouxeram para a discussão, no Grande Grupo, características da prática pedagógica da professora supervisora: a valorização do trabalho do aluno; o respeito às diferentes estratégias apresentadas; o tratamento positivo ao erro e o seu interesse em reunir no quadro branco amostras de estratégias, entendimentos comuns e definições. Por outro lado, eles explicitaram incômodo quanto ao pouco tempo dedicado ao tratamento conceitual e à formalização, se comparados ao tempo gasto com o visto nos cadernos e o controle da participação nas aulas, na plataforma *Khan Academy* e nas atividades extraclasse. Tudo isso provocou os membros do Grupo 2 e os demais grupos a localizarem os alinhamentos e os distanciamentos da prática da professora supervisora, das inúmeras práticas docentes já vivenciadas por eles na Educação Básica e no curso de licenciatura. Essa vivência fez com que os estagiários vinculassem as observações advindas da prática às discussões teóricas empreendidas nos encontros sobre o paradigma do exercício, o ensino exploratório e a resolução de problemas (PONTE *et al.*, 2014).

Tudo isso possibilitou os questionamentos, postos pela professora orientadora, sobre o espaço para discussões dessa natureza no atual curso de licenciatura. Qual o papel das disciplinas didático-pedagógicas e específicas no curso? Como eles vislumbravam o tratamento dessas disciplinas perante as demandas advindas do ECSM? Qual o papel e o perfil de formador de professores em um curso de licenciatura? Novas compreensões e indagações emergiram desse momento, em especial, a reflexão de que toda disciplina, ao integrar a matriz

[8] Diário do Grupo 2 – produzido coletivamente pelos estagiários no Espaço Virtual (Drive).

curricular de um curso de licenciatura em matemática, seja ela específica, e didático-pedagógica, seja de área complementar, “forma didático-pedagogicamente o professor de matemática” (OLIVEIRA; FIORENTINI, 2018, p. 7).

O fato de o plano de ensino ser acessado pelos pais gerou muitos debates entre todos os estagiários, especialmente, porque, no entendimento do Grupo 2, isso impunha ao trabalho docente uma espécie de vigilância sobre como e quais tópicos curriculares eram abordados na semana e no mês. No entendimento dos estagiários, isso, por vezes, limitava a autonomia da professora supervisora para criar/inovar, retomar conceitos em função das necessidades da turma e/ou das particularidades de alguns estudantes. As inquietações dos futuros professores foram consideradas pela professora orientadora, que convidou todos a refletirem, também, sobre autonomia e dependência; cooperação e colaboração no ESCM vivenciado por eles em processo de *LS*. Ao final do encontro, o Grande Grupo converge para o entendimento de que a prática docente em matemática pode ser mais coletiva e menos solitária; da necessidade de espaços compartilhados nas escolas para o planejamento, a avaliação das aulas ministradas e dos resultados dessas aulas (ACEVEDO RINCÓN; FIORENTINI, 2016).

A dinamicidade da professora supervisora, o modo como ela organizava/desenvolvia as ações em sala de aula, suas preocupações com o aprendizado dos estudantes, a pressão dos pais e da coordenação por resultados, a sobrecarga de trabalho com o controle das atividades de casa, da correção da avaliação escrita, entre outros afazeres do ofício de professor, foram, aos poucos, sendo conhecidos pelos estagiários. Dessa forma, eles aproximavam-se das rotinas da profissão, conheciam melhor suas práticas (WENGER, 2004; CRECCI; FIORENTINI, 2013).

> A rotina é muito diferente do que estamos acostumados. Sempre se tem algo a fazer, o professor não para. A relação aluno-professor é essencial para que os trabalhos possam caminhar. (Diário, ambientação, 18/09)

> Não sei se a professora explica muitas coisas, pois em todas as quartas só tem correções. Depois perguntaremos. A professora vem enfrentando dificuldade com os alunos, pois em sala de aula todos são muito participativos e boa parte realiza a atividade corretamente em sala, mas nas avaliações as notas não são boas como esperado. (Diário, ambientação, 02/10)

> Não sei se por ser escola particular, mas a professora dá muitas chances para que os alunos recebam o “visto”, e mesmo assim eles não estão ligando muito, e deveriam, pois a média é alta e muitos ficam de recuperação. (Diário, colaboração, 13/11)

> Então, assim, ela não está só dando os conteúdos separadamente ali, ela não está pegando álgebra aqui, geometria ali, e é separada, é água e óleo. Ela passa geometria, só que o que ela trabalha em geometria, ela traz para álgebra, o que ela trabalha na álgebra, ela leva para geometria. E na própria álgebra, por exemplo, ela tenta relacionar os conteúdos, ela não passa como coisas diferentes. Então, eu acho que o que eu vou levar é justamente isso, de tentar sempre relacionar todos os conteúdos, porque o entendimento fica mais fácil. (Diário, colaboração, 14/11)

Os relatos mostram que as experiências vivenciadas na escola ajudavam os estagiários a problematizar e ressignificar os entendimentos que eles tinham sobre a escola, a sala de aula e o trabalho docente (CRECCI; FIORENTINI, 2013). Isso contribuiu para promover a transição de futuro professor a professor, dirimindo tensões e dúvidas geralmente presentes no início da carreira docente, o que demarca, por sua vez, a importância do estágio na aprendizagem da docência (BARBOSA; LOPES, 2021).

> Uma das coisas que eu levaria também é a organização da professora. Ela é muito organizada. Ela, claro que, entendo que talvez pelo fato de, da estrutura do colégio, que é muito cobrada pelos pais. (Diário, colaboração, 13/11)

Ao se projetarem na profissão, os estagiários se reconheciam cada vez mais como professores (BARROSO DAUANNY, 2020; DE PAULA; CYRINO, 2020). Isso se fez presente em muitos trechos dos diários, nos quais eles registraram recomendações de como deveriam atuar, avaliaram as situações de indisciplina, a sobrecarga de trabalho docente, a dificuldade na comunicação com os pais, entre outros aspectos da profissão.

> Foi muito legal esse primeiro contato com os alunos, corrigindo os exercícios, pois temos que nos preocupar com vários fatores, se nossa voz está alta o suficiente, se nossa letra está entendível, se não estamos tapando o quadro, ou até se não estamos indo rápido demais, e isso se adquire só com experiências que creio que vamos ter. (Diário, ambientação, 02/10)

> É essencial sempre olharmos para as dificuldades dos alunos como algo importante, pois qualquer coisinha pode estar impedindo-o de prosseguir. (Diário, colaboração, 06/11)

> É importante mantermos a postura em casos de bagunça em sala de aula, pois não podemos tratá-los com desrespeito, mas também temos de agir de forma a cessá-la. (Diário, colaboração, 13/11)

Os relatos mostram que a inserção no espaço escolar promoveu o confronto com esta realidade e a busca de compreensão desse novo ambiente, em um movimento no qual as expectativas foram sendo revistas e novas relações foram construídas. Ao término da Etapa 1, os estagiários já reuniam algumas intenções para a regência, discutiam entre eles e no Grande Grupo sobre como objetivavam organizar o trabalho pedagógico: *manter o trabalho em dupla e alternar com momentos em grupo; manter o respeito ao que o aluno fala e produz; utilizar recursos didáticos de fácil acesso na escola e incentivar que os alunos interajam ente si* (Diário, Grupo 2). Estas intenções foram construídas, de modo consensual, pelos estagiários e professora supervisora no bojo da definição do tópico curricular de números decimais, para a aula no sexto ano, e razão e proporção, para o sétimo ano, considerando o conteúdo programático do bimestre e o calendário escolar.

De posse destas intenções, o grupo iniciou a Etapa 2, descrita na Figura 1, acessando as apostilas da escola, livros e materiais didáticos. Igualmente, consultaram a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo em Movimento do Distrito Federal e observaram que estes conceitos se fazem presentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, mantendo-se até o Ensino Médio. Essas ações aliadas às discussões no Grande Grupo mostraram a eles que apesar de os conteúdos terem ampla utilização na vida diária das pessoas, compreendê-los e utilizá-los em situações reais ou na resolução de problemas eram ações difíceis para muitos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Ademais, foi consensual no Grande Grupo o entendimento de que o ensino destes tópicos curriculares, especialmente razão e proporção, têm sido realizado pelos professores de forma técnica e esquemática "*É só multiplicar cruzado*" (Estagiário, Grupo 3).

Ao término das discussões no Grande Grupo, os estagiários verbalizaram a intenção de construírem propostas de aulas que permitissem aos estudantes: a exploração, o diálogo, a socialização de entendimentos/estratégias de resoluções, o respeito à produção dos colegas e a aprendizagem dos conceitos, em alinhamento com o ensino exploratório (PONTE; BRANCO; QUARESMA, 2014), abordagem didática, em estudo no Grande Grupo, visando romper com o paradigma do exercício. De modo geral, a primeira versão dos planos de aula apresentava a seguinte proposta:

Tabela 3 – Elementos centrais da primeira versão do plano de aula

Ano Escolar	**Objetivo da aula**	**Recursos didáticos adotados**	**Duração**	**Ações docentes e tarefas matemáticas**
Sétimo	Compreender os	Tangram,	2 aulas	– Observação inicial de um Tangram (em EVA) com

ano	conceitos de razão e proporção e suas aplicações e utilizações no cotidiano.	malha quadriculada, lápis e régua.	de 50min	suas sete peças: dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo; – A partir da manipulação das peças, promover entre os estudantes o entendimento de que: O triângulo grande é o quádruplo do triângulo pequeno. O quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio são o dobro do triângulo pequeno, entre outros. – Desenhar as peças do Tangram na malha quadriculada com o apoio da régua. Em seguida, promover comparações entre as medidas dos lados, as áreas das figuras, questionando os estudantes sobre as relações observadas.
Sexto ano	Resolver e elaborar estratégias de cálculo para adição e subtração de números positivos na forma decimal.	Malha quadriculada (10x10) Lápis de cor	2 aulas de 50 min	– Coleta de escritas decimais a partir da fala dos estudantes sobre suas vivências cotidianas; – Discussão coletiva sobre suas compreensões sobre tais escritas, discutindo-as frente às representações fracionária e percentual. – Realização de duas tarefas matemáticas. Na primeira, com o apoio de malha quadriculada (10 x 10 cm) e lápis de cor, os estudantes marcariam as escritas decimais (0,10; 0,05; 0,1; 0,20; etc.) recebidas em um envelope na malha. A segunda consistia em preencher uma tabela com o resultado de operações aritméticas, sendo os estudantes provocados a usarem tanto a representação fracionária quanto a decimal e a falarem sobre como as compreendiam.

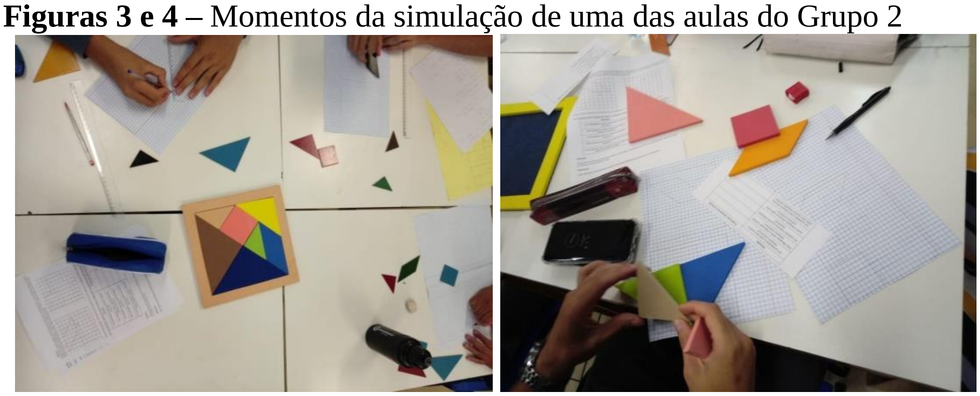
Fonte: Elaborado a partir dos Diários dos estagiários

As propostas iniciais foram discutidas no Grande Grupo buscando perceber se nelas os estudantes seriam "(...) chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução" (Ponte *et al*., 2015, p. 114). A essa altura do desenvolvimento da Etapa 2, os estagiários estavam cientes do desafio formativo em curso, visto que, de um lado, eles manifestavam o desejo de conhecer uma nova abordagem didática e, de outro lado, já tomavam consciência do quão difícil isso seria, haja vista a necessidade de "[...] antecipar os momentos da aula para gerir eficazmente o trabalho autônomo dos alunos e a discussão coletiva, articulando e negociando significados sobre os conceitos mobilizados durante as intervenções de modo a promover um ambiente de aprendizagem produtivo" (MARTINS; MATA-PEREIRA; PONTE, 2021, p. 344). Ademais, eles compreendiam que escolher/produzir uma tarefa matemática exploratório-investigativa não era simples, que orquestrar os momentos de trabalho autônomo dos estudantes, de discussão coletiva e de síntese final eram ações complexas que precisavam ser aprendidas por eles.

A noção de que vivenciavam novos aprendizados se ampliou quando do início da simulação das aulas. Estes aprendizados aconteceram no Grande Grupo, estando os demais estagiários e a professora orientadora na condição de estudantes do sexto e sétimo anos, e os membros do Grupo 2 na condição de regentes e observadores, o que proporcionou a análise crítica da primeira versão do plano de aula quanto à natureza das tarefas de exploração dos conceitos matemáticos, ao modo de fazer gestão da aprendizagem discente durante a resolução das tarefas em aula e às interações (estudante-estudante; estudante-estagiário), assim como sobre o impacto dos recursos didáticos disponíveis para as interações e aprendizagens.

> [...] entregamos o Tangram para cada um e com isso demos início a nossa aula. A primeira parte teve como objetivo utilizar o comprimento dos lados das peças, no caso os triângulos, para introduzir o conceito de razão, eles desenharam o triângulo menor e o maior na malha quadriculada, contaram os lados de cada figura e comparavam... Já na segunda parte da aula abordamos a área para se trabalhar a razão e proporção, e uma tabelinha com situações diversas, para que eles preenchessem. O objetivo era que eles sobrepusessem as peças, e montassem a razão. Também utilizamos uma malha com dimensões 20x20 cm e pedimos para que eles desenhassem nesta malha o triângulo menor e o paralelogramo, e pedimos para que eles representassem em forma de porcentagem, quanto a área de cada um ocupava em relação ao todo (Diário, Grupo 2, 25.10).

Figuras 3 e 4 – Momentos da simulação de uma das aulas do Grupo 2



Fonte: Diário do Grupo 2

Ao longo das discussões pós-simulação, buscou-se detalhamentos sobre como as aulas seriam desenvolvidas na escola pelo Grupo 2 e como os papéis de regente e de observador seriam desempenhados; ocasião em que todos reiteraram que, em um *LS*, o plano de aula deve conter informações suficientes para ser utilizado por todos que participaram do planejamento, sugerindo melhor detalhamento dos tempos de cada ação, das antecipações diante das possíveis dificuldades e habilidades dos estudantes (PONTE; BRANCO; QUARESMA, 2014). Outros analisaram e discutiram a natureza das tarefas e as possíveis incompreensões que elas poderiam gerar se fossem realizadas com os recursos e na ordem das aulas simuladas. Outros problematizaram se as tarefas escolhidas e as ações discentes e docentes alinhavam-se ou distanciavam-se do ensino exploratório-investigativo.

> Em vez de vocês usarem o tamanho do lado, a medida do lado, vocês usam a área. Mesmo que eles não tenham que calcular a área disso. Peçam para eles considerar a área do triângulo menor como uma unidade de área. E vocês trabalham esse tipo de questão de razões em relação a isso. Ou então, você pode pedir para considerar a área de todo o quadrado do Tangram como uma unidade de área e pedir, a partir disso, para ele calcular essas coisas. Eu acho que seria mais interessante assim, não sei. (Análise crítica de um Estagiário - colega de disciplina - durante a Plenária 1)

> [...] foca na área. Usa a unidade de medida de área, a gente consegue, a unidade de medida, nós conseguimos mudar ela ao nosso favor. Então, pode ser que seja uma saída para evitar esse tipo de situação que houve aqui. (Análise crítica de um Estagiário - colega de disciplina - durante a Plenária 1)

> Eu acho que o principal destaque da nossa aula é justamente esse: da gente querer quebrar um pouco esse ritmo que eles têm nas aulas de explicação do conteúdo, resolução de exercício, correção de exercícios. [...] Eu acho que marcar o “zero vírgula um” e o “zero vírgula zero um” na malha será bom. Eles terão que pintar na malha quadriculada de cem quadradinhos, representar o número decimal em fração (Estagiário Grupo 2, Plenária 1)

> Na análise da nossa apresentação, foram levantados vários pontos em relação à utilização da malha. Foi observado que, ao transferir os triângulos para a malha quadriculada, as medidas não foram muito exatas, pois a malha não estava proporcional às peças do Tangram, então, não foi possível contar com exatidão os lados e a área das figuras. Um conselho do grupo foi nós confeccionarmos nossa própria malha de acordo com o tamanho das figuras que escolhêssemos, ou não necessariamente precisávamos utilizar as medidas dos lados para tal. (Diário do Grupo 2, Relato sobre a Plenária 1, 25.10)

Os estagiários mostravam-se à vontade para falar, para expressar suas opiniões, seus entendimentos sobre as propostas de aulas dos grupos, sobre a produção dos colegas. Eles ouviam as sugestões, buscavam explicações mais detalhadas, respeitavam os posicionamentos dos colegas, negociavam entendimentos comuns, buscavam melhorias para as aulas de todos. Entretanto, a divergência e a negociação de sentidos também se fizeram presentes, gerando um ambiente rico de aprendizagem marcado pela discordância, pela tensão, pela negociação de significados, o que proporcionou maior engajamento na busca colaborativa por entendimentos e consensos, o que ajudou a produzir novos aprendizados em forma de ressignificações e de conhecimentos docentes. Assim, a Etapa 3 do *LS* adotado mostrava-nos que “(...) a colaboração não é imposta, ela é construída, de forma inclusiva, em um ambiente de diálogo aberto no qual os indivíduos se sentem à vontade para compartilhar suas diferenças, rotinas, dúvidas, dificuldades, vulnerabilidades" (CYRINO, 2021, p. 6).

A relação recurso didático e tratamento conceitual foi muito questionada, situando, sempre, os estudantes dos sextos e sétimos anos, bem como a aproximação ou afastamento da abordagem didática pretendida – exploratório-investigativa. Os estagiários observaram a diferença entre a intenção expressa por eles no discurso pedagógico, o que estava escrito no plano de aula, o que a simulação mostrou e o que poderia ser modificado para a segunda versão do planejamento.

> Para a segunda atividade, os colegas acharam que a tabela não estava clara o suficiente, e tivemos que explicar no quadro (…) Como foi dito por eles, nossa malha não estava dando valores exatos em relação às figuras, então decidimos excluir a parte da atividade que queria a porcentagem da área em relação ao todo. Em relação aos exemplos do começo da aula, que procuremos situações diferentes das quais eles estão acostumados, usar um saco de bolinhas, por exemplo, que precisamos decidir se vamos usar Tangram de EVA ou madeira – que a tabela venha antes de tudo. (Diário do Grupo 2, Relato sobre a Plenária 1, 25.10)

> Na opinião do grupo 4, antes de tudo devemos abordar um problema (mais exploratório) inicial de densidade ou escalas. Também que não fiquemos presos ao quadro, em definir as coisas, mas que, juntos aos alunos, possamos criar (construir juntos) uma definição. (Diário do Grupo 2, Relato sobre a Plenária 1, 28.10. (Parênteses nossos)

A Etapa 3 do *LS* adotado mostrou-se de grande valia ao permitir que os estagiários visualizassem as potencialidades e as falhas das tarefas em relação à sua estrutura e aos vínculos que elas permitiriam entre conteúdos já conhecidos pelos estudantes. De modo geral, a simulação mostrou a todos os grupos que a primeira versão do plano de aula do Grupo 2 não fornecia dados razoáveis sobre: as tarefas; a atividade a ser desenvolvida pelos estudantes e suas possíveis dificuldades; as ações mediadoras do professor regente; e a avaliação. Essa experiência de utilização do *Lesson Study* nas atividades de estágio nos fez lembrar o que diz Ball (2000) sobre a importância de criar ambientes ou espaços, na formação inicial, para que o professor ou o futuro professor "pense sobre atividades matemáticas, sobre seus usos em sala de aula", pois isso "pode levá-lo a melhorar sua habilidade de selecionar, modificar e aplicar tarefas matemáticas com seus alunos" (p. xii).

A análise coletiva da primeira versão do plano suscitada pela leitura do plano impresso e acompanhamento da simulação da aula no Grande Grupo possibilitou a construção coletiva e colaborativa de possíveis melhorias no planejamento proposto para o sexto e o sétimo anos do Ensino Fundamental. Dentre as contribuições, destacam-se os seguintes aprendizados, para a aula no sexto ano: i) ampliar a exploração inicial do tema transversal *consumo responsável* que foi tratado superficialmente no início da aula; ii) incluir a interpretação direta de valores de moedas e cédulas do Sistema Monetário Nacional, comparando-os às escritas decimais por meio de situações-problemas. Já em relação à aula do sétimo ano: (i) alterar as tarefas de modo que elas abordem as principais categorias de situações sobre razão e proporção, como: taxa e densidade, razão e escala; (ii) avaliar se recursos como Tangram e malhas quadriculadas são adequados para explorar tais situações; e (iii) aliar recurso e situação para a vivência em cenários exploratório-investigativos que sejam mais próximos à realidade cultural dos adolescentes.

Desse modo, os movimentos de reelaboração dos planos de aula, possibilitados pelo processo de *LS*, evidenciam o amparo que o planejamento colaborativo forneceu aos futuros professores, ao mesmo tempo em que mostrou que é preciso garantir mais tempo e espaço para a realização das Etapas 2 e 3 do ciclo de *LS*, de modo a incrementar o estudo, a elaboração dos planejamentos com tarefas mais exploratórias, bem como a simulação das aulas. Para isso faz-se necessário reestruturar a oferta da disciplina e o contexto da escola campo de estágio, revendo a quantidade de estagiários, professores orientadores e supervisores (SILVA, 2020; PINA NEVES; FIORENTINI, 2021). Sabemos que nem sempre tais mudanças são possíveis em função do número reduzido de formadores de professores que atuam na disciplina de ECSM e de professores supervisores que aceitam estagiários em suas turmas. Entretanto, vislumbramos que o desenvolvimento do ECSM em processo de *LS,* de modo regular, pode fomentar a formação futura de parcerias nas quais os agora estagiários participarão, na condição de professores supervisores, de programas de estágio sob processo de *LS*.

2. Discussões e considerações finais

A vivência nas Etapas 1, 2 e 3 do *LS* adotado neste estudo possibilitou a inserção no espaço escolar. Com isso, os estagiários levaram para a sala de aula da universidade questões do cotidiano docente da Escola Básica, promovendo o diálogo entre a dimensão teórica e prática da formação profissional, bem como a relação prática do professor na/da prática de ensinar e aprender (ACEVEDO RINCÓN; FIORENTINI, 2016).

Foi possível observar que a organização do ambiente de desenvolvimento profissional em processo de *LS* proporcionou, aos futuros professores, acolhimento, incentivo, discussão e diálogos (HONORATO; FIORENTINI, 2021). Nesses diálogos estão evidenciados fatos, experiências e momentos de aprendizagem, desenvolvidos ao longo das etapas do ciclo de *LS* (LOSANO *et al*., 2021). Ao compartilharem seus planejamentos e relatos com os colegas e com as professoras (orientadora e supervisora), eles atribuíram significado e compreenderam melhor suas ações e as dos próprios colegas e apropriaram-se de discursos e de formas do trabalho pedagógico em matemática, próprios da profissão, visto que "[...] através das práticas, pode-se começar a compreender contextos sociais nos quais elas se inscrevem e que elas contribuem para reproduzir ou para transformar" (BERTAUX, 2010, p. 17). Entretanto, a necessidade de várias versões dos planos de aula indicam que é preciso dedicar mais tempo para considerarem, amplamente, as discussões conceituais, os documentos curriculares, os artigos científicos, entre outros, nas Etapas 2 e 3 do ciclo de *LS*. Tudo isso reitera a centralidade do planejamento, seu caráter intencional, científico e sua importância na formação do futuro professor (PIMENTA, 2012).

Os diálogos empreendidos na Etapa 3 (Plenária 1), voltados ao desenvolvimento do planejamento com os colegas de disciplina, proporcionaram oportunidades não apenas para aprender sobre as estratégias, mas também para implementá-las, recebendo *feedbacks* sobre sua potencialidade e/ou eficácia para a aula, compartilhados pelo/no Grande Grupo. Os elementos relacionados à identidade profissional docente mobilizados/desenvolvidos pelos estagiários evidenciam: a capacidade de refletir sobre a experiência; a percepção de si como aprendizes docentes; a percepção do aprendizado de conhecimentos específicos sobre o ensino que elaboraram ao longo da experiência; e sua projeção na profissão docente – ao apresentar dicas profissionais para si e para outros professores (TEIXEIRA; CYRINO, 2015).

Os estagiários observaram, durante a Etapa 2, sobretudo a partir das discussões no Grande Grupo, a defesa de que o aprendizado dos conceitos de razão e proporção influencia, de modo substancial, o desenvolvimento do pensamento proporcional (VISEU; FERNANDES; LEITE, 2018), assim como a possibilidade de explorar ou caracterizar o conceito de proporcionalidade como regularidade, função, razão e escala. Tudo isso permitiu aos estagiários do Grupo 2 problematizarem e desenvolverem seus conhecimentos didáticos, curriculares e matemáticos relativos ao ensino e à aprendizagem destes tópicos.

A complexidade de planejar a aula em alinhamento com o ensino exploratório, considerando estes entendimentos, mostrou a todos que o ensino tem suas especificidades e que nem sempre a formação inicial consegue abarcá-las em suas disciplinas de conteúdo matemático ou pedagógico. Do mesmo modo, revelou que aprender a compor um plano de aula, com tarefas escritas de maneira clara e adequada à capacidade cognitiva e cultural dos alunos e capazes de descrever e comunicar a intenção pedagógica do professor, não é uma tarefa fácil e trivial e, tampouco, rápida (ACEVEDO RINCÓN; FIORENTINI, 2016; SILVA, 2020; PINA NEVES, BRAGA, FIORENTINI, 2021). Os estagiários perceberam que se tornar um participante pleno, no que se refere à competência de compartilhar o que é relevante em determinada prática, e, ao mesmo tempo, comunicar seus aprendizados, isto é, novos significados a serem objetivados ou legitimados por sua comunidade profissional (LAVE; WENGER, 1991), é um processo moroso e contínuo, cujo aprendizado não se esgota durante a fase de estágio, por melhor que este possa ser.

A partir da análise e da interpretação das narrativas dos estagiários, pode-se inferir que houve aprendizagens e aprendizados principalmente quando os estagiários vivenciaram as etapas de preparação das aulas, pois estes sujeitos aprenderam a compartilhar suas ações de docência em matemática (estudar o conteúdo a ser ensinado, planejar aula, desenvolver e socializar a regência da aula, e tentar observar e refletir seu impacto junto aos estudantes). A vivência no ambiente escolar também foi oportunizada, permitindo a participação em reuniões de coordenação, o acompanhamento das devolutivas aos pais, a observação do impacto da avaliação junto à coordenação e aos pais, a responsabilidade com a indisciplina e a sobrecarga de demanda no trabalho do professor (BARBOSA; LOPES, 2021).

Evidenciou-se, também, que a escrita dos relatos e sua socialização no Drive (acessível a todos do Grande Grupo) contribuíram para que as reflexões individuais do Grupo 2 fossem realizadas pelo/no Grande Grupo, ampliando seu alcance e fornecendo, cada vez mais, indícios para os estagiários compreenderem a natureza intelectual do trabalho do professor (FULLAN; HARGREAVES, 2000). Nesse sentido, observamos que os estagiários, na interação entre os processos de participação e reificação, produziram novos significados a respeito da elaboração do planejamento, sobretudo ao selecionar e elaborar tarefas apropriadas à aprendizagem dos alunos e também durante a gestão dessa aprendizagem dos alunos, ao implementar as tarefas em sala de aula (ESTEVAM; CYRINO, 2016; LOSANO *et al*., 2021).

Os episódios narrados pelos estagiários indicam que eles perceberam as oportunidades de inserção no campo profissional, durante a formação, e se depararam com o enfrentamento dos desafios do exercício da docência. Entendemos, assim, que o projeto tem criado possibilidades de interlocução colaborativa entre universidade e escola, contemplando, em grande parte, o conceito de terceiro espaço na formação de professores, proposto por Zeichner (2010) e discutido por Crecci, Paula e Fiorentini (2019). Estagiários, professores orientadores e supervisores comprometeram-se com as ações, dialogaram cotidianamente, ajudaram-se mutuamente, e, assim, buscaram enfrentar os desafios, problemas e adversidades da profissão docente. Ao fazer isso, compreenderam melhor o próprio significado da docência e da matemática na formação dos estudantes com os quais convivem (JAWORSKI *et al*., 2017). Temos como hipótese que ações formativas dessa natureza podem influenciar o desenvolvimento de outras disciplinas da formação inicial do professor de matemática se utilizarem também o *Lesson Study*, fato, ainda, incipiente no Brasil (RICHIT *et al*., 2019).

Agradecimentos

Á Universidade de Brasília (UnB)
e à Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF).
Aos professores supervisores e futuros professores que
participaram e apoiaram o presente estudo.

Referências

ACEVEDO RINCÓN, J. P.; FIORENTINI, D. Práticas na formação dos licenciados em matemáticas: a experiência de uma prática interdisciplinar. **TED: Tecné, Episteme y Didaxis**, v. 40, p. 129-147, 2016.

ARAÚJO, W. R.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. *Lesson Study* no grupo de sábado: o prelúdio de uma tarefa desenvolvida no subgrupo do Ensino Médio. *In*: **Congresso Internacional de Ensino de Matemática**, 7. Canoas, 2017. *Anais* [...]. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2017. p. 1-12.

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da metodologia japonesa de *Lesson Study* nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. *In*: **Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão**, 18. São Paulo, 2009. Anais [...]. São Paulo, SBPN, 2009.

BALL, D. Foreword. *In*: SMITH, M. S.; CORNBLETH, C.; STEIN, M. K.; SILVER, E. **Implementing standards-based mathematics instruction**: a casebook for professional development. New York Teacher College Press: New York, 2000. p. ix-xiv.

BARBOSA, C. P.; LOPES, C. E. Uma análise da produção acadêmica brasileira sobre o Estágio Curricular Supervisionado nos Cursos de Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação Matemática**, Guarulhos, v. 18, p. e021014, 26 mar.2021.

BARROSO DAUANNY, E. Estágios, identidade e formação do professor de matemática em tempos de mudanças. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 3, 11 nov. 2020.

BERTAUX, Daniel. **Narrativas de vida**: a pesquisa e seus métodos. Natal: EDUFRN; São Paulo: Paulus, 2010.

BEZERRA, R. C. Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto do Lesson Study. 2017. 210 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2017.

CLANDININ, D. J.; CONNELLY, F. M. **Pesquisa narrativa**: experiência e história na pesquisa qualitativa. Uberlândia: EDUFU, 2015.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. **Review of Research in Education**, v. 24, p. 249-305, 1999.

COELHO, F.; VIANNA, C.; OLIVEIRA, A. A metodologia da lesson study na formação de professores: uma experiência com licenciandos de matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 1- 12, jul./dez., 2014.

CRECCI, V. M.; FIORENTINI, D. Desenvolvimento profissional de professores em Comunidades com Postura Investigativa. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, p. 23-39, 2013.

CRECCI, V. M.; FIORENTINI, D. Reverberações da aprendizagem de professores de matemática em uma comunidade fronteiriça entre universidade-escola. **Educar em Revista**, v. 34, n. 70, p. 273-292, jul./ago. 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10. 1590/0104-4060.57781. Acesso em: 2 jul. 2021.

CRECCI, V.; PAULA, A. P. M.; FIORENTINI, D. Desenvolvimento profissional de uma professora dos anos iniciais que participa de um *Lesson Study* híbrido. **Educere et Educare**, v. 14, n. 32, p. 1-21, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.17648/ educare.v14i32.22755. Acesso em: 2 jul. 2021.

CRISTOVÃO, E. M.; FIORENTINI, D. A investigação narrativa no estudo da aprendizagem de professores de matemática em espaços colaborativos híbridos universidade-escola. **Sisyphus – Journal of Education**, v. 9, p. 34, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.25749/sis.21792. Acesso em: 2 jul. 2021.

CYRINO, M. C. C. T. Formação de professores que ensinam matemática em comunidades de prática. *In*: **Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**, 7., 2013, Montevideo. Actas [...]. Montevideo: FISEM, 2013. p. 5188-5195.

DE PAULA, E. F.; CYRINO, M. C. C. T. Perspectivas de identidade profissional de professores que ensinam matemática presentes em dissertações e teses brasileiras. *In*: CYRINO, M. C. C. T. (Org.). **Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática**: desafios e perspectivas. Brasília: SBEM, 2018. p. 125-153.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Desenvolvimento profissional de professores em educação estatística. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 115-150, 2016.

FELIX, T. F. **Pesquisando a melhoria de aulas de matemática segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a metodologia da Pesquisa de Aula (*Lesson Study*)**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

FIORENTINI, D. A investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, v. 8, p. 61-82, 2012.

FIORENTINI, D. Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. **Sisyphus Journal of Education**, v. 1, n. 3, p. 152-181, 2013.

FIORENTINI, D.; CARVALHO, D. L. O GdS como lócus de experiências de formação e aprendizagem docente. *In*: FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CARVALHO, D. L. (org.). **Narrativas de Práticas de Aprendizagem Docente em Matemática**. São Carlos: Pedro & João Editores, p. 15-37, 2015.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema – Boletim de Educação Matemática,** v. 27, p. 917-938, 2013.

FIORENTINI, D.; RIBEIRO, C. M. S.; LOSANO, A. L.; CRECCI, V. M.; OLIVEIRA, T.; VIDAL, C. P. Estudo de uma experiência de *Lesson Study* Híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação. *In*: **Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino**, 19. 2018, Salvador. Anais […]. Salvador, BA: UFBA, 2018. p. 1-38.

FREITAS, M. T. M.; FIORENTINI, D. As possibilidades formativas e investigativas da narrativa em educação matemática. **Revista Horizontes – USF**, Itatiba, SP, v. 25, n. 1, p. 63-71, jan.-jun. 2007.

FULLAN, M.; HARGREAVES, A. **A escola como organização aprendente**: buscando uma educação de qualidade. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

GATTI, B.A. **Formação de professores e carreira: problemas e movimentos de renovação.** 2a. ed., Campinas, Autores Associados, 2000.

HONORATO, A.; FIORENTINI, D. Aprendizagem docente em experiências de ensino com Modelagem Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (Rencima),** v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.26843/rencima. v12n2a08. Acesso em: 2 jul. 2021.

JANUARIO, G. O estágio supervisionado e suas contribuições para a prática pedagógica do professor. *In*: **Seminário de História e Investigações de/em Aulas de Matemática**, 2, 2008, Campinas. Anais do II SHIAM, GdS/FE-Unicamp, 2008. p. 1-8.

JAWORSKI, B. *et al*. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. *In*: KAISER, G. (Ed.). **Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education**. ICME-13 Monographs (p. 261-276). Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_17. Acesso em: 2 jul. 2021.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning**: legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LEWIS, C.; PERRY, R.; HURD, J. A deeper look at lesson study. **Educational Leadership**, v. 61, n. 5, p. 18-23, 2004.

LOSANO, A. L.; FERRASSO, T. O.; MEYER, C. (Orgs.). **Narrativas de aulas de matemática no Ensino Médio**: aprendizagens docentes no contexto de *Lesson Study híbrido*. Brasília: SBEM, 2021. (Coleção SBEM – v. 18). Disponível em: http://www.sbembrasil. org.br/ebook/ebook5.html.

MACEDO, A. D. R. de; BELLEMAIN, P. M. B.; WINSLOW, C. Lesson Study with didactical engineering for student teachers in Brazil. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, v. 9, n. 2, p. 127-138, 2020.

MERICHELLI, M. A. J.; CURI, E. Estudos de Aula ("*Lesson Study*") como metodologia de formação de professores. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 4, p. 15-27, nov. 2016.

OLIVEIRA, A. T. C. C.; FIORENTINI, D. O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, v. 23, p. 1-17, e230020, 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/ S1413-24782018230020. Acesso em: 2 jul. 2021.

PIMENTA, S. G. O estágio na formação de professores: unidade teoria e prática? 11. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

PINA NEVES, R. DA S.; BRAGA, M. D.; FIORENTINI, D. Estágio Curricular Supervisionado em Matemática em Processo de Lesson Study on-line: adaptações, desafios e inovações. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. e202135, 7 dez. 2021.

PINA NEVES, R. S.; FIORENTINI, D. Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de *Lesson Study*. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1-30, 2021. Disponível em: http://dx.doi.org/10.46312/pem.v14i34.12676. Acesso em: 2 jul. 2021.

PONTE, J. P. *et al*. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 868-891, dez. 2016.

PONTE, J. P. *et al*. Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. In: SOUSA, J.; CEVALLOS, I. (Eds.). **A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina matemática**. Curitiba: CRV, 2014. p. 61-82.

PONTE, J. P. Lesson studies in initial mathematics teacher education. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, v. 6, n. 2, p. 1-14, 2017.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; QUARESMA, M. Exploratory activity in the mathematics classroom. *In*: LI, Y.; SILVER, E. A.; LI, S. (Ed.). **Transforming mathematics instruction**: multiple approaches and practices. Dordrecht: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014. p. 103-125.

QUARESMA, M.; PONTE, J. P. da. Dinâmicas de reflexão e colaboração entre professores do 1.º ciclo num estudo de aula em Matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, v. 33, n. 63, p. 368-388, 2019.

RICHIT, A; PONTE, J. P. da; TOMKELSKI, M. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 100, n. 254, p. 54-81, 2019.

ROBINSON, N.; LEIKIN, R. One teacher, two lessons: the lesson study process. **International Journal of Science and Mathematics Education**, n. 10, p. 139-161, 2012.

SILVA, A. D. R. de M. **Contribuições da Jugyou Kenkyuu e da engenharia didática para a formação e o desenvolvimento profissional de professores de matemática no âmbito do estágio curricular supervisionado.** 260 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

TEIXEIRA, B. R.; CYRINO, M. C. C. T. Desenvolvimento da identidade profissional de futuros professores de matemática no âmbito da orientação de estágio**. Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 658-680, 2015.

VISEU, F.; MARTINS, P. M.; LEITE, L. Prospective primary school teachers' activities when dealing with mathematics modelling tasks. **Journal on Mathematics Education**, v. 11, n. 2, p. 301-318, 2020.

WANDERLEY, R. A. J.; SOUZA, M. A. V. F. de. *Lesson Study* como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática sobre o conceito de *volume*. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 13, n. 33, p. 1-20, 2020.

WENGER, E. **Communities of practice**: learning, meaning and identity. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

WENGER, E. Knowledge management as a doughnut: shaping your knowledge strategy through communities of practice. **Ivey Business Journal**, v. 68, n. 3, p. 1-8, 2004.

ZEICHNER, K. M. Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. **Educação**, v. 35, n. 3, p. 479-504, 2010.

Autores:

Regina da Silva Pina Neves
Licenciada e especialista em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Mestre em Educação e Doutora em Psicologia pela Universidade de Brasília (UnB). Atualmente é professora adjunta da Universidade de Brasília (UnB). Tem experiência profissional na Educação Básica, no Ensino Superior e na pós-graduação. Desenvolve pesquisas em Educação Matemática na área de formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.
Endereço eletrônico: reginapina@mat.unb.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7952-9665

Dario Fiorentini
Graduado em Matemática pela Universidade de Passo Fundo (UPF). Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Doutor em Educação pela UNICAMP. Tem experiência profissional e investigativa em educação matemática, com ênfase sobre formação e desenvolvimento profissional de professores, aprendizagem e identidade docente e conhecimentos profissionais.
Endereço eletrônico: dariof@unicamp.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5536-0781

Janaína Mendes Pereira da Silva
Licenciada em Matemática (Faculdade Projeção) e Pedagogia pelo Centro Universitário do Distrito Federal (UDF). Especialização em Metodologias de Ensino em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB). Mestre em Educação pela UnB. Atualmente cursa doutorado em Ensino e História das Ciências e da Matemática na Universidade Federal do ABC (UFABC). Atua como docente no Ensino Fundamental e Ensino Médio.
Endereço eletrônico: jana.mendes.ps@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6540-1521

Como citar o artigo:

PINA NEVES, R. S.; FIORENTINI, D.; SILVA, J. M. P. Lesson Study presencial y la pasantía curricular supervisada en matemáticas: contribuciones al aprendizaje docente**.** **Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 409 - 442, enero, 2022. DOI: 10.37618

INTRODUCCIÓN A LA HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA - HISOEM

Fredy Enrique González
fredygonzalezdem@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8079-3826
Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM)
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)
Maracay, Venezuela

Recibido: Aceptado:

Resumen. La pregunta que orientó el desarrollo de este ensayo es la siguiente: ¿Cómo ocurrió el proceso que propició la emergencia y el desenvolvimiento de la Educación Matemática, hasta convertirse en un campo disciplinario y de investigación, tanto práctica como teórica? La respuesta fue ofrecida en la perspectiva de la Historia Social de la Educación Matemática (HISOEM), la cual toma en consideración las prácticas socioculturales asociadas con los procesos de enseñanza, aprendizaje, estudio, evaluación y creación de las Matemáticas -tanto académicas, como escolares y cotidianas- que son protagonizadas por diversos autores/actores (tanto aquellos que son reconocidos como autores/actores de referencia como quienes se pierden en el anonimato: profesores que enseñan matemática en aulas de clase, vendedores ambulantes, artistas de diversas áreas, artesanos, fabricantes de muñecos, costureras, sastres, etc. El aspecto central de esta perspectiva es examinar el desenvolvimiento en el tiempo (Historia) de las interacciones entre los protagonistas (actores y autores de referencia) de las diversas situaciones y prácticas sociales (Sociología) en los múltiples contextos (escenarios de difusión) donde son llevadas a cabo prácticas de enseñanza, aprendizaje, estudio y evaluación de las diversas variedades de la Matemática: académica, escolar y cotidiana (la que es utilizada por las personas en sus variadas actividades, tanto profesionales como no profesionales, como son las de los carpinteros, albañiles, y muchos otros trabajadores o técnicos, así como también los artesanos, pescadores, etc.). Las nociones teóricas asumidas son las ideas de campo científico, evolucionismo conceptual, práctica sociocultural, enfoque histórico cultural y situación social. Metodológicamente se trata de una pesquisa teórico documental, de naturaleza reflexivo interpretativa. Se concluye que la constitución como disciplina de la Educación Matemática es un proceso epistemológico, sociológico, e histórico; esas tres perspectivas son el fundamento de la concepción de la HISOEM asumida en este trabajo.

Palabras Clave: Campo Disciplinar. Evolucionismo Conceptual. Situación Social. Prácticas Socioculturales.

INTRODUCTION TO THE SOCIAL HISTORY OF MATHEMATICS EDUCATION

Abstract. The question that guided the development of this essay is the following: How did the process that led to the emergence and development of Mathematics Education occur, until it became a disciplinary and research field, both practical and theoretical? The answer was offered from the perspective of the Social History of Mathematics Education (HISOEM), which takes into consideration the sociocultural practices associated with the processes of teaching, learning, study, evaluation and creation of Mathematics -both academic and school. and everyday - which

are led by various authors / actors (both those who are recognized as authors / actors of reference as well as those who are lost in anonymity: teachers who teach mathematics in classrooms, street vendors, artists from various areas, artisans, doll makers, seamstresses, tailors, etc. The central aspect of this perspective is to examine the development over time (History) of the interactions between the protagonists (actors and authors of reference) of the various situations and social practices (Sociology) in the multiple contexts (diffusion scenarios) where teaching, learning, evaluation and study practices are carried out of the various varieties of Mathematics: academic, school and everyday (which is used by people in their various activities, both professional and non-professional, such as carpenters, bricklayers, and many other workers or technicians, as well as artisans, fishermen, etc.). The assumed theoretical notions are the ideas of the scientific field, conceptual evolutionism, sociocultural practice, cultural historical approach and social situation. Methodologically, it is a theoretical-documentary research, of a reflective-interpretive nature. It is concluded that the constitution as a discipline of Mathematics Education is an epistemological, sociological, and historical process; these three perspectives are the foundation of the HISOEM conception assumed in this work.
Key Words: Disciplinary Field. Conceptual Evolutionism. Social situation. Sociocultural practices.

INTRODUÇÃO À HISTÓRIA SOCIAL DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA -HISOEM

Resumo: A questão norteadora deste ensaio é: como aconteceu o processo que propiciou a emergência e o desenvolvimento da Educação Matemática, até se converter num campo disciplinar e de pesquisa, tanto prática quanto teórica? Será oferecida uma resposta na perspectiva da História Social da Educação Matemática – HISOEM que leva em consideração as práticas socioculturais associadas com processos de ensino, aprendizagem, estudo, avaliação, criação das Matemáticas - tanto acadêmicas quanto escolares e cotidianas - que são protagonizadas por diversos autores/atores - tanto reconhecidos como autores/atores de referência quanto anônimos: professores de aula, vendedores de rua, artistas de diversas áreas, artesãos, bonequeiros, costureiras, etc. O aspecto central desta perspectiva é examinar o desenvolvimento no tempo (História) das interações entre os protagonistas (atores e autores de referência) das diversas situações e práticas sociais (Sociologia) nos múltiplas contextos (cenários de difusão) onde são desenvolvidas práticas de ensino, aprendizagem, estudo e avaliação das diversas variedades da Matemática: acadêmica, escolar e cotidiana (a que é utilizada pelas pessoas nas suas variadas atividades, tanto profissionais quanto não profissionais, como às dos marceneiros, pedreiros, e muitos outros operários ou técnicos; como também assim os artesãos, pescadores, etc.). As noções teóricas assumidas são: as ideias de campo científico, evolucionismo conceitual, prática sociocultural, enfoque histórico cultural e situação social. Metodologicamente, trata se de uma pesquisa teórica documental de natureza reflexivo-interpretativa. Se conclui que a constituição como disciplina da Educação Matemática é um processo epistemológico, sociológico e histórico essas três perspectivas são o fundamento da concepção da HISOEM subscrita nesta exposição.
Palavras-chave: Campo Disciplinar. Evolucionismo Conceitual. Situação Social. Práticas Socioculturais.

Introdução

Duas coordenadas teóricas e conceituais de referência para o estudo do desenvolvimento histórico de uma disciplina são a Epistemologia e a Sociologia. Elas permitem, por um lado examinar as relações que os praticantes da disciplina estabelecem com seus objetos de estudo (vínculo epistemológico) e por outro lado, as dinâmicas que caracterizam o confronto de pontos de vista que esse praticantes sustentam em relação com suas percepções em quanto a quais deveriam serem os problemas que merecem serem pesquisados e que contribuem para o desenvolvimento do campo, e quais as estratégias metodológicas que devem serem utilizadas para abordar tais problemas. A dimensão epistemológica refere-se ao processo de produção de conhecimento no campo, em quanto que a dimensão sociológica remete aos fatores sociais que condicionam esse processo. Nesse sentido pode se inferir que os processos de produção e difusão do conhecimento científico tem como alicerce uma organização social dos produtores desse conhecimento que, como Bourdieu (2002) diz, "é um microcosmo social"

> [...] parcialmente autônomo em relação às necessidades do macrocosmo no qualse encontra inserido. É, num certo sentido, um mundo social como os outros e, à semelhança do campo econômico, conhece relações de força e lutas de interesses, coalizões e monopólios, e até imperialismos e nacionalismos (BOURDIEU, 2002: 144)

O autor citado acrescenta dizendo que esse microcosmo funciona obedecendo certas regras e regularidades "que determinam as condições nas quais as construções científicas são produzidas, comunicadas, discutidas ou criticadas, (essas regras) são independentes em relação ao mundo social, a suas demandas, a suas expectativas ou a suas exigências" (Ob. Cit., p. 145); levando em consideração esses fatores condicionante, Bourdieu indica que no microcosmos social do campo

> [...] cada um dos seus especialistas está em concorrência não somente com outros cientistas, mas também com os profissionais da produção simbólica (escritores, políticos, jornalistas) e, mais amplamente, com todos os agentes sociais que, com forças simbólicas e sucessos desiguais, trabalham para impor sua visão do mundo [...] (BOURDIEU, 2002: 144)

Levando em conta as considerações de Bourdieu o desenvolvimento de um dado campo científico dá-se no marco do percurso histórico do "microcosmo social" em que se baseia. Assim, o processo de constituição e consolidação disciplinar de um campo pode ser estudado examinando a história de seu microcosmo social associado. Nesse caso está se desenvolvendo uma História Social do campo em consideração.

Nessa ideia de História Social, assume-se o ponto de vista de Gorman (2013). Esse autor afirma que se faz história social de uma disciplina quando o estudo é focado mais para as atividades das instituições sociais onde os cientistas operam que para os indivíduos (heróis) que concorrem no campo; os estudos de História Social preocupam-se menos pelas ações individuais dos indivíduos isolados e mais pelas estruturas e fatores sociais que condicionam essa ações. Assim, para conhecer a história de uma disciplina deve se sair “dos laboratórios” (LATOUR; WOOLGAR, 1978). Desse modo, a História Social de uma disciplina que para compreendê-la se faz necessário estudar as interações entre os afazeres dos especialistas e a dinâmica do microcosmos social onde eles atuam, assumindo que esses dois espaços “se (re)definem e se (re)construem simultaneamente” (PRESTES, 1996: 12).

Temos então que a História Social da ciência é uma perspectiva que, a diferença dos estudos que focam seu olhar na atividade e na vida dos grandes cientistas e em suas descobertas inusitadas, assume que a ciência em quanto atividade de produção de conhecimentos, é um processo que se constitui socialmente. São, precisamente, os pormenores desse processo de constituição, objeto de preocupação indagatória nos estudos próprios da História Social de uma disciplina, levando em conta que toda pesquisa científica, como diz Ben-David (1975), é influenciada pelas condições do contexto social nas que é desenvolvida, e reciprocamente tais condições podem ser afetadas pelos achados da pesquisa; isso indica que a Historia Social de uma disciplina requer examinar

> [...] seus contextos social, histórico, geográfico, cultural, econômico, político e educativo onde tal desenvolvimento acontece. Isto requer a consideração das práticas sociais que geram oportunidade de criação, desenvolvimento, difusão, aplicação dos conhecimentos que podem ser inseridos no campo disciplinar cuja história esteja sendo examinada (GONZÁLEZ, 2020; 106)

Levando em conta as noções preliminares antes expostas, neste trabalho pretendesse oferecer uma caracterização introdutória da História Social da Educação Matemática considerando-a como um campo disciplinar específico.

Distinção entre “educação matemática” e “Educação Matemática”

Parece existir acordo unânime com o conteúdo da expressão “a educação matemática é uma prática sócio cultural” (MENDES; SILVA, 2017). Mas, sobre o significado de “educação matemática” existem controvérsias. Assim, dependendo do contexto, a frase “educação matemática” remete ao ensino da Matemática, ou à didática da matemática, ou à formação matemática a qual todo cidadão tem direito. Para expressar esses sentidos, frequentemente é usada a escrita educação matemática, usando minúsculas. Nesse aspecto o autor concorda com o posicionamento de Valente (2013) quem faz a distinção entre “Educação Matemática” e "educação matemática" dizendo que

> [...] A primeira expressão designa o recente campo acadêmico, lugar de investigações sobre ensino e aprendizagem da Matemática. Uma referência fundadora, no Brasil, desse campo pode ser dada pela criação da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no ano de 1988. A segunda expressão remete aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática desde tempos imemoriais, constituindo se, assim, em tema de pesquisa dos estudos relativos à história da educação matemática. De todo modo, a distinção se faz necessária para que não se pense que por "história da educação matemática" estivessem apenas alocados os estudos pós-anos 1980, ou mesmo restritos à história do campo de pesquisa. (VALENTE, 2013; 24)

O desenvolvimento da educação matemática em qualquer um desses sentidos, tem gerado um campo (no sentido que essa expressão tem para Bourdieu (1983, 2004)) de pesquisa tanto prática quanto teórica "que se interliga com diversas áreas do saber, como a sociologia e a psicologia, por exemplo [...]" (GARCIA; GARCIA, 2020; 2) e que hoje constitui um âmbito disciplinar específico, nomeado Educação Matemática (iniciais em maiúsculas). A primeira diferença que poderia ser sinalizada para distinguir educação matemática da Educação Matemática, é que a segunda expressão é um substantivo (nome próprio de um campo disciplinar) e a primeira é um adjetivo que qualifica a prática social característica da educação. Assim, a Educação Matemática, no sentido mais geral possível, assume como seu objeto de estudo a educação matemática.

As questões que devem ser levadas em consideração para estabelecer as relações entre educação matemática e Educação Matemática (nos sentidos indicados acima) tem sido objeto de reflexão por vários pesquisadores tais como Bicudo (1991, 1993, 1999), Carvalho (1991), Dante (1991), Ferreira; Santos (2012), Miguel; Garnica; Igliori; D'ambrosio (2004)

Mas, como aconteceu o processo que propiciou a emergência da Educação Matemática, entendida como disciplina? Uma resposta possível é dada pela História Social da Educação Matemática – HISOEM.

Perspectivas na História da Educação Matemática.

Relativa à História da Educação Matemática neste trabalho é assumida uma perspectiva social da História, que leva em consideração as práticas socioculturais (MENDES; SILVA, 2017) associadas com processos de ensino, aprendizagem, estudo, avaliação, criação das Matemáticas - tanto acadêmicas quanto escolares e cotidianas - que são protagonizadas por diversos autores/atores - tanto reconhecidos como autores/atores de referência (TOULMIN, 1997) quanto anônimos: professores de aula, vendedores de rua, artistas de diversas áreas, artesãos, bonequeiros, costureiras, etc.

Desse modo, a HISOEM (História Social da Educação Matemática) é uma perspectiva da História que vai além das anedotas, das ações dos heróis, dos livros didáticos e outros materiais usados no ensino da Matemática. Trata-se de uma história de um campo disciplinar que leva em consideração noções, conceitos e teorias oriundas da própria Matemática, da História, da Sociologia, da Epistemologia, da Antropologia, da Filosofia e de outras várias ciências humanas, articuladas interdisciplinarmente.

O aspecto central desta perspectiva é examinar o desenvolvimento no tempo (História) das interações entre os protagonistas (atores e autores de referência) das diversas situações e práticas sociais (Sociologia) nos múltiplas contextos (cenários de difusão) onde são desenvolvidas práticas de ensino, aprendizagem, estudo e avaliação das diversas variedades da Matemática: acadêmica (a criada pelos matemáticos profissionais), escolar (a que é ensinada nas diferentes instituições educativas), cotidiana (a que é utilizada pelas pessoas nas suas variadas atividades cotidianas, tanto profissionais quanto não profissionais, como às dos marceneiros, pedreiros, e muitos outros operários ou técnicos; como também os artesãos, os pescadores, etc.)

A Educação Matemática na Perspectiva HISOEM

A concepção da Educação Matemática que serve de alicerce à HISOEM considera que a Educação Matemática constitui uma disciplina que tem como campo de estudo a problemática específica da transmissão e aquisição de conteúdos, conceitos, teorias e operações matemáticas no contexto das diversas instituições escolares e outras instâncias educativas (formalizadas ou não), e que são expressos na forma de conhecimentos teóricos e práticos, relacionados à referida problemática, gerados pelo trabalho acadêmico que, em conferências, grupos de estudos, palestras, congressos e exposições, é realizado por membros da comunidade matemática internacional que lidam com o ensino e aprendizagem desta disciplina e que se materializa em relatórios, dissertações, teses, livros e artigos que são publicados em periódicos ou outras mídias especializadas que lhes servem de suporte, assim como em exposições orais e artefatos produzidos por diferentes comunidades.

Portanto, HISOEM segundo Souto (2010; p. 253), assume como seu assunto de preocupação indagatória o desenvolvimento ao longo do tempo, em diferentes contextos, espaços, cenários, situações sociais e, em geral práticas sócio históricas e culturais (MENDES; SILVA, 2017; VALERO, 2012) associadas com a Matemática Escolar (VALENTE, 2005 pp. 20, 21, 23); o ensino de teorias, noções ou conceitos matemáticos; a formação dos professores que ensinam Matemática; a trajetória das pessoas (histórias de vida) e das instituições (institucionalização) significativas para o desenvolvimento tanto da Matemática quanto da Educação Matemática.

Também são incluídos como temas de interesse para HISOEM as formas como têm sido desenvolvidos diversos posicionamentos na investigação em Educação Matemática e as diferentes políticas e propostas educacionais relativas à Matemática que se ensina nas escolas e outras instituições educacionais. Além disso, estudos que poderiam ser caraterizados como meta-históricos, tais como as pesquisas que investigam o papel da História da Matemática na formação dos matemáticos profissionais e dos professores que a ensinam, e as que tratam da historiografia da Educação Matemática, também são temáticas atraentes para HISOEM. Na construção do repertório de coordenadas teóricas e conceituais de referência (RC T-C R) da HISOEM, levamos em consideração as formulações de Valero (2012); Mendes; Silva (2017), Toulmin (1997) e Bourdieu (1983; 2004).

Em acordo com Valero (2012), a Educação Matemática pode ser assumida como uma rede de práticas socioculturais que, segundo Mendes e Farias (2014 apud MENDES; FARIAS, 2017), vinculam pessoas, individual ou coletivamente consideradas, que as desenvolvem em espaços que, aos poucos, vão se estabilizando até se formalizar e configurar aquilo que Toulmin (1977) denomina "foros profissionais de discussão", que estão constituídos por grupos de referência, membros credenciados da profissão, sociedades científicas e jornais, e eles são muito importantes para a consolidação e evolução de uma disciplina. Nessa dinâmica alguns dos protagonistas das práticas vão conseguindo se destacar e, assim, influenciam aos outros praticantes passando a serem "autores ou grupos de referência". Na concepção de Toulmin (1997), esses autores são homens e organizações que exercem um poder que marca o desenvolvimento da ciência.

As ações assim desenvolvidas por esses autores de referência, nos cenários de difusão, geram um processo, ao longo do tempo, e, considerando específicas circunstâncias sociais, econômicas, políticas etc., configuram um âmbito disciplinar com características próprias que o diferenciam de outros.

Esse processo é chamado de "Evolucionismo Conceitual" (TOULMIN, 1997 apud SÁNCHEZ SIERRA; MORALES GIRALDO; GARCÍA ROLDÁN, 2014) que é uma metáfora para explicar como uma disciplina se constitui, assimilando-a ao processo de geração das espécies biológicas. Segundo Toulmin (1997), o conhecimento evolui de maneira semelhante ao das populações orgânicas; por esse motivo, seu crescimento pode ser explicado em termos ecológicos como sucessos funcionais ou adaptativos; isto é, o conhecimento em uma comunidade acadêmica evolui analogamente ao modo como um sistema ecológico. Nesse sentido, as noções colocadas por Toulmin (1977) podem se vincular com a de "Campo Científico" proposta por Bourdieu (1983; 2004).

Toulmin e Bourdieu oferecem, respectivamente, a perspectiva epistemológica e a perspectiva sociológica para fazer o exame do desenvolvimento de um campo disciplinar. Mas, como esse processo acontece ao longo de um tempo, é necessário considerar também a perspectiva histórica. Efetivamente, sempre emerge alguma "história" quando começamos a nos indagar o que significa falar de um certo conjunto de práticas, concepções e objetos de estudo como um campo específico de conhecimento, ou como uma "disciplina" (no sentido científico).

Isto porque todo "campo disciplinar", seja qual ele for, é histórico, no sentido de que vai surgindo ou começa a ser percebido como um novo campo disciplinar em algum momento, e que depois disso não cessa de se atualizar, de se transformar, de se redefinir, de ser percebido de novas maneiras, de se afirmar com novas intensidades, de se reinserir no âmbito dos diversos campos de produção de conhecimento ou de práticas específicas. Um campo disciplinar é histórico (BARROS, 2011).

Em síntese, pode se concluir que a constituição de uma disciplina é um processo epistemológico (TOULMIN, 1997: Evolucionismo Conceitual), sociológico (BOURDIEU, 1983, p. 204: Campo Científico) e histórico (BARROS 2011: Historicidade dos Campos Disciplinares). Essas três perspectivas são o fundamento da concepção da HISOEM que é proposta neste trabalho.

Referências

BARROS, José D'Assunção. Uma "disciplina" – entendendo como funcionam os diversos campos de saber a partir de uma reflexão sobre a História. **OPSIS,** v. 11, n. 1, p. 252-270, 2011.

BEN-DAVID, J. **Sociologia da Ciência.** Tradução Newton T. Gonçalves. Rio de Janeiro: FGV, 1975. p.1-32.

BICUDO, I. Educação Matemática e Ensino de Matemática. **Temas & Debates**, ano IV, n. 3, p. 31-42, 1991.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pró-posições,** v. 4, n. 1, p. 18-23, out. 1993.

BICUDO, M. A. V. Ensino de Matemática e Educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, v. 12, n. 13, p. 1-11, 1999.

BOURDIEU, Pierre. O campo científico. In: ORTIZ, Renato (org.). **Pierre Bourdieu: sociologia.** São Paulo: Ática, 1983.

BOURDIEU, Pierre. **Os usos sociais das ciências: por uma sociologia clínica do campo científico.** São Paulo: Unesp, 19832004.

BOURDIEU, Pierre. A causa da ciência: Como a história social das ciências sociais pode servir ao progresso das ciências. **Política & Sociedade**, Vol. 1, Nro. 1; 143-161. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/politica/article/view/4937

CARVALHO, J. B. P. de. O que é Educação Matemática?. **Temas & Debates**, ano IV, n. 3, p. 17-26, 1991.

DANTE, L. R. Algumas reflexões sobre Educação Matemática. **Temas & Debates**, ano IV, n. 3, p. 43-49, 1991.

FERREIRA, V. L.; SANTOS, V. de M. O Processo Histórico de Disciplinarização da Metodologia do Ensino de Matemática. **Bolema,** v. 26, n. 42A, p. 163-191, abr. 2012.

GARCIA, Fernanda Hart; GARCIA, Denis da Silva. Reconhecendo a Educação Matemática Campo de Pesquisa e Investigação. In: **VIII Jornada Nacional de Educação Matemática e XXI Jornada Regional de Educação Matemática**. Universidade de Passo Fundo – Passo Fundo, Rio Grande do Sul – 06 a 08 de maio de 2020. P. 1-8 Disponível em: https://www.upf.br/_uploads/Conteudo/jem/2020/Anais%202020%20-%20eixo%202/JEM2020_paper_23.pdf.

GONZÁLEZ, Fredy Enrique. História, Educação, Matemática: relações virtuosas. Em DORR, Raquel; NEVES, Regina. (Org.). **Cenários de Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo Paco Editorial, 2020. Pp 95-122.

GORMAN, Hugh S. The Story of N. **A Social History of the Nitrogen. Cycle and the Challenge of Sustainability.** New Brunswick, NJ: Rutgers University Press. ISBN 978–0–8135–5439–6 (e-book) 2013.

LATOUR, B.; WOOLGAR, S. **La vie de laboratorie**. Paris: La Découverte, 1988.

MENDES, I. A.; SILVA, C. A. F. da. Problematização de práticas socioculturais na formação de professores de Matemática. **Revista Exitus***, [S. l.], v. 7*, n. 2, p. 100-126, 2017.DOI: 10.24065/2237-9460.2017v7n2ID303. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/303. Acesso em: 7 jan. 2021.

MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M.; IGLIORI, S. B. C.; D'AMBROSIO, U. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 70-93, dez. 2004.

PESTRE, Dominique. Por uma nova história social e cultural das ciências: novas definições, novos objetos, novas abordagens. **Cadernos IG/UNICAMP**, Campinas, v. 6, n. 1, p. 3-56, 1996.

SÁNCHEZ SIERRA, C. C.; MORALES GIRALDO, S. M.; GAR- CÍA ROLDÁN, D. V. **Descripción de una ecología intelectual escolar respecto a la comprensión del concepto de Campo Eléctrico: La argumentación como agente revelador de dicha ecología.** 2014. 150f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura en Matemáticas y Fí- sica) – Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Disponível em: http://bit.ly/360HDRW.Acesso em: 06 jan. 2021.

SOUTO, Romelia Mara Alves. História na Educação Matemática: um estudo sobre trabalhos publicados no Brasil nos últimos cinco anos. **Bolema,** *v. 23*, n. 35B, p. 515-536,abr. 2010.

TOULMIN, Stephen. **La comprensión humana, v. I: El uso colectivo y la evolución de los conceptos.** Madrid: Alianza Editorial, 1997.

VALENTE, Oito temas sobre História da educação matemática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n.12/ Jan.-Jun. pp 22-50. 2013

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática escolar: epistemologia e história. **Revista Educação em Questão,** v. 23, n. 9, p. 16-30, 15 ago. 2005.

VALERO, Paola. La educación matemática como una red de prácticas sociales. In: VALERO, Paola; SKOVSMOSE, Ole (eds.). **Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas**. Bogotá: una empresa docente, 2012, p. 299-326. Disponível em: http://bit.ly/2rWdmVy. Acesso em: 08 jan. 2021.

Autor:

Fredy González es Doctor en Educación (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1997); Master en Matemática (Universidad de Carabobo, Venezuela, 1994); Profesor de Matemática (Instituto Pedagógico de Caracas, 1974); Profesor jubilado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela); Coordinador Fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM); Coordinador Fundador del Doctorado en Educación Matemática (DEM-UPEL); Profesor Invitado en: Universidad de Granada (España), Universidad de San Carlos (Guatemala), Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana); Universidad de Cartagena (Colombia), Universidad Simón Bolívar (Barranquilla, Colombia); Universidad Luterana de Brasil, Universidad Federal de Rio Grande do Norte, Universidad Federal do Pará (Brasil), Universidad Mayor de San Andrés (UMSA, Bolivia), Universidad de Panamá; Universidad INTEC (República Dominicana); Teachers College de la Columbia University (New York, USA); además, es Profesor Visitante Extranjero en la UFRN 2018-2021, Investigador Invitado del Grupo de Estudos da Complexidade (GRECOM, UFRN) y coordina el Proyecto de Historia Social de la Educación Matemática en América Latina (HISOEM-AL). fredygonzalezdem@gmail.com

Como citar este artículo.
GONZÁLEZ, F. E. Introducción a la Historia Social de la Educación Matemática - HISOEM**. Revista Paradigma**, Vol. LXIII, Edición Temática Nro. 1: Práticas de Formação, Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática na Contemporaneidade, pp 443 - 453, enero, 2022. DOI: 10.37618

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054
10.37618 1011-2251 E - 2665-0126
Volumen XLIII, Edición Temática Nro. 1; enero de 2022
Prácticas de Formación, Enseñanza y Aprendizaje en Educación Matemática en la Contemporaneidad

Lista de Árbitros de esta Edición

Alcione Marques Fernandes
Universidade Federal do Tocantins, UFT, Arraias, Brasil
Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal
Aluska Dias Ramos de Macedo
Universidade Federal de Campina Grande; Cuité, Brasil
Ana Maria Porto Nascimento
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB); Barreiras, Brasil
Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Brasil
Aparecida de Fátima Andrade da Silva
Universidade Federal de Viçosa (UFV), Brasil
Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina(UEL); Londrina, Brasil
Cristiano Alberto Muniz
Universidade de Brasília (UnB), Brasília, Brasil
Dalvirene Braga
Universidade de Brasília (UnB), Brasília, Brasil
Daniela Baldan
Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, Brasil
Deire Lúcia de Oliveira
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), Brasília, Brasil
Edmo Fernandes Carvalho
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB); Barreiras, Brasil
Eduardo Goedert Doná
Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, Brasil
Eliane Maria de Oliveira Araman
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Brasil
Elisabete Marcon Mello
Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, Brasil
Érica Santana Silveira Nery
Universidade de Brasília (UnB), Brasília, Brasil
Etienne Lautenschlager
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
Ettiène Guérios
Universidade Federal do Paraná, Brasil
Flávia Fabiani Marcatto
Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, Itajubá, Brasil
Flávia Cristina Figueiredo Coura
Universidade Federal de São João del Rei (UFSJ), São Jão del Rei, Brasil
Gilda Lisbôa Guimarães
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE; Recife, Brasil

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054
10.37618 1011-2251 E - 2665-0126
Volumen XLIII, Edición Temática Nro. 1; enero de 2022
Prácticas de Formación, Enseñanza y Aprendizaje en Educación Matemática en la Contemporaneidad

Lista de Árbitros de esta Edición

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054
10.37618 1011-2251 E - 2665-0126
Volumen XLIII, Edición Temática Nro. 1; enero de 2022
Prácticas de Formación, Enseñanza y Aprendizaje en Educación Matemática en la Contemporaneidad

Lista de Árbitros de esta Edición