UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGOGICO DE MARACAY
Centro de Investigaciones Educacionales
PARADIGMA
CIEP

Edición Temática Nro. 12 | junio de 2023

Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS):

Cuestiones y Métodos

ISSN: 1011-2251
ISSN: 2665-0126

Paradigma

PARADIGMA, VOLUMEN XLIV

Editores Convidados

Adriana Breda
Liliane Gutierre
Vicenç Font
Juan Pablo Vargas Herrera

VOLUMEN XLIV, EDICIÓN TEMÁTICA Nº 2
JUNIO 2023

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054

doi 10.37618 ISSN 1011-2251 E - ISSN 2665-0126

Volumen XLIV
Edición Temática N^{0} 2

***Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS)*:**
Cuestiones y Métodos
Junio de 2023

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054

10.37618 ISSN 1011-2251 E - ISSN 2665-0126

Volumen XLIV
Edición Temática N^0 2
***Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS)*: Cuestiones y Métodos**
Junio de 2023

La Revista **PARADIGMA** es una publicación semestral arbitrada, producida en el Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP) indizada en el **IRESIE, CREDI-OEI, CEDAL, FEUSP, LATINO, BIBLO, DIALNET, CLASE, LATINDEX y REDUC**.
Certificada por la Scientific Electronic Library Online (Scielo Venezuela); http://www.scielo.org.ve/revistas/pdg/eaboutj.htm
Acreditada por el Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (FONACIT)

Canje, Distribución y Publicidad
Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
Apartado Postal 514, CP 2101, Telf: (+58243) 2417866
e-mail: revistaparadigmaupel@gmail.com, revistaparadigmaupel@yahoo.es,
Maracay, Estado Aragua, Venezuela.

HECHO EN VENEZUELA

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054

10.37618 1011-2251 **E -** 2665-0126

Volumen XLIV
Edición Temática N⁰ 2
Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS)*: *Cuestiones y Métodos
Junio de 2023

Editores Convidados

CONTENIDO

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054
10.37618 1011-2251 E - 2665-0126
Volumen XLIV
Edición Temática N^0 2
***Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS)*: Cuestiones y métodos**
Junio de 2023

Editores Convidados

Adriana Breda / Universitat de Barcelona (UB), Barcelona, España
Liliane Gutierre / Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Brasil
Vicenç Font / Universidad del Barcelona (UB), Barcelona, España
Juan Pablo Vargas Herrera / Universitat de Barcelona, Barcelona, España

EDITORIAL

El volumen XLIV, Edición Temática Nro. 2, de la revista Paradigma, intitulada *Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS). Cuestiones y métodos*, surgió con la finalidad de crear un espacio de divulgación de las inúmeras investigaciones que, en los últimos años, se están desarrollando en el marco del EOS en los más variados contextos y en diferentes países de Iberoamérica.

La edición está compuesta por 22 artículos originales e inéditos producidos por 57 autores, representantes de treinta y una instituciones de educación superior, siendo 3 argentinas, 7 brasileñas, 6 chilenas, 5 colombianas, 1 costaricense, 1 ecuatoriana, 5 españolas, 1 india, 1 mexicana y 1 noruega.

Los artículos, dos escritos en lengua inglesa, dieciséis en lengua castellana y cuatro en lengua portuguesa, abordan diferentes problemas, métodos y resultados de investigaciones de desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico.

En esta edición temática se puede encontrar un artículo que aborda el EOS desde una perspectiva filosófica; uno que trata del análisis de libros de texto; uno que busca investigar las dificultades de profesores y estudiantes al trabajar diferentes representaciones de un objeto matemático; dos artículos que investigan los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas; uno que versa sobre la autorregulación en la reflexión de futuros profesores; seis que describen los conocimientos didáctico-matemáticos de profesores y futuros profesores; dos que explican el diseño de cursos formativos, uno para futuros ingenieros y otro para profesores en activo; un artículo que trata del análisis de la idoneidad didáctica de futuros maestros al diseñar problemas robóticos; un artículo de revisión de literatura de trabajos que usan el EOS en el contexto de formación continua de profesorado en Brasil; uno que versa sobre el análisis de las configuraciones epistémicas del diseño e implementación de una tarea; uno sobre Enseñanza del Teorema Fundamental del Calculo a partir de argumentos históricos y recursos tecnológicos; dos artículos que versan sobre criterios de idoneidad para el diseño y reflexión de los procesos de instrucción de diferentes objetos matemáticos; un artículo que analiza la idoneidad interaccional en programas de formación docente; y uno que trata de articular el EOS con otros marcos teóricos.

Es una gran satisfacción poder dar a conocer el trabajo científico y académico de los docentes e investigadores que tuvieron a bien someter a evaluación sus manuscritos, y los animamos a perseverar en el esfuerzo de continuar produciendo excelentes investigaciones usando como referente teórico-metodológico el Enfoque Ontosemiótico.

Les deseamos a todos un excelente viaje científico con la lectura de los 22 artículos que componen esta edición temática de la Revista Paradigma.

Los Editores.

EDITORIAL (Português)

O Volume XLIV, número 2, da revista Paradigma, em sua edição temática intitulada *Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (AOS). Questões e Métodos*, surgiu da necessidade de criar um espaço para a divulgação dos inúmeros projetos de pesquisa desenvolvidos nos últimos anos no âmbito do AOS nos mais variados contextos e em diferentes países da Ibero-América.

A edição está composta por 22 artigos originais e inéditos produzidos por 57 autores, representando trinta e uma instituições de ensino superior, sendo argentinas (3), brasileiras (7), chilenas (6), colombianas (5), costa-riquenha (1), equatoriana (1), espanholas (5), indiana (1), mexicana (1) e norueguesa (1).

Os artigos, dois escritos em inglês, dezesseis em espanhol e quatro em português, tratam de diferentes problemas, métodos e resultados de pesquisa sob a perspectiva da Abordagem Ontossemiótica.

Nesta edição temática podemos encontrar um artigo que aborda a AOS a partir de uma perspectiva filosófica; um que trata da análise dos livros didáticos; um que procura investigar as dificuldades de professores e alunos ao trabalharem com diferentes representações de um objeto matemático; dois artigos que investigam os conhecimentos e competências do professor de matemática; um que trata da auto regulação na reflexão dos futuros professores; seis que descrevem os conhecimentos didático-matemáticos dos professores e futuros professores; dois que explicam o desenho de cursos formativos, um para futuros engenheiros e outro para professores em exercício; um artigo que trata da análise da adequação didática dos futuros professores ao desenhar problemas de robótica; um artigo de revisão bibliográfica de trabalhos que utilizam a AOS no contexto do formação continuada de professores no Brasil; um que trata da análise das configurações epistêmicas do planejamento e implementação de uma tarefa; um que trata da análise das configurações epistêmicas do planejamento e implementação de uma tarefa; um sobre o Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo a partir de argumentos históricos e recursos tecnológicos; dois artigos que tratam do uso dos critérios de adequação didática para o planejamento e reflexão dos processos instrucionais de diferentes objetos matemáticos; um artigo que analisa a adequação de interação em programas de formação de professores; e um que tenta articular o AOS com outras abordagens teóricas.

É uma grande satisfação poder dar a conhecer o trabalho científico e acadêmico dos professores e pesquisadores que gentilmente submeteram seus manuscritos para avaliação, e os encorajamos a perseverar no esforço de continuar produzindo excelentes pesquisas usando a Abordagem Ontossemiótica como referência teórico-metodológica.

Desejamos a todos vocês uma excelente jornada científica durante a leitura dos 22 artigos que compõem esta edição temática da Revista Paradigma.

Os Editores.

EDITORIAL (English)

Volume XLIV, number 2, of the journal Paradigma, a thematic issue entitled *Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (OSA). Problems and methods*, arose from the need to create a space for the dissemination of the numerous researches that have been developed in recent years within the framework of OSA in the most varied contexts and in different countries of Ibero-America.

The edition is composed of 22 original and unpublished articles produced by 57 authors, representing thirty-one institutions of higher education, being Argentinean (3), Brazilian (7), Chilean (6), Colombian (5), Costa Rican (1), Ecuadorian (1), Spanish (5), Indian (1), Mexican (1) and Norwegian (1).

The articles, two in English, sixteen in Spanish and four in Portuguese, address different problems, methods and research results from the perspective of the Ontosemiotic Approach.

In this thematic issue there is an article that approaches the OSA from a philosophical perspective; one that deals with the analysis of textbooks; one that seeks to investigate the difficulties of teachers and students when working with different representations of a mathematical object; two articles that investigate the knowledge and competences of the mathematics teacher; one that deals with self-regulation in the reflection of future teachers; six that describe the didactic-mathematical knowledge of teachers and future teachers; two that explain the design of training courses, one for future engineers and the other for teachers in service; an article that deals with the analysis of the didactic suitability of future teachers when designing robotic problems; a literature review article of works that use OSA in the context of continuous teacher training in Brazil; one that deals with the analysis of the epistemic configurations of the design and implementation of a task; one that deals with the analysis of the epistemic configurations of the design and implementation of a task; one on Teaching the Fundamental Theorem of Calculus from historical arguments and technological resources; two articles that deal with suitability criteria for the design and reflection of instructional processes of different mathematical objects; one article that analyzes interactional suitability in teacher training programs; and one that tries to articulate OSA with other theoretical frameworks.

It is a great satisfaction to be able to make known the scientific and academic work of the teachers and researchers who kindly submitted their manuscripts for evaluation, and we encourage them to persevere in the effort to continue producing excellent research using the Ontosemiotic Approach as a theoretical-methodological reference.

We wish you all an excellent scientific journey with the reading of the 22 articles that make up this thematic issue of Paradigma.

Onto-semiotic Approach to the Philosophy of Educational Mathematics

Juan D. Godino
jdgodino@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8409-0258
Universidad de Granada
Granada, Spain

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Abstract

In this article, I elaborate on the construct educational mathematics as an ecological variety of mathematics that studies the articulation of formal and applied mathematics, considering the educational contexts. After presenting a synthesis of the main current trends in the philosophy of mathematics, I analyse the contributions of the onto-semiotic approach (OSA) to address the epistemological, ontological, and semiotic problems of educational mathematics. The onto-semiotic configuration of operative and discursive practices, the typology of mathematical objects and processes, and the dualities from which practices and objects can be analysed, provide the essential elements of a specific philosophy of educational mathematics. I articulate an empiricist-factual position in this philosophy for the applied dimension, with a fictional-conventional view of the formal dimension, which helps understand and avoid the educational problems linked to Platonism and physicalism in the teaching and learning of mathematics. Likewise, the educational context requires adopting a transdisciplinary point of view that allows relating philosophical, psychological, socio-cultural, and pedagogical issues, to address the problems of learning and disseminating mathematical knowledge. Finally, I present the ecology of systemic-pragmatic meanings as an essential metaphor of educational mathematics and a synthesis of the OSA philosophical postulates.

Keywords: Educational Mathematics. Philosophy of Mathematics. Onto-semiotic Approach. Transdisciplinarity.

Enfoque Ontosemiótico de la Filosofía de la Matemática Educativa

Resumen

En este artículo, elaboro el constructo matemática educativa como una variedad ecológica de las matemáticas que estudia la articulación de las matemáticas formales y aplicadas, teniendo en cuenta los contextos educativos. Tras presentar una síntesis de las principales corrientes sobre filosofía de las matemáticas analizo los aportes del enfoque ontosemiótico (EOS) para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos y semióticos de la matemática educativa. El constructo configuración ontosemiótica de prácticas operativas y discursivas, la tipología de objetos y procesos matemáticos, así como las dualidades desde las cuales se pueden analizar las prácticas y los objetos aportan los elementos esenciales de una filosofía específica de la matemática educativa. En dicha filosofía se articula una posición empirista-factual para la dimensión aplicada con otra ficcionista-convencional para la dimensión formal, lo cual permite comprender y evitar los problemas educativos ligados al platonismo y fisicalismo en la

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, el contexto educativo requiere adoptar un punto de vista transdisciplinar que permita relacionar las cuestiones filosóficas, con las psicológicas, socioculturales y pedagógicas, a fin de abordar los problemas del aprendizaje y difusión del conocimiento matemático. Finalmente presento la ecología de significados sistémico-pragmáticos como una metáfora esencial de la matemática educativa y una síntesis de los postulados filosóficos del EOS.
Palabras clave: Matemática Educativa. Filosofía de las Matemáticas. Enfoque Ontosemiótico. Transdisciplinariedad.

Abordagem Ontossemiótica da Filosofia da Matemática Educativa

Resumo

Neste artigo, elaboro o conceito de matemática educativa como uma variedade ecológica da matemática que estuda a articulação da matemática formal e aplicada, tendo em conta os contextos educativos. Após apresentar uma síntese das principais correntes da filosofia da matemática, analiso as contribuições da abordagem ontossemiótica (AOS) para enfrentar os problemas epistemológicos, ontológicos e semióticos da matemática educativa. A noção de configuração ontossemiótica das práticas operacionais e discursivas, a tipologia dos objetos e processos matemáticos, bem como as dualidades a partir das quais as práticas e objetos podem ser analisados fornecem os elementos essenciais de uma filosofia específica da matemática educativa. Nesta filosofia, uma posição empírico-factual para a dimensão aplicada é articulada com uma posição ficcional-convencional para a dimensão formal, o que permite compreender e evitar os problemas educativos ligados ao platonismo e ao fisicalismo no ensino e aprendizagem da matemática. Do mesmo modo, o contexto educativo exige a adoção de um ponto de vista transdisciplinar que permita relacionar questões filosóficas, psicológicas, socioculturais e pedagógicas, a fim de abordar os problemas da aprendizagem e da difusão do conhecimento matemático. Finalmente, apresento a ecologia dos significados sistémico-pragmáticos como uma metáfora essencial da matemática educacional e uma síntese dos postulados filosóficos do AOS.
Palavras chave: Matemática Educativa. Filosofia da Matemática. Abordagem Ontossemiótica. Transdisciplinaridade.

Introduction

The philosophical reflection on the foundations of the didactics of mathematics as a scientific and technological discipline is essential to adequately guide research, since it conditions the formulation of central questions and the design of instructional models and resources. Likewise, in order to understand and optimise the teaching and learning of mathematics, we should address epistemological questions about mathematics, as proposed by Fundamental Didactics (GASCÓN, 1998), as well as ontological, semiotic, cognitive, and sociological questions, among others. Clarifying the nature of mathematics is essential for mathematics education, both in the contexts of formal uses of creation and justification of mathematical knowledge, and in its application to solve scientific, technological, and everyday life problems. However, it is insufficient, since studying the processes of learning and disseminating mathematics requires considering psychological, pedagogical, sociological aspects, among others. Consequently, mathematics education[1] should adopt a transdisciplinary perspective (ARBOLEDAS; CASTRILLÓN, 2007; STEINER, 1985).

The diversity of philosophical, psychological, and sociological theories, and the dilemmas between epistemological, ontological, semiotic, and cognitive perspectives, led the Onto-Semiotic Approach (OSA) in mathematics education (GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2007) to generate a new vision of mathematical knowledge, adapted to the educational context. The OSA assumes that an informed understanding and intervention of instructional processes requires to deal with empirical problems specific to the psychology and didactic of mathematics, such as how we learn mathematical ideas and how we can help to learn them. These questions must be approached together with other properly philosophical questions, such as: What is the nature of mathematical objects and how do they differ from material objects? How do mathematical objects exist? Does mathematics have any ontological presupposition? What is mathematical truth? What is a mathematical proof?

In this paper, I pose the problem of clarifying the relations between the OSA constructs and postulates on mathematical knowledge, and the predominant trends in the philosophy of mathematics. To achieve this aim, I introduce the construct of *educational mathematics* to distinguish, without separating them, pure and applied mathematics when studying mathematical learning. Recognising the specific characteristics of educational mathematics as an ecological variety of mathematics, in which formal reasoning coexists symbiotically with empirical-intuitive reasoning, is important for understanding learning processes and designing informed educational interventions. I will also show that the construct configuration of practices, objects, and processes (onto-semiotic configuration) introduced in the OSA allows articulating coherently elements of a philosophy of educational mathematics, interwoven with psychology and sociology.

I begin the article by characterising educational mathematics as an ecological variety of mathematics that articulates formal and applied mathematics living in diverse educational

[1] Didactics of mathematics in continental European countries.

contexts. I then synthesise the main schools of philosophy of mathematics on which I will project the onto-semiotic approach to mathematical knowledge. In the next section, I present the onto-semiotic configuration construct of the OSA as a tool for analysing educational mathematics. I end the paper with a synthesis of the OSA philosophical postulates on mathematical knowledge, highlighting its transdisciplinary character.

1. Characterising educational mathematics

To address the problems of teaching and learning mathematics, we should clarify the specific characteristics of pure and applied mathematics, as well as their relationships. This analysis reveals the emergence of educational mathematics as an ecological variety of mathematics. We distinguish between the formal and factual (empirical) dimensions of educational mathematics, not considering them as separate dimensions, but maintaining close symbiotic relationships when we are interested in the processes of generating and learning mathematics. Accordingly, the meaning we attribute to “educational mathematics”[2] is different from its use in the Mexican mathematics education community, where it is considered synonymous with mathematics education or didactics of mathematics. “Educational mathematics is thus a discipline of knowledge whose origin dates back to the second half of the twentieth century and which, in general terms, we could say deals with the study of didactic phenomena linked to mathematical knowledge” (CANTORAL; FARFÁN, 2003, p. 29).

Next, we clarify the characteristics of pure and applied mathematics, relying mainly on Bunge (1985). We can describe contemporary pure mathematics, also called abstract, formal, or axiomatic mathematics (MARQUIS, 2014), as the investigation of problems about conceptual systems or their elements to find patterns that satisfy such objects, which are justified by rigorous proof. Mathematics, as a formal science, uses symbols and constructs, but not empirical or factual objects (facts, things, properties of things, and events). Applied mathematics, on the other hand, consists of the investigation of problems arising in factual science, technology, or humanities, with the help of constructs belonging to pure mathematics. Applied mathematics then differs from pure mathematics by:

[2] Fischer (2006) uses the expression "educational mathematics" to refer to the connections between pure and applied mathematics that must be considered in mathematics education.

- The origin of the problems, which is extra-mathematical in the first case and internal in the second.
- The final referents, which are real things in the case of applied mathematics, and constructs in the other case, and
- The goal, which is to help the non-mathematical discipline in the first case, and to advance pure mathematics in the second.

A problem belongs to formal mathematics when its solution requires formal (i.e., non-empirical) proofs or refutations. Applied mathematics makes use of formal constructs and models, but also of empirical artefacts and constructs. Echeverría (2007) adds education and dissemination to these two contexts as a field of reflection in the philosophy of science since it constitutes a fundamental component of scientific activity.

The study of problems from the extra-mathematical and intra-mathematical worlds is addressed even from the earliest levels of education. For example, learning natural numbers begins with counting problems, and assigning a number to the cardinal of a set of perceivable objects. But this requires the simultaneous learning of the mathematical structure, the sequence of number words and symbols, and the principles of counting, due to the interconnectedness of the formal and the applied in educational mathematics. Applied problems involve factual objects and empirical verifications, which must be differentiated from formal constructs and the conventional rules by which they are operated and justified.

Educational mathematics study not only constructs conceptual objects (such as numbers or triangles), which correspond to pure mathematics, but also factual propositions referring to concrete (real, material) things, such as sizes or dimensions of triangular-shaped objects. In teaching mathematics, it is necessary to assure that students do not confuse mathematical objects with their material or symbolic representations. This issue is irrelevant in the applications of mathematics or in pure mathematics, which deals only with abstract entities. The procedures of justification in educational mathematics are also different, because not only logical and deductive procedures are used, but also analogy, metaphor, induction, and plausible reasoning. Special care is taken to distinguish between empirical justifications and deductions from definitions and postulates.

Summarising, we can say that pure mathematics is an activity[3] whose object/motive is the creation of mathematical models to address the solution of increasingly general problems, for which it develops constructs and theories with progressive levels of abstraction and formalisation. The object/motive of applied mathematics is the solution of specific questions in the empirical sciences, technologies, and social sciences by applying available mathematical models. The object/motive of educational mathematics is the study of the dialectical relationships between pure and applied mathematics, between the processes of creation and application of mathematical knowledge, as they are to be the subject of teaching and learning. Consequently, educational mathematics should not only study the process of abstraction (progressive generalisation, synthesis, and formalisation), but also the inverse process of interpretation (analysis, particularisation, and concretisation) and the dialectical relationships between them.

2. Philosophies of mathematics

The philosophies of mathematics developed over the last twenty-five centuries address issues such as the following:

- Ontology: Questions about the ontological status of mathematical objects.
- Semantics: Questions about the meaning, reference, and truth in mathematics.
- Epistemology: Questions about the nature and sources of mathematical knowledge.
- Methodology: Questions of justification (particularly, proof) and application.

These themes are essential and characteristic of the philosophy of pure, applied, and educational mathematics, although in this last case they are intertwined with other questions concerning learning and teaching in different educational contexts and levels. Table 1 summarises the typical principles of five widely recognised philosophies of mathematics.

Mathematical Platonism can be defined as the conjunction of the following three theses: (a) *existence*: mathematical objects exist, and mathematical sentences and theories provide true descriptions of such objects; (b) *abstraction*: mathematical objects are abstract, i.e., non-spatial-temporal entities; and (c) *independence*: mathematical objects are independent of intelligent

[3] We understand the notion of activity in the sense proposed by the Cultural Historical Activity Theory in its second and third-generation version (ENGËNSTRON, 1987), where it is considered as a unit of analysis whose structure includes six elements: subject, object/motive, instruments, community, rules, and division of labour.

agents and their language, thought, and practices. Moreover, according to Platonists, abstract objects are entirely non-physical, non-mental, non-spatial, non-temporal, and non-causal (LINNEBO, 2009). Empirical realism shares with Platonism the view that mathematics is the description of objects that exist independently of people and the language used to represent them. However, rather than situating objects beyond space and time, empirical realism situates them within a spatial-temporal world. The main perspectives in this respect are physicalism, holistic empiricism, and radical empiricism (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). Ernest (1998) has highlighted the negative consequences that Platonism and mathematical realism, as well as foundationalist and absolutist positions, may imply for mathematics education.

Table 1 – Principles of five philosophies of mathematics

Philosophy	Math objects	Mode of introduction	Meaning	Truth	Math knowledge	Math activity
Platonism	Self-existing ideal and eternal	Discovery	Non-contradiction	Formal	A priori and conceptual	Deductive
Nominalism	Symbols	Convention	Nil	Convention	Nil	Formal manipula- tion of symbols
Intuitionism	Mental cons-tructions	Invention	Reducibility to positive integers	Reducibility to numerical computation	A priori and intuitive	Intuitive and rational
Empiricism	Mental	Discovery	Reference to experience	Empirical	Empirical	Trial and error, rational and empirical
Conceptualist and fictionist materialism	Fictions (classes of brain processes)	Invention and discovery	Conceptual reference and contextual sense	Formal	A priori and conceptual	Abstraction, generalization, formal manipulation, trial and error, analogy, induction and deduction

Source: Bunge (1985, p. 120)

In addition to the five philosophies presented in Table 1, other possible relevant contributions to the philosophy of educational mathematics are the philosophical positions on mathematics of Wittgenstein and Lakatos.

Wittgenstein (1976) was mainly concerned with questions of learning, understanding, inventing, and using elementary mathematical ideas. Wittgenstein's philosophy of mathematics is situated at the opposite end of the spectrum from Platonic-idealistic and psychological approaches. He poses the challenge of overcoming the dominant Platonism and stop speaking of mathematical objects as ideal entities to be discovered and of mathematical propositions as descriptions of the properties of such objects. Alternatively, he proposes that mathematical propositions should be seen as instruments, as rules for transforming empirical propositions. For example, the theorems of geometry are rules for framing descriptions of shapes and sizes of objects, their spatial relations, and for making inferences about them. Wittgenstein's view of mathematical language as a tool is also relevant for educational mathematics. He argued that words are tools and clarify their uses in our language games. For example, we should not lose sight of the fact that number-words are instruments for counting and measuring and that the foundations of elementary arithmetic, i.e., the mastery of the series of natural numbers, is based on the training in counting.

Lakatos' (1976) ideas about mathematics are summarised in the following theses (BUNGE, 1985). First, mathematical research is not essentially different from scientific research since it also involves the formulation of conjectures and the search for counterexamples of them. Second, since one often starts from inaccurate concepts and can make mistakes in proving theorems, one has to adopt a fallibilist epistemology of mathematics. Third, formalism does not faithfully represent the real work of the mathematician, which involves non-deductive procedures. In Bunge's view, all three theses are reasonable, but they do not constitute a philosophy of mathematics. Lakatos does not express clear ideas about the nature of mathematical objects: he was more interested in the history than in the ontology or semantics of mathematics. Like anyone else trying to solve a problem, the professional mathematician is obliged to use analogy and induction and testing conjectures until he finds the correct solution, even using material tools. However, the logic of mathematical discovery and the heuristic procedures in problem-solving described by Lakatos provide important elements for the philosophy of educational mathematics. The progressive mathematical growth, both from a cognitive and a historical-cultural point of view, need not be linked to a deductivist style but follow in the footsteps of the heuristics described in the book *Proofs and Refutations*. However, this does not mean that pure mathematics, as a specific epistemological formation, is not fundamentally different from the factual sciences.

In mathematics education, some authors address issues related to the philosophy of educational mathematics. Such is the case of Sfard (2000), when she analyses the relationships between symbols and mathematical objects. The problem addressed by her, expressed in semiotic terms, is: "mathematical symbols refer to something – but to what? … What is the ontological status of these entities? Where do they come from? How can one get hold of them (or construct them)? (SFARD, 2000, p. 43). Sfard rejects the conception that conceives signs as independent of meanings and adopts the view of psychologists (such as Vygotsky) and semioticians (such as Peirce) that signs (language in general) play a constitutive role in objects of thought and not merely a representational role. The central thesis defended by Sfard is that:

> Mathematical discourse and its objects are mutually constitutive: It is the discursive activity, including its continuous production of symbols, that creates the need for mathematical objects; and these are mathematical objects (or rather the object-mediated use of symbols) that, in turn, influence the discourse and push it into new directions (SFARD, 2000, p. 47).

Font and collaborators (2013) argue that the way in which mathematics is taught in schools leads students to implicitly develop a realist view of mathematical objects. This view assumes that mathematical statements are a description of reality and that the mathematical objects portrayed by these statements are part of this reality.

> In the teaching process this "reality" to which mathematical objects belong is located at an intermediate point between what, in the philosophy of mathematics, are referred to as Platonic and empiricist positions, although depending on the teaching process considered, one may observe a clear preference for one or the other of these two points of view, for example, in contextualized teaching or realist mathematics (FONT; GODINO; GALLARDO., 2013, p. 99).

A complementary explanation for this educational phenomenon is that teachers and mathematics educators do not discriminate the substantial differences between applied and formal mathematics, and that educational mathematics needs to identify the conflicts and obstacles generated in the learning processes when these differences are not considered.

3. Fundamentals of educational mathematics in the OSA

Problematising the type of mathematics studied in education systems is necessary in the OSA. It assumes that educational mathematics must adopt a specific perspective of mathematics adapted to the learning and teaching context. This vision complements the formal-logical view in the contexts of creation and justification of mathematical knowledge, and the empiricist-factual perspective linked to the contexts of application. It is essential to distinguish between pure or formal mathematics, applied mathematics, and educational mathematics, which results from ecological processes of adaptation of mathematics to different contexts and educational levels. Consequently, we need a philosophy of educational mathematics that addresses the epistemological (emergence and development of mathematical knowledge), ontological (nature and types of mathematical objects), and semiotic (syntactic, semantic, and pragmatic) problems specific to this variety of mathematics.

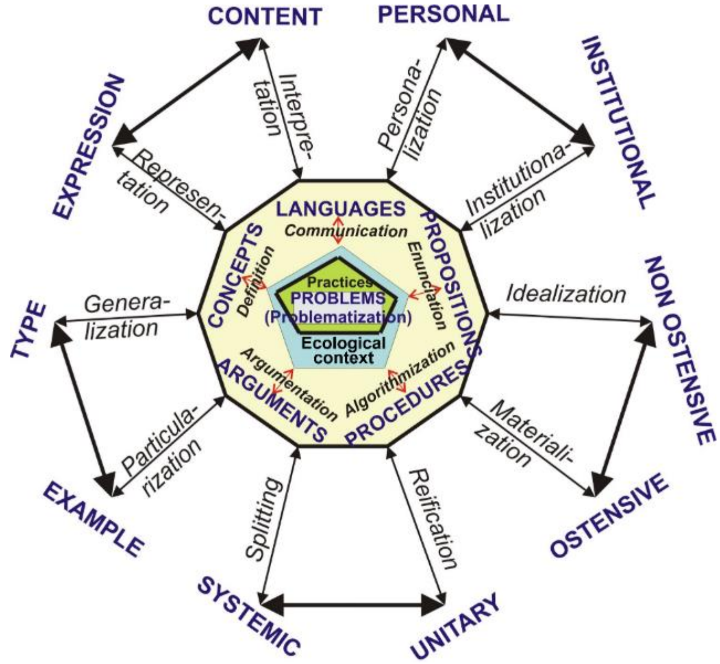
The educational context also requires articulating the philosophical problems of mathematics with questions related to the cognitive processes involved in learning, which takes place in historical-cultural contexts that condition and support them. Therefore, the foundations of mathematics education require the development of specific theoretical models that consider the philosophical, psychological, and socio-cultural issues (among others) involved in the teaching and learning of mathematics.

In the following sections, I present a synthesis of the assumptions and theoretical constructs elaborated in the OSA that shape the essential features of a specific philosophy of educational mathematics. The OSA theoretical constructs that articulate central questions of the philosophy with the psychology and sociology of educational mathematics are:

- Mathematical practices.
- Mathematical objects and processes.
- Contextual attributes of practices and objects.

These theoretical constructs are articulated in the *configuration of practices, objects, and processe*s (onto-semiotic configuration) tool, which we explain in the following sections. The onto-semiotic configuration tool (see Figure 1) incorporates elements of the notions of concept, conception, schema, mathematical praxeology, and semiotic representation register used in mathematics education. In Godino and collaborators (2011), we show the analytical breakdown provided by the onto-semiotic configuration, for both institutional and personal knowledge, with an example related to the concept of natural number. The semiotic function tool (expression-content duality) is also exemplified to analyse the learning of the ten. Likewise, Font and collaborators (2013) study the emergence of mathematical objects based on the practices performed to solve mathematical problems.

Figure 1– Onto-semiotic configuration of practices, objects, and processes



Source: Modified from Godino (2014, p. 23)

3.1. Mathematics as an activity

People's problem-solving activity in a specific ecological (material, biological, and social) context is the central element in constructing mathematical knowledge (see Figure 1). The approach to the epistemological problem of the genesis of knowledge is made operational in the OSA with the notion of *mathematical practice*, which is defined as "any action or manifestation (linguistic or otherwise) carried out by somebody to solve mathematical problems, to communicate the solution to others" (GODINO; BATANERO, 1994, p. 334).

To solve a problem, the subject carries out an organised sequence of different types of operative and discursive practices. The answer to the epistemological question of how mathematics emerges and develops is an anthropological (WITTGENSTEIN, 1953) and pragmatist (PEIRCE, 1958) view of mathematics.

The same problem is solved by systems of practices that depend on the ecological context in which they arise, e.g., communities of mathematical practitioners, people developing new mathematical knowledge or applying it, and educational contexts. The practices relativity from institutional, temporal, and material context add a sociological and historical dimension to the epistemology assumed by the OSA.

> An institution is constituted by the people involved in the same class of problem-situations, whose solution implies the carrying out of certain shared social practices and the common use of particular instruments and tools. (GODINO; BATANERO, 1994, p. 336).

The problems that origin or motive mathematical activity can be extra-mathematical (involving things, objects, and material facts) or intra-mathematical (in which non-material or ideal objects of reason take part). In educational mathematics, especially at the first levels, the starting point is extra-mathematical problems related to the environment and everyday life; so, the objects involved in the practices can be material artefacts and abstractions, both empirical and formal or theoretical.

From an educational point of view, it is important to postulate that the mathematical activity involved in learning mathematics is different from the activity of mathematicians who construct new knowledge. In the first case, the learner reconstructs knowledge, which already has a historical-cultural existence, whereas in the second case, new postulates are invented, and new relations derived from previously elaborated knowledge are discovered. From this fact, it follows that the first encounter of students with new types of problems and the mathematical objects created to solve them may require interaction patterns in which collaborative work and the transmission of knowledge predominate over the learner’s autonomous work.

Personal-institutional contextual duality

The OSA articulates the epistemic and cognitive facets of mathematical knowledge by attributing to mathematical practices a dual character, namely, personal (individual) or institutional (social). Mathematical practices can be idiosyncratic to an individual or shared within an institution or community of practice. There are no institutions without individuals, nor individuals without the various institutions they are part of (family, school, etc.). The distinction between personal and institutional practices makes it possible to become aware of the dialectical relationships between them; on one hand, individuals are subject to the modes of action shared within the institutions of which they are part of; on the other hand, institutions are open to the initiative and creativity of their members. This postulate links the cognitive (psychological) to the epistemological and sociological dimensions of mathematical knowledge. Besides its logical-formal dimension, another factual dimension of mathematics accounts for the processes of creation of mathematical objects, which emerge from practices, not as Platonic ideal existents that are discovered (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). From a personal point of view, mathematical objects have a mental/neural existence, while from an institutional point of view, they possess a cultural existence.

3.2. Mathematics as a system of objects and processes

Mathematics is not only an activity of individuals but also a system of culturally-shared objects emerging from that activity. We should address the ontological problem, i.e., clarifying what a mathematical object is, what types intervene in mathematical activity, what the mode of being of mathematical objects is, and in what sense mathematics speaks of objects (PARSON, 2008). In the OSA, mathematical practices, that is, the actions performed by people in certain types of problems, are the origin and *raison d'être* of mathematical abstractions, ideas, or objects (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). It is postulated that a mathematical object is any material or immaterial entity that intervenes in mathematical practice, supporting or regulating its realisation. It is a metaphorical use of the term *object,* since a mathematical concept is usually conceived as an ideal or abstract entity and not as something tangible, such as a rock, a drawing, or a manipulative artefact. This general idea of the object, consistent with that proposed in symbolic interactionism (BLUMER, 1982; COBB; BAUERSFELD, 1995), is useful when complemented with a typology of mathematical objects by considering their different roles in mathematical activity.

The six types of primary entities assumed (see Figure 1) extend the traditional distinction between conceptual and procedural entities, which are insufficient to describe the intervening and emergent objects of mathematical activity. *Problems* are the origin or *raison d'être* of mathematical activity; *language* represents the remaining entities and serves as an instrument for actions; *arguments* justify the procedures and propositions that relate concepts to each other. *Concepts* (number, fraction, derivative, etc.), as components of onto-semiotic configurations, are conceived as definitions, a different view from that proposed by Vergnaud (1990) as the triplet formed by situations, operative invariants, and representations. The idea of concept as a system is taken up in the OSA by the onto-semiotic configuration construct. In addition, configurations are organised into more complex entities such as conceptual systems or theories.

The constitution of personal and institutional objects and relations occurs over time through mathematical processes, which are interpreted as sequences of practices. The emerging mathematical objects form the crystallisation or reification of such processes. Interpreting mathematical processes as sequences of practices in correspondence with primary mathematical object types provides criteria for categorising them. The formation of linguistic objects, problems, definitions, propositions, procedures, and arguments takes place through the respective primary mathematical processes of communication, problematisation, definition, enunciation, elaboration of procedures (algorithmisation, routinisation, etc.), and argumentation. Problem-solving – and more generally, modelling, should rather be considered as a mega-process, as it involves the articulation of primary processes (establishment of connections between objects and generalisation of procedures, propositions, and justifications) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

The personal-institutional duality also applies to objects and processes. When the systems of practices are shared within an institution, emergent objects are considered institutional objects, whereas if such systems correspond to an individual, they are considered as personal objects. Personal objects include cognitive constructs, such as conceptions, schemas, internal representations, etc.

3.3. Mathematics as a system of signs

Educational mathematics must address the following semiotic-cognitive problem: What is it to know and understand a mathematical object? What does an object mean for a subject at a given time and under given circumstances? These questions are analysed in the OSA by considering that mathematical activity and the processes of construction and use of mathematical objects are essentially relational. Different objects are not conceived as isolated entities but related each other. For example, between the symbol 2 and the concept of number 2, as well as between the concept of natural number and the system of operative and discursive practices from which this mathematical object emerges, a relationship is established, which the OSA calls a *semiotic function*. The semiotic function is the correspondence between an antecedent object (expression/signifier) and a consequent object (content/meaning) established by a subject (person or institution) according to a criterion or rule of correspondence. This construct is included in Figure 1 as the expression-content duality, which allows to account for any use of meaning: meaning is the content of a semiotic function (GODINO; BURGOS; GEA, 2021). The OSA assumes that any entity that participates in a semiosis process, interpretation, or language game, is an object and can play the role of expression (signifier), content (signified), or interpreter (a rule that relates expression and content). The systems of operative and discursive practices are also objects and can be components of the semiotic function. The *systemic-pragmatic meaning* of a concept (in general, of any object) is the system of operative and discursive practices performed by a person (personal meaning) or within an institution (institutional meaning) to solve a type of mathematical problem.

The semiotic function makes it possible to describe mathematical knowledge comprehensively as the set of relations that the subject (person or institution) establishes between mathematical objects and practices. Talking about knowledge is equivalent to talking about the content of one (or many) semiotic functions, resulting into a multiplicity of types of knowledge in correspondence with the diversity of semiotic functions that can be established between the various types of practices and objects. Since the system of practices involved in problem-solving are relative to individuals and communities of practices (institutions), pragmatic meanings, and thus knowledge, are relative. However, it is possible to reconstruct a global or holistic meaning of an object by systematically exploring the contexts of use of the object and the systems of practices involved in its solution. Such holistic meaning is used as an epistemological and cognitive reference model of the partial meanings or senses that the object may take (GODINO; BURGOS; GEA, 2021). The constructs of institutional and personal meanings allow to interpret understanding in terms of the ongoing matching of the subject's meanings with the institutional reference meanings (GODINO; BATANERO, 1994).

The OSA assumes that the objects, put into correspondence in semiotic functions are not only ostensive linguistic objects (words, symbols, expressions, diagrams, etc.), but concepts, propositions, procedures, arguments, even problems can also be antecedents of semiotic functions. For example, we can ask about the meaning of the concept of number, or the meaning of propositions, procedures, arguments, situations, and representations involved in numerical practices. The expression (signifier) and content (signified) in the semiotic function can also be unitary or systemic entities, particular or general, material, or immaterial, personal, or institutional. This diversity of objects generates a variety of types of meanings, therefore, of knowledge and understandings, which guides and supports onto-semiotic analyses of mathematical activity at macro and micro levels, both from the socio-epistemic (institutional) and cognitive (personal) points of view (GODINO; BURGOS; GEA, 2021). Thus, in the OSA, cognition is understood as pragmatist but also empiricist and rationalist. Action is the source of knowledge, but also perception and reason are.

3.4. Idealisation, reification, and generalisation in the OSA

Three pairs of contextual attributes have been introduced into the OSA ontology to view practices and primary objects and account for the processes of idealisation, reification, and generalisation: ostensive-non ostensive (material, immaterial), unitary-systemic, and extensive-intensive (particular-general; example-type). These constructs serve to describe the types of abstraction (empirical and formal) into play in mathematical activity and the objects that intervene and emerge in these processes. They also help to understand the interweaving between pure and applied mathematics, between constructs and things, which is necessary for educational mathematics since, in learning processes, at least at the first levels, we start from tangible reality to access the virtual reality of formal mathematics.

Ostensive/non-ostensive duality

In OSA, the adjective ostensive is applied to any object that is public and can therefore be shown directly to another person. Symbols, notations, gestures, graphic representations, and material artefacts have this character; they are real or concrete objects. Concepts, propositions, procedures, and arguments are constructs, creations of the human mind, non-ostensive objects; they depend on subjects, their actions, and artefacts for their existence. Non-ostensive objects can be mental objects (when they intervene in personal practices), or institutional objects (when they appear in shared practices). However, mental processing and interpersonal communication of non-ostensive objects require to materialise them through empirical ostensive representations. In both cases, non-ostensive objects regulate the mathematical activity, while their ostensive representations support or facilitate the performance of such work. The distinction between ostensive and non-ostensive objects is relative to the language game in which they participate. Ostensive objects can also be thought, imagined by a subject, or be implicit in mathematical discourse (for example, the multiplication sign in algebraic notation); in these cases, they function as intensive objects. This duality allows us to describe the dual processes of idealisation and materialisation in mathematical activity.

The unitary-systemic duality

In some circumstances, mathematical objects participate as unitary entities (assumed to be known beforehand), while in others, they intervene as systems that must be decomposed for their analysis. “One and the same object can now be regarded as an individual, now as a set (or as a concrete collection). There is nothing final about being an individual” (BUNGE, 1977, p. 107). For example, in the study of addition and subtraction, in the last levels of primary education, the decimal numbering system (tens, hundreds, etc.) is something known and, consequently, a unitary (elementary) entity. This object, in the first grade, is considered in a systemic way for learning. Both the onto-semiotic configurations (in their socio-epistemic or cognitive version) and the primary objects that compose them can be considered from unitary or systemic perspectives, depending on the language game in which they participate. In the first case, processes of reification (synthesis) take place and, in the second case, decomposition (analysis) of the system into its components.

Extensive-intensive (example-type) duality

A characteristic feature of mathematical activity is the attempt to generalise the types of problems addressed, the solving procedures, definitions, propositions, and justifications. Solutions are organised and justified in progressively more general structures. However, in the instructional processes, one begins to study models of these general structures. The analysis of mathematical activity, therefore, requires considering both the processes of particularisation and generalisation, and the objects involved in them. The process of generalisation entails finding or conjecturing a pattern from similar cases, while particularisation involves generating individual examples that follow a pattern.

The contextual attribute extensive-intensive, applicable to practices and objects, has been introduced in the OSA to analyse the dialectic between particularisation and generalisation. Depending on the situation, an object can be an exemplar (extensive) if it intervenes by itself, or a type (intensive) if it represents a wider class.

> An extensive object is used as a particular case (a specific example, i.e., the function $y = 2x + 1$), of a more general class (i.e., the family of functions $y = mx+n$), which is an intensive object. The terms extensive and intensive are suggested by the two ways of defining a set, by extension (an extensive is one of the members of the set) and by intension (all the elements are considered at the same time). By extensive we understand a particularized object (individualized) and by intensive, a class or set of objects. (FONT; CONTRERAS, 2008, p. 169).

Font & Contreras (2008) conduct a microscopic analysis on the objects, processes, and semiotic functions at stake in the definition of the derivative of a function. They apply the ostensive-non-ostensive, extensive-intensive, and expression-content dualities to explain the semiotic conflicts posed by the dialectic between the particular and the general in mathematics education.

3.5. Abstraction processes and abstract objects in the OSA

In a first approximation, the ostensive/non-ostensive duality and the associated processes of materialisation and idealisation account for the concrete (ostensive) and abstract (ideal) objects usually considered in everyday language. But the professional and educational analysis of mathematical activity requires a deeper understanding of the abstraction process, the emerging objects, and the inverse interpretation process. For this reason, the OSA complements the ostensive/non-ostensive duality with the unitary/systemic and example/type dualities. Whereby the mathematical abstract object is not only an ideal (non-ostensive) entity but also a generality, considered as a unitary whole or as a system, depending on the circumstances. As Sinaceur (2014, p. 93) states, “the division abstract/concrete integrates the distinction general/particular and class/individual”. Moreover, since reified objects are symbolically represented to intervene in new practice systems, abstraction, i.e., the generation of mathematical knowledge, it also involves the expression/content duality and the processes of representation and signification.

The postulate of the emergence of the object from practices (actions) undoubtedly requires relating the model of abstraction described here to the reflexive abstraction of Piagetian genetic epistemology. *Reflexive abstraction* is the fundamental genetic process that makes it possible to build a new structure from a previous one and consists of extracting certain elements from lower structures to reflect them in new operations, generalising these elements in a higher structure.

> Reflective abstraction starting from actions does not imply an empiricist interpretation in the psychologist's sense of the term, for the actions in question, are not the particular actions of individual (or psychological) subjects: they are the most general co-ordinations of every system of actions, thus expressing what is common to all subjects, and therefore referring to the universal or epistemic subject and not the individual one. (BETH; PIAGET, 1974, p. 238)

In addition, the mathematical practices from which abstract objects emerge are intentional, in the sense that they are performed to solve problems in specific contexts. Consequently, the mega-process of abstraction and the emerging abstract objects is conditioned and supported by the ecological (material, biological, and social) context in which the activity occurs. This observation leads to relate the OSA view of abstraction with *abstraction in context* (HERSHKOWITZ; SCHWARZ; DREYFUS, 2001).

> A process of abstraction is influenced by the task(s) on which students work; it may capitalize on tools and other artifacts; it depends on the personal histories of students and teachers; and it takes place in a particular social and physical setting. We thus take a sociocultural point of view, as opposed to a purely cognitive or a purely situationist one. (HERSHKOWITZ; SCHWARZ; DREYFUS, 2001, p. 195-6)

However, the analysis of the concordances and complementarities of the OSA abstraction model with reflective abstraction and abstraction in context will have to be addressed in other papers.

3.6. Educational mathematics as ecology of meanings

Toulmin (1977) introduced the expression *intellectual ecology* into the epistemology of knowledge to describe the function and adaptation of concepts and methods of thought to the real needs and demands of problem situations. On his part, Morin (1992) considers inadequate the belief in the physical reality of ideas, as denying a real and objective existence to the habitat, life, customs, and organisation of ideas. For Morin, ideas in general (and, therefore, mathematical notions), besides constituting instruments of knowledge, have their characteristic existence. The locus or place of mathematical reality is, for White (1983), the cultural tradition, i.e., the continuum of behaviour expressed by symbols. Within the mathematical culture body, actions and reactions occur between the elements. “One concept reacts on others; ideas mix, merge, form new syntheses” (WHITE, 1983; p. 274).

The ecological metaphor of ideas is helpful for analysing the relationships between school mathematics and expert mathematics. These relationships are often subordinate, which originated the metaphors of didactic transposition, elementarisation, and transformation (SCHEINER et al., 2022) used to describe the processes of selection and elaboration of school mathematics. In the OSA, the ecology of meanings metaphor is proposed to describe these processes and the relationships between different types of mathematics (GODINO; BATANERO, 1998). Each mathematical object has distinct meanings, with various degrees of generality and levels of formalisation; consequently, educational agents select and sequence the appropriate meanings according to the context, students’ abilities, and motivations. The ecological metaphor well reflects the phenomena of competition, symbiosis, collaboration, and, in a sense, the trophic chains established between different types of mathematical knowledge (GODINO, 1994). Only the best adapted knowledge to the context survives or thrives.

The ecological metaphor of school knowledge assumes that there is no single mathematics but multiple and diverse mathematics, not only as a starting point (professional contexts) but also as a point of arrival (school contexts). The progressive growth of knowledge across the curriculum is better described as a phenomenon of mutation-driven by educational activities, from simpler to more complex forms, than as a phenomenon of transposition or transformation from more abstract to more elementary forms (SCHEINER et al., 2022). The ecology of meanings, understanding the meanings of concepts systemically and pragmatically (GODINO; BURGOS; GEA, 2021), more accurately reflects the correspondences between the different types of knowledge involved in educational settings. Interpreting the meanings of a mathematical object in terms of systems of practices facilitates the consideration of these systems, and consequently pragmatic meanings, as new objects that relate to others to form new structures.

4. An overview of the OSA philosophical postulates

The plurality of paradigms and theories that concur in mathematics education, and the need to clarify and articulate them, are a source of inspiration for the emergence of the OSA as a field of scientific and technological enquiry (GODINO, 2022). Aiming to overcome the boundaries between philosophical, psychological, and sociological disciplines, as far as they are interested in mathematics, learning, and dissemination, we developed the onto-semiotic configuration construct that incorporates transdisciplinary elements, as reasoned in section 4. An essential postulate in the OSA is the emergence of mathematical constructs (concepts, propositions, etc.) from the operative and discursive practices when solving problems (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). Mathematical constructs or ideas do not have an existence independently of people but are simultaneously creations and discoveries (CAÑÓN, 1993), thus assuming an anti-Platonist position. Mathematical axioms and postulates are inventions that take place in people's brains, and although the propositions derived from them are not *a priori* known and give the impression that they are discovered, this does not justify Platonism.

The philosophy of educational mathematics proposed by the OSA, implicitly embodied in the onto-semiotic configuration construct (Section 4), is summarised in the following postulates:

Ontological dimension.

- Naturalism: The OSA admits material existents and rules out the independent existence of ideas, be they empirical or formal abstractions. But it rejects physicalism since it denies that all objects are physical entities. Mathematical practices are people's actions and therefore are cerebral and bodily processes (manipulative and gestural). When these practices are shared within a community, they are institutional practices, which are dependent on the brain activity of their members, and the interpersonal interactions established between them.
- Systemism: The object of study in the OSA are the systems of practices, objects, and processes, and the contexts in which mathematical activity occurs, articulated in the onto-semiotic configuration construct.
- Emergentism: The abstract mathematical object comes from other previous entities (the operative and discursive practices) and is not reducible to them.
- Pluralism: Diversity of practices, objects, and processes required for the description and understanding of mathematical activity in its diverse varieties.
- Dynamism: Meanings change with time and personal and contextual circumstances.

Epistemological dimension

- Realism: Mathematical knowledge, both formal and applied, emerges from the people's operative and discursive practices when solving problems. A kind of virtual or fictional reality is granted to the objects that emerge from mathematical activity in interaction with perceptual objects and artefacts in the environment.
- Evolutionism: Personal and institutional meanings evolve and develop over time as subjects tackle successive, progressively more complex problems. Building new knowledge starts from existing knowledge, expanding and correcting the previously produced by individuals within historical communities.
- Social constructivism: Cognitive onto-semiotic configurations are creations of subjects, and socio-epistemic configurations result from interpersonal communication. Constructing of knowledge takes place by the subject, but in a community, whose norms promote or inhibit investigative activity.

- Rationalism and moderate empiricism: Both reason and experience are necessary for building mathematical knowledge; mathematical practices can be both operative (involving the use of empirical artefacts) and discursive (involving objects of reason).
- Conventionalism: Concepts-definition, propositions, and mathematical procedures are conventional rules, not arbitrary but motivated by the activity of description and explanation of objects and facts of the real world and virtual constructs. This conventional character explains the necessity and universality of mathematical constructs.
- Justificationism: It includes arguments as a primary object type. The arguments can be descriptive, explanatory, and justificatory, and use different types of reasoning, based on both reason and experience.

Semiotic dimension

- Realism: In realistic theories of meaning (KUTSCHERA, 1975), linguistic expressions have a relation of attribution to certain entities (objects, attributes, facts). Words and signs are made meaningful by the fact that an object, a concept, or a proposition as meaning are assigned to them. In this way, there are entities, not necessarily concrete, but always objectively given prior to the words, which are their meanings. The OSA postulates a type of semiotic function that is referential, designating certain entities under conventions. This is how the representational value of languages is accounted for.
- Pragmatism: In pragmatic (operational) theories, the meaning depends on the context in which words are used. Signs become meaningful by the fact of playing a certain function in a linguistic game, the fact being used in this game in a certain way, and for a certain purpose. The meanings of mathematical objects as systems of operative and discursive practices imply the acceptance of the postulates of pragmatic theories and the recognition of the instrumental value of languages.

The OSA assigns an essential role to the creation and manipulation of sign systems as means of representation of different types of objects and as instruments of mathematical activity. Hence, semiotic-cognitive theories consider representationist and instrumentalist postulates as compatible and complementary.

5. Final reflections

The OSA provides a transdisciplinary vision of mathematical activity by considering, in an articulated manner, different points of view from the disciplines interested in mathematical knowledge, and in its teaching and learning. The following disciplines should be considered: Epistemology: Mathematics as a particular mode of human activity and its product as a special type of knowledge; Ontology: Mathematics as a finished product, i.e., a system of objects and theories; Psychology: Mathematics as a particular type of mental (or cerebral) activity; Sociology: Mathematics as a type of social activity and its product as a special type of cultural artefact; History: Mathematics as a historical process of discovery, invention, and diffusion in a particular society; Instrumental point of view: Mathematics as a tool for science, technology, and humanities.

These different ways of looking at mathematics are mutually compatible, even complementary. It would be wrong to adopt one of them to the exclusion of all others since mathematics is, at the same time, all that these different views provide.

Several authors have developed constructs and theories to respond to the epistemological, ontological, and semiotic-cognitive problems described in this paper as specific to educational mathematics. The study of the concordances and complementarities with other theories of the model proposed by the OSA has been addressed in previous research works[4]. In particular, the comparison with the anthropological theory of didactics (CHEVALLARD, 1992), APOS theory (DUBINSKY; MCDONALD, 2001), objectification theory (RADFORD, 2014), semiotic representation registers (DUVAL, 1995), among others, has been addressed. These studies of articulation of theoretical frameworks will need to be extended in future research, particularly concordances with Sfard's (2008) framework of "commognition".

The foundations of educational mathematics described in section 4 are being used to develop tools to address issues related to the design, implementation, and evaluation of mathematics instructional processes. The constructs, institutional and personal meanings, understood in pragmatic terms, and the proposed types of meanings, provide criteria for curriculum and lesson design (GODINO et al., 2014). In order to address issues related to the

[4] Available in the "*Articulation of theoretical frameworks*" section in the web repository http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

analysis of implementing instructional processes, the didactic configuration tool has been developed (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006). Likewise, the theory of didactic suitability (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; GODINO, 2013) addresses questions regarding the assessment of instructional processes and teacher education. All these tools are supported by the onto-semiotic modelling of mathematical knowledge.

References

ARBOLEDAS, L. C.; CASTRILLÓN, G. Educación matemática, pedagogía y didáctica. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 5-27, 2007.

BETH, E. W.; PIAGET, J. **Mathematical epistemology and psychology.** New York: Springer, 1974.

BLUMER, H. **El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método.** Barcelona: Hora, 1982.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro**,** v. *32*, n. 60, p. 255 – 278, 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BUNGE, M**. Ontology I: The furniture of the world. Treatise on basic philosophy, Volume 3**. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1977.

BUNGE, M. **Epistemology and methodology III: Philosophy of science and technology. Treatise on basic philosophy. Volume 7**. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1985.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R. M. Matemática Educativa: Una visión de su evolución. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME),** Ciudad de México, v. 6, n. 1, p. 27-40, 2003. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560102

CAÑÓN, C. **La matemática: creación o descubrimiento.** Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 1993.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une aproche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématique**,Grenoble, v. 12, n. 1, p. 73–112, 1992. Disponível em: https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds**.) The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.** Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne, Switzerland: Peter Lang, 1995.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. A. APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton et al. (Eds.), **The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study** (pp. 273–280). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 2001.

ECHEVERRÍA, J**. Filosofía de la ciencia**. Madrid: Akal, 2007.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research** (2nd ed.). Cambridge, England: Cambridge University Press, 1987.

ERNEST, P. **Social constructivism as a philosophy of mathematics.** Albany: State University of New York Press, 1998.

FISCHER, W. L. Historical topics as indicators for the existence of fundamentals in educational mathematics. An intercultural comparison. In F. K.S. Leung. K.-D. Graf and F. J. Lopez-Real (Eds), **Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A Comparative Study of East Asia and the West.** (Chapter 1-4, pp. 95-110). New York: Springer, 2006. Disponível em: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/0-387-29723-5_6.pdf

FONT, V.; CONTRERAS, A. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 69, p. 33-52, 2008. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, p. 97–124, 2013. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 18/1, n. 52, p. 7-33, 1998. Disponível em: https://revue-rdm.com/1998/evolucion-de-la-didactica-de-las/

GODINO, J. D. Ecology of mathematical knowledge: an alternative vision of the popularization of mathematics. In A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, & R. Rentschler (Eds.), **First European Congress of Mathematics** (vol. 3, pp. 150–156). Basel: Birkhauser, 1994. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/ingles/documentos/Godino_ecological_metaphor-1994.pdf

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 11, p. 111-132, 2013.

GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas,** 2014. Disponível em: Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

GODINO, J. D. Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. **Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)**, Maracaibo, v. 2, p. 1-24, 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em : https://revue-rdm.com/1994/significado-institucional-y/

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In: A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Ed.), **Mathematics education as a research domain: A search for identity** (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P., 1998.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education,** Hamburgo, v. 39, n. (1-2), p. 127-135, 2007. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D.; BURGOS, M.; GEA, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, 2021. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques,** Grenoble, v. 26, n. 1, p. 39-88, 2006. Disponível em: https://revue-rdm.com/2006/analisis-de-procesos-de/

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; LURDUY, O. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 77, n. 2, p. 247-265, 2011. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9278-x

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 34, n. 2/3, p. 167-200, 2014. Disponível em: https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/

HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. B.; DREYFUS, T. Abstraction in context: Epistemic actions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston VA, v. 32, p. 195-222, 2001. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/749673

KUTSCHERA, F. von. **Philosophy of language.** Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Comp., 1975.

LAKATOS, I. **Proof and refutations. The logic of mathematical discovery.** Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

LINNEBO, Ø. Platonism in the philosophy of mathematics. In E. N. Zalta (Ed.), **The Stanford encyclopedia of philosophy,** 2009. Retrieved 02/01/2023 from: https://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

MARQUIS, J. P. Mathematical abstraction, conceptual variation and identity. In P. Schroeder-Heister, W. Hodges, G. Heinzmann, and P. E. Bour (eds.), **Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the Fourteenth International Congress** (Nancy), 1-24, 2014. Disponível em: https://philpapers.org/archive/MARMAC-14.pdf

MORIN, E. **El método. Las ideas. Su hábitat, su vida, sus costumbres, su organización.** Madrid: Cátedra, 1992.

PARSON, C. **Mathematical thought and its objects**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2008.

PEIRCE, C. S. **Collected Papers of Charles Sanders Peirce,** 8 vols. C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks (Eds.). Harvard University Press, 1931-58.

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, Pasto, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014.

SCHEINER, T.; GODINO, J. D.; MONTES, M. A.; PINO-FAN, L.; CLIMENT, N. On metaphors in thinking about preparing mathematics for teaching. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, n. 111, p. 253-270, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-022-10154-4

SFARD, A. Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), **Symbolizing and communicating in mathematics classrooms** (pp. 38–75). London: Lawrence Erlbaum, 2000.

SFARD, A. **Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.** Cambridge University Press, 2008.

SINACEUR, H. Facets and levels of mathematical abstraction. **Philosophia Scientiæ**, [s.l], v. 18, n. 1, p. 81-112, 2014. Disponível em: https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/914

STEINER, H. G. Theory of mathematics education (TME): an introduction. **For the Learning of Mathematics,** New Westminster, v. 5, n 2, p. 11-17, 1985.

TOULMIN, S**. Human understanding.** Oxford University Press, 1977.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 10, n. 2-3, p. 133-170, 1990. Disponível em: https://revue-rdm.com/2005/la-theorie-des-champs-conceptuels/

WHITE, L. A. The locus of mathematical reality: An anthropological footnote. **Philosophy of Science,** [s. l.], v. 14, n. 4, p. 289–303, 1983.

WITTGENSTEIN, L. **Philosophical investigations.** The MacMillan Company, 1953.

WITTGENSTEIN, L**. Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas.** Madrid: Alianza, 1976.

Autor
Juan D. Godino
Catedrático jubilado de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
Línea de investigación: Desarrollo y aplicación del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática.
Correo electrónico: jgodino@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

GODINO, J. D. Onto-semiotic Approach to the Philosophy of Educational Mathematics. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS,** junio de 2023 / 7 – 33 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p07-33.id1377

Análisis de lecciones de libros de texto basado en las herramientas del Enfoque Ontosemiótico: Una experiencia con maestros en formación

María Burgos
mariaburgos@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4598-7684
Universidad de Granada (UGR)
Granada, España.
María José Castillo
mariajosecastilloc.24@gmail.com
https://orcid.org/ 0000-0002-8046-8927
Universidad de Costa Rica (UCR)
San José Costa Rica.
Juan D. Godino
jgodino@ugr.es
https://orcid.org/ 0000-0001-8409-0258
Universidad de Granada (UGR)
Granada, España.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Una lección de un libro de texto muestra el proceso de instrucción planificado por el autor como medio para favorecer el aprendizaje de un contenido por parte de potenciales estudiantes. Por tanto, es esencial que el profesor que decide usar una determinada lección en sus clases analice y valore lo que ocurre en dicho proceso. Determinar la adecuación de una lección precisa de un primer análisis detallado de las situaciones de enseñanza, describiendo la secuencia de prácticas operativas y discursivas que propone el autor y caracterizando los objetos y procesos como elementos constitutivos del contenido matemático que debe ser aprendido. Este análisis permitirá atender a cómo se gestionan los conocimientos previos requeridos e identificar su papel en las posibles dificultades de aprendizaje. A continuación, la valoración de la idoneidad didáctica del proceso instruccional basado en el uso de la lección orienta al profesor en la toma de decisiones sobre la gestión del recurso. En este trabajo se describe, por medio de un estudio de caso, una experiencia formativa con maestros en formación destinada a desarrollar la competencia de análisis didáctico de lecciones de libros de texto. El diseño, implementación y evaluación de la experiencia, están basados en la aplicación de herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico, en particular las nociones de significado pragmático y la de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para el análisis de la actividad matemática, y la teoría de la idoneidad didáctica, en la valoración de la adecuación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: Análisis ontosemiótico. Idoneidad didáctica. Libros de texto. Formación de profesores. Proporcionalidad. Enfoque Ontosemiótico.

Análise das lições do livro didático com base nas ferramentas da Abordagem Ontossemiótica: uma experiência com professores em formação

Resumo

Uma lição em um livro didático mostra o processo de ensino e aprendizagem planejado pelo autor como um meio de apoiar a aprendizagem de um conteúdo por parte dos estudantes. Portanto, é essencial que o professor que decide usar uma determinada lição em suas aulas analise e avalie o que acontece nesse processo. A determinação da adequação de uma lição requer uma análise inicial detalhada das situações de ensino, descrevendo a seqüência de práticas operacionais e discursivas propostas pelo autor e caracterizando os objetos e processos como elementos constituintes do conteúdo matemático a ser aprendido. Esta análise permitirá prestar atenção à forma como o conhecimento prévio necessário é gerenciado e identificar seu papel em possíveis dificuldades de aprendizagem. Em seguida, a avaliação da adequação didática do processo instrucional previsto por meio da aula, orienta o professor na tomada de decisões sobre a gestão do recurso. Este trabalho descreve, por meio de um estudo de caso, uma experiência de formação de professores em formação inicial destinada a desenvolver a competência de análise didática de lições de livros didáticos. O planejamento, implementação e avaliação da experiência são baseadas na aplicação de ferramentas teórico-metodológicas da Abordagem Ontossemiótica, em particular, para a análise da atividade matemática, consideraram-se as noções de significado pragmático e configuração ontosemiótica de práticas, objetos e processos e, para a avaliaçao da adequação dos processos de ensino e aprendizagem, considerou-se a teoria da adequação didática.

Palavras chave: Análise ontossemiótica. Adequaçao didática. Livros didáticos. Formação de professores. Proporcionalidade. Abordagem Ontossemiótica.

Analysis of textbook lessons based on the Onto-semiotic Approach tools: An experience with prospective teachers

Abstract

A textbook lesson describes the instructional process planned by the author to support the learning of content by potential students. It is, therefore, essential that the teacher who decides to use a particular lesson in his/her classes analyses and assesses what happens in that process. Assessing the suitability of a lesson requires an initial detailed analysis of the teaching situations, describing the sequence of operative and discursive practices proposed by the author and characterising the objects and processes as constituent elements of the mathematical content to be learned. This analysis will allow paying attention to how the required prior knowledge is managed and identifying its role in possible learning difficulties. The assessment of the didactic suitability of the instructional process based on the use of the lesson guides the teacher in making decisions about the management of the resource. This paper describes, through a case study, a training experience with prospective teachers aimed at developing the competence in didactic analysis of textbook lessons. The design, implementation, and evaluation of the experience are based on the application of theoretical-methodological tools of the Onto-semiotic Approach, in particular, the notions of pragmatic meaning and onto-semiotic configuration of practices, objects, and processes for the analysis of mathematical activity, and the Theory of Didactical Suitability for the assessment of the teaching and learning process suitability.

Keywords: Onto-semiotic analysis. Didactical suitability. Textbooks. Teacher training. Proportionality. Onto-semiotic approach.

Introducción

Desde la investigación en Educación Matemática se propone la reflexión sobre la práctica docente propia y de otros, como una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de los procesos instruccionales (GIACOMONE et al., 2018; SECKEL; FONT, 2020). Esta competencia supone en particular analizar de manera crítica la adecuación y limitaciones de los recursos que emplea el profesor para el diseño y planificación de la enseñanza, en particular de los libros de texto (BRAGA; BELVER, 2016).

Para autores como Bel y Colomer (2018) la importancia del libro de texto escolar "no ha hecho más que aumentar en contextos como el europeo e iberoamericano, lo que a su vez ha llevado a una mayor preocupación por su estudio desde las esferas académicas" (p. 4). En efecto, a pesar de que tras la situación de pandemia provocada por el COVID-19, los recursos digitales hayan adquirido gran protagonismo en el ámbito educativo, la trascendencia de los libros de texto como un recurso que estructura contenidos y que orienta la planificación del estudio, sigue siendo ampliamente reconocida por docentes, estudiantes y familias, en diversos países, con independencia de la institución de procedencia y de sus diferentes compromisos ideológicos (ANELE, 2021).

El papel y la influencia que posee el libro de texto sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje motiva que desde la investigación educativa se le considere como objeto de estudio por sí mismo, y que se plantee el análisis de su calidad como un problema de investigación prioritario (SCHUBRING; FAN, 2018). Además, se espera que el profesor utilice de manera competente los libros de texto como guía para el diseño instruccional, lo que supone interpretar de manera crítica la información que en ellos se incluye, poniendo en juego sus conocimientos didáctico-matemáticos para tomar decisiones pedagógicas y realizar las adaptaciones pertinentes que solventen las limitaciones en función de las necesidades contextuales (AVILA, 2019; BRAGA; BELVER, 2016; YANG; LIU, 2019). Sin embargo, los profesores en formación y en ejercicio suelen presentar dificultades, tanto para realizar un análisis adecuado de los libros de texto como para adoptar un enfoque analítico, basándose en sus propios criterios intuitivos

(BEYER; DAVIS, 2012). En consecuencia, la formación de profesores debe tener en cuenta el desarrollo de competencias didácticas con relación al análisis y gestión de libros de texto, mediante el diseño e implementación de acciones formativas que incorporen instrumentos específicos (GODINO et al., 2017; SHAWER, 2017).

Ante esta demanda, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2019) se han elaborado herramientas teórico-metodológicas para apoyar la planificación y puesta en marcha de acciones formativas que promuevan la competencia de análisis e intervención didáctica. Esta competencia supone, entre otras, la capacidad del profesor para describir y explicar las prácticas matemáticas puestas en juego al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos, así como la competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (GODINO et al., 2017). En concreto, el profesor competente para el análisis e intervención didáctica debe utilizar los materiales curriculares, en particular las lecciones de libros de texto, de manera crítica, efectuando las adaptaciones necesarias para sus estudiantes.

En este artículo describimos, por medio de un estudio de caso, el diseño, implementación y resultados de una experiencia formativa para desarrollar en maestros en formación, su competencia para el análisis didáctico de una lección de libro de texto, la identificación de deficiencias en la misma y la toma de decisiones para su mejora y uso efectivo.

El contenido escogido para ejemplificar el método de análisis didáctico de lecciones de libros de texto es la proporcionalidad. El razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes centrales del razonamiento algebraico (BLANTON et al., 2015), lo que justifica la importancia del estudio de razones y proporciones en los currículos de Educación Primaria y Secundaria. Sin embargo, la proporcionalidad no suele recibir un tratamiento adecuado en los textos de matemáticas de ambas etapas, observándose un predominante aspecto algorítmico que dificulta el desarrollo de un adecuado razonamiento proporcional en los escolares (AHL, 2016; BURGOS et al., 2020). Además, tanto profesores en formación como en servicio tienen dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2012; BUFORN; LLINARES; FERNÁNDEZ, 2018; WEILAND et al., 2021). En este sentido, autores como Remillard y Kim (2017) sugieren que es posible diagnosticar y corregir estas deficiencias por medio de la reflexión sobre los procesos instruccionales previstos en lecciones de libros de texto, generando aprendizaje significativo en los docentes, lo que justifica el interés de nuestra propuesta.

1. Marco teórico

Como hemos indicado, el problema que abordamos en esta investigación es el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa, aplicada a futuros profesores de educación primaria, para desarrollar en ellos la competencia de análisis didáctico de una lección de un libro de texto sobre proporcionalidad. El EOS aporta el sistema de herramientas teóricas requeridas para abordar esta problemática:

- Análisis de la actividad matemática: significado pragmático, configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (GODINO; BATANERO; FONT, 2019).
- Análisis y evaluación de procesos instruccionales: configuración didáctica, idoneidad didáctica. (GODINO; BATANERO; FONT, 2019; BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018).
- Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor (GODINO et al, 2017).

Seguidamente describimos de manera sintética estas herramientas, remitiendo a las fuentes mencionadas para profundizar en las mismas.

Análisis de la actividad matemática

En el EOS la noción de *práctica matemática*, entendida como toda acción que un determinado sujeto realiza para resolver un problema, comunicar y/o generalizar su solución, constituye el punto de partida para analizar la actividad matemática. Consecuentemente el *significado de un objeto matemático* hace referencia a los sistemas de prácticas operativas y discursivas, que realiza una persona (significado personal), o que son compartidas en el seno de una institución (significado institucional), para resolver una situación-problema (GODINO; BATANERO; FONT, 2019). En las prácticas matemáticas participan y emergen objetos matemáticos, de distinta naturaleza y función que se relacionan entre sí formando *configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos.* Así, los objetos matemáticos -problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos-, emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos procesos matemáticos de problematización, comunicación definición, enunciación, algoritmización y argumentación (GODINO; BATANERO; FONT, 2019).

Como parte del proceso de diseño instruccional, el profesor recurre a los textos matemáticos, a las orientaciones curriculares y en general, a lo que los expertos consideran que son las prácticas inherentes al objeto que se desea enseñar. De esta forma puede determinar el *significado institucional de referencia* del objeto matemático que ha de ser enseñado. Luego, el profesor selecciona y concreta el sistema de prácticas específicas que propondrá a sus alumnos para estudiar un contenido matemático en concreto considerando, entre otras cosas, el tiempo disponible, los conocimientos previos de los estudiantes y los medios de que dispone para la instrucción. De esta forma define el *significado institucional pretendido* sobre el objeto matemático. El aprendizaje supone la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, a través de su participación en las prácticas generadas en la clase.

Análisis y valoración de procesos instruccionales

Todo segmento de actividad de enseñanza y aprendizaje que se distribuye entre los momentos de inicio y fin de una tarea planificada o efectivamente implementada determina una *configuración didáctica* (FONT; PLANAS; GODINO, 2010). En una configuración didáctica se contemplan las acciones de estudiantes y profesor, así como los medios previstos o usados para abordar la resolución de una situación-problema o la introducción de un determinado contenido. La noción de configuración didáctica proporciona criterios para descomponer el proceso de instrucción planificado en la lección de un libro de texto en unidades de análisis.

Dada la gran diversidad y complejidad de las interacciones que se producen en cualquier proceso de instrucción, puede ser conveniente centrarse en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico. En el EOS se entiendo por *conflicto semiótico* cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Se diferencia entre *conflicto epistémico* (discordancia entre el significado institucional de referencia y el pretendido o implementado), *conflicto cognitivo* (disparidad que se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto) y *conflicto interaccional* (desajuste que surge entre las prácticas de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa) (FONT; PLANAS; GODINO, 2010).

La *idoneidad didáctica* de un proceso de enseñanza-aprendizaje se concibe como el grado en que éste (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; GODINO, 2013). Es por tanto un rasgo graduable de los procesos de instrucción que supone la articulación coherente de las idoneidades parciales sobre las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (GODINO, 2013).

Los *criterios de idoneidad didáctica* deben ser entendidos como "normas de corrección que establece cómo debería realizarse un proceso de enseñanza y aprendizaje" (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018, p. 264). La operatividad de dichos criterios precisa de la definición precisa de un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de consecución de cada una de estas normas (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; GODINO, 2013). Además, las facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica deben enriquecerse y particularizarse de acuerdo con el tema específico que se quiere enseñar (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018), así como a la especificidad del proceso de estudio. Por este motivo, en Castillo, Burgos y Godino (2022a) se revisa y adapta el sistema de componentes e indicadores de idoneidad didáctica de Godino (2013), para desarrollar una Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas). Posteriormente, en Castillo, Burgos y Godino (2022b) la GALT-Matemáticas se particulariza al tema de la proporcionalidad para generar una guía específica para lecciones de libros de texto en dicho contenido matemático, la GALT-proporcionalidad. Ambos instrumentos se componen de una serie de indicadores para cada una de las facetas y sus componentes, fundamentados en la revisión exhaustiva de los resultados de investigaciones, sobre lo que se considera óptimo o adecuado para el proceso de instrucción planificado, considerando la particularidad del contenido (de matemáticas en general, y de proporcionalidad, en particular).

Modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas

En el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas (GODINO et al., 2017) desarrollado en el marco del EOS, se asume que el profesor debe tener un conocimiento matemático común relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, así como un conocimiento ampliado que le permita articularlo con los niveles superiores. Además, sobre cada contenido matemático, el profesor precisa de un conocimiento especializado o didáctico-matemático, que en el modelo CCDM se sistematiza en seis subcategorías atendiendo a las facetas de los procesos de enseñanza y aprendizaje: a) el conocimiento especializado de la dimensión matemática, que le permitiría ante una situación matemática determinada, reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica); b) el conocimiento de los aspectos cognitivos de los estudiantes, que le permitiría comprender sus dificultades, errores, conflictos de aprendizaje (faceta cognitiva); c) el conocimiento de los aspectos afectivos, emociones y actitudes de los alumnos (faceta afectiva); d) el conocimiento de las interacciones que pueden surgir en el aula y de los recursos y medios para potenciar el aprendizaje de los alumnos (faceta instruccional); e) el conocimiento sobre el currículo y los factores contextuales y sociales, entre otros, que influyen en el aprendizaje (faceta ecológica) (GODINO et al., 2017).

En el EOS se articula de manera natural la idea de conocimiento y de competencia (GODINO et al., 2017): las prácticas matemáticas y didácticas son entendidas como acciones del sujeto orientadas hacia el fin de resolver un problema o realizar una tarea (no son meras conductas o comportamientos). Estas prácticas pueden ser de tipo discursivo-declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio-procedimental, mostrando capacidad o competencia, de manera que la realización eficiente de prácticas operatorias conlleva la puesta en acción de conocimientos declarativos.

La competencia de análisis ontosemiótico, permite al profesor anticipar conflictos de aprendizaje potenciales y evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes a partir del reconocimiento de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problemas (GODINO et al., 2017). Esto ha llevado a implementar la herramienta configuración ontosemiótica en la formación de profesores en contenidos matemáticos y contextos diversos (BURGOS et al., 2019; BURGOS; GODINO, 2020, 2021, 2022; GIACOMONE et al., 2018; GODINO et al., 2016). Por otro lado, el uso de la idoneidad didáctica posibilita al profesor hacer una reflexión sistemática sobre su propia práctica o la de otros, pero también analizar aspectos parciales de los procesos instruccionales por medio de recursos, como pueden ser los vídeos educativos (BELTRÁN-PELLICER; GIACOMONE; BURGOS, 2018) o los libros de texto (CASTILLO; BURGOS; GODINO, 2022a; 2022b; MORALES-GARCÍA; NAVARRO, 2021).

Dado que los criterios de idoneidad reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas, es natural que aparezcan de forma implícita como regularidades en el discurso de los profesores cuando aún no han recibido formación sobre el uso de dicho constructo como guía a su reflexión (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; HUMMES; FONT; BREDA, 2019). Sin embargo, los resultados de investigaciones previas muestran que los docentes necesitan herramientas y formación específica para dirigir su atención hacia los múltiples e imbricados factores que afectan a los procesos de instrucción (BURGOS; CASTILLO, 2022; SECKEL; FONT, 2020). Por este motivo, en los últimos años se ha venido desarrollando diversas acciones formativas que emplean la herramienta idoneidad didáctica para fomentar la competencia reflexiva de profesores en formación sobre los procesos de estudio matemático (GIACOMONE et al., 2018; GODINO et al., 2016; HUMMES; FONT; BREDA, 2019; MORALES-LÓPEZ; ARAYA-ROMÁN, 2020, entre otros). Algunos de estos trabajos han tratado de manera específica el contenido matemático de la proporcionalidad (BURGOS et al., 2018; BURGOS; BELTRÁN-PELLICER; GODINO, 2020; BURGOS; CASTILLO, 2021; CASTILLO; BURGOS; GODINO, 2021; CASTILLO; BURGOS, 2022; ESQUÉ; BREDA, 2021).

2. Metodología

Este trabajo sigue un enfoque de investigación interpretativa de tipo exploratorio. Se emplea el análisis de contenido (COHEN; MANION; MORRISON, 2011) para examinar los protocolos de respuesta de los estudiantes para maestro de primaria que intervinieron en la experiencia formativa. Se emplean, según el momento de la investigación, las categorías de objetos matemáticos o las facetas, componentes y subcomponentes de la idoneidad didáctica para clasificar y describir las respuestas de los participantes.

Contexto

La experiencia formativa se desarrolla con 61 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria, en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Primaria. En dicha asignatura, los estudiantes trabajan de manera colaborativa en grupos de trabajo estables (14 grupos de trabajo entre 3 y 5 estudiantes), desde el inicio del curso en el diseño y evaluación de unidades didácticas, con dos sesiones de clase a la semana: una teórica, de dos horas de duración, y una práctica, de una hora. La asignatura contempla para el diseño y secuenciación de tareas matemáticas, el uso y análisis del libro de texto como recurso en el aula de matemáticas, y la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para describir la acción formativa y sus resultados, se analizan las producciones de un grupo de trabajo, formado por cuatro estudiantes (EPM1, EPM2, EPM3, EPM4), con nivel de desempeño normal dentro del curso y que entregó todas las tareas propuestas, descritas a continuación.

Diseño e implementación de la intervención

La intervención está organizada en diferentes fases que incluyen distintos recursos didácticos y momentos de trabajo individual, grupal y de evaluación final.

Fase 1. Exploración inicial.

De manera previa a la sesión formativa sobre análisis de libros de texto, se propone a los futuros maestros como actividad voluntaria, que lean de manera detenida la lección "Proporcionalidad y Porcentajes" de González et al. (2015) y que respondan a las siguientes cuestiones a través de la Plataforma Moodle usada para el desarrollo del curso:

- *¿Qué te ha parecido la lección que acabas de analizar? ¿Qué características positivas destacarías? ¿Qué características negativas observas?*
- *¿Has identificado algún error o algún elemento que pueda suponer una limitación en el aprendizaje por parte de los alumnos?*

Con esta primera tarea de diagnóstico se persigue detectar las creencias y concepciones previas de los futuros maestros sobre las características que consideran adecuadas en una lección de libro de texto, e involucrarlos en una primera reflexión sobre la valoración de dichos aspectos en un tema concreto dedicado a la proporcionalidad.

Fase 2. Introducción al análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas

La formación sobre el análisis didáctico de lecciones de libros de texto se desarrolla con los futuros maestros durante dos sesiones de clase, de dos horas de duración cada una, siguiendo la planificación habitual de la asignatura. En la primera sesión se presenta el análisis de la lección del libro de texto como medio para identificar elementos que pueden ser potencialmente conflictivos, desde el punto de vista de: (a) los conocimientos matemáticos que se espera que adquieran los alumnos, (b) los conocimientos previos que requieren para comprender el desarrollo de la lección, (c) el proceso instruccional que propone. A continuación, se describe una metodología de análisis de lecciones de libros de texto basada en las herramientas del EOS. Estas son las pautas dadas a los futuros maestros:

1. *Descripción general* de la lección y división en configuraciones didácticas (unidades elementales de análisis).
2. *Análisis ontosemiótico*. Para cada una de las configuraciones didácticas en que se divide la lección, se trata de:
    a) detallar las prácticas matemáticas que se proponen;
    b) identificar los objetos matemáticos que intervienen en las mismas;
    c) describir los principales procesos matemáticos.
3. *Valoración de la idoneidad didáctica* de la lección en las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e interaccional-mediacional.

El análisis ontosemiótico de una lección se ejemplifica usando la lección de porcentajes y proporcionalidad para sexto curso de primaria del libro de Ferrero et al. (2015). Después de esta primera sesión formativa, se dedica la correspondiente sesión de prácticas de la asignatura (trabajo en equipos) a la realización de la primera parte del análisis (descripción general y análisis ontosemiótico de las distintas configuraciones) de la lección de proporcionalidad para sexto curso de primaria de González et al. (2015).

Fase 3. La idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión

En la siguiente sesión formativa se presenta la idoneidad didáctica como criterio global para valorar un proceso de instrucción planificado o implementado (o una parte de este). La reflexión sobre la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre un tema específico requiere tener en cuenta tanto el análisis de prácticas, objetos y procesos como los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho contenido (en nuestro caso, la proporcionalidad). Finalmente se presenta la GALT-Matemáticas como herramienta que orienta el análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas, destacando la necesidad de adaptarla al contenido específico de la lección incorporando los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho tema (en nuestro caso, la proporcionalidad).

Después de la sesión formativa, los futuros maestros trabajan de manera individual sobre el análisis de la idoneidad didáctica de la lección de proporcionalidad de González et al. (2015), siguiendo las instrucciones dadas en la Figura 1. Esta es la misma lección que emplearon en la sesión de trabajo colaborativo para realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos.

Se les facilita las tablas que componen la GALT-proporcionalidad (adaptada de CASTILLO; BURGOS; GODINO, 2022b) con los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad en las facetas: epistémica-ecológica (contenido y adaptación de la lección a las directrices curriculares), cognitiva-afectiva (aprendizaje, actitudes e intereses), interaccional-mediacional (recursos materiales, interacciones que se promueven en las tareas y su secuenciación, etc.). Los indicadores miden el grado de máxima idoneidad en cada componente, de forma que la lección será más idónea respecto de un componente en la medida que se cumpla los indicadores correspondientes en un mayor número de configuraciones. Además, para organizar la valoración de la lección, se añadieron en las tablas de la GALT-proporcionalidad dos columnas a la derecha de los indicadores. En la primera columna los futuros maestros deben incluir una valoración numérica con relación al grado de cumplimiento del indicador: 0, 1, 2 y en la segunda las justificaciones sobre las puntuaciones otorgadas.

Figura 1 – Consignas para evaluación de la idoneidad didáctica y previsión de cambios.

1. Completa las tablas. En las tablas del Anexo II se han incluido dos columnas a la derecha de los indicadores. En la primera columna debes incluir una valoración numérica con relación al grado de cumplimiento del indicador: 0 (no se cumple el indicador), 1 (se cumple parcialmente, o a veces), 2 (se cumple totalmente). La segunda columna está pensada para que incluyas las justificaciones sobre la valoración numérica del indicador. Esta información te ayudará después a decidir la idoneidad de la lección en cada una de las facetas y componentes.
2. En las tablas de idoneidad epistémica-ecológica, cognitivo-afectiva e interaccional-mediacional aparece al final un espacio dedicado a incluir los conflictos detectados en cada una de las componentes como carencias o bajo cumplimiento de algunos de sus indicadores. Debéis completar también dicho espacio.
   Recuerda que en el análisis didáctico de esta lección que realizaste con tu equipo de trabajo, se pedía incluir conflictos epistémicos (con el contenido matemático), cognitivos (con el aprendizaje) e instruccionales (con la secuenciación, calidad del recurso). ¿Has encontrado después de utilizar estas tablas nuevos conflictos? ¿Te replanteas los que habíais indicado?
3. Teniendo en cuenta lo que has observado por medio de la valoración en cada componente, emite un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección (baja, media o alta) en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.
4. Recuerda que en la tarea voluntaria de Prado asociado al Tema 3 ("Lección de libro de texto") se preguntaba qué te había parecido la lección, así como sus características positivas y negativas. ¿Ha cambiado tu opinión al respecto después de analizar dicha lección por medio de la guía (tablas) que acabas de utilizar?
5. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso de la lección de libro analizada para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? ¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que has identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto? Justifica tu respuesta. [Se recomienda usar las frases: Usaría la parte… del libro de texto, porque…; Cambiaría la parte… debido a que…]
6. En base a los conflictos detectados, precisa de forma concreta y justificada cómo solucionarías al menos cuatro de estos. Por ejemplo; si existe una definición incorrecta, plantea una que lo sea según tu criterio, o bien, si hallas una tarea que no es apropiada, indica cómo la usarías, o que cambios le harías o por cual la reemplazarías. [Para dar solución al conflicto.… propongo cambiar esta parte, actividad, secuencia etc. de la siguiente manera… debido a que así se solucionaría…]

Fuente: Elaboración propia

A continuación, teniendo en cuenta lo observado por medio de la valoración de los indicadores, los futuros maestros deben emitir un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección (baja, media o alta) en cada una de las facetas. Finalmente, deben describir los cambios que consideran necesarios en el proceso instruccional previsto por medio de la lección para resolver los conflictos identificados y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto. Además, para ayudarles a concretizar su propuesta de gestión, se les pide que, en base a los conflictos detectados, precisen de forma concreta y justificada cómo solucionarían al menos cuatro de estos.

3. Resultados

Exploración previa

El análisis de las reflexiones de los maestros en formación con relación a los aspectos positivos y negativos encontrados en la lección de libro de texto de matemáticas permite identificar rasgos que se pueden asociar a indicadores de las distintas componentes y facetas de idoneidad didáctica incluidos en la GALT-proporcionalidad. Los estudiantes para maestro hicieron referencias fundamentalmente a la faceta cognitivo-afectiva y en menor medida a la epistémico-ecológica o interaccional-mediacional, sin que hubiera discrepancias en cuanto a la valoración (ningún aspecto fue valorado de manera positiva por unos y negativa por otros). Las características valoradas de manera positiva en la lección son las siguientes:

- En la dimensión cognitivo-afectiva: a) Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo, b) se advierte de posibles errores, c) las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos; existen elementos motivadores.
- En la dimensión interaccional-mediacional, se considera que el autor hace una presentación adecuada del tema (bien organizada).

Se valora de manera negativa rasgos associados a los siguientes indicadores:

- En la dimensión epistémico-ecológica, se observan carencias en cuanto a la presentación clara y correcta de los conceptos fundamentales de la proporcionalidad y los porcentajes para el nivel educativo correspondiente.
- Se consideran carencias en la dimensión cognitivo-afectiva, relativa a los siguientes indicadores: a) conocimientos previos necesarios; b) nivel de dificultad de los contenidos

pretendidos; c) situaciones con diferentes niveles de dificultad; d) promueve que el estudiante valore la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.

- Desde el punto de vista interaccional-mediacional, los estudiantes para maestro encuentran limitaciones en cuanto al a) uso de diversos recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos, b) uso de modelos concretos y visualizaciones para introducir conceptos y propiedades.

Por ejemplo, en la Figura 2 se observa la descripción de EPM1, donde se mencionan gran parte de estos aspectos.

Figura 2- Aspectos positivos y negativos en la valoración inicial de la lección por EPM1.

En general, la lección del libro me parece adecuada. En lo que respecta a aspectos positivos, me parece llamativa la introducción del libro, donde se introduce una historia de misterio para enlazarlo con un contenido matemático. El resto de la lección contiene las definiciones y ejemplos de todos los contenidos, en alguno de ellos como los porcentajes, vienen explicados paso a paso, siguiendo un orden claro en los pasos a seguir para calcularlos.
En lo que se refiere a los aspectos negativos creo que hay poca diversidad de ejemplos, y ejercicios que no son cercanos a la realidad del alumno y que se resuelven de forma mecánica, sin poner en práctica la resolución de problemas de forma significativa. Además, creo que muchos de estos contenidos serían más asequibles si fueran acompañados de dibujos que representen los contenidos que se dan. Esto puede resultar más llamativo para ellos y más comprensible.

Fuente: Elaboración propia.

En relación con la identificación de errores en la lección, coinciden en que la explicación dada respecto a las escalas no es adecuada. Además, EPM4 va un poco más allá en la identificación de estos, indicando también posibles conflictos en la definición de magnitudes proporcionales y en la presentación de los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres (Figura 3).

Figura 3- Identificación inicial de errores en la lección por EPM4.

Magnitudes proporcionales: Creo que el concepto que dan puede confundir al alumnado, ya que en algunas ocasiones ponen algunos ejemplos que no serían los correctos.

Reducción a la unidad. Regla de tres: Considero que estos dos conceptos deberían trabajarse con más profundidad, y con una temporalidad superior entre ambos ya que puede confundir a muchos alumnos porque son conceptos bastantes parecidos.

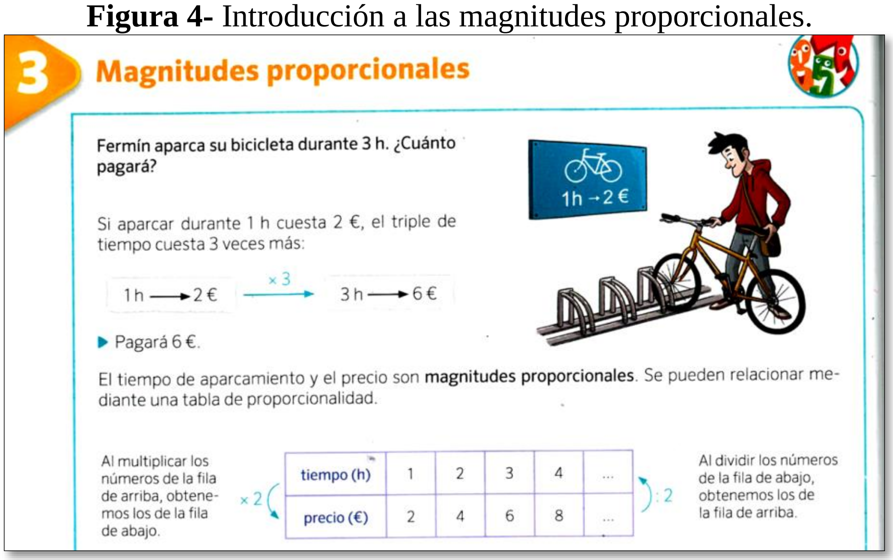
La escala: planos y mapas. Considero que en esta unidad concretamente está bien trabajado, pero deberían de hacer más énfasis en las unidades de medida con las que están trabajando, ya que pueden confundir si son cm, dm, m... Y si esto lo hacen mal todo el trabajo realizado estaría mal o en algunas ocasiones podrían llegar a pensar y visualizar distancias equivocadas, orientarse mal.

Fuente: Elaboración propia

Análisis ontosemiótico de la lección

Los estudiantes para maestro realizaron de manera colaborativa el análisis ontosemiótico de las distintas configuraciones de la lección de proporcionalidad de González et al. (2015). En general hicieron una buena descripción de las configuraciones, identificando de manera pertinente las prácticas en cada una de ellas. Respecto a la identificación de objetos, tuvieron éxito al reconocer los conceptos: a) porcentaje, fracción decimal, número decimal, por ciento y descuento, en la configuración dedicada a los porcentajes; b) magnitud y proporcionalidad, en la configuración destinada a las magnitudes proporcionales (Figura 4), y c) escala, magnitud, medida, unidad de medida y distancia en la configuración dedicada a la escala. También los lenguajes: natural, numérico, simbólico en los porcentajes o al indicar la cantidad desconocida como ¿? (Figura 5) diagramático y tabular (Figuras 4 y 5) y procedimientos (de tipo aritmético, cálculo de porcentajes o aplicación de algoritmos). Sin embargo, la reducción a la unidad y la regla de tres en la configuración asociada (Figura 5), aparece primero como conceptos y después como procedimientos ("aplicación de la técnica de reducción a la unidad y aplicación de la regla de tres"), algo que se ha observado también en investigaciones previas (BURGOS; GODINO, 2021; 2022). Como proposiciones, sólo identifican la relación de proporcionalidad, y "1cm en el plano equivale a 100 cm en la realidad" en la configuración de escala.

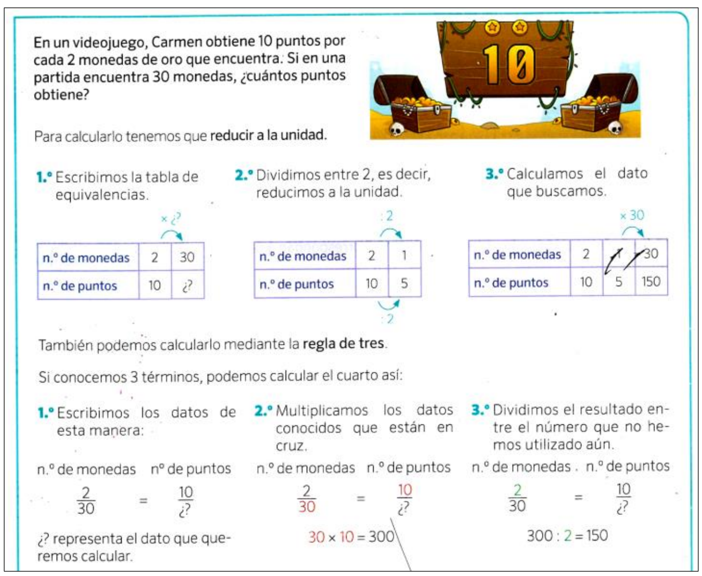
Figura 4- Introducción a las magnitudes proporcionales.



Fuente: Tomado de González et al. (2015, p.116).

Además, debían identificar los procesos en las diversas configuraciones. En este caso reconocen los procesos de representación/conversión entre lenguajes en las diferentes configuraciones (sin distinguir bien el uno del otro), el de algoritmización, cuando se "fijan los pasos a seguir" para el cálculo de aumentos o disminuciones porcentuales, en la descripción de los algoritmos de reducción a la unidad o regla de tres, o en cómo aplicar la escala. Asociado a este, identifican el de ejercitación, cuando "mecanizan" el cálculo de porcentajes, aplican la regla de tres y reducción a la unidad o "las reglas generales de la escala" para realizar los ejercicios. Se considera el proceso de conceptualización, en la configuración de magnitudes proporcionales, indicando que "el objetivo de la configuración es presentar una definición de magnitudes directamente proporcionales, generalizando el criterio usando en el ejemplo para cualquier tipo de magnitudes", así como en el de escala, en la que se define la escala 1:50000. Después indican que se da el proceso de particularización, pues "no se explican los conceptos como tal, solo se propone un ejemplo", reconociendo que las definiciones aportadas no son generales sino particulares para casos concretos.

Figura 5-Procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres



En un videojuego, Carmen obtiene 10 puntos por cada 2 monedas de oro que encuentra. Si en una partida encuentra 30 monedas, ¿cuántos puntos obtiene?

Para calcularlo tenemos que **reducir a la unidad.**

1.° Escribimos la tabla de equivalencias.

× ¿?

n.° de monedas	2	30
n.° de puntos	10	¿?

2.° Dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad.

: 2

n.° de monedas	2	1
n.° de puntos	10	5

: 2

3.° Calculamos el dato que buscamos.

× 30

n.° de monedas	2	1	30
n.° de puntos	10	5	150

También podemos calcularlo mediante la **regla de tres**.

Si conocemos 3 términos, podemos calcular el cuarto así:

1.° Escribimos los datos de esta manera:

n.° de monedas n° de puntos

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{¿?}$$

¿? representa el dato que queremos calcular.

2.° Multiplicamos los datos conocidos que están en cruz.

n.° de monedas n.° de puntos

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{¿?}$$

$30 \times 10 = 300$

3.° Dividimos el resultado entre el número que no hemos utilizado aún.

n.° de monedas n.° de puntos

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{¿?}$$

$300 : 2 = 150$

Fuente: Tomado de González et al. (2015, p.118)

En la lección no se encuentran argumentos explícitos que el autor emplee para justificar proposiciones o explicar procedimientos (de hecho, esta es una de las carencias de la unidad bajo análisis). Los estudiantes para maestro mencionan el proceso que debería hacer el alumno, por ejemplo "[los alumnos] deben reflexionar sobre los resultados obtenidos en todos los ejercicios y comprobar su respuesta".

El análisis de prácticas, objetos y procesos es un primer paso para reconocer los posibles conflictos semióticos en la lección. La mayoría de los que indicaron los estudiantes (en cada una de las configuraciones) son acertados. Prestaron especial atención a los enunciados de los problemas, revisando aquellos que podían confundir a los alumnos, por la forma en que se presenta la información (verbal o gráfica), redundante, confusa o incompleta (Figura 6), o aquellos que se alejan de un contexto de la vida real o que pueden incluir conceptos (como el de IVA) desconocidos para los alumnos. También consideraron conflictiva la presencia de "saltos" entre la complejidad de los ejemplos usados por el autor para introducir conceptos y procedimientos y la dificultad de los problemas propuestos. Los estudiantes consideraron que podía llegar a confundir a los alumnos la presentación tabular empleada al explicar las magnitudes proporcionales e introducir el procedimiento de reducción a la unidad, indicando "la organización tabular puede que la asocien directamente a magnitudes proporcionales y dar lugar a un posible conflicto cognitivo".

Figura 6-Conflicto identificado por los estudiantes en el análisis.

2 Ayer, el 70 % de los telespectadores eligieron cine. Si vieron la televisión 10.500.000 personas, ¿cuántas no vieron cine?	**Conflictos:** - **Epistémico:** En la actividad número 2 no queda claro si el porcentaje de telespectadores que no eligen cine eligen la televisión. Condición imprescindible para poder resolver por "complemento a 100".

Fuente: Elaboración propia. Problema tomado por los estudiantes de González et al. (2015, p.122).

Valoración de la idoneidad didáctica mediante la GALT-proporcionalidad

Como resultado del análisis previo de la idoneidad didáctica de la lección realizado por el equipo investigador aplicando la GALT-proporcionalidad, la idoneidad didáctica fue valorada como baja en cada una de las dimensiones: epistémico-ecológica (17 de 31 indicadores valorados con 0), cognitivo-afectiva (6 de 12 indicadores valorados con 0) e interaccional-mediacional (6 de 9 indicadores valorados con 0). Los estudiantes para maestro, que ahora trabajaron de manera individual, coincidieron con la valoración experta en las facetas cognitivo-afectiva e interaccional-mediacional. Sin embargo, valoraron como media la idoneidad en el aspecto epistémico-ecológico. Esto se debe a que algunos de los indicadores que el equipo investigador valoró con 0 puntos en esta faceta, fue valorado por los estudiantes con 2 puntos, es decir, consideraron que se satisfacían plenamente en la lección. Estos fueron:

- Se usan representaciones adecuadas que permiten distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes.
- Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.

- Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.
- Se hace explicita la relación con las magnitudes (los valores numéricos que intervienen en situaciones de proporcionalidad son medidas de cantidades de magnitudes)

Los estudiantes se limitan a decir que si se cumple el indicador, aunque en algún caso muestran un conocimiento didáctico-matemático sesgado, cuando por ejemplo consideran que el mero uso de las tablas permite distinguir las relaciones dentro y entre magnitudes, lo que nos lleva a pensar que no conocen la diferencia entre ambas, o que se hace explícita la relación con las magnitudes porque "los números de las situaciones proporcionales aparecen junto a la magnitud que le corresponde" (EPM3). En todo caso, la valoración que hacen de la idoneidad didáctica es baja en los resultados de la aplicación de la GALT-proporcionalidad, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7-Valoración de la idoneidad de EPM2.

- ✓ ***Epistémica-ecológica -media*** ya que tengo 2, 1 y algunos 0. *Le he dado esta puntuación puesto que en la parte que se refiere a las situaciones problemas, a mi parecer, muchos de ellos no están bien contextualizados, muchos de los conceptos no están bien argumentados ni justificados. Po otro lado, las proposiciones y procedimientos no vienen en varias ocasiones justificados, y se establece poca relación entre los elementos.*
- ✓ ***Cognitivo-afectiva -baja*** ya que tengo más 0 algunos 1 y un solo 2. *Aunque los contenidos son alcanzables, no hay actividades de refuerzo y ampliación, tan solo encontramos la página web con actividades complementarios, no se promueve el acceso, el logro de los estudiantes y apoyo de todos los estudiantes mediante el uso de las distintas estrategias, los instrumentos de evaluación y autoevaluación son inexistentes, etc.*
- ✓ ***Instruccional media – baja*** ya que tengo un solo 2 algunos ,1 y más 0. *Destacamos la falta de recursos que capen la atención de los estudiantes, la falta de recursos manipulativos, audiovisuales e informativos, así como, la falta de tareas que favorezcan el diálogo, la comunicación y el debate en las que se utilicen argumentos matemáticos.*

Fuente: Elaboración propia de la investigación.

Al preguntar a los participantes si habían cambiado su valoración inicial, cuando consideran que esta fue inicialmente negativa (tres de ellos), afirman que la mantienen pero que han podido hacer un análisis más crítico o apreciar nuevos detalles más allá del lenguaje o lo atractivo del material. Además, reconocen que la GALT-proporcionalidad les proporciona elementos para hacer un discurso más adecuado:

> Con el análisis que he hecho desde el punto de vista epistémico, cognitivo e instruccional lo único que me ha permitido es ver las cosas más claras y entender realmente porqué no me gustaban las tareas y buscarle una explicación utilizando un lenguaje matemático, pero no cambia mi forma de ver la tarea. (EPM3).

En el caso de EPM4, que inicialmente valoró de manera positiva la lección afirma:

> Además, en la tarea voluntaria (mi tarea) indiqué que consideraba que era una lección completa, y una vez terminado este análisis considero que es una lección incompleta y con muchas carencias. En conclusión, puedo decir que con la ayuda de los indicadores de esta tabla he podido analizar una lección de un libro de texto desde varios puntos de vista distintos y esto ha hecho que pueda tener una visión general de las cosas que hacen falta analizar.

A pesar de que la valoración en los indicadores de idoneidad epistémica fue la más deficiente, los cuatro estudiantes proponen soluciones a conflictos asociados a estos. Fundamentalmente, estos tienen que ver con: a) no se presentan de manera clara y correcta los conceptos fundamentales de la proporcionalidad y los porcentajes, b) no se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (estrategias aritméticas, reducción a la unidad, regla de tres/ecuación proporcional). En el primer caso, los participantes proponen nuevas definiciones para los porcentajes (tres de los cuatro estudiantes) o para la relación de proporcionalidad, si bien no son pertinentes. Por ejemplo, como se observa en la figura 8, EPM1 confunde la noción de porcentaje con la de fracción decimal y no ofrece una definición clara.

Figura 8-Propuesta de definición de porcentaje dada por EPM1.

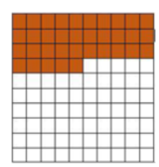
Conflicto 1.

➢ En la definición de porcentaje ‘‘ Una fracción con denominador 100 expresa una parte de un total dividido en 100 partes’’ da lugar a confusión, puesto que no deja claro si esa definición es sinónimo de fracción o no: Como solución a este conflicto propondría otra definición que fuera más clara, como por ejemplo ‘*’Una fracción representa la parte dividida de un todo, entre los tipos de fracciones podemos encontrar los porcentajes, que son aquellas fracciones que tienen como denominador 100. Cuando decimos el 30 % de una cantidad es lo mismo que decir 30/100.*’’ Esta definición la acompañaría con un ejemplo y una representación ‘*’De los árboles de un bosque, 35 de cada 100 son abetos, por tanto, 35/100 son abetos. Es lo mismo que decir que el 35 % del bosque son abetos’’*

Fracción: 35/100

Porcentaje 35%.

Representación gráfica: Los cuadrados marrones representan los abetos, el resto el total del bosque.



Fuente: Elaboración propia de la investigación.

EPM4, propone resolver el conflicto generado con la (no) definición de la relación de proporcionalidad sugiriendo la siguiente:

> Para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que, si duplicas una, es necesario duplicar la otra, si lo triplicas, lo mismo. Es decir, que si aumentas (o disminuyes) la cantidad de una, la otra tiene que aumentar (o disminuir) también proporcionalmente.

Esta definición, únicamente emplea la relación multiplicativa escalar (si se duplica una, se duplica la otra) y se basa en la propiedad en acto, “más en A…, más en B”), lo que muestra nuevamente un conocimiento inadecuado de la proporcionalidad.

Desde el punto de vista cognitivo, aunque los estudiantes para maestro habían indicado falta de atención sobre los conocimientos previos necesarios (fracciones, equivalencia de fracciones, medida de magnitudes), que los contenidos pretendidos no siempre se pueden alcanzar, o que no se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad, no llegaron a proponer solución a ninguno de estos conflictos. En el aspecto interaccional, se propone que se modifique la secuenciación de contenidos, sugiriendo que aparezcan las magnitudes proporcionales antes que los porcentajes (EPM4), o bien proponen diversas revisiones de los enunciados a los problemas que consideran confusos o ambiguos (EPM1, EPM2, EPM3).

4. Conclusiones

Muchos docentes identifican los libros de textos como el saber institucional que se debe enseñar y aprender, por lo que recurren a estos como material prioritario para planificar los procesos de instrucción (SALCEDO et al., 2018). Además, la forma en que se presenta la información en un libro de texto influye en el desempeño de los estudiantes, suponiendo una oportunidad o un obstáculo para su aprendizaje, de manera que el profesor debe discernir los detalles importantes en la propuesta instruccional. Por este motivo, es preciso garantizar que los profesores dispongan de criterios para llevar a cabo el análisis crítico del contenido, la identificación de fortalezas y debilidades, y la toma de decisiones sobre el modo de uso de dicho material. Además, reflexionar sobre la idoneidad del proceso de instrucción planificado en una lección de libro de texto puede ayudar a los maestros a tomar conciencia sobre sus conocimientos matemáticos y didácticos del razonamiento proporcional y desarrollar aquellos aspectos en los que encuentran mayores dificultades (WEILAND et al., 2021).

Valorar la calidad de los libros supone un primer análisis profundo que contemple la secuencia de prácticas operativas y discursivas que propone el autor para el desarrollo del contenido matemático y cómo se gestionan los conocimientos previos requeridos. Se trata de identificar elementos potencialmente conflictivos que requieran en la implementación por parte del profesor, una modificación de la trayectoria didáctica planificada en la lección del libro de texto. Además, la aplicación de la GALT-proporcionalidad (CASTILLO; BURGOS, GODINO, 2022b) para valorar el grado de idoneidad en cada uno de los componentes por medio de indicadores que actúa a modo de rúbrica, permite fijar la atención en aspectos fundamentales que requieren de modificación o adaptación en la gestión de dicho recurso.

Las valoraciones iniciales de la lección de los estudiantes, si bien emplean implícitamente criterios de idoneidad didáctica, son poco detalladas y se limitan a pocos aspectos que consideran esenciales, alejados normalmente del aspecto epistémico. En cambio, en las valoraciones finales se observan juicios críticos que contemplan un mayor número de componentes de las distintas facetas que aparecen interconectadas en los procesos instruccionales, recurriendo de manera explícita a los indicadores de idoneidad didáctica, valorados mayoritariamente de forma correcta en las dimensiones cognitiva-afectiva e instruccional. Por otro lado, los participantes mostraron una competencia adecuada en la distinción de prácticas, objetos y procesos, que permitió la identificación de los primeros conflictos vinculados a las prácticas. Estos se completaron con la mirada a través de la GALT-Proporcionalidad. Sin embargo, las carencias en el conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad, les llevó a generar definiciones inadecuadas como sugerencias de mejora y a que se centraran más en reformulaciones o adaptaciones de los problemas propuestos en el mismo, donde se sentían más seguros de elaborar propuestas. Como sugieren Remillard y Kim (2017) este tipo de acción formativa es especialmente relevante para los maestros de primaria, que no disponen de la suficiente preparación en matemáticas, sintiéndose más inclinados a confiar en los recursos curriculares.

Agradecimientos

Trabajo elaborado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España), como parte de la tesis doctoral de María José Castillo.

Referencias

AHL, L. Research findings’ impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks. **REDIMAT**, Barcelona, v. 5, n. 2, p. 180-204, 2016. DOI: https://doi.org/10.4471/redimat.2016.1987

ANELE. **El libro educativo en España – Curso 2020-2021**. 2021. Recuperado de https://anele.org/wpcontent/uploads/2020/09/200911TXT-ANELE-La-edicion-educativa-20-21.pdf.

AVILA, A. Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 31, n. 2, p. 31-59, 2019. DOI: https://doi.org/10.24844/EM3102.02

BEL, J.; COLOMER, J. Teoría y metodología de investigación sobre libros de texto: análisis didáctico de las actividades, las imágenes y los recursos digitales en la enseñanza de las

Ciencias Sociales. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, v. 23, n. 353, e230082, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/S1413-24782018230082

BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; BURGOS, M. Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. **Cultura y Educación**, Barcelona, v. 30, n.4, p. 633–662, 2018. DOI: https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. S. **Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education.** Rotterdam: Sense Publisher, 2012.

BEYER, C. J.; DAVIS, E. A. Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge. **Science Education**, [s.l], v. 96, n.1, p.130-157, 2012. DOI: https://doi.org/10.1002/sce.20466

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; GARDINER, A.M.; ISLER, I.; KIM, J. S. The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 46, p. 39-87, 2015. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

BRAGA, G.; BELVER, J. El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. **Revista Complutense de Educación**, Madrid, v. 27, n.1, p. 199-218, 2016. DOI: https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BUFORN, A.; LLINARES, S.; FERNÁNDEZ, C. Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. **Revista Mexicana de Investigación Educativa**, México, v. 23, p. 229-251, 2018.

BURGOS, M.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. D. Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 44, p. 1-22, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

BURGOS, M.; BELTRÁN-PELLICER; GODINO, J. D. Desarrollo de la competencia de análisis de idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas en futuros maestros de educación primaria. **Revista Española de Pedagogía**, Madrid, v. 78, n. 275, p. 27-45, 2020. DOI: https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07

BURGOS, M.; CASTILLO, M. J. Criterios de idoneidad emitidos por futuros maestros de primaria en la valoración de vídeos educativos de matemáticas. **Uniciencia**, Heredia, v.35, n.2, p. 291-307, 2021. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.35-2.19

BURGOS, M.; CASTILLO, M. J. Identificación de conflictos semióticos en una lección de proporcionalidad por maestros en formación. **Revemop**, Ouro Preto, v.4, e202204, 2022. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202204

BURGOS, M.; CASTILLO, M. J.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. D. Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema**, Rio Claro, v.34, n. 66, p. 40-69, 2020. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03.

BURGOS, M.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. D.; NETO, T. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), **Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional** (pp. 241-261). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca, 2019.

BURGOS, M.; GODINO, J. D. Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Badajoz, n. 18, p. 1-20, 2020. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

BURGOS, M.; GODINO, J. D. Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 42, n. 2, p. 1-30, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

BURGOS, M.; GODINO, J. D. Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. **International Journal of Science and Mathematics Education**, London, v. 20, p. 367–389, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

CASTILLO, M. J.; BURGOS, M. Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, Derbyshire, v. 18, n. 6, em2121, 2022. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/12092

CASTILLO, M. J.; BURGOS, M.; GODINO, J. D. Prospective High School Mathematics Teachers'Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 4, p. 169-206, 2021. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552

CASTILLO, M. J.; BURGOS, M.; GODINO, J. D. Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 48, e238787, 2022a. DOI: https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238787esp

CASTILLO, M. J.; BURGOS, M.; GODINO, J. D. Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. **Uniciencia**, Heredia, v. 36, n.1, e15399, 2022b. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. Londres: Routledge, 2011.

ESQUÉ DE LOS OJOS, D.; BREDA, A. Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 1, p.38-54, 2021. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

FERRERO, L.; MARTÍN P.; ALONSO, G.; BERNAL, E. I. **Matemáticas 6.** Anaya, 2015.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, Madrid, v.33, n. 1, p.89-105, 2010.

GIACOMONE B.; GODINO J. D.; WILHELMI M. R.; BLANCO T. F. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. **Revista Complutense de Educación**, Madrid, v. 29, n. 4, p. 1109-1131, 2018. DOI: https://doi.org/10.5209/RCED.54880

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 11, p.111-132, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactic. **For the Learning of Mathematics**, New Brunswick, v. 39, n. 1, p. 37-42, 2019.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, 2017. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a0

GODINO, J.D.; BENCOMO, D.E.; FONT, V; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, Venezuela, v. 27, p. 221-252, 2016. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2006.p221-252.id369

GONZÁLEZ, Y.; GARÍN, M.; NIETO, M.; RAMÍREZ, R.; BERNABEU, J.; PÉREZ, M.; PÉREZ, B.; MORALES, F.; VIDAL, J. M.; HIDALGO, V. **6 Matemáticas. 6 Primaria. Trimestral**. Savia. Ediciones SM, 2015.

HUMMES, V.; FONT, V.; BREDA, A. Combined use of the lesson study and the criteria of didactical suitability for the development of the reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n. 1, p. 64-82, 2019. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968

MORALES-GARCÍA, L.; NAVARRO, C. Idoneidad Epistémica del Significado de Número Natural en Libros de Texto Mexicanos. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1338-1368, 2021. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a06

MORALES-LÓPEZ, Y.; ARAYA-ROMÁN, D. Helping Preservice Teachers to Reflect. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 22, n. 1, p. 88-111, 2020. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5641

REMILLARD, J. T.; KIM, O. K. Knowledge of curriculum embedded mathematics: Exploring a critical domain of teaching. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 96, n. 1, p. 65-81, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-017-9757-4

SALCEDO, A., MOLINA-PORTILLO, E., RAMÍREZ, T.; CONTRERAS, J. Conflictos semióticos sobre estadística en libros de texto de matemáticas de primaria y bachillerato. **Revista de Pedagogía**, Venezuela, v. 39, n. 104, p. 223-244, 2018.

SCHUBRING, G.; FAN, L. Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. **ZDM Mathematics Education**, Hamburgo, v. 50, n. 5, p. 765-771, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-018-0979-4

SECKEL, M. J.; FONT, V. Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. **Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación**, Bogotá, v. 12, n. 25, p.127-144, 2020. DOI: https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp

SHAWER, S. F. Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy, and teacher training. **Teaching and Teacher Education**, New York, v. 63, p. 296-313, 2017. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.12.017

WEILAND, T.; ORRILL, C. H.; NAGAR, G. G.; BROWN, R. E.; BURKE, J. Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 24, n. 2, p. 179-202, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

YANG, K-L.; LIU, X-Y. Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, Derbyshire, v. 15, n.1, em1655, 2019. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/99515

Autores

María Burgos

Profesora titular de Universidad en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. Doctora en Matemáticas y Doctora en Ciencias de la Educación. Líneas de investigación: Desarrollo y aplicación del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática. Razonamiento algebraico y Formación de Profesores.

Correo electrónico: mariaburgos@ugr.es

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

María José Castillo

Profesora del Departamento de Educación Matemática en la Universidad de Costa Rica. Doctora en Ciencias de la Educación.

Línea de investigación: Aplicación del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática. Formación de Profesores, análisis didáctico.

Correo electrónico: mariajosecastilloc.24@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8046-8927

Juan D. Godino

Catedrático jubilado de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Línea de investigación: Desarrollo y aplicación del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática.

Correo electrónico: jgodino@ugr.es

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

BURGOS, M.; CASTILLO, M. J.; GODINO, J. D. Análisis de lecciones de libros de texto basado en las herramientas del Enfoque Ontosemiótico: Una experiencia con maestros en formación. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS,** junio de 2023 / pi – pf DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p34-58.id1399

Sentidos asignados a ecuaciones algebraicas. El caso de profesores de matemáticas

Gladys Mejía Osorio
gmejiao@educacionbogota.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-5759-5688
Secretaría de Educación Distrital de Bogotá (SED)
Bogotá, Colombia

Pedro Javier Rojas Garzón
pjrojasgarzon@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9694-4609
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD)
Bogotá, Colombia

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Los resultados presentados en este documento hacen parte de una investigación que se desarrolló en el marco del Doctorado en Educación de la Universidad Francisco José de Caldas (Colombia), la cual estuvo orientada a indagar sobre posibles similitudes entre las dificultades que los profesores y los estudiantes encuentran en su trabajo con diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. Se muestra las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, relacionadas con una tarea sobre interpretaciones de ecuaciones. Se evidenció que los profesores reconocen la equivalencia sintáctica entre dichas expresiones, pero no su equivalencia semántica, pues al dotarlas de sentido y significado las asocian con objetos matemáticos diferentes, basados en que las ecuaciones tienen formas diferentes; estas dificultades resultan similares a las identificadas en estudiantes. En el análisis de los datos se emplean algunos lineamientos metodológicos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).
Palabras clave: Articulación de sentidos; Tratamiento; Equivalencia; Semántica; Sintáctica.

Sentidos atribuídos às equações algébricas. O caso dos professores de matemática

Resumo

Os resultados apresentados neste documento fazem parte de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Doutorado em Educação da Universidade Francisco José de Caldas (Colômbia) que foi orientada a investigar possíveis semelhanças entre as dificuldades que professores e alunos encontram em seus trabalhar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Mostram-se as dificuldades encontradas por um grupo de professores de matemática para articular os significados atribuídos às representações semióticas obtidas por tratamento, relativas a um trabalho de interpretação de equações. Evidenciou-se que os professores reconhecem a equivalência sintática entre essas expressões, mas não sua equivalência semântica, pois ao dar-lhes sentido e significado, associam-nas a diferentes objetos matemáticos, pelo fato de as equações possuírem formas distintas; essas dificuldades são semelhantes às identificadas nos alunos. Na análise dos dados, são utilizadas algumas diretrizes metodológicas propostas pela Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS).
Palavras chave: Articulação dos sentidos; Tratamento; Equivalência; Semântica; Sintaxe.

Senses assigned to algebraic equations. The case of mathematics teachers

Abstract

The results presented in this document are part of an investigation that was developed within the framework of the Doctorate in Education at the Francisco José de Caldas University (Colombia), which was oriented to investigate possible similarities between the difficulties that teachers and students encounter in their work with different representations of same mathematical object. It shows the difficulties encountered by a group of mathematics teachers to articulate meanings assigned to representations. Semiotics obtained through treatment, related to a task on interpretations of equations. It was evidenced that teachers recognize the syntactic equivalence between these expressions, but not their semantic equivalence, since by giving them sense and meaning they associate them with different mathematical objects, based on the fact that the equations have different forms. These difficulties are similar to those identified in students. In the analysis of the data, some methodological guidelines proposed by the Ontosemiotic Approach of Cognition and Mathematics Instruction (EOS) are used.

Keywords: Articulation of senses; Treatment; Equivalence; Semantics; Syntax.

Introducción

En la última década diversos estudios en Didáctica de las Matemáticas resaltan la importancia que tienen los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que las representaciones semióticas son la única vía para acceder y manipular los objetos matemáticos. Al respecto, Duval (1993, 2017) plantea que los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y a su vez posibilitan una manipulación sobre estos, en virtud de ello uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se centra en que tanto estudiantes como profesores reconozcan un objeto matemático por medio de diferentes representaciones semióticas, que les posibilite expresar y representar ideas matemáticas, así como transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra, tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que este autor denomina *tratamientos* y *conversiones*, respectivamente.

Duval (1999, 2017) destaca que usualmente los problemas cognitivos están relacionados con la *conversión*, pues enfatiza en la complejidad semiótica que conlleva el reconocimiento de un mismo objeto a través de diferentes representaciones. D'Amore (2006), por su parte, resalta la necesidad de realizar una precisión a la teoría propuesta por Duval quien relaciona en gran parte las dificultades de las matemáticas con la conversión dejando de lado los tratamientos, considerados por muchos matemáticos y educadores decisivos para el trabajo matemático, que también pueden generar dificultades en la comprensión de objetos matemáticos por parte de los sujetos, y pueden ser un problema relevante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

D'Amore (2006) reporta la experiencia que ha tenido con algunos estudiantes quienes frente a una representación simbólica de un objeto matemático le asignan un cierto sentido y realizan de manera adecuada transformaciones a dicha representación, en el interior del respectivo sistema semiótico de representación, obteniendo otra representación del objeto a la cual le asignan un nuevo sentido, pero éste no es relacionado con el sentido inicial, aspecto que permite concluir que en matemáticas las transformaciones de tratamiento podrían ser causa de dificultades en la aprehensión de objetos matemáticos por parte de los aprendices, fenómeno que produce que una persona que realiza correctamente transformaciones semióticas de tratamiento pasando de una representación semiótica a otra de un mismo objeto matemático, y conservando el registro semiótico, atribuye significados diversos a las dos "escrituras" o representaciones, hecho que evidencia que el significado asignado intuitivamente al objeto O cambia o no se relaciona con el inicialmente dado en la mente de un estudiante, lo que este autor ha denominado *cambio de sentido* y Rojas (2012) sugiere denominar *no articulación semiótica.*

D'Amore (2006) planteó la necesidad de investigaciones que, por un lado, centren la atención en los *tratamiento*s en diferentes poblaciones y, por otro lado, permita profundizar y clarificar el fenómeno desde una óptica antropológica o, mejor aún, pragmática en tanto este fenómeno se presenta independiente de la formación académica de los sujetos quienes encuentran algunas dificultades al abordar situaciones que requieren la aplicación de tratamientos las cuales impiden la comprensión de objetos matemáticos. En virtud de ello, el presente estudio centra la atención en las dificultades identificadas en profesores y en estudiantes asociadas con la transformación semiótica de tratamiento en contextos matemáticos; por una parte reporta dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático (obtenidas mediante tratamiento) al abordar tareas específicas y, por otra, presenta evidencias sobre similitudes con las dificultades que se han identificado en estudiantes al resolver el mismo tipo de tareas, reportadas en investigaciones previas (SANTI, 2011; ROJAS, 2012).

1. Fundamentación teórica

El estudio se ubica en un enfoque filosófico pragmático, en tanto se reconoce que la experiencia humana juega un papel fundamental en la constitución e interpretación de los signos. Dentro de este enfoque los objetos matemáticos son considerados símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas que caracterizan a la pragmática humana y que son modificados continuamente en el tiempo, con relación a los intereses y necesidades de los sujetos (D'AMORE; GODINO, 2007).

A continuación, se presentan algunas nociones y constructos básicos del EOS que han sido fundamento teórico y una herramienta en el análisis de las producciones realizadas por el grupo de profesores en esta investigación, bajo este enfoque se considera el *objeto matemático* como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas (GODINO, 2002). La *práctica matemática* es asumida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (GODINO, et al., 2012).

En la práctica matemática se reconocen seis tipos de objetos primarios (FONT, GODINO; GALLARDO, 2013): (1) *Lenguaje* (términos, expresiones, gráficos, etc.); (2) *Conceptos* (mediante definiciones o descripciones); (3) *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos); (4) *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas, etc.); (5) *Situaciones* (problemas, tareas, ejercicios, etc.); y (6) *Argumentos* (validan las proposiciones y procedimientos). Los anteriores objetos se interrelacionan entre sí, en tanto los conceptos, proposiciones y procedimientos describen lo que se denominan las «ideas» del triángulo epistemológico[5], que a su vez se relacionan con los símbolos del lenguaje (significantes). Las situaciones y argumentos pueden ser entendidos como los contextos o los objetos de referencia. Esta interrelación entre los objetos primarios permite profundizar en la naturaleza de los objetos de una manera dinámica y pragmática, donde se establecen vínculos entre ellos y sus atributos complementarios. Así mismo, las relaciones entre los seis objetos primarios determinan las *configuraciones*, definidas por Godino, Batanero y Font (2008) como:

> las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, que son activadas por los sujetos, que a su vez son herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. (p.8)

[5] Triángulo alumno – maestro– saber, entendido como modelo sistémico de la «didáctica fundamental».

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales (GODINO, 2002): personal – institucional; ostensivo – no ostensivo; expresión – contenido; extensivo – intensivo (ejemplar – tipo); y unitario – sistémico. En este estudio el análisis se centra en la faceta *expresión-contenido*, debido a que permite clasificar las relaciones que establecen los sujetos por medio de las funciones semióticas. En términos de funciones semióticas, Rojas (2012) asume la *articulación semiótica* como el proceso de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que se relacionan entre sí; de manera análoga se asume la no articulación semiótica como el proceso interrumpido de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que no se logran relacionar entre sí. Los sentidos asignados a un objeto son dinámicos, dependen del tiempo y del contexto en que se aborda, así como de cada sujeto, es decir, no son únicos ni estables (ROJAS, 2012). Se comparte con este autor que el sentido de un objeto es el contenido que tiene al objeto primario como antecedente/expresión de la función semiótica. Tal y como se relaciona a continuación:

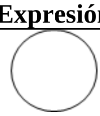
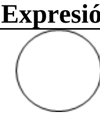
Tabla 1 – Sentido asignado a un objeto matemático primario

ANTECEDENTE/EXPRESIÓN	CONSECUENTE/CONTENIDO
OBJETO PRIMARIO	Sentido del Objeto Primario

Fuente: Rojas (2012)

Un mismo objeto primario puede tener diferentes sentidos. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia, los resolutores recurren a diferentes referencias para designar al mismo objeto.

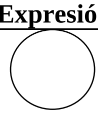
Tabla 2 – Diferentes sentidos de un objeto que se espera que los resolutores construyan

Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	**Antecedente/ Expresión**	**Consecuente/ Contenido**
 **Sentido 1**	Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro	 **Sentido 2**	Puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2=r^2$

Fuente: Rojas (2012

En los esquemas anteriores se muestran diferentes sentidos que pueden ser asignados a la misma referencia *circunferencia*. Se produce una articulación de sentidos o *articulación* *semiótica* cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo *objeto matemático*, es decir, cuando uno de los sentidos (consecuente/contenido) del objeto primario se convierte en antecedente/expresión de una nueva función semiótica que tiene como consecuente/contenido a otro sentido de dicho objeto. Por ejemplo, en el siguiente caso se muestra la relación de dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático.

Tabla 3 – Articulación de sentidos mediante funciones semióticas

Antecedente/Expresión		
Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	**Consecuente/ Contenido**
	Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro **Sentido 1**	Puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2=r^2$ **Sentido 2**

Fuente: Rojas (2012)

Como se evidencia en el anterior ejemplo, se relaciona dos sentidos diferentes "puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro" y "puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2=r^2$" que corresponden al consecuente/contenido de la nueva función semiótica que un sujeto puede establecer. En este caso particular, se tiene un objeto matemático primario al que se le asignan dos sentidos; estas funciones semióticas se pueden reducir a una sola que pone en relación tales sentidos (articulación semiótica), como se muestra a continuación:

Tabla 4 – Ejemplo de una función semiótica, como articulación de sentidos (simplificada)

Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**
Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro	Puntos que satisfacen una ecuación de tipo $(x-h)^2+(x-k)^2=r^2$

Fuente: Rojas (2012)

En palabras de Rojas (2012) la articulación es el resultado de la concatenación de dos funciones semióticas, es decir, se origina una articulación de sentidos cuando se establece una nueva función semiótica en la que una de las dos funciones semióticas anteriores juega el papel de antecedente/expresión. Las representaciones de un mismo objeto matemático, obtenidas por transformaciones semióticas de tratamiento, pueden ser relacionadas mediante funciones semióticas; reconociendo, además de la equivalencia sintáctica entre estas, que el sentido asignado a una de ellas puede ser asignado a la otra (equivalencia semántica). Por ejemplo, en el registro algebraico, al aplicar procedimientos y reglas a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, ésta se puede transformar en $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, y establecer una función semiótica al reconocer una equivalencia sintáctica entre dichas expresiones:

Tabla 5 – Transformación tipo tratamiento. Equivalencia de ecuaciones

Antecedente/Expresión	Consecuente/ Contenido
$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$ $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$	Son equivalentes

Fuente: Rojas (2012)

Una vez establecida la equivalencia sintáctica de las expresiones (un objeto primario con dos representaciones), en tanto una de ellas es obtenida a partir de la otra como resultado de un proceso de tratamiento, se les puede asociar el mismo sentido (el mismo consecuente/contenido), es decir, reconocer así su equivalencia semántica:

Tabla 6 – Asignación de un mismo sentido a objetos matemáticos primarios

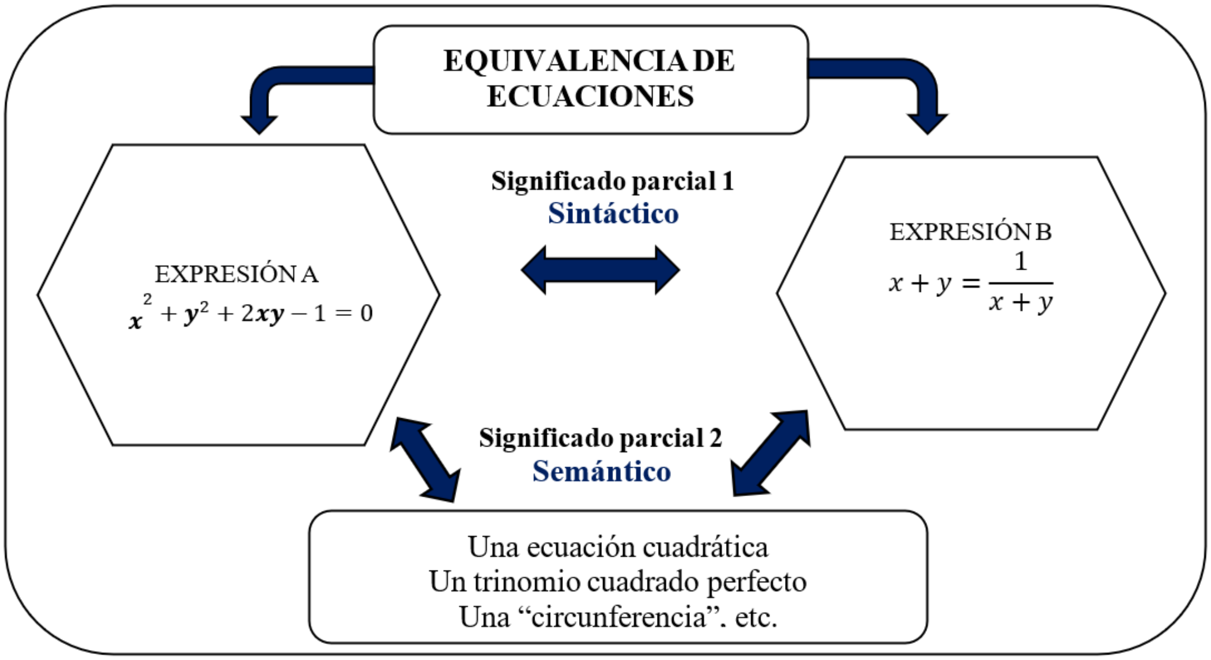
Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido	Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Es una “circunferencia”	$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$	Es una “circunferencia”

Fuente: Rojas (2012)

En este caso, al asignar el mismo *consecuente/contenido* a dos objetos primarios, se origina una articulación de sentidos. Cuando el sentido asignado a una representación semiótica no se articula con el sentido asignado posteriormente a otra representación semiótica obtenida de ésta mediante tratamiento, se evidencia la no articulación semiótica, en tanto las representaciones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes; por ejemplo, cuando en el caso antes mencionado se reconoce la equivalencia sintáctica de las dos expresiones; sin embargo, mientras la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ es reconocida como una “circunferencia”, la segunda expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no es reconocida como tal (es necesario reiterar que si bien estas expresiones no representan una *circunferencia* este trabajo no se centra en si sus interpretaciones son adecuadas sino en analizar si logran establecer una articulación semiótica de estas). ´

Reconocemos que en cualquier transformación tipo tratamiento subyace la noción de equivalencia, en este caso mediante la aplicación de procedimientos y reglas a una expresión algebraica se posibilita obtener otra equivalente. Al respecto, y siguiendo planteamientos del EOS, se considera que en la equivalencia se encuentran presentes dos fuentes de significados parciales: *sintáctico* y *semántico*, así como su necesaria articulación, lo cual brinda elementos para establecer que dos expresiones son equivalentes más allá de la aplicación de reglas. Desde la visión sintáctica, se dice que dos expresiones son equivalentes cuando éstas tienen una reescritura numérica o algebraica común, la cual puede ser obtenida por medio de la aplicación de propiedades algebraicas conocidas (conmutativa, asociativa, distributiva, identidades notables, simplificación, etc.). Desde su aspecto semántico, se dice que dos expresiones son equivalentes cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales y en el que, además, se puede decir que estos dos significados son el mismo, por ejemplo, en la tarea propuesta, los profesores asignan interpretaciones a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, asociadas a la forma de la expresión, admiten que ésta es equivalente a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ (equivalencia sintáctica); y desde su aspecto semántico dichas expresiones toman el mismo valor contextual, interpretadas como una ecuación cuadrática, un trinomio cuadrado perfecto, una “circunferencia” (no corresponda a una circunferencia, pero interesan las relaciones entre interpretaciones), etc.

Figura 1 – Equivalencia de Ecuaciones



Fuente: Adaptado de Chalé-Can, Font & Acuña (2017

En el caso que se reporta, si bien los profesores admiten la equivalencia entre las dos expresiones obtenidas mediante tratamiento (desde lo sintáctico) no realizan el mismo reconocimiento desde lo semántico; por ejemplo, plantean que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser una "circunferencia" en tanto no tiene sus variables elevadas al cuadrado o que presenta restricciones para los valores que éstas pueden tomar.

2. Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (RODRÍGUEZ; GIL; GARCÍA, 1996; GOETZ; LECOMPTE, 1988), el cual resulta pertinente para analizar los sentidos asignados a representaciones semióticas y las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas en ejercicio para relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas que se obtienen mediante tratamiento, lo que ha sido denominado como articulación semiótica (ROJAS, 2012, 2014). Es un estudio *descriptivo* en tanto, se relacionan elementos fundamentales de las producciones realizadas por los profesores de matemáticas en su proceso de significación en situaciones que requieren transformaciones de tratamiento, y es *interpretativo* puesto que, dichas producciones son analizadas a la luz de los referentes teóricos presentados. Para estudiar el fenómeno de la *articulación de sentidos* o *articulación semiótica* se realizó un *estudio de caso colectivo*, debido que, el fenómeno a estudiar tiene múltiples variables (STAKE,1994) como la formación matemática de los profesores de matemáticas que incide en el lenguaje matemático utilizado, los signos empleados, los significados que otorgan a estos, las representaciones movilizadas, las que son movilizadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los significados personales otorgados a los diferentes objetos matemáticos, la visión epistemológica y ontológica de las matemáticas, etc.

2.1 Participantes

Para el caso específico de la tarea relacionada con ecuaciones, se contó con 32 profesores de educación básica secundaria, se seleccionaron aquellos profesores que aplicaron una serie de procedimientos y reglas matemáticas (tratamientos) que les permitió reconocer la equivalencia sintáctica de las ecuaciones, pero desde el aspecto semántico no relacionaron entre sí los sentidos asignados a dichas expresiones o significados parciales, en tanto las relacionaron con objetos matemáticos diferentes, es decir, no establecieron una articulación semiótica. Este criterio permitió tener una población final de 11 profesores que conformaron un estudio de caso y para el análisis de la tarea propuesta se muestran las producciones de 4 profesores, quienes son relacionados como Profesor-B -C -D y -F.

2.2 Instrumentos de análisis

(Tarea – Interpretaciones de ecuaciones). *En lo que sigue, asuma que* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

2. ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$?
   (a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente (ítem 1), y luego respóndala.

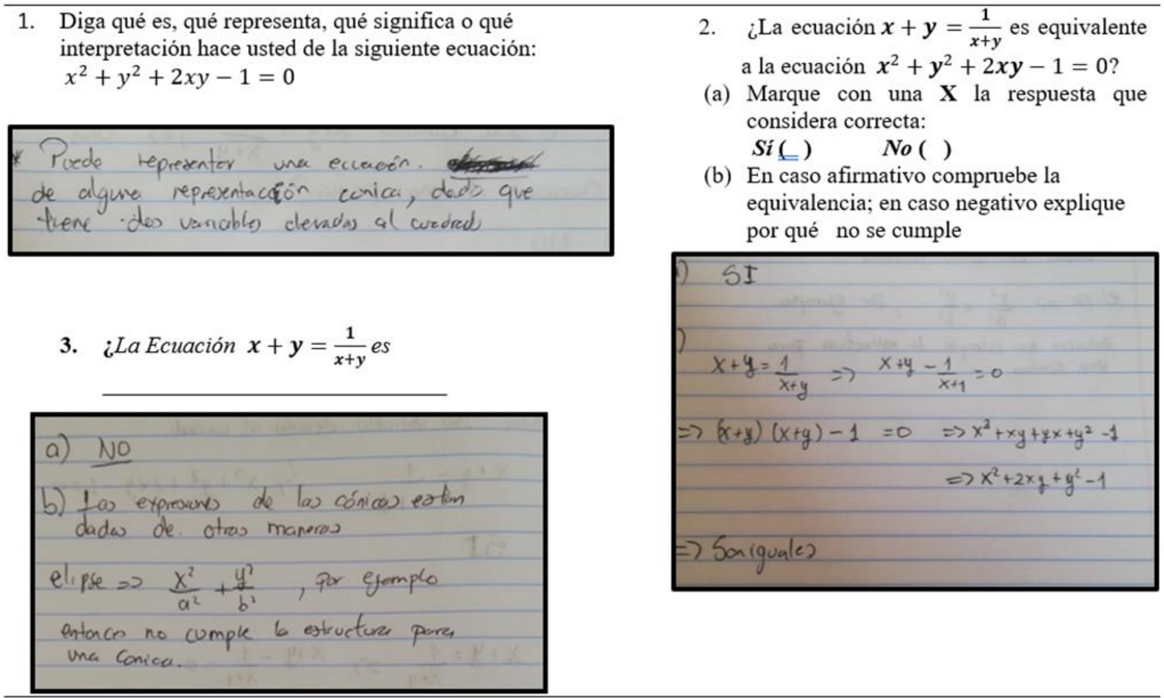
   ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$, es ______________________________ ?
   (a) Marque con una **X** la respuesta que considere correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

Los análisis y resultados presentados en este documento corresponden a una tarea sobre interpretación de ecuaciones, la cual fue trabajada previamente por Rojas (2012) con estudiantes de educación media (16-17 años). La tarea presenta la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, que corresponde a una "cónica degenerada" (dos rectas paralelas). Cabe señalar que algunas personas pueden aludir que en las evidencias que aquí se presentan los profesores no reconocen desde lo sintáctico la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, en tanto, el sentido asignado inicialmente no corresponde con el significado institucionalmente establecido, aspecto importante pero no relevante para este estudio, puesto que se desea mostrar la relación establecida entre los sentidos asignados a las expresiones y que estos pueden estar asociados con su "forma", desde la cual puede ser una ecuación cuadrática, un polinomio o, incluso, una "circunferencia" (basados, por ejemplo, en las variables identificadas y sus exponentes); por su parte, la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ puede ser relacionada con una ecuación lineal o la suma de números reales igual a su inverso.

2.3 Análisis de la información

Se seleccionaron aquellos profesores que reconocen desde el aspecto sintáctico la equivalencia de las ecuaciones $x + y = \frac{1}{x+y}$,y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, ya que a partir de una de ellas se puede obtener la otra (realizando transformaciones de tratamiento a la ecuación inicial), pero no reconocen la equivalencia desde el aspecto semántico, en tanto las expresiones son relacionadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes, impidiendo que relacionen entre sí los dos sentidos asignados. Por ejemplo, en la siguiente producción se muestra que el profesor reconoce la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, pero no la equivalencia semántica de éstas, es decir, no relacionan entre sí, los sentidos asignados a dichas expresiones, ver Figura 2.

Figura 2 – Producción de un profesor secundaria



Fuente: Producción del profesor secundaria-6

Así mismo, con los profesores que conforman el estudio de caso colectivo, se realizó una serie de entrevistas semiestructuradas con el fin de identificar posibles similitudes o diferencias entre los argumentos dados por ellos y los planteados por estudiantes a esta misma tarea, así como las dificultades reportadas en la literatura. Para el desarrollo de las entrevistas se diseñó un guion que contenía una serie de preguntas asociadas con esta tarea; además, cada entrevista se realizó «en positivo», en tanto en el desarrollo de éstas no se cuestionó la respuesta dada o la selección realizada por cada profesor, sino que se indagó sobre los motivos que lo llevaron a tomar dicha decisión; por ejemplo, se indagó sobre los elementos que permitieron establecer que la interpretación asignada a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ difería de la interpretación realizada a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$.

En particular, se presentan los resultados obtenidos a partir de las producciones realizadas por los profesores -B -C -D y -F, para lo cual se hizo uso de algunos elementos del análisis ontosemiótico propuesto por el EOS (GODINO, 2002) identificando en las soluciones las prácticas matemáticas desarrolladas por los profesores, las configuraciones cognitivas y las relaciones que estos establecen por medio de las funciones semióticas. Se considera que estos elementos permiten describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios que intervienen en la práctica matemática (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que son activados en las configuraciones cognitivas, con el fin identificar y caracterizar las dificultades que encuentran los profesores para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento por medio de las relaciones que ellos establecen.

3. Resultados

Por medio de una tabla que sintetizan las configuraciones cognitivas activadas por el grupo de profesores, que relaciona los seis objetos primarios que emergen en la solución de la tarea y que ponen en evidencia los sentidos otorgados por estos profesores a las representaciones semióticas, así como las dificultades que éstos encuentran para relacionar los sentidos otorgados. A continuación, se presenta una síntesis del trabajo realizado por el grupo de profesores de matemáticas de secundaria.

Tabla 7 – Configuraciones Cognitivas Activadas por el Grupo de Profesores de Secundaria

SITUACIÓN					
1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ **2.** ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$? (a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta: ***Sí*** **( )** ***No*** **( )** ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es ______________________________ ?					
Docente	**Lenguaje**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**
Secundaria-B	Ecuación de segundo grado Igualdad Conjuntos de puntos en el plano $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x + y}$	Ecuación Conjunto Equivalencia	Inverso multiplicativo e inverso aditivo [implícito]	Aplicación de transformaciones algebraicas.	**Tesis:** La expresión pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado. **Razón:** No, aunque son expresiones equivalentes la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene más restricciones en su dominio $x + y \neq 0$.
Secundaria-C	Circunferencia Centro Igualdad Lugar geométrico Conjunto de puntos $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$	Ecuación de una circunferencia Equivalencia	Inverso multiplicativo e inverso aditivo [implícito]	Aplicación de transformaciones algebraicas.	**Tesis:** La expresión pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado. **Razón:** No, puesto que, la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =$y $x + y = \frac{1}{x+y}$, tienen unas restricciones

	$x + y = \frac{1}{x+y}$				respecto a los valores que puede tener x e y, en los números reales es decir que $x \neq -y$.
Secundaria-D	Polinomio de segundo grado Diferencias de cuadrados Ecuación lineal Igualdad Opuesto aditivo Suma de dos números reales $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x+y}$	Polinomio Ecuación Equivalencia	Inverso multiplicativo e inverso aditivo [implícito] . .	Aplicación de transformaciones algebraicas	**Tesis:** La expresión corresponde a un polinomio de segundo grado. **Razón:** No, puesto que expresa una igualdad de dos ecuaciones lineales con $x \neq -y$ o $y \neq -x$ o puede ser interpretada como la suma de dos números reales que, en este caso, es igual a su opuesto de esa suma.
Secundaria-F	Sección Cónica Ecuación de segundo grado $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ $x + y = \frac{1}{x+y}$	Ecuación de una cónica Equivalencia	Inverso multiplicativo e inverso aditivo [implícito]	Aplicación de transformaciones algebraicas	**Tesis:** La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una ecuación de una cónica **Razón:** No, tiene la forma de una ecuación cónica.

Fuente: Elaboración de los autores

El profesor [secundaria-B] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una ecuación de segundo grado, y la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, con una igualdad entre dos cantidades o un conjunto de puntos en el plano; realiza los tratamientos necesarios que le permiten corroborar que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ son equivalentes, pero no admite que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado, pues considera que el dominio no es el mismo, en tanto $x + y$ debe ser diferente de cero.

El profesor [secundaria-C] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con una "circunferencia"; aplica los tratamientos requeridos que le permiten reconocer la equivalencia entre la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$. Pese a reconocer la igualdad entre ambas ecuaciones el profesor no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una "circunferencia", debido a que la ecuación tiene una restricción en el dominio respecto a los valores que pueden tomar las variables, $x \neq -y$ (no reconoce que, en este caso, $x + y \neq 0$).

El profesor [Secundaria-D] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con un polinomio de segundo grado, afirma que al ser factorizado representa una "diferencia de cuadrados"; aplica una serie de procedimientos que le permiten verificar la equivalencia entre la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$. Aunque el profesor reconoce que las expresiones son iguales desde el punto de vista sintáctico, no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ pueda ser interpretada como un polinomio de segundo grado, puesto que esta representa una igualdad de dos ecuaciones lineales o como la suma de dos números reales que, en este caso, es igual al opuesto de esa suma, con unas restricciones en su dominio como $x \neq -y$ o $y \neq -x$.

El profesor [Secundaria-F] relaciona la expresión $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con una "ecuación cónica", aplica una serie de procedimientos que le permite reconocer la equivalencia entre las expresiones $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, pero no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ pueda ser interpretada como una ecuación de una "cónica" (segundo grado), puesto que "no tiene la misma forma".

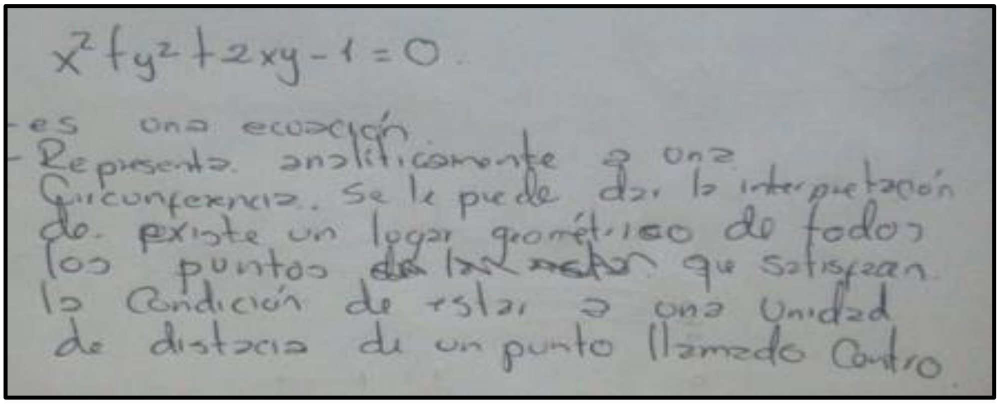
Las producciones anteriores muestran que la aplicación de transformaciones algebraicas permite reconocer la equivalencia sintáctica entre ambas ecuaciones, pero para dotar de sentido o significado de las expresiones y prima su "forma". Por ejemplo, $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, sentido asignado a la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, pues plantean que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no tiene la misma "forma", es decir las variables x e y elevadas al cuadrado, o que tiene más "restricciones en su dominio". Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo $[12:01 - 18:34]$ de la entrevista que se desarrolló con el profesor Secundaria-F:

> ***Entrevistadora:*** *Finalmente hablemos de la última pregunta que indaga por la interpretación asignada a la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$*, si esta ecuación es equivalente a la expresión* $x + y = \frac{1}{x+y}$*, y si esta última ecuación corresponde a la interpretación dada inicialmente. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *corresponde a una sección cónica.*
> ***Secundaria-F:*** *Bueno apenas vi la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *me di cuenta que tenía la forma general de una cónica que* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$*, y la asocié con una función cónica.*
>
> ***Entrevistadora:*** *Me gustaría que me comentara qué elementos tuvo en cuenta para asociar la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *con la ecuación general de una cónica.*

> ***Secundaria-F:*** *Quizás por mi formación porque sé que las cónicas tienen esa forma y las variables x e y deben estar al cuadrado, entonces teniendo en cuenta esos elementos dije que era una función de una cónica.*
>
> ***Entrevistadora:*** *Y ahora me gustaría que me explicara un poco cómo se dio cuenta que la ecuación $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$ no corresponde a una sección cónica pese a que es una ecuación equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$.*
>
> ***Secundaria-F:*** *Esta pregunta me hizo dudar mucho porque yo hice todo el procedimiento y verifiqué que ambas expresiones son iguales pues al desarrollar la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ obtengo $x + y = \frac{1}{x+y}$ y viceversa, pero esta ecuación ya no tiene la forma inicial que al ser factorizada se obtiene la forma de una cónica, pero al ver esta ecuación corresponde a una ecuación de primer grado porque ya sus variables x e y no están al cuadrado.*
>
> *(Diálogo entre el profesor y la investigara, 2020)*

En la transcripción el profesor de secundaria-F manifiesta que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ tiene la forma de una función cónica definida por la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$ aspecto que hace que sea asociada con una sección cónica, en tanto la expresión tiene las variables x e y elevadas al cuadrado, siendo está una característica de las cónicas. Sin embargo, pese a reconocer que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$ son sintácticamente equivalentes, plantea que esta última ecuación no puede ser asociada con una sección cónica puesto que las variables dejan de estar al cuadrado y pierde su forma inicial, "es de primer grado". Tanto en la solución inicial como la entrevista se muestra que para el profesor prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a una "*sección cónica*" caracterizada por tener la forma de la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$ que a su vez las variables x e y deben estar al cuadrado, pese a la comprobación de la equivalencia desde su aspecto sintáctico las variables influyen para ver en las expresiones dos objetos matemáticos diferente, una sección cónica y una ecuación de primer grado. Resultados que corroboran que las interpretaciones que los profesores otorgan a las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ se asignan con base en su forma (dada por los exponentes de las variables), por ejemplo, con base en su "forma" la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ es relacionada con una "*circunferencia*", una ecuación de segundo grado o un polinomio de segundo grado, etc., tal como se muestra en la Figura 3. En relación con las interpretaciones antes mencionadas, es necesario reiterar que si bien la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ no representa una circunferencia, ni la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ representa una ecuación de primer grado, para los propósitos de este trabajo lo importante es analizar si los sujetos logran o no establecer una articulación semiótica de los sentidos asignados por ellos a las expresiones dadas.

Figura 3 – Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$



$x^2+y^2+2xy-1=0$.

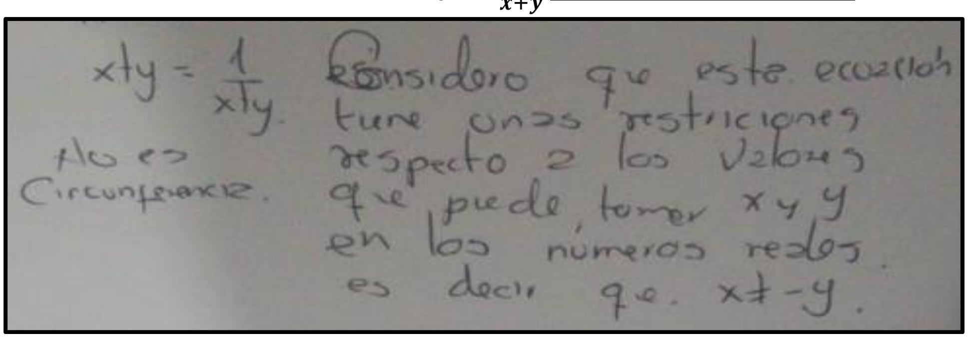
-es una ecuación

-Representa analíticamente a una circunferencia. Se le puede dar la interpretación de existe un lugar geométrico de todos los puntos ~~de las rectas~~ que satisfagan la condición de estar a una unidad de distancia de un punto llamado centro

Fuente: Solución del profesor secundaria-C

Por otro lado, la interpretación de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es asignada con base en dos características: una, las variables y, otra, las restricciones en su dominio, por ejemplo, los profesores de secundaria D y F la relacionan con una ecuación lineal o una suma de dos números reales igual a su opuesto, debido a que la expresión no tiene sus variables elevadas al cuadrado, como en el caso de la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Además, los profesores B y C tienen en cuenta la restricción del dominio, siendo una características propias de las ecuaciones racionales, definida como el cociente de polinomios, en este caso su denominador $x + y$ debe ser diferente de cero, en tanto no está definida la división entre cero (aunque en este caso se puede reconocer que $x + y = \pm 1$. En la Figura 4 se presenta la solución dada por este profesor:

Figura 4 – ¿La Ecuación *es* $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ ____________________?



$x+y = \frac{1}{x+y}$

No es Circunferencia.

Considero que esta ecuación tiene unas restricciones respecto a los valores que puede tomar x y y en los números reales es decir que $x \neq -y$.

Fuente: Solución del profesor secundaria-C.

Estas producciones son similares a las soluciones dadas por algunos estudiantes de educación secundaria, por ejemplo, Rojas (2012) presenta evidencias de que ellos también asocian la expresión (ecuación) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =0$ con una circunferencia o con una parábola. Así mismo, aplican a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ las transformaciones de tratamiento que les permiten obtener la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =0$, o viceversa, y con ello comprueban e identifican que ambas expresiones son sintácticamente equivalentes. Este autor resalta que para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* asociado a la *"circunferencia",* planteando que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 =0$ tiene las variables al cuadrado, interpretación que está asociada a la característica antes mencionada, así mismo reporta que algunos estudiantes manifiestan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser interpretada como una circunferencia, debido que las dos variables no se encuentran al cuadrado.

En cuanto a las funciones semióticas los profesores de secundaria-C y F establecen dos: la primera, entre el antecedente "*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$*"* y el consecuente *"una circunferencia",* "*una sección cónica*"*;* y entre el antecedente "$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente "*ecuaciones equivalentes*". El profesor de secundaria-D establece tres funciones semióticas; la primera, entre el antecedente *"la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*un polinomio de segundo grado";* la segunda, entre el antecedente "*la ecuación* $x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente *"una igualdad de dos ecuaciones lineales";* y la tercera, entre el antecedente "$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = x + y = \frac{1}{x+y}$"» y el consecuente "*son ecuaciones equivalentes".*

El profesor de secundaria – *B* establece cuatro funciones semióticas: la primera, entre el antecedente *"la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$*"* y el consecuente "*ecuación de segundo grado*"; la segunda, entre el antecedente "*la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*igualdad entre dos cantidades un conjunto de puntos en el plano*"; la tercera, entre el antecedente "*la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*conjunto de puntos en un plano*"; y la cuarta, entre el antecedente *"la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ *y* $x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente "*expresiones equivalentes*". Los argumentos y relaciones que el profesor establece por medio de las funciones semióticas muestran que la aplicación de transformaciones algebraicas permite corroborar la equivalencia entre ambas ecuaciones (equivalencia sintáctica), pero desde el aspecto semántico la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, puesto que, la expresión debe cumplir que $x + y \neq 0$.

En relación con las funciones semióticas, Rojas (2012) señala que algunos estudiantes establecen dos funciones semióticas que se relaciona entre sí; la primera (F1), entre el antecedente "*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$" y el consecuente "*una circunferencia*"; y la segunda (F2), entre el antecedente "*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$*, es equivalente a* $x + y = \frac{1}{x+y}$" y el consecuente "*ambas ecuaciones son equivalentes*". Así mismo, los estudiantes establecen una tercera función semiótica F3**,** cuyo antecedente radica en justificar sí la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una "circunferencia" y el consecuente "*no es una circunferencia*", que no logra ser relacionada con las funciones semióticas F1 y F2. Al igual que los resultados mostrados por este autor, en el presente estudio los profesores establecen dos funciones semióticas con relación al mismo objeto matemático, como es la interpretación asignada a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y la igualdad con la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, que se relacionan entre sí.

Las soluciones dadas por estudiantes y profesores muestran que las interpretaciones que realizan a cada una de las expresiones están asociadas con la percepción *"forma"* de éstas (desde lo icónico*)*, por ejemplo, las variables al cuadrado es un indicador para decidir que: la expresión corresponde a una *"circunferencia"*, *"una ecuación de segundo grado"*, etc*.*, resultados que muestran que la percepción icónica influye para que la expresión sea asociada con un objeto matemático que tenga dichas características de *"forma*".

En términos de los significados parciales sintáctico y semántico, los resultados muestran que desde el aspecto sintáctico los profesores aplican determinadas reglas como la factorización, multiplicación de términos etc., procedimientos que les permite comprobar la equivalencia entre ambas expresiones; pero el significado parcial sintáctico no es articulado con el significado semántico, en tanto la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no tiene la misma forma a la ecuación inicial o el dominio en las variables x e y presentan algunas restricciones como los valores que toman x deben ser diferentes a $-y$ o que la suma x e y debe ser diferente de cero.

En su aspecto sintáctico la aplicación de reglas y procedimientos posibilita transformar $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ en $x + y = \frac{1}{x+y}$ o viceversa, en su aspecto semántico el contexto permite que las ecuaciones adquieran significados que puedan ser relacionados entre sí y que permiten concluir que las expresiones siguen siendo equivalentes, hecho que pone en evidencia la necesidad articular estos dos significados parciales.

4. Conclusiones

En el apartado de los resultados se mostraron evidencias de que si bien algunos profesores reconocen la *equivalencia sintáctica* entre las ecuaciones no por ello logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones y, por tanto, no reconocen la *equivalencia semántica* entre éstas, pues al asignar sentido o significado a dichas expresiones las asocian con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Dichos resultados corroboran que no solo las transformaciones de conversión se relacionan con dificultades en la comprensión de un objeto matemático, sino que estas dificultades también son asociadas con las transformaciones de tratamiento (D'AMORE, 2006; SANTI, 2011; ROJAS, 2012), incluso por parte de profesores de matemáticas en ejercicio.

Adicionalmente, el trabajo realizado por el grupo de profesores de matemáticas reportado en este estudio pone en evidencia algunas similitudes entre las dificultades que encuentra el grupo de profesores con los resultados previamente reportados en la literatura sobre dificultades identificadas en estudiantes para articular sentidos asignados a expresiones matemáticas obtenidas mediante tratamiento.

Tomando como referencia los resultados documentados por Rojas (2012) frente al trabajo realizado por los estudiantes, las dificultades encontradas por estos pueden clasificarse en cuatro grupos: "*reconocimiento icónico de las expresiones; anclaje a situaciones dadas; interacción y cambios en la interpretación; y dificultades con el lenguaje matemático*". En el presente documento se muestran evidencias que los sentidos asignados a expresiones algebraicas por parte de los profesores de matemáticas también se relacionan con el "*reconocimiento icónico*" de dichas expresiones, hallazgos similares a lo reportados por dicho autor frente al trabajo con estudiantes.

Los resultados obtenidos muestran que tanto estudiantes como profesores asignan sentidos a las expresiones (ecuaciones) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y $x + y = \frac{1}{x+y}$ con base en un *reconocimiento icónico* de tales expresiones. Los profesores de secundaria-B, C, D y F, que hacen parte del estudio de caso colectivo, reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes desde lo sintáctico, pero la interpretación que otorgan a la segunda expresión (ecuación) no se articula con la interpretación realizada a la primera ecuación, en tanto plantean que no corresponden al mismo objeto matemático, es decir, no reconocen su equivalencia desde lo semántico. Las producciones de los profesores se pueden clasificar en los siguientes subgrupos:

a) *Forma de las variables.* En este grupo se ubican los profesores de secundaria-D y F quienes reconocen la equivalencia de las ecuaciones desde el aspecto sintáctico, pero al asignar sentido y significado a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no reconocen la equivalencia desde el aspecto semántico (equivalencia semántica). Por ejemplo, el profesor-D relaciona la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ con un polinomio de segundo grado, en tanto la expresión tiene las variables elevadas al cuadrado, tal y como se evidencia en el siguiente argumento: "*las variables de un polinomio de segundo grado deben estar elevadas al cuadrado y como en la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, *las variables* x *e* y, *se encuentran al cuadrado corresponde a un polinomio de segundo grado*", pero la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es asociada con una ecuación lineal, argumenta que "*las variables están elevadas a uno, representa la suma de dos números reales* $(x + y)$ *igual a su opuesto lineal, entonces al hacer la gráfica serían dos como rectas, por decirlo así, dos rectas porque son ecuaciones lineales*".

   El profesor de secundaria-F expresa que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, tiene la forma general de una cónica definida como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, por tanto, corresponde con una función cónica, así mismo, alude que dada su formación matemática conoce que las funciones cónicas tienen esta forma (las variables x e y, deben estar al cuadrado), aspecto que no cumple la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$. Al respecto, Rojas (2012) mostró evidencias de que este tipo de argumento es similar a los dados por los estudiantes quienes expresan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ no corresponde a una circunferencia, afirman que: "*no puede ser una circunferencia, porque en una (ecuación) las variables están al cuadrado y en otra no*», la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ "*no se ve como una circunferencia, porque uno parte de que la circunferencia, como ecuación básica, es [...] cuando ambas variables están al cuadrado*" (ROJAS, 2012, p. 78). Al igual que los profesores, los estudiantes aceptan la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones, aplican las transformaciones de tratamiento requeridas y reconocen que a partir de una ecuación se puede obtener la otra. Estos resultados muestran que tanto para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* que se asocia con la "*circunferencia*", "*parábola*", "*ecuación de segundo grado*", etc., caracterizada por tener las variables elevadas al cuadrado, más que con la verificación de la *equivalencia sintáctica* realizada inicialmente.

b) *Restricción en los dominios.* En este subgrupo se encuentran los profesores de secundaria-B y C, quienes reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes pero la

> ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ no corresponde con el sentido asignado a la primera ecuación puesto que la ecuación $x\ +y=\frac{1}{x+y}$ tiene unas restricciones respecto a los valores que pueden tomar x e y, en el cual $x\neq -y$, los argumentos planteados son: "*no, aunque son expresiones equivalentes la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ tiene más restricciones en su dominio* $x+y\neq 0$» y «*puesto que la ecuación $x\ +y=\frac{1}{x+y}$ tiene unas restricciones respecto a los valores que puede tener x e y en los números reales es decir que $x\neq -y$*". Resultados que dejan en evidencia que para asignar sentido a estas expresiones priman las restricciones de una función racional, en tanto la expresión $x\ +y=\frac{1}{x+y}$ es asociada con algunas características de este tipo de funciones como son: la expresión debe estar en términos de $x:f(x)=\frac{numerador}{denominador}$, dada por cociente de dos polinomios: $f(x)=\frac{P\ (x)}{Q(X)}$, y las restricciones en el dominio en relación a los valores en que se encuentra definida la función, esto es, los valores de x para los cuales la función está definida. Dada esta condición en el denominador se debe excluir del dominio todos los valores de la variable x, para los cuales su valor se convierte en cero, hecho característico de este tipo de funciones.

Estos resultados muestran que en el trabajo matemático tanto para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la expresión como un *ícono* asociado a una "circunferencia", una ecuación de segundo grado, o un polinomio de segundo grado, etc., objetos que se caracterizan por tener las variables elevadas al cuadrado, o como manifiestan algunos profesores, porque la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ está conformada por expresiones "lineales" o tiene un dominio más restringido, aspectos que influyen para ver expresiones sintácticamente equivalentes como representaciones de dos objetos matemáticos diferentes, es decir, no reconocen la equivalencia semántica de dos representaciones de un mismo objeto.

Por otra parte, en este trabajo se asume que en toda transformación de tipo tratamiento subyace la noción de equivalencia, en términos del EOS los significados parciales sintácticos y semánticos son parte constitutiva en el desarrollo de dicha noción, los cuales requieren ser articulados (CHALÉ-CAN; FONT; ACUÑA, 2017). Frente a los resultados obtenidos se encontró que desde el *significado parcial sintáctico* los profesores aplican los procedimientos respectivos que les posibilita transformar la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$ en $x\ +y=\frac{1}{x+y}$, o viceversa, que permite corroborar la equivalencia entre las ecuaciones; y desde el *significado parcial semántico* la última expresión no puede ser interpretada como una “circunferencia” o como una ecuación de segundo grado, un polinomio de segundo grado, etc., en tanto, las variables no están expresadas al cuadrado o tiene más restricciones en su dominio.

Se puso en evidencia la complejidad de la noción de equivalencia, descrita por medio de dos significados parciales (sintáctico y semántico), unas veces desde la valoración numérica de cada expresión realizada por los profesores mediante la asignación de un número específico o mediante la reducción de términos semejantes en el caso de la tarea sobre interpretación de expresiones, el obtener la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ resultado de las transformaciones de tratamiento aplicadas a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Para algunos profesores éste fue el paso que les permitió verificar la equivalencia, estableciendo así una relación entre las perspectivas semántica y sintáctica; para otros este aspecto no fue suficiente y a pesar de verificar la *equivalencia sintáctica* no reconocen la *equivalencia semántica*, en tanto *«ven»* expresiones con formas diferentes, que les evocaba operaciones u objetos matemáticos diferentes, y asignan sentidos diferentes que no se relacionaban entre sí. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can, Font y Acuña (2017) se reconoce que la complejidad en torno a la equivalencia de expresiones algebraicas requiere de las perspectivas sintáctica y semántica, así como su necesaria articulación, en tanto cada significado posibilita una serie de prácticas matemáticas específicas, tales como: a) usar propiedades matemáticas para transformar la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y obtener la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, aspecto que permite corroborar la *equivalencia sintáctica* entre ambas ecuaciones; b) otorgar a cada una de las ecuaciones el mismo valor contextual, y así asignar el mismo sentido a ambas (*equivalencia semántica*).

Es importante reiterar que en los casos que se reportan los profesores asignan los sentidos a las dos expresiones con base en un reconocimiento icónico (las formas de las expresiones), hecho que hace que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ no sea relacionado con el significado institucional establecido (cónica degenerada), admiten la equivalencia entre las dos expresiones obtenidas mediante tratamiento (desde lo sintáctico) pero no realizan el mismo reconocimiento desde lo semántico; por ejemplo, plantean que la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ no tiene sus variables elevadas al cuadrado o que presenta restricciones para los valores que éstas pueden tomar.

Los resultados permiten concluir que las dificultades encontradas por los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas, obtenidas mediante tratamiento, son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas, en tanto admiten la *equivalencia sintáctica* entre dos expresiones algebraicas, pero no reconocen la *equivalencia semántica*.

Referencias

CHALÉ-CAN, S; FONT, V; ACUÑA, C. La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**, 2017**.** Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/chale-can.pdf. Acceso: 12 nov. 2021.

D'AMORE, B. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentidos. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 4, p. 177-196, 2006. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/9706/1/D%60Amore2006Objetos.pdf. Acceso: 15 dic. 2021.

D'AMORE, B.; GODINO, J. D. El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 10, n. 2, p. 191-218, 2007. Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000200002&script=sci_arttext&tlng=en. Acceso: 15 dic 2021.

DUVAL, R. Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Science Cognitives**, v. 5, n. 1, p. 37–65, 1993. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266ñ. Acceso: 10 oct.2021.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales,** Cali: Universidad del Valle, 1999.

DUVAL, R. **Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations**. Springer International Publishing, 2017.

FONT, V., GODINO, J. D; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dortmund, v. 82, 97-124, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0. Acceso: 10 oct. 2021.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, Grenoble, v. 22, n. 23, p. 237-284, 2002. Disponible en : https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf. Acceso: 15 dic. 2021

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2008. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf. Acceso: 15 dic. 2021

GODINO, J. D; CASTRO, W.; AKE, L.; WILHELMI, M. Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. **Bolema,** Rio Claro, v. *26*, *n.* 42B, p. 483-511, 2012. DOI: https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000200005. Acceso: 10 oct. 2021.

GOETZ, J.P.; LECOMPTE, M.D. **Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa**. Madrid: Morata, 1988. Disponible en: https://upeldem.files.wordpress.com/2018/03/libro-etnografc3ada-y-disec3b1o-cualitativo-en-investigacic3b3n-educatica-j-p-goetz-y-m-d-lecompte.pdf. Acceso: 5 feb. 2021.

RODRÍGUEZ, G. GIL, J; GARCÍA, E. **Métodos de investigación cualitativa**. Málaga: Aljibe, 1996.

ROJAS, P. **Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos**. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, 2012. Disponible en: https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/16315/RojasGarzonPedroJavie r2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acceso: 5 feb. 2021.

ROJAS, P. **Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos**. Bogotá, Colombia: Universidad, 2014. DOI: https://doi.org/10.14483/9789588832333.

SANTI, G. Objectification and semiotic function. **Educational Studies Mathematics**, Dortmund, v. 77, p. 285-311, 2011.

STAKE, R. Case Study. In N. K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). **Handbook of Qualitative Research** (pp. 236-247). London: Sage, 1994.

Autores

Gladys Mejía Osorio

Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD, Bogotá),
Magíster en Docencia de las Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional (UPN, Bogotá)
Doctora en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD, Bogotá),
Línea de Investigación: Semiótica y Cognición
Docente de matemáticas de la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá
Correo electrónico: gmejiao@educacionbogota.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9694-4609
Bogotá, Colombia

Pedro Javier Rojas Garzón

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS, Bucaramanga),
Magister en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia (UN, Bogotá) y
Doctor en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD, Bogotá)
Líneas de investigación: Didáctica de las matemáticas y Formación de profesores
Profesor jubilado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá)
Correo electrónico: pjrojasgarzon@gmail.com
ORCID: https://doi.org/10.14483/9789588832333
Bogotá, Colombia

Cómo citar el artículo:

MEJÍA, G.; ROJAS, P. Sentidos asignados a ecuaciones algebraicas. El caso de profesores de matemáticas**. Revista Paradigma, Vol. XLIV**, **Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 59 - 83. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p59-83.id1381

Tensión entre competencias profesionales y conocimientos matemáticos: el caso del Cálculo Diferencial e Integral en Carreras de Ingeniería

Leonardo Javier D'Andrea
ldandrea@fra.utn.edu.ar
https://orcid.org/0000-0002-7115-6534
Facultad Regional Avellaneda – Universidad Tecnológica Nacional (UTN-FRA)
Temperley, Argentina.

Marcel David Pochulu
mpochulu@unvm.edu.ar
https://orcid.org/0000-0003-2292-4178
Universidad Nacional de Villa María
Villa María, Córdoba, Argentina.

María Laura Distéfano
mldistefano@fi.mdp.edu.ar
https://orcid.org/0000-0002-0122-7317
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Mar del Plata, Argentina.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

La formación basada en competencias es un modelo de enseñanza y de aprendizaje que propone un cambio de paradigma frente a la enseñanza tradicional. A partir de este contexto, se considera que establecer un referencial sobre prácticas matemáticas que son irrenunciables en la formación de un ingeniero facilitará y fortalecerá la instrucción matemática basada en el Enfoque por Competencias desde los distintos descriptores de conocimiento, acorde a lo que plantea la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI).

En el presente artículo se comparten resultados obtenidos durante la primera fase de una investigación realizada durante los años 2019 a 2022 cuyo objetivo fue determinar los objetos matemáticos asociados al Cálculo Diferencial e Integral que intervienen en la labor profesional del ingeniero electrónico, a partir de las competencias específicas de la carrera definidas por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) en Argentina. Se describe la metodología utilizada para realizar entrevistas semiestructuradas basadas en la técnica de saturación y el análisis de resultados a través de constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Finalmente, se fundamenta qué aportes brindan los resultados obtenidos en la planificación de la instrucción del mencionado descriptor de conocimiento en la formación de ingenieros.

Palabras clave: Cálculo Diferencial e Integral. Formación de Ingenieros. Objetos y prácticas matemáticas. Enfoque Ontosemiótico.

Tensão entre habilidades profissionais e conhecimentos matemáticos: o caso do Cálculo Diferencial e Integral em Carreiras de Engenharia

Resumo

A formação por competências é uma proposta de ensino e aprendizagem que propõe uma mudança de paradigma em relação ao ensino tradicional. A partir deste contexto, considera-se que estabelecer uma referência sobre práticas matemáticas essenciais na formação de um engenheiro facilitará e fortalecerá o ensino matemático baseado na Abordagem de Competências dos diferentes descritores de conhecimento, de acordo com a Associação Ibero-Americana de Instituições de Ensino de Engenharia (ASIBEI). Este artigo compartilha resultados obtidos durante a primeira fase de uma pesquisa realizada entre 2019 e 2022, cujo objetivo foi determinar os objetos matemáticos associados ao Cálculo Diferencial e Integral que intervêm no trabalho profissional do engenheiro eletrônico, com base nas habilidades específicas à carreira definida pelo Conselho Federal de Reitores de Engenharia (CONFEDI) na Argentina. Descreve-se a metodologia utilizada para a realização de entrevistas semiestruturadas com base na técnica de saturação e a análise dos resultados por meio dos construtos teóricos da Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e da Instrução Matemática. Por fim, fundamentam-se as contribuições fornecidas pelos resultados obtidos no planejamento da instrução do referido descritor de conhecimento na formação de engenheiros.

Palavras chave: Cálculo Diferencial e Integral. Formação de Engenheiro. Objetos e práticas matemáticas. Abordagem ontossemiótica.

Tension between professional skills and mathematical knowledge: the case of Differential and Integral Calculus in Engineering Careers

Abstract

Competency-based training is a teaching and learning proposal that proposes a paradigm shift from traditional teaching. From this context, it is considered that establishing a reference on mathematical practices that are essential in the training of an engineer will facilitate and strengthen mathematical instruction based on the Competency Approach from the different knowledge descriptors, according to what the Association Iberoamerican Institute of Engineering Education Institutions (ASIBEI) proposes. This article shares results obtained during the first phase of an investigation carried out during the years 2019 to 2022 whose objective was to determine the mathematical objects associated with Differential and Integral Calculation that intervene in the professional work of the electronic engineer, based on the skills specific to the career defined by the Federal Council of Deans of Engineering (CONFEDI) in Argentina. The methodology used to carry out semi-structured interviews based on the saturation technique and the analysis of results through theoretical constructs of the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematics Instruction are described. Finally, the contributions provided by the results obtained in the planning of the instruction of the aforementioned knowledge descriptor in the training of engineers are based.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Engineer Training. Objects and mathematical practices. Ontosemiotic approach.

Introducción

La formación basada en competencias es una propuesta de enseñanza y de aprendizaje abordada por diferentes trabajos de investigación (DÍAZ BARRIGA, 2005; COLL, 2007; RODRÍGUEZ ZAMBRANO, 2007; GIMENO SACRISTÁN, 2008; CAMARENA GALLARDO, 2010; LÓPEZ RUIZ, 2011; IRIGOYEN; JIMÉNEZ; ACUÑA, 2011; TOBÓN, 2013) como un cambio de paradigma frente a la enseñanza tradicional (TOBÓN, 2006), en un intento de actualizar el currículum (PERRENOUD, 2009). Más específicamente, se sitúa al enfoque por competencias como "una tentativa de modernizar los planes de formación, de potenciarlos, de tener en cuenta, además de los saberes, la capacidad de transferirlos y movilizarlos" (PERRENOUD, 2009, p. 46).

En Argentina desde el año 2006, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) acordó llevar adelante una propuesta de innovación que reformula la formación de los ingenieros y está centrada en la enseñanza basada en el Enfoque por Competencias. Para tal fin, los documentos diseñados por el CONFEDI definen las competencias requeridas para el ingreso (CONFEDI, 2014) y las competencias genéricas de egreso del ingeniero (CONFEDI, 2018). En este último, entre las razones de una innovación en educación en Ingeniería, se afirma que "el mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional (el 'saber'), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el 'saber hacer')" (CONFEDI, 2014, p. 9).

En la búsqueda de un referencial en cuanto a las competencias que deberían desarrollarse en la formación de los futuros ingenieros en Argentina, a través de los documentos mencionados se propone orientar a las facultades de Ingeniería "en la definición de sus procesos de enseñanza-aprendizaje tendientes al desarrollo de competencias en sus alumnos" (CONFEDI, 2014, p. 9). Entre las primeras acciones, llevadas a cabo en 2009, se acordaron las competencias requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios y, en 2013, la Asamblea General de la Asociación Iberoamericana de Entidades de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI) avala las competencias genéricas de egreso acordadas por el CONFEDI. Posteriormente, en 2018, se plantea la propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de Ingeniería en Argentina.

En términos de la instrucción de la Matemática por competencias, en particular, desde el Cálculo Diferencial e Integral en las carreras de Ingeniería Electrónica, se reconoce la necesidad de indagar cómo un observador podría advertir que una clase efectivamente está centrada en competencias y no que se hace "más de lo mismo, pero con renovados problemas" (DÍAZ BARRIGA, 2005; COLL, 2007; GIMENO SACRISTÁN, 2008; IRIGOYEN et al., 2011).

En el paradigma propuesto por el CONFEDI, el "saber hacer" toma un rol preponderante en el desarrollo de la clase, que ya no estará centrada únicamente en el "saber qué, cómo y por qué". Esto da lugar a una tensión dialéctica ente las nociones de competencia y de conocimiento matemático. En este trabajo en particular, se estudia la vinculación entre las competencias profesionales del ingeniero electrónico y los conocimientos matemáticos que forman parte del Cálculo Diferencial e Integral. Profundizar la comprensión de esta conexión puede orientar el rediseño de los currículos de matemáticas de esta carrera, bajo una perspectiva didáctica que busque equilibrar dicha tensión.

A partir de este contexto, se considera que establecer un referencial sobre qué prácticas matemáticas son irrenunciables en la formación de un Ingeniero facilitará y fortalecerá la instrucción matemática (GODINO, 2003; GODINO; BATANERO; FONT, 2009) basada en el Enfoque por Competencias desde los distintos descriptores de conocimientos, acorde a lo que plantea el CONFEDI (2014, 2016, 2018).

Para tales fines, en el presente artículo se comparten los resultados obtenidos durante la primera fase de la investigación realizada durante los años 2019 a 2022, referida a determinar ese referencial para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en una variable desde la perspectiva del Enfoque por Competencias en la carrera de Ingeniería Electrónica.

La pregunta de investigación que orientó el desarrollo de esa primera fase fue inquirir cuáles son y cómo se caracterizan las prácticas matemáticas asociadas a los objetos matemáticos del Cálculo Diferencial e Integral que intervienen en la labor profesional del ingeniero electrónico. Es decir, identificar las prácticas matemáticas, discursivas y operativas, del Cálculo en una variable que intervienen directa o indirectamente en las actividades profesionales del ingeniero en esa especialidad.

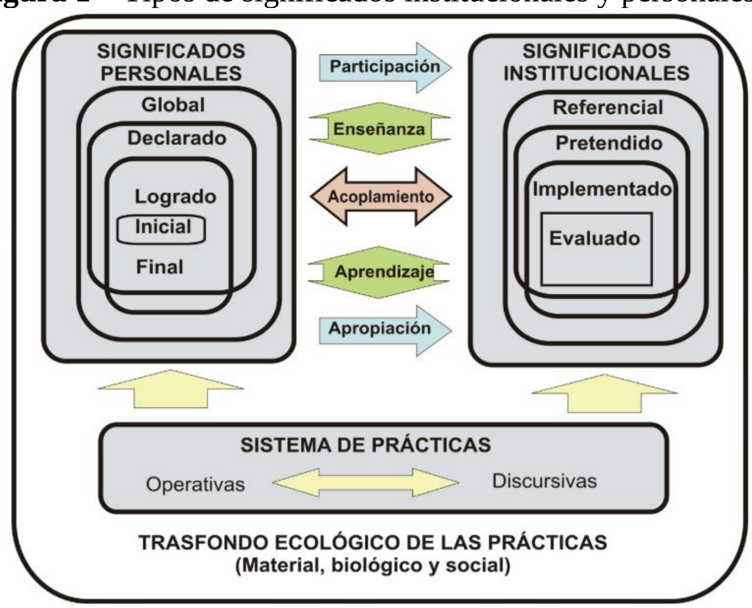
1. Referencial Teórico

El marco teórico de la investigación es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – EOS – (GODINO, 2003; GODINO et al., 2009; GODINO, 2018).

Godino y Batanero (1994) sentaron las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas. En este documento, los autores definen las nociones primitivas de *práctica matemática*, *institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento* y *comprensión del objeto*. Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (GODINO, 2003; GODINO et al., 2009; FONT; GODINO; GALLARDO, 2013) con una tipología de objetos y procesos matemáticos, así como con una interpretación de la *función semiótica* (correspondencia entre un objeto antecedente – expresión, significante – y otro consecuente – contenido, significado – establecida por una persona o institución, de acuerdo a un criterio de correspondencia) que permite elaborar nociones operativas de conocimiento, significado, comprensión y competencia (GODINO, 2018).

Para el EOS, la *práctica matemática* refiere a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etcétera) realizada por una persona en el momento de resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. De esta manera, se puede reconocer que las prácticas son idiosincráticas de una persona o compartidas en el seno de una institución (GODINO; BATANERO; FONT, 2020).

Figura 1 – Tipos de significados institucionales y personales.



Fuente: Godino et al. (2009, p. 6)

Se plantea que una *institución* está constituida por personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas:

> (…) el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento (GODINO et al., 2020, p. 6)

El EOS, debido a la relatividad socio-epistémica y cognitiva de los significados, introduce una tipología básica de significados que resume en la Figura 1.

En esta Figura 1, en relación a los significados institucionales, se define la tipología:

> - Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
> - Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
> - Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
> - Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. (GODINO et al., 2009, p. 5)

Y, respecto a los significados personales, se clasifica en:

> - Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
> - Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
> - Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen. (GODINO et al., 2009, p. 5)

Para comprender cómo interactúan o se acoplan los distintos tipos de significados, el EOS postula que el aprendizaje tiene como finalidad la apropiación por los estudiantes de significados y objetos institucionales que les permiten abordar la solución de determinados problemas.

Asimismo, los significados institucionales finalmente implementados en un proceso de instrucción pueden ser diferentes de los pretendidos y/o de referencia, debido a las restricciones impuestas por las posibilidades cognitivas de los estudiantes, los recursos disponibles y el contexto social y educativo. Sin embargo, se espera que "los significados institucionales pretendidos e implementados en un contexto educativo dado sean una muestra representativa del significado de referencia global" (GODINO et al., 2020, p. 9).

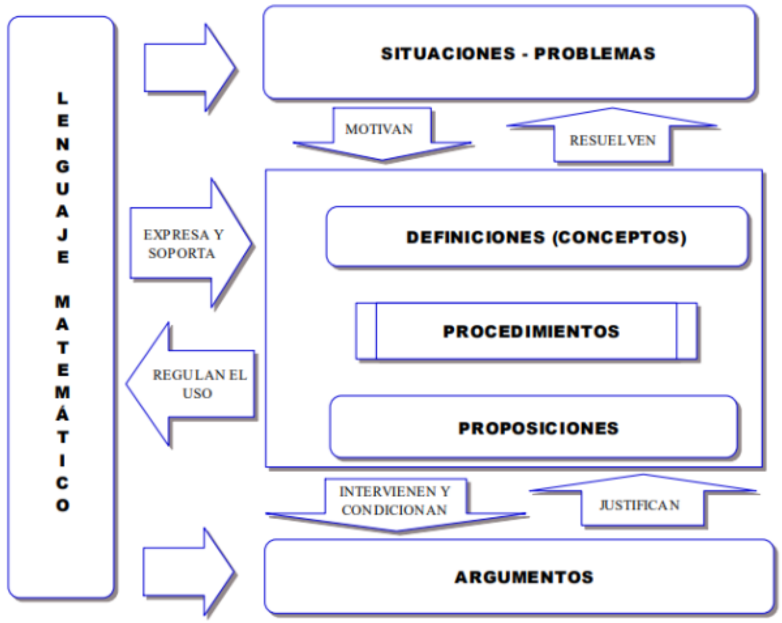
Debido a la generalidad con la que se entienden las nociones de práctica y de objeto, así como la gran diversidad de secuencias de prácticas (procesos) que se pueden realizar; el EOS considera necesario definir una tipología de objetos y procesos básicos, que son los reflejados en lo que se denomina *configuración ontosemiótica* (GODINO et al., 2020). Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Asimismo, el EOS reconoce que los objetos (problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas, permiten anticipar conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser institucionalizados. De esta forma, se define el principio ontológico: "la configuración ontosemiótica permite articular las nociones de práctica, objeto y proceso, así como las dualidades desde las cuales se pueden considerar dichas ideas para el análisis institucional y personal de la actividad matemática" (GODINO et al., 2020, p. 7).

Para interpretar las configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, el EOS propone poner en funcionamiento determinados conocimientos: "Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirven de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí" (GODINO et al., 2009, p. 7). En la Figura 2 se describe la configuración de objetos primarios, que incluyen seis tipos de entidades primarias se describen como:

> - Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
> - Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
> - Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
> - Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
> - Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
> - Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...). (GODINO et al., 2009, p. 7)

Figura 2 – Configuración de objetos primarios.



Fuente: Godino et al. (2009, p. 7)

En el EOS, la idea de *conflicto semiótico* alude a cualquier disparidad o discordancia entre los significados que se atribuyen a una expresión por dos sujetos (persona o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de conflictos semióticos de tipo epistémico; mientras que, si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, se designan como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) se consideran conflictos (semióticos) interaccionales (GODINO et al., 2009).

En el EOS, el análisis de la actividad matemática se hace a dos niveles, primero a nivel de prácticas operativas (que puede traducirse en el "saber hacer", la noción de "competencia") y segundo a nivel de la trama de objetos matemáticos implicados en las prácticas operativas y discursivas (que se enmarcan desde las nociones explicativas y justificativas). Asimismo, dado que en el hacer (la práctica) entran en juego instrumentos conceptuales y recursos lingüísticos y materiales, la pretensión de que la formación del sujeto independientemente de la carrera o del nivel educativo se sustente en base a competencias resulta insuficiente si no se tienen en cuenta los conocimientos necesarios para resolver las tareas.

Emerge, por lo tanto, una tensión dialéctica entre la formación basada en el desarrollo de competencias (CONFEDI, 2014) y la instrucción de la disciplina, en el caso del presente artículo, el Cálculo Diferencia e Integral. A continuación, se describe cómo haberse posicionado en constructos del EOS permite relajar dicha tensión.

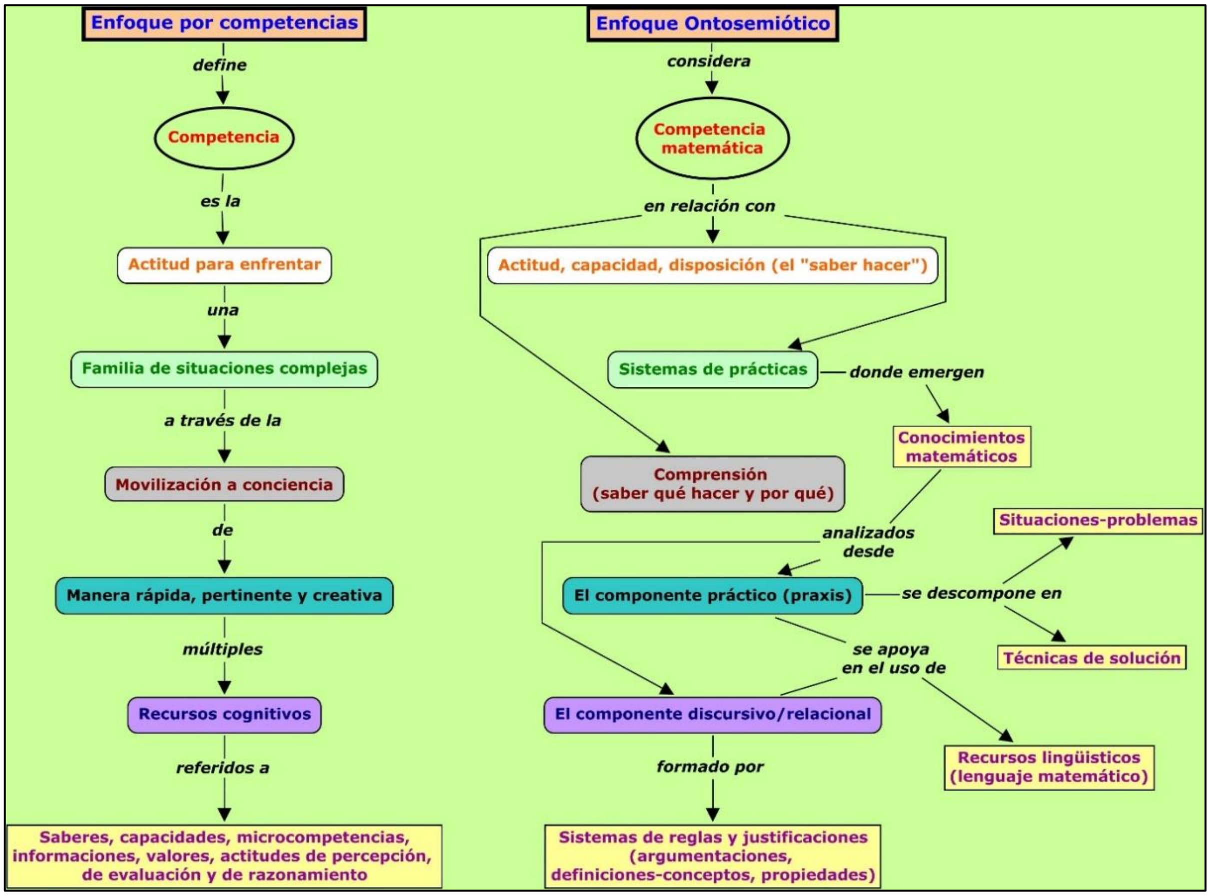
El primer vínculo entre el EOS y el Enfoque por Competencias se manifiesta en la noción de *competencia*, que ambos marcos teóricos incluyen y definen entre sus principales constructos teóricos.

Para Godino (2003) y Godino et al. (2009), según el posicionamiento pragmatista del EOS fundado en las ideas de Wittgenstein, la comprensión se entiende como competencia y no tanto como proceso mental.

A partir de la definición de *competencia* dada por el CONFEDI (2014, 2016, 2018) – basada en los aportes de Perrenoud y Le Boterf – y la noción de *competencia matemática* brindada en el EOS, se diseña la Figura 3 en la cual se representan las características de cada una de estas concepciones. En dicha Figura, los esquemas permiten identificar una notable equivalencia entre los términos que componen ambos enunciados.

Es importante notar que las conexiones entre ambas definiciones de competencia pueden interpretarse como una especie de *traducción* del concepto aplicado a la formación en general (desde el Enfoque por Competencias) adaptado a la instrucción matemática (en el EOS). Por ejemplo, se considera relevante la aproximación de ideas como el "saber hacer" expresado por el EOS, las *situaciones complejas* entendidas como *sistemas de prácticas*, la *movilización a conciencia* asociada a la *comprensión del saber qué hacer y por qué*, la forma en que se realiza dicha movilización con el *componente práctico* (praxis) y los múltiplos *recursos cognitivos* descripto por el Enfoque por Competencias entendidos como el *componente discursivo o relacional* del EOS.

Figura 3 – Relación entre noción de competencia desde el Enfoque por competencias y el EOS.



Fuente: Creación propia.

Otro vínculo entre los enfoques es la noción de *práctica significativa* considerada como “la actuación que la persona realiza en su intento de resolver una clase de situaciones-problemas y a la que reconoce o atribuye una finalidad (un para qué)” (Godino, 2003, p. 128). Esta definición compatibiliza con las propuestas de Perrenoud (2001, 2008, 2009) acerca de la importancia otorgada a los problemas complejos como movilizadores de saberes, la transferencia de conocimientos y la necesidad de centrarse en la acción.

En este sentido, Godino (2003) y Perrenoud (2009) insisten en focalizarse en la acción mediante situaciones-problemas complejos, la competencia como un saber-movilizar “de manera pertinente y en el momento oportuno” (Le Boterf, 1924 citado en Perrenoud, 2008, p. 3) o relacionada con el “poder” o “ser capaz” que está aparentada con la idea de saber, entender o dominar una técnica y que Wittgenstein (2008) describe: “pero hay también este empleo de la palabra ‘saber’: decimos ‘¡Ahora lo sé!’ y similarmente ‘¡Ahora puedo hacerlo!’ y ‘¡Ahora lo entiendo!’” (p. 151).

Otero (2019) manifiesta que el problema fundamental del Enfoque por Competencias es la dificultad que presenta para dar lugar al conocimiento matemático. Ello se debe al intento de generalizar ciertos procesos como si fueran independientes al conocimiento científico: "señalamos como problema fundamental, la ausencia de una perspectiva epistemológica apropiada sobre el conocimiento y la falta de un marco teórico cognitivo y didáctico adecuado para tratar científicamente la noción de competencia" (Otero, 2019, p 72).

Puede considerarse que el EOS responde a este último problema ya que, en su posicionamiento pragmatista, considera la conceptualización en la actividad, del mismo modo que Otero (2019) afirma: "para saber cómo se movilizan las competencias en un trabajo, es necesario considerar la relación entre conceptualización y la acción" (p. 80).

En el campo de la formación de adultos, se focaliza en el estudio de la actividad más que en el saber, y "se diferencia entre tarea y actividad a partir del análisis del trabajo que realiza un operario, porque la actividad siempre engloba más que la tarea prescripta" (Otero, 2019, p. 81). En función a ello, la idea de competencia es del orden operatorio y para abordar cómo se desarrollan competencias, "es necesario pasar a una dimensión teórica, que permita estudiar y analizar la conceptualización en la acción" (Otero, 2019, p. 84).

En relación con esta concepción sobre la *conceptualización* en la actividad, el EOS considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo utiliza de manera competente en diferentes prácticas (Godino et al., 2009). A través de la noción de configuración didáctica, este marco teórico focaliza el diseño y el análisis de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la resolución de situaciones problemas: "el sistema de acciones que realiza el docente y los estudiantes para abordar la solución de los problemas, con los recursos disponibles y en el contexto fijado" (GODINO et al., 2009, p. 21).

Otero (2019) señala que el desarrollo de competencias en las instituciones educativas requiere no solo de un énfasis en la actividad productiva y epistémica, en la formación de un sujeto capaz, sino también en ofrecer la posibilidad de "una actividad productiva rica, que a largo plazo permita (…) el desarrollo de saberes y no solo las formas eficaces de actuar" (p. 95). Nuevamente, el EOS permite abordar este requerimiento cuando define las configuraciones (redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre ellos mismos) como socio-epistémicas o cognitivas, y la necesidad de "elaborar otras herramientas para poder realizar un análisis didáctico integral que sirva de fundamento para el diseño, implementación y evaluación de los procesos instruccionales” (GODINO et al., 2020, p. 9).

2. Metodología

Las características metodológicas de la investigación fueron de tipo cualitativo e interpretativo, debido a que se pretendió analizar los significados institucionales atribuidos al Cálculo Diferencial e Integral en una variable en la carrera de Ingeniería Electrónica, mediante la exploración “desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto (…) profundizando en sus puntos vista, interpretaciones y significados” (HERNÁNDEZ SAMPIERI; FERNÁNDEZ COLLADO; BAPTISTA LUCIO, 2014, p. 358).

De acuerdo a la agenda que el EOS (GODINO, 2003) plantea sobre la investigación para la didáctica de la Matemática, el proyecto de investigación quedó caracterizado por los siguientes aspectos:

(a) El fin perseguido comprende la *semiometría* (caracterización de significados) y la *ecología de significados* (búsqueda de relaciones entre significados) en la dimensión institucional relacionados a la instrucción matemática basada en el desarrollo por competencias.

(b) La categoría del foco de investigación es *epistémica*, porque refiere a los significados institucionales en el nivel universitario, fundamentalmente los referenciales, y su relación con los pretendidos, implementados y evaluados.

El diseño metodológico escogido para la primera fase que en el presente artículo se describe, llevó a situar a la investigación en:

- *Exploratoria*: se indaga sobre las prácticas discursivas y operativas, atribuidas al Cálculo en una variable, que ponen en juego los ingenieros electrónicos.
- *Empírica*: basada en la observación directa, con un trabajo fundamentado en hechos de experiencia directa no manipulados por el investigador.
- *Hermenéutica*: en el sentido de que se realizan interpretaciones sobre las interpretaciones que hacen los sujetos (ingenieros).

No se partió de hipótesis previamente establecidas, sino que se generaron a partir de conjeturas cuya validez es testada en el transcurso de la investigación. Esta decisión está en consonancia con las características que Godino (2003) les confiere a los estudios cualitativos desarrollados bajo el EOS.

Para caracterizar las prácticas matemáticas asociadas a objetos matemáticos del Cálculo Diferencial e Integral que intervienen en la labor profesional del ingeniero electrónico se llevaron a cabo dos procesos en forma consecutiva:

1) Un análisis de trabajos finales aprobados de la Práctica Profesional Supervisada (PPS) brindados por el Departamento de Electrónica en la Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Avellaneda (UTN-FRA), Provincia de Buenos Aires, Argentina.
2) La realización de entrevistas semiestructuradas (HERNÁNDEZ SAMPIERI et al., 2014), bajo la *técnica de saturación* de la Teoría Fundamentada (GLASER; STRAUSS, 1967), a ingenieros electrónicos que trabajen o trabajaron específicamente en su campo profesional.

El primer proceso permitió retroalimentar y enriquecer el diseño y la formulación de preguntas adicionales (HERNÁNDEZ SAMPIERI et al., 2014) a incorporar durante el desarrollo del segundo proceso.

2.1. Reconocimiento de objetos matemáticos en trabajos finales de la PPS

Con el objetivo de determinar los objetos matemáticos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas (GODINO et al., 2009) en algunos trabajos finales de la PPS del último año en la carrera de Ingeniería Electrónica de los años 2016, 2017 y 2018 en la UTN-FRA, se obtuvo el permiso del director del Departamento de Ingeniería Electrónica para el acceso a los mencionados trabajos finales.

La selección de los trabajos finales se efectuó siguiendo dos principios:

(i) Evitar considerar más de un trabajo con temáticas o actividades en extremo parecidas (esto se debe a que se observa un alto número de reiteración de la misma temática en varios trabajos, a pesar de que se trata de una tarea a realizar en forma individual).

(ii) Las situaciones-problemas que se abordan en los trabajos abarquen la totalidad de las competencias específicas definidas por el CONFEDI (2018).

Para realizar esta labor, se generó una re-enumeración de las competencias específicas de egreso para la carrera Ingeniería Electrónica (CONFEDI, 2018) que se describe en el Cuadro 1, donde se focalizó la atención en los *verbos* – entendidos como "acciones esperadas" (JEREZ; HASBÚN; TITTERSHAUSSEN, 2015) – de cada competencia.

Se diseñó una ficha de datos (*ver* un ejemplo en el Cuadro 2) para el reconocimiento de objetos matemáticos emergentes en cada uno de los 18 (dieciocho) trabajos finales seleccionados, iniciando por las competencias específicas, luego la descripción de la temática abordada y posteriormente la configuración de los objetos matemáticos propuestos por el EOS: situaciones-problemas extra-matemáticos, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Cuadro 1 – Re-enumeración de competencias específicas de la Ingeniería Electrónica.

N°	Verbos	Contexto y/o finalidad
1	Diseñar, proyectar y calcular	(a) Sistemas, equipos y dispositivos de generación, transmisión y/o procesamiento de campos y señales analógicas y digitales.
		(b) Circuitos Integrados
		(c) Hardware de sistemas de cómputo de propósito general y/o específico y el software a él asociado
		(d) Hardware y software de sistemas embebidos y dispositivos lógicos programables.
		(e) Sistemas de automatización y control.
		(f) Sistemas de procesamiento y de comunicación de datos y sistemas irradiantes, para brindar soluciones óptimas de acuerdo a las condiciones técnicas, legales, económicas, humanas y ambientales.
2	Plantear, interpretar, modelar y resolver	Problemas de Ingeniería (a), (b), (c), (d), (e), (f)
3	Plantear, interpretar, modelar, analizar y resolver	(g) Problemas, diseño e implementación de circuitos y sistemas electrónicos.
4	Diseñar, proyectar y calcular	(a), (b), (c), (d), (e), (f) para la generación, recepción, transmisión, procesamiento y conversión de campos y señales para sistemas de comunicación.
5	Proyectar, dirigir y controlar	La construcción, implementación, mantenimiento y operación de (a), (b), (c), (e), (f), (g).
6	Validar y certificar	El funcionamiento, condición de uso o estado de los sistemas (a), (b), (c), (e), (f), (g).
7	Proyectar y dirigir	Lo referido a la higiene y seguridad en la actividad profesional de acuerdo a la normativa vigente.

Fuente: Elaboración basada en CONFEDI (2018).

De esta manera se logró un ordenamiento de los trabajos de acuerdo a las competencias específicas asociadas a las tareas realizadas en los mismos.

El análisis de estas fichas permitió inferir rápidamente que los trabajos seleccionados recorren todas las competencias específicas, como puede apreciarse en la Tabla 1.

2.2. Reconocimiento de objetos matemáticos en las entrevistas a ingenieros electrónicos

Con el fin de inquirir los objetos matemáticos que emergen de las prácticas profesionales de ingenieros electrónicos, se diseñó un protocolo para guiar las entrevistas. Para contactar a los entrevistados, se recurrió al departamento de Ingeniería Electrónica de la UTN-FRA, de donde pudieron obtenerse medios para contactar a ingenieros egresados de esta facultad como de otras universidades (Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires y la Facultad Regional de Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional).

Cuadro 2 – Ejemplo de la ficha de análisis de un trabajo final.

Competencias específicas	**1) (e); 2); 6); 7)**
Temática abordada	Mantenimiento del material rodante (subtes). Uso de software y hardware del funcionamiento de subterráneos en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. (2016)
Configuración de los objetos matemáticos	**Situaciones-problemas extra-matemáticos** Actividades y tareas de mantenimiento integral (mecánico, neumático, eléctrico y electrónico) preventivo y correctivo de todas las formaciones que prestan los servicios en la línea D de subterráneos.
	Elementos lingüísticos Planos de recorridos de los trenes. Tablas de datos de doble entrada. Descripción de los coches (alimentación, velocidades máximas, aceleración, máximos de pasajeros sentados y parados, ciclos de mantenimiento). Gráficos de curvas que modelizan los sistemas de códigos de velocidad (curvas continuas, decrecientes, de concavidad negativa, por tramos). Intervalos y entornos sobre velocidades, expresadas en porcentajes. Desigualdades, límites de velocidades mediante tablas con cotas (valores de velocidad permitida en función al modo de operación). Expresión algebraica racional.
	Conceptos Función continua y puntual. Noción de cotas (máximos y mínimos). Noción de intervalos reales. Entorno real (por ejemplo: 133 +/- 10 mm en el posicionamiento de antenas respecto a un riel de las vías) Volumen de cajas. Diámetro de ruedas.
	Proposiciones Explicación del comportamiento funcional (velocidades, frenados, frecuencia de señales) Afirmaciones sobre el comportamiento de la fórmula de frecuencia de señales.
	Procedimientos Análisis de la fórmula de frecuencia de señales: $f = V\frac{60000}{\pi.(\varphi+5).3,6}$ f: frecuencia de entrada en Hz, V: velocidad en km/h, φ: diámetro de la rueda.
	Argumentos Se fundamenta el rango de frecuencia de 0 a 700 Hz debido a la velocidad máxima de 100 km/h y el diámetro de rueda mínimo de 780 mm. La tensión de salida del tacómetro varía de 500mVpp a 15 Vpp proporcionalmente con la velocidad. Explicación de curvas que describen el frenado del tren, en intervalos de distancia, continuo o puntal y las ventajas de uno u otro sistema de frenado del tren (sistemas ATP continuos o puntuales).

Fuente: Creación propia.

Tabla 1 – Conteo de trabajos finales de acuerdo a las competencias específicas.

	Competencia específica		Cantidad de TF de la PPS	Total de TF por verbos
1	Diseñar, proyectar y calcular	(a)	3	13
		(b)	1	
		(c)	1	

		(d)	1	
		(e)	5	
		(f)	2	
2	Plantear, interpretar, modelar y resolver	---	13	13
3	Plantear, interpretar, modelar, analizar y resolver	(g)	4	4
4	Diseñar, proyectar y calcular	(a), (b), (c), (d), (e), (f)	11	11
5	Proyectar, dirigir y controlar	---	3	3
6	Validar y certificar	---	9	9
7	Proyectar y dirigir	---	6	6

Fuente: Creación propia.

Cuadro 3 – Descripción de los ingenieros electrónicos entrevistados.

Denominación del Ingeniero	Edad	Antigüedad laboral	Competencia específica asociada a la labor profesional	Instrumento utilizado	Períodos de realización
I1	28	4	1)e); 2)e); 6); 7)	Audios de WhatsApp	1°) febrero-marzo 2019 2°) octubre 2019
I2	43	12	1)a); 2)a); 4)f); 6)	Grabación de audio en encuentro presencial	31/7/2019
I3	38	5	2)a); 4)a); 7)	Audios de WhatsApp	09/11/2019 al 25/11/2019
I4	41	8	1)b); 2)b); 5)	Grabación por Zoom	1°/02/2021
				Audio de WhatsApp	02/03/2021
I5	32	7	1)a); 2)a); 3); 6)	Grabación por Zoom	22/1/2021
				Audio de WhatsApp	02/03/2021
I6	31	5	2)c); 2)d); 3); 4)c); 4)d)	Grabación por Zoom	20/12/2020
				Audio de WhatsApp	04/03/2021
I7	70	42	1)d); 2)d); 5)	Grabación por Zoom	28/1/2021

Fuente: Creación propia.

El requisito para seleccionar los profesionales a entrevistar fue que su desempeño laboral esté exclusivamente asociado a la Ingeniería Electrónica. El motivo de esta categoría preliminar se fundamenta en que las respuestas no estuvieran influenciadas por cuestiones referidas a otras tareas. Por ejemplo, que además de ser ingenieros electrónicos fueran docentes podría inferir en sus perspectivas acerca de lo que realmente se reconoce como conocimientos matemáticos en las tareas de la labor profesional versus los saberes que se consideran “necesarios” durante su formación o el cursado de las materias de las que son profesores.

Para la realización de las entrevistas y generar el protocolo de preguntas, se tuvieron en cuenta algunas características de las *entrevistas cualitativas* sugeridas por Hernández Sampieri et al. (2014): las entrevistas no tienen predeterminado el principio o el cierre, algunas son efectuadas en varias etapas (*ver* Períodos de realización en el Cuadro 3); las preguntas y el orden en que se realizan se adecuan a los ingenieros de acuerdo a sus tiempos e intereses; tanto el investigar como el entrevistado comparten el ritmo y la dirección de la entrevista; el contexto social (lugar de estudio y/o trabajo, antigüedad laboral, experiencia en otras actividades) es considerado para la interpretación de significados, ajustar el modo de la comunicación y el lenguaje al del entrevistado; y se realizan preguntas abiertas y fundamentalmente neutras (es decir, el entrevistador no adjetiva u opina sobre las temáticas abordadas) debido a que se pretende obtener perspectivas, experiencias y opiniones de los ingenieros en su propio parecer.

A las preguntas generales se incluyeron preguntas para orientar (por ejemplo: ¿Podría ejemplificar en qué consiste el sistema de control PID?), preguntas de estructura (por ejemplo: ¿Qué tipo de conocimientos matemáticos puso en juego al resolver la falla en la temperatura y presión del tanque?) y de contraste (por ejemplo: En la UTN-FRA se está llevando adelante una propuesta de enseñanza de la Derivada desde la noción de razón de cambio frente a un abordaje anterior que únicamente la definía como pendiente de la recta tangente, ¿usted cree que sea relevante en la formación de un ingeniero electrónico esta propuesta? ¿Por qué?).

En el Cuadro 3 se resume la información acerca de los siete ingenieros electrónicos entrevistados, competencias específicas definidas por el CONFEDI (2018) asociadas a su labor profesional, los instrumentos y los períodos de tiempo en que se realizan las entrevistas.

A partir de la información presentada en el Cuadro 3 puede inferirse que, con las entrevistas realizadas, – por un lado – se logró abarcar la mayoría de las competencias específicas y – por otro lado – considerar que la mayoría de ingenieros están activos en su labor profesional, lo que permite tener en cuenta una experiencia laboral actualizada en la Ingeniería Electrónica.

En el protocolo diseñado para las entrevistas, las preguntas con que se inició todas ellas fueron:

1) A partir de la lectura de la tabla de competencias específicas propuestas por el CONFEDI (2018)[6], ¿con cuál/es de ellas se relaciona su práctica profesional?

[6] Cuando el ingeniero aceptaba realizar la entrevista, se le enviaba con anterioridad y para su lectura la tabla de competencias específicas por mail o WhatsApp. Vale mencionar que la mayoría de los entrevistados recién leía esta tabla al iniciar el encuentro.

2) ¿Qué conocimientos asociados al Cálculo Diferencial e Integral en una variable reconoce estar utilizando (en forma directa o indirecta) en sus tareas laborales?

En función a la *técnica de saturación* de la Teoría Fundamentada (GLASER Y STRAUSS, 1967), a partir de la reiteración de respuestas y con el fin de profundizar en las actividades profesionales, en las últimas cuatro entrevistas se incluyó el siguiente interrogante durante la finalización de las mismas:

3) A partir de la lectura de las competencias generales definidas por el CONFEDI (2014), ¿qué grado de relevancia otorgaría a cada una de ellas durante la labor del ingeniero electrónico?

Asimismo, debido a que –previo a la entrevista– era frecuente que los ingenieros solicitaran que se expliciten los contenidos que se trabajan en Cálculo Diferencial e Integral en una variable, fue necesario adjuntar una enunciación de dichos contenidos a la tabla de competencias específicas.

Al inicio de las entrevistas, lo primero que manifestaron los ingenieros es que para ellos varios de los saberes de dicha materia no eran implementados en su campo laboral. Frente a ello, el entrevistador consideró incluir reiteradas veces la pregunta adicional (HERNÁNDEZ SAMPIERI et al., 2014): ¿Podría describir o ejemplificar cómo realiza alguna tarea en que reconozca cuestiones matemáticas?

Haber realizado esta pregunta permitió superar esa resistencia o creencia inicial sobre la ausencia de uso de conocimientos asociados al Cálculo Diferencial e Integral en una variable, porque al mencionar esas tareas matemáticas se pudo inferir cómo en forma explícita o implícita emergían saberes asociados a la mencionada rama de la Matemática.

El número total de entrevistas realizadas respondió a la mencionada técnica de saturación de la Teoría Fundamentada. En ellas hay aspectos que se reiteran y respuestas que coinciden, lo que dio lugar a construir categorías que emergen de acuerdo a dicha técnica de saturación.

Algunas categorías preliminares (tipos y número de preguntas, selección de ingenieros a entrevistar, conocimientos iniciales asociados a la ingeniería electrónica del entrevistador) son refinadas en las primeras tres entrevistas. Por ejemplo, se incluyó la lista de contenidos asociados al Cálculo Diferencial e Integral en una variable, se focalizó en solicitar mayor descripción en los ejemplos de prácticas realizadas.

A partir de la quinta entrevista se vuelve a refinar las categorías; por ejemplo, el entrevistador consideró necesario investigar y profundizar en conocimientos acerca de nociones de la Física o Ingeniería Electrónica tal como el sistema de control Proporcional, Integral y Derivativo –PID–, mencionado reiteradas veces por los entrevistados.

Finalmente, en la séptima entrevista se considera la saturación porque, por ejemplo, al incluir un ingeniero electrónico jubilado cuya formación y experiencia distaba en relación a los anteriores entrevistados se observó que las respuestas volvieron a reiterarse.

3. Análisis y resultados

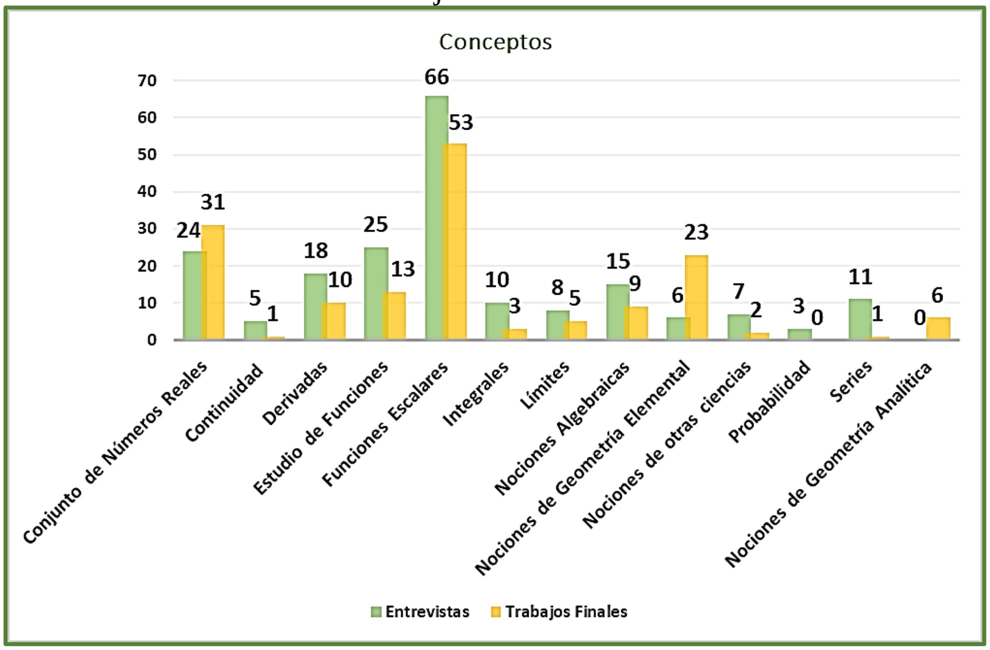
A partir del análisis de las respuestas dadas por los ingenieros entrevistados, se pudieron identificar referencias a las siete competencias específicas que posteriormente se compararon con los datos relevados en los trabajos finales.

En una primera instancia, de igual manera que se tabulan los objetos matemáticos encontrados en cada una de las entidades primarias que conforman las configuraciones de objetos en los trabajos finales de la PPS, se utilizó el mismo formato del Cuadro 2 para el inferir las frecuencias absolutas de aparición de esos objetos primarios en las transcripciones de las entrevistas a los ingenieros electrónicos. Por ejemplo, con el fin de triangular información (HERNÁNDEZ SAMPIERI *et al.*, 2014), se comparan los resultados obtenidos en el primer proceso referidos a los trabajos finales de la PPS con la emergencia de objetos primarios en las entrevistas. En el gráfico de la Figura 4 se puede apreciar la similitud entre frecuencias absolutas sobre Conceptos asociados a los objetos matemáticos del Cálculo Diferencial e Integral en una variable en dichos trabajos finales y en las respuestas brindadas por los ingenieros entrevistados.

Posteriormente, en una segunda etapa, se tabulan frecuencias absolutas de las configuraciones de objetos primeros agrupados por cada competencia. Esto fue posible, a partir de agrupar las respuestas de los ingenieros según las competencias específicas a las que cada uno de ellos había mencionado estar abocado en su labor profesional. De estas tablas de frecuencias absolutas, distinguidas según cada una de las siete competencias específicas de la Ingeniería Electrónica, se generaron gráficos estadísticos (*ver* Figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11). En cada uno de ellos, se subdividen las frecuencias absolutas de los contenidos asociados al Cálculo según cada objeto primario: elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos. De esta forma, se logra observar por cada competencia específica, cuál es la frecuencia absoluta con que emergen los objetos matemáticos asociados a esa rama de la

Matemática, en cada uno de los elementos de las configuraciones de objetos primarios que propone el EOS.

Figura 4 – Frecuencias absolutas de contenidos asociados a los Conceptos en las entrevistas y en los trabajos finales de la PPS.

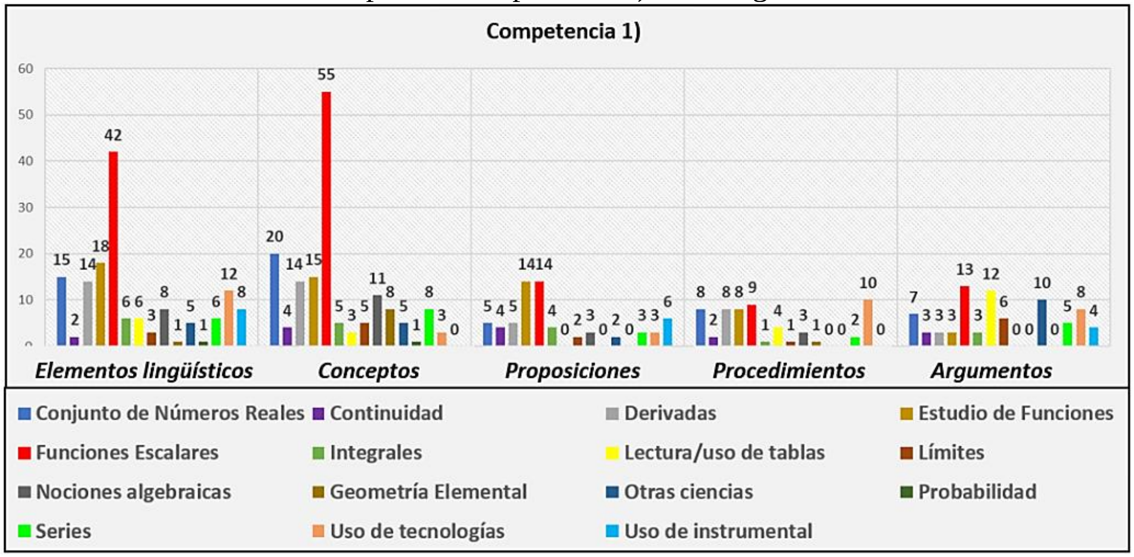


Fuente: Creación propia.

El análisis de estos gráficos conllevó a dar respuesta a la pregunta de investigación sobre los objetos matemáticos que se ponen en juego en las prácticas matemáticas asociadas al Cálculo Diferencial e Integral que intervienen en la labor profesional del Ingeniero Electrónico. Por ejemplo, recorriendo transversalmente los gráficos de las siete competencias, se destaca que los objetos matemáticos referidos a Funciones Escalares son los que emergen con mayor frecuencia durante las prácticas discursivas y operativas profesionales de los ingenieros electrónicos entrevistados.

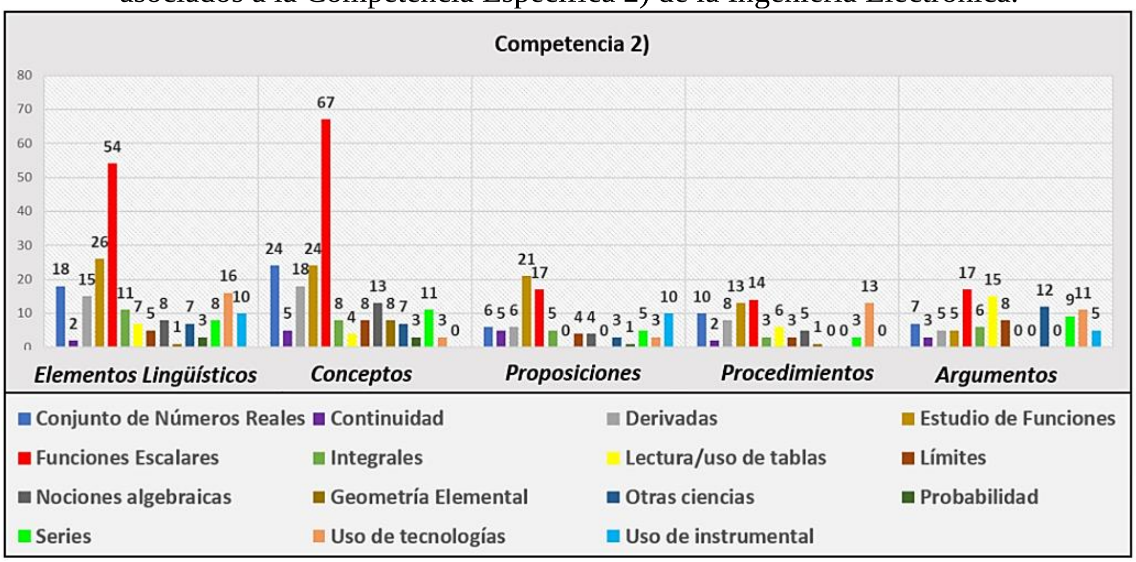
Asimismo, para las siete competencias específicas coincide que objetos matemáticos asociados al Conjunto de Número Reales y al Estudio de Funciones aparecen en forma significativa dentro de los elementos lingüísticos, conceptos y proposiciones; mientras que objetos primarios asociados a Series, a otras ciencias, al uso de tecnologías y a lectura de tablas resultaron los argumentos más relevantes. En particular, aparece con una frecuencia significativa el uso de instrumental y el uso de tecnologías dentro de las categorías proposiciones y procedimientos, respectivamente, en todas las competencias específicas.

Figura 5 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 1) de la Ingeniería Electrónica.



Fuente: Creación propia.

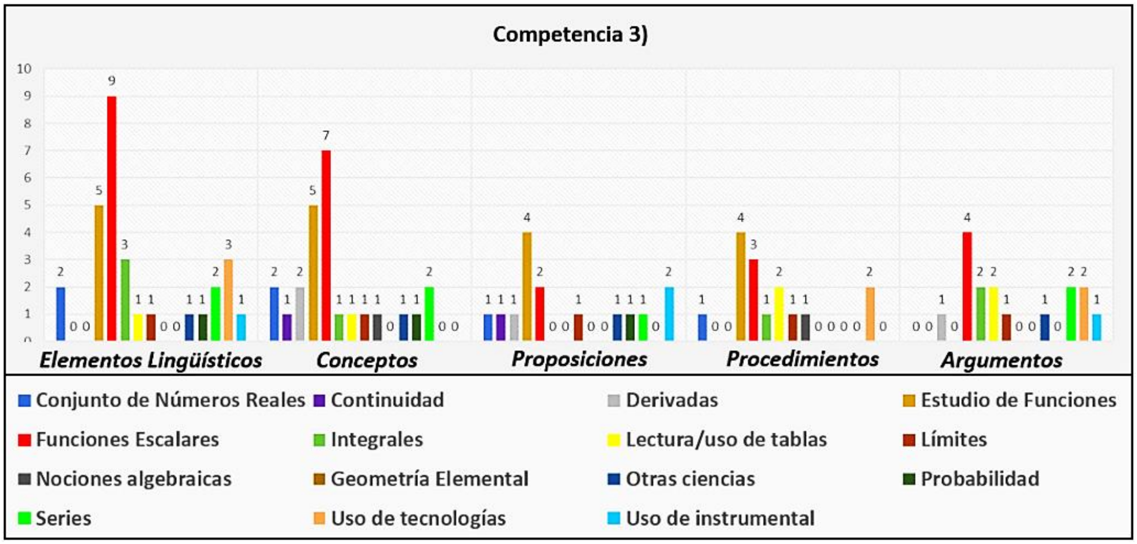
Figura 6 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 2) de la Ingeniería Electrónica.



Fuente: Creación propia.

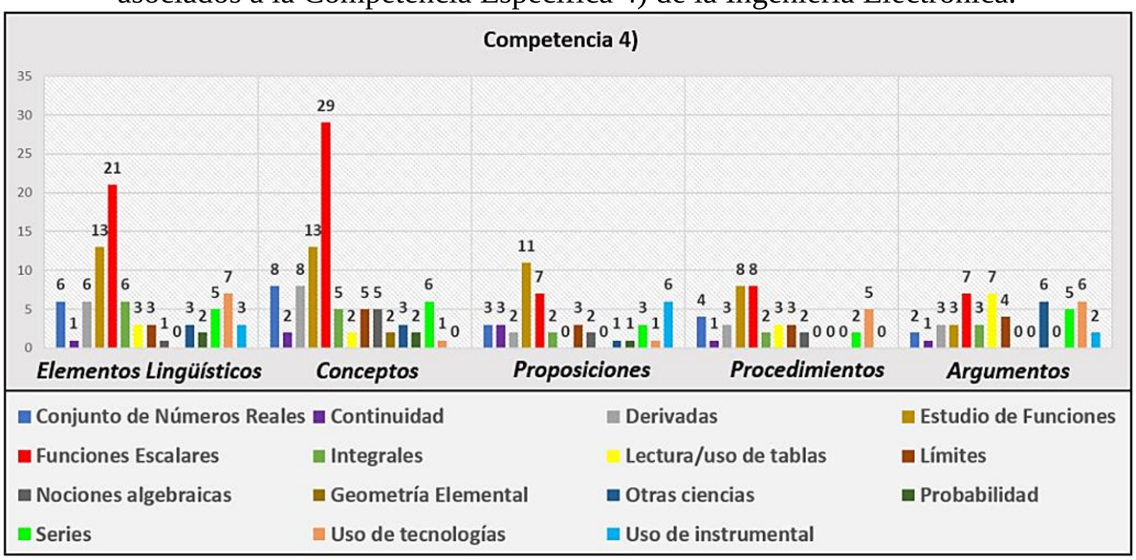
Por otra parte, los contenidos con menor frecuencia en las prácticas profesionales de los ingenieros entrevistados fueron objetos primarios sobre Continuidad y Límites.

Figura 7 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 3) de la Ingeniería Electrónica.



Fuente: Creación propia.

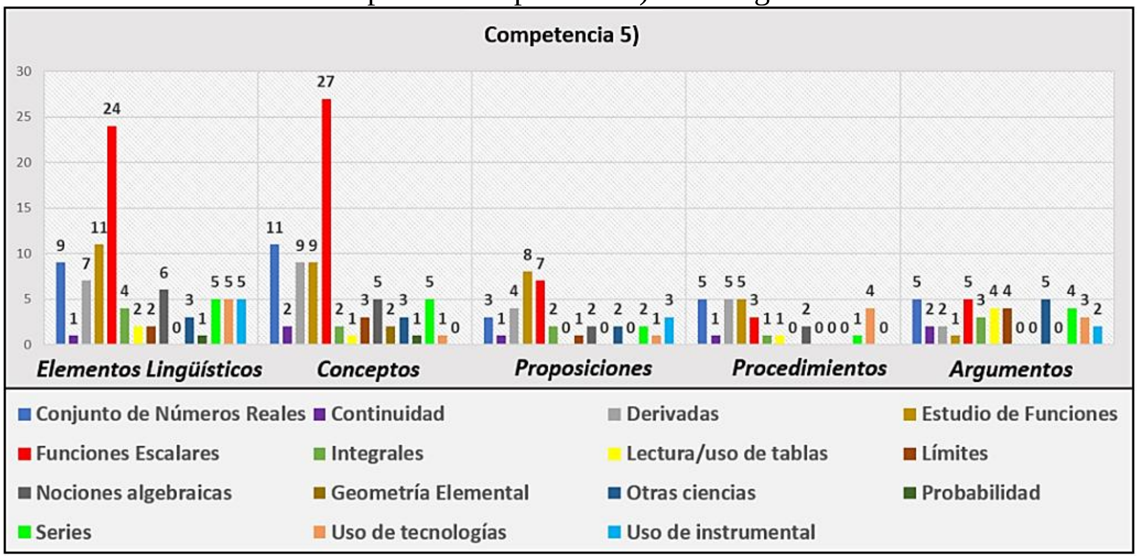
Figura 8 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 4) de la Ingeniería Electrónica.



Fuente: Creación propia.

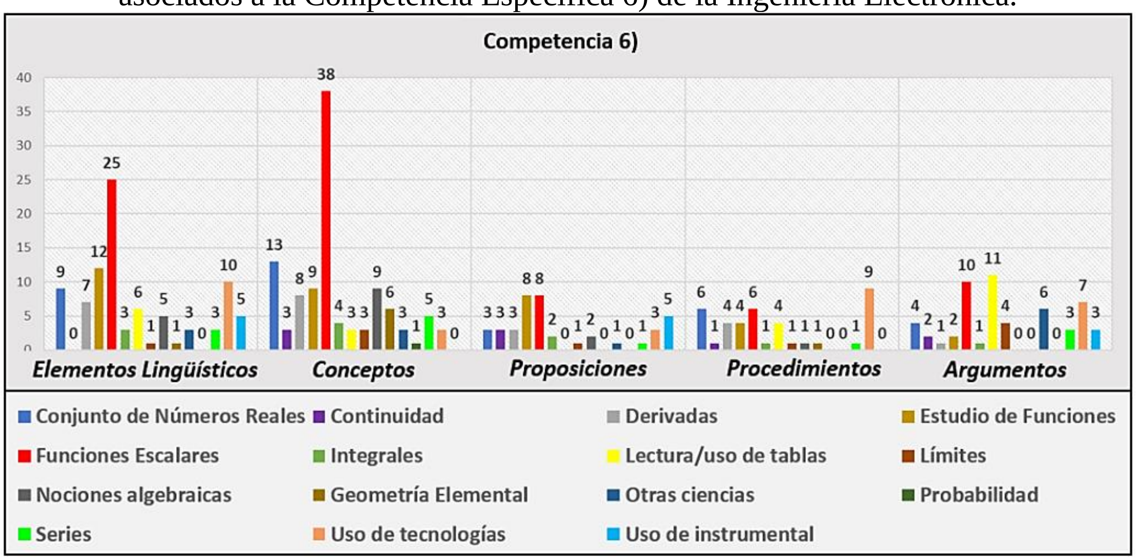
Las nociones de Derivadas aparecen entre los objetos primarios correspondientes a Conceptos de las siete competencias, mientras que las nociones de Integrales emergen tanto de los Elementos Lingüísticos como en los Conceptos de las siete competencias específicas. Asimismo, ambas nociones no resultaron ser objetos primarios que se presentaran en forma significativa dentro de las proposiciones, procedimientos y argumentos de todas ellas. Sin embargo, fue advertido que en la categoría procedimientos de las competencias 1, 5 y 6 emerge con cierta frecuencia objetos referidos a Derivadas.

Figura 9 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 5) de la Ingeniería Electrónica.



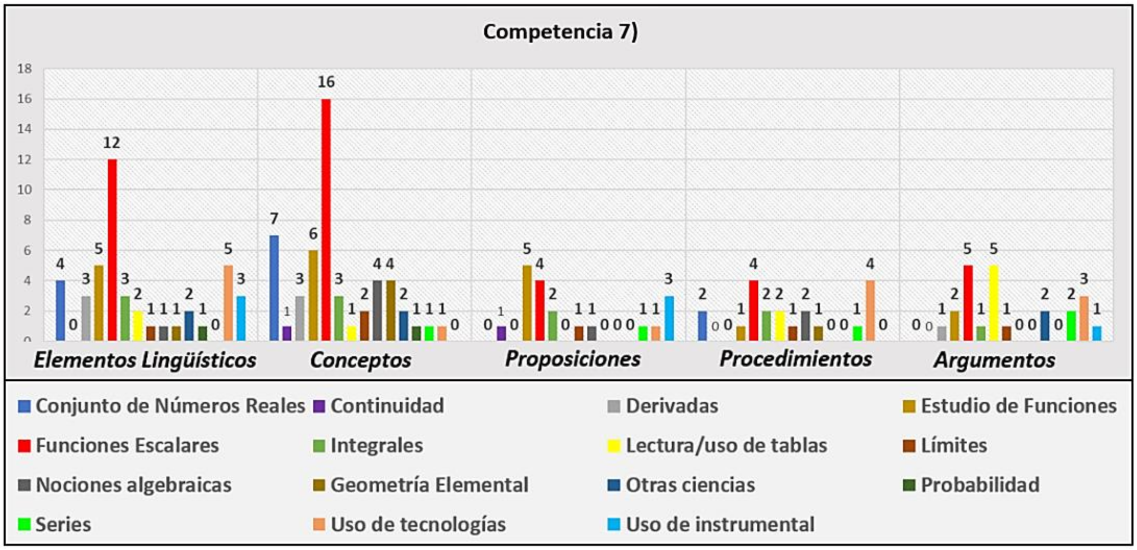
Fuente: Creación propia.

Figura 10 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 6) de la Ingeniería Electrónica.



Fuente: Creación propia.

Figura 11 – Frecuencias absolutas de contenidos del Cálculo según elementos primarios asociados a la Competencia Específica 7) de la Ingeniería Electrónica.



Fuente: Creación propia.

4. Conclusiones

El Enfoque por Competencias en la formación de ingenieros requiere de un proceso de cambio profundo y genuino en los modelos de enseñanza y de aprendizaje tradicional fuertemente enfocados en los saberes. Particularmente, lo que refiere a la enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería, se reconoce la permanencia de modelos de enseñanza formalistas y mecanicistas, donde los principios de la formación basada en competencias no encontrarían posibilidad de ser viables (POCHULU; D'ANDREA; FERREYRO, 2019).

Conocer cuál es la relevancia de los conocimientos asociados a un descriptor de conocimientos en la práctica profesional de la carrera de Ingeniería, puede representar el punto inicial para llevar adelante un cambio en el plan curricular de la enseñanza y el aprendizaje de ese descriptor basándose en el Enfoque por Competencias, donde lo central es el desarrollo de las competencias genéricas y las competencias específicas ya definidas por el CONFEDI (2014, 2018).

Para ejemplificar la potencialidad de estos resultados, se menciona que – para la segunda fase de la investigación realizada – conocer cuáles y cómo son los usos de los contenidos del Cálculo en una variable en la práctica profesional de los ingenieros electrónicos facilitó el diseño un dispositivo didáctico a implementar en la UTN-FRA durante los años 2020-2021. Esto se debe a que dicho dispositivo consistió en un nuevo Plan Anual de Actividades Académicas en la cátedra de Análisis Matemático 1 de esa facultad enmarcado en la Formación por Competencias, el Aprendizaje Basado en Problemas desde una perspectiva vygotskyana y una aproximación al estilo de enseñanza matemática contextualizado/realista. En el diseño de la nueva planificación de la materia, los contenidos se dividieron entre prioritarios y secundarios (o emergentes de los prioritarios) de acuerdo a los datos obtenidos que se representaron en los gráficos del apartado anterior; así, como también, las guías de actividades se generaron centrándose en los saberes que resultan más importantes para favorecer el desarrollo de las siete competencias específicas de la Ingeniería Electrónica.

Para finalizar, es pertinente reiterar que el reto que trae la propuesta del Enfoque por Competencias en la formación de Ingenieros consiste en alterar "la cultura institucional de nuestras universidades, generalmente muy asentada en tradiciones y rutinas establecidas durante siglos" (ZABALZA BERAZA, 2007, p. 1). Nos encontramos frente a una gran oportunidad de actualizar la educación universitaria con cambios significativos en la orientación de la formación de ingenieros, como por ejemplo comenzar a centrarse en dedicar mayor tiempo a ciertos contendidos de un descriptor de conocimiento porque resultan ser los más requeridos según las competencias a desarrollar en la carrera. Y esto no significa que en la enseñanza tradicional no se enseñara ni se aprendiera, como lo explica Vygotsky (2005) cuando afirma que "la lección que dicta [el docente] en forma acabada puede enseñar mucho, pero sólo inculca la habilidad y el deseo de aprovechar todo lo que proviene de manos ajenas, sin hacer ni comprobar nada" (p. 475) y agrega, entonces, "para la educación actual no es tan importante enseñar cierta cantidad de conocimientos, sino educar la aptitud de adquirir estos conocimientos y valerse de éstos" (p. 475).

Referencias

CAMARENA GALLARDO, P. Aportaciones de Investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en Ingeniería. **Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica. IPN**, Distrito Federal, 2010.

COLL, C. Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. **Aula de Innovación Educativa**, Madrid, v. 161, pp. 34–39, 2007.

CONFEDI. **Competencias en Ingeniería**. Buenos Aires, Argentina: Universidad FASTA, 2014.

CONFEDI. **Competencias y perfil del Ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación (ASIBEI)**. Bogotá, Colombia: Ed. ASIBEI, 2016.

CONFEDI. **Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la república argentina "libro rojo de CONFEDI"**. Buenos Aires, Argentina, 2018.

DÍAZ BARRIGA, A. El enfoque por competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? **Perfiles educativos**, Distrito Federal, v. 28, n. 111, pp. 7-36, 2005.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. La emergencia de objetos desde la práctica matemática. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, pp. 97–124, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

GIMENO SACRISTÁN, J. **Educar por competencias, ¿qué hay de nuevo?** Madrid, España: Morata, 2008.

GLASER, B.; STRAUSS, A. **The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research.** New York, EE.UU.: Aldine Publishing Company, 1967.

GODINO, J. D. **Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática**, Madrid, 2018. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf. Acceso en: 24 abril 2022.

GODINO, J. D. **Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.** Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2003. Disponible en: http://www.fceia.unr.edu.ar/~sreyes/ funciones_semioticas.pdf. Acceso en: 24 abril 2022.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. El Enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. **Revista Chilena De Educación Matemática**, Valparaíso, v. 12, n. 2, pp. 47-59, 2020.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, pp. 7-37, 2009.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 4, n. 3, pp. 325-355, 1994.

HERNÁNDEZ SAMPIERI, R.; FERNÁNDEZ COLLADO, C.; BAPTISTA LUCIO, M. **Metodología de la investigación.** [6ª Ed.]. México D. F.: Mc Graw Hill, 2014.

IRIGOYEN, J. J.; JIMÉNEZ, M.; ACUÑA, K. Competencias y educación superior. **RMIE**, [s.l.], v. 16, n. 48, pp. 243-266, 2011.

JEREZ, O.; HASBÚN, B.; RITTERSHAUSSEN, S. **El diseño de Syllabus en la educación superior. Una propuesta metodológica.** Región Metropolitana de Santiago, Chile: Edición Universidad de Chile, 2015.

LÓPEZ RUIZ, J. I. Un giro copernicano en la enseñanza universitaria: formación por competencias. **Revista de educación**, [s.l], v. 356, pp. 279-301, 2011.

OTERO, M. R. **Competencias ¿para qué?** Tandil, Argentina: Universidad Nacional del Centro de la provincia de Buenos Aires, 2019.

PERRENOUD, P. Enfoque por competencias ¿una respuesta al fracaso escolar? **Pedagogía Social. Revista Interuniversitaria**, Genebra, v. 16, pp. 45-64, 2009. DOI: https://doi.org/10.7179/PSRI_2009.16.04

POCHULU, M. D.; D'ANDREA, L. J.; FERREYRO, M. Indicadores referenciales para valorar planificaciones de matemática de ingeniería centradas en enseñanza por competencias, **Revista STEM 1**, Buenos Aires, pp. 66-83, 2019.

RODRÍGUEZ ZAMBRANO, H. El paradigma de las competencias hacia la educación superior. **Revista de la Facultad de Ciencias Económicas: Investigación y Reflexión**, Bogotá, v. 15, n. 1, pp. 145-165, 2007.

TOBÓN, S. **Aspectos básicos de la formación basada en competencias**. Talca, Chile: Proyecto Mesesup, 2006.

TOBÓN, S. **Formación integral y competencias. Pensamiento complejo, currículo, didáctica y evaluación**. Bogotá, Colombia: ECOE, 2013.

VYGOTSKY, L. S. **Psicología Pedagógica.** Buenos Aires, Argentina: Aique, 2005.

ZABALZA BERAZA, M. El trabajo por competencias en la enseñanza universitaria. En **Cátedra de didáctica y Orientación Escolar, Ediciones online de Universidad de Santiago de Compostela**, Galicia, pp. 1-55, 2007. Material online disponible: CONFERÈNCIA (uab.cat) Acceso en: 24 abril 2022.

Autores

Leonardo Javier D'Andrea

Profesor en Matemática, Licenciado en Educación con Orientación en Enseñanza de la Matemática, Especialista en Docencia en Entornos Virtuales, Magister en Educación. Se encuentra en el proceso de entrega de la Tesis en la carrera Doctorado en Enseñanza de las Ciencias (Mención en Matemática) en la Universidad Nacional del Centro, provincia de Buenos Aires, Argentina. Profesor de Matemática en el Nivel Secundario y Nivel Terciario. Profesor Adjunto en las cátedras de Análisis Matemático 1 y de Álgebra y Geometría Analítica, secretario de la Unidad Docente Básica de Matemática y coordinador de Área del Seminario Universitario Matemática en la Facultad Regional Avellaneda - Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires, Argentina. Las líneas de investigación se enmarcan en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral

ldandrea@fra.utn.edu.ar

https://orcid.org/0000-0002-7115-6534

Marcel David Pochulu

Doctor en Didáctica de la Matemática. Profesor Titular regular de la Universidad Nacional de Villa María y de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Villa María (Argentina), en carreras de grado. Profesor de posgrado en universidades nacionales e internacionales. Cuenta con Estancias Posdoctorales en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada y Universitat de Barcelona, España), y estancia académica en el IPN-CINVESTAV de Ciudad de México

mpochulu@unvm.edu.ar

https://orcid.org/0000-0003-2292-4178

María Laura Distéfano
Profesora en Matemática (Universidad Nacional de Mar del Plata). Magister en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior (Universidad Nacional de Tucumán). Doctora en Enseñanza de las Ciencias – Mención Matemática (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires). Profesora Adjunta en el área Álgebra, con dedicación exclusiva, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Directora del Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI). Las líneas de investigación están focalizadas en la Didáctica de la Matemática en el nivel universitario, con particular énfasis en las carreras de Ingeniería.
mldistefano@fi.mdp.edu.ar
https://orcid.org/0000-0002-0122-7317

Como citar o artigo:
D'ANDREA, L. J.; POCHULU, M. D.; DISTÉFANO, M. L. Objetos matemáticos asociados al Cálculo Diferencial e Integral en carreras de Ingeniería. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS,** junio de 2023 / 84 – 111 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p84-111.id1383

Prácticas de Autorregulación en la Propuesta Didáctica de un Futuro Profesor de Matemáticas: Un Instrumento para la Reflexión

Diana Hidalgo-Moncada
dhidalmo7@alumnes.ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-2573-9007
Universidad de Barcelona (UB)
Barcelona, España.

Javier Díez-Palomar
jdiezpalomar@ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-4447-1595
Universidad de Barcelona (UB)
Barcelona, España.

Yuly Vanegas
yuly.vanegas@udl.cat
https://orcid.org/0000-0002-8365-1460
Universidad de Lleida (UdL)
Lleida, España.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Desde la década de 1990, en la sociedad del conocimiento, ha cobrado gran interés la enseñanza centrada en el alumno. Las investigaciones señalan que el docente debe promover en sus estudiantes el desarrollo de habilidades que les permitan llevar a cabo sus procesos de aprendizaje de forma autorregulada, lo que les permitirá obtener un mayor éxito académico, especialmente en el área de las matemáticas. En este estudio se analizan las prácticas de autorregulación que promueve un futuro profesor de matemáticas de educación secundaria en su Trabajo Final de Máster. Se identifican las prácticas promovidas en la secuencia didáctica implementada por el futuro profesor y aquellas que promueve en la propuesta de mejora. Para el análisis se utiliza el instrumento Promoción del Aprendizaje Autorregulado en las Matemáticas, el cual consta de 23 prácticas de autorregulación clasificadas según los seis criterios de idoneidad didáctica que propone el Enfoque Onto-semiótico. Los resultados muestran que, en la planificación inicial, el futuro profesor promovió con mayor frecuencia prácticas relacionadas con los criterios epistémico y cognitivo, mientras que, en su propuesta de mejora, incorporó prácticas que no habían sido consideradas previamente, como aquellas relacionadas con los criterios afectivo e interaccional.

Palabras clave: Autorregulación del aprendizaje. Matemáticas. Formación de profesores. Enfoque onto-semiótico.

Práticas de Autorregulação na Proposta Didática de um Futuro Professor de Matemática: Um Instrumento de Reflexão

Resumo

Desde a década de 1990, na sociedade do conhecimento, o ensino centrado no aluno ganhou grande interesse. A pesquisa indica que o professor deve promover nos seus alunos o desenvolvimento de competências que lhes permitam realizar os seus processos de aprendizagem de forma autorregulada, o que lhes permitirá obter maior sucesso académico, sobretudo na área da matemática. Este estudo analisa as práticas de autorregulação promovidas por um futuro professor de matemática do Ensino Secundário no seu Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. São identificadas as práticas promovidas na sequência didática implementada pelo futuro professor e as promovidas na proposta de melhoria. Para a análise, o instrumento utilizado é a Promoção da Aprendizagem Autorregulada em Matemática, que consiste em 23 práticas de autorregulação classificadas de acordo com os seis critérios de adequação didática da Abordagem Ontossemiótica. Os resultados mostram que no planejamento inicial o futuro professor promove com mais frequência práticas relacionadas aos critérios de adequação epistêmica e cognitiva, enquanto em sua proposta de aperfeiçoamento incorpora práticas que não haviam sido consideradas anteriormente, como as relacionadas aos critérios afetivo e interacional.

Palavras-chave: Autorregulação da aprendizagem. Matemática. Treinamento de professor. Abordagem Ontossemiótica.

Self-Regulation Practises in the Teaching Proposal of a Future Mathematics Teacher: An Instrument for Reflection

Abstract

Since the 1990s, in the knowledge society, student-centred teaching has gained great interest. Research indicates that the teacher must promote the development of skills in their students that allow them to carry out their learning processes in a self-regulated way, which will allow them to obtain greater academic success, especially in mathematics. This study analyses the self-regulation practises promoted by a future secondary education mathematics teacher in his Master's Degree Final Project. The practises promoted in the didactic sequence implemented by the future teacher and those that he promoted in the improvement proposal are identified. For the analysis, the instrument Promotion of Self-regulated Learning in Mathematics was used, which consists of 23 self-regulation practises classified according to the six didactic suitability criteria proposed by the Onto-semiotic Approach. The results show that, in the initial planning, the future teacher more frequently promoted practises related to the epistemic and cognitive criteria, while in his proposal for improvement he incorporated practises that had not been previously considered, such as those related to the affective and interactional criteria.

Keywords: Self-regulation of learning. Mathematics. Teacher training. Onto-semiotic approach.

Introducción

Durante las últimas décadas, los sistemas educativos han experimentado grandes cambios en cuanto a su estructura y finalidades pedagógicas. El foco de atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje transitó desde una mirada centrada en el profesor y los contenidos que enseña hacia una centrada en el alumno y en el desarrollo de competencias que les permitan construir su propio conocimiento para aprender a lo largo de la vida (CEREZO et al., 2011; HERNÁNDEZ; ROSARIO; CUESTA, 2010; SALMERÓN et al., 2010, 2011). Esta situación provocó un cambio de roles, tanto del docente como del estudiante, en el que se pretende que el docente deje de ser solo el promotor de aprendizajes a través de la enseñanza de conocimientos y pase a ser alguien que impulse la autonomía, el pensamiento crítico y que ayude a la construcción de una actitud reflexiva en sus estudiantes (PERRENOUD, 2004). Sanmartí (2019) añade que se deben brindar oportunidades a los estudiantes para aprender de forma autónoma, por lo que se vuelve indispensable indagar sobre el desarrollo de competencias transversales. Ejemplo de esta transición es lo sucedido en el sistema educativo español, donde se determinó considerar como parte fundamental del currículo el desarrollo de, entre otras, la competencia *aprender a aprender* (AA). Esta competencia implica la capacidad de regular el propio proceso de construcción del aprendizaje, la cual tiene diversas características en común con el *aprendizaje autorregulado*, pasando a ser este último un proceso clave para desarrollar la competencia AA (SALMERÓN; GUTIERREZ-BRAOJOS, 2012; ZIMMERMAN, 2002). Si bien la autorregulación habitualmente es definida como un proceso, en este estudio será considerada como una competencia, ya que se entiende al aprendizaje autorregulado como el proceso que permite a los estudiantes desarrollar, además de la competencia AA, la de autorregulación.

Diversas investigaciones han confirmado que aquellos estudiantes con un alto grado de autorregulación tienden a obtener un mayor éxito académico, ya que esta competencia les permite organizar y estructurar mejor sus aprendizajes (DIGNATH; BÜTTNER; LANGFELDT, 2008; ELVIRA-VALDÉS; PUJOL, 2012; entre otros). Otras investigaciones muestran que la autorregulación también aumenta la motivación de los estudiantes y potencia la autoeficacia en el aprendizaje (LAVASANI et al., 2011). Desde la perspectiva del desarrollo de esta competencia en docentes, la autorregulación aporta una serie de herramientas a la hora de planificar, gestionar las prácticas y adaptar la enseñanza a los distintos contextos, así como también controlar el propio aprendizaje. Diversos estudios han demostrado que la autorregulación promueve la reflexión que realizan los docentes sobre su propia práctica respecto a los aspectos antes mencionados, mostrando así su grado de compromiso con la enseñanza, y permitiéndole formar su identidad profesional (CARDELLE-ELAWAR; SANZ DE ACEDO, 2010; DELFINO; DETTORI; PERSICO, 2010). Sin embargo, estudios como el de Waeytens et al. (2002) muestran que aún hay docentes que carecen o tienen un escaso conocimiento acerca del aprendizaje autorregulado y de las estrategias para promoverlo, aunque en caso de tenerlas, no las logran implementar de manera adecuada para promover la autorregulación.

En el caso de las matemáticas, la investigación también señala que la capacidad de autorregulación juega un papel clave en el rendimiento académico de los estudiantes, ya que pueden lograr una comprensión más profunda. Existen distintos focos de investigación cuando se refiere a la autorregulación en las matemáticas desde la perspectiva de los estudiantes. Por una parte, existe una tendencia centrada en las potenciales relaciones entre aquellos estudiantes con un buen desempeño en el área de las matemáticas y su conocimiento sobre estrategias autorregulatorias. Por otra parte, se han reportado estudios centrados en enseñar a desarrollar un aprendizaje autorregulado en los estudiantes y a observar los efectos en su rendimiento académico (véase ALTUN; ERDEN, 2013; CLEARY; CHEN, 2009; CLEARY; VELARDI; SCHNAIDMAN, 2017; CUELI; GARCÍA; GONZÁLEZ-CASTRO, 2013; KISTNER et al., 2010; ROSÁRIO et al., 2013; entre otros). Cuando se centra la mirada en los docentes de matemáticas, las investigaciones se tienden a enfocar en la observación de las estrategias de autorregulación que poseen a la hora de planificar y aquellas que promueven en sus estudiantes, así como también en el conocimiento que tienen acerca de esta competencia (CHATZISTAMATIOU; DERMITZAKI, 2013; DIGNATH; BÜTTNER, 2018; PERELS; GÜRTLER; SCHMITZ, 2005; YILDIZ et al., 2022).

La mayoría estas investigaciones están centradas en estudiar los efectos que tienen los programas de capacitación en aprendizaje autorregulado para estudiantes en su rendimiento académico. A pesar de que estos resultados han sido positivos, de forma paralela a estas investigaciones, existen otros estudios que hacen énfasis en que el enfoque de investigación debe ampliarse hacia capacitar a los docentes para que promuevan un aprendizaje autorregulado en sus clases. En este sentido, estos programas de capacitación, en vez de dirigirse a los estudiantes centrados en un área específica como las matemáticas (véase PERELS; GÜRTLER; SCHMITZ, 2005), se incluyan en la formación de profesores para que sean los docentes quienes aprendan a promover un aprendizaje autorregulado en sus clases, llegando a más estudiantes y así estos apliquen estas herramientas en el aprendizaje de las matemáticas (PERELS; DIGNATH; SCHMITZ, 2009). De este modo, se puede subsanar la brecha entre estudiantes formados en aprendizaje autorregulado y docentes que no implementan prácticas de autorregulación en el aula y centran su clase en la transferencia de contenidos, sin considerar el desarrollo de competencias HERNÁNDEZ; ROSARIO; CUESTA, 2010).

Este estudio surge de la necesidad de ampliar el foco de investigación en autorregulación hacia dotar a los docentes de las herramientas necesarias para promover el aprendizaje autorregulado en el aula de matemáticas. Además, se atiende a la necesidad de relacionar las competencias de las matemáticas con otras perspectivas teóricas (NISS; JANKVIST, 2022) como, en este caso, la autorregulación. Por lo tanto, en este artículo se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué prácticas de autorregulación promueve un futuro profesor de matemáticas de educación secundaria en su propuesta didáctica? Para responderla se analiza el Trabajo Final de Máster (TFM) de un futuro profesor de matemáticas de educación secundaria. En concreto, se analiza el diseño, implementación, reflexión y reformulación de la propuesta didáctica presentada por el futuro profesor en su TFM, buscando identificar las prácticas de autorregulación que consideró promover en su práctica de aula. Para identificar estas prácticas se utilizó un instrumento elaborado por los autores en el que se relacionan las prácticas de autorregulación con el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (GODINO, 2013), propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (GODINO; BATANERO; FONT, 2007). Además, se describe el diseño, construcción, validación y operacionalización de este instrumento, el cual permite pautar la reflexión docente respecto a la promoción de un aprendizaje autorregulado en sus clases de matemáticas.

1. Marco teórico

En este apartado se presentan los referentes teóricos considerados en este estudio.

1.1. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas se ha investigado desde diferentes perspectivas, las cuales no tratan solo de un conocimiento sobre las matemáticas en sí mismas, sino que abarcan otros saberes que están relacionados con los problemas a los cuales se enfrentará el docente de matemáticas como profesional (BROMME; TILLEMA, 1995). Existen diferentes modelos teóricos acerca del conocimiento profesional que debe desarrollar el docente de matemáticas para llevar a cabo su labor en el aula (por ejemplo, HILL; BALL; SCHILLINIG, 2008; ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITES, 2005; SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008; SHULMAN, 1986; entre otros). Entre los aspectos que se consideran en estos modelos, en este estudio se aborda la reflexión del profesor sobre su práctica, tomando como referente al Enfoque Onto-Semiótico (EOS). Este es un enfoque sobre la cognición e instrucción matemática que busca articular distintas aproximaciones a la investigación acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de supuestos de tipo antropológico y semiótico sobre la actividad matemática y los procesos de estudio correspondientes (GODINO; BATANERO, 2011).

1.2. Criterios de idoneidad didáctica y práctica reflexiva

El EOS proporciona una serie de herramientas para el análisis de la práctica y de los conocimientos profesionales del profesor de matemáticas. En esta investigación se utiliza una de ellas, los *criterios de idoneidad didáctica* (CID), ya que este constructo permite al docente llevar a cabo una práctica reflexiva y estructurada a partir de seis criterios, los que a su vez se descomponen en componentes e indicadores, para responder a interrogantes relacionadas con qué principios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018). A continuación, se describen los seis criterios de idoneidad (véase la pauta completa de componentes e indicadores en (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017):

1. Idoneidad epistémica (Ep): Permite valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”; por ejemplo, si la actuación educativa (la lección, la secuencia didáctica, el dispositivo formativo, etc.) incluye aspectos tales como procesos matemáticos (argumentación, resolución de problemas, etc.), formas de representación de las matemáticas, o la complejidad de los objetos matemáticos, entre otros aspectos de la enseñanza de las matemáticas.
2. Idoneidad cognitiva (C): Permite valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar, considerando además las actividades de refuerzo y ampliación.

3. Idoneidad interaccional (I): Permite valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos, observando además la comunicación docente-alumno, alumno-alumno.
4. Idoneidad mediacional (M): Permite valorar la adecuación de los recursos materiales (manipulativos e informáticos) y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. Idoneidad afectiva (A): Permite valorar la implicación (intereses, motivaciones, etc.) de los alumnos durante el proceso de instrucción, así como también considerar la elaboración de tareas de interés, la autoeficacia, la autoestima, o combatir la fobia a las matemáticas, entre otros aspectos.
6. Idoneidad ecológica (Ec): Para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional. Además, trata las conexiones intra e interdisciplinares, así como también la innovación didáctica para evaluar y organizar el aula.

En este estudio, dichos criterios permiten caracterizar las prácticas docentes que promueven un aprendizaje autorregulado en la clase de matemáticas, las cuales permitirán al docente guiar su reflexión acerca de la promoción del aprendizaje autorregulado en el aula.

Diversos trabajos han indagado sobre cómo y cuándo la acción reflexiva del docente puede determinar la eficiencia y profundidad del proceso de enseñanza y aprendizaje (por ejemplo, LEDEZMA; BREDA et al., 2022; LEDEZMA; SOL et al., 2022; SÁNCHEZ; FONT; BREDA, 2022; entre otros). El foco de estudio de estas investigaciones ha sido analizar distintos procesos de la actividad matemática, como la modelización, la argumentación, la creatividad, entre otros, aplicados en dispositivos de enseñanza, lecciones de clase, documentos (como los TFMs), etc. Todos estos hacen uso de los CID para los análisis de sus resultados, no obstante, en la investigación previa no se ha considerado el análisis de la reflexión de los profesores (o futuros profesores) acerca de la promoción del aprendizaje autorregulado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas utilizando este constructo. Por lo tanto, el estudio que aquí se reporta se considera innovador y aporta en la investigación en Educación Matemática respecto a la reflexión docente acerca de su práctica educativa desde el ámbito de las competencias transversales, en particular, de la autorregulación.

1.3. Competencias profesionales del profesor de matemáticas

Además de los conocimientos profesionales que debe considerar tener el profesor para llevar a cabo su práctica en el aula, el docente también debe desarrollar una serie de competencias para evaluar y desarrollar la competencia matemática de los estudiantes de secundaria. Cuando se habla de *competencia*, se adopta la definición de Godino y Batanero (2011), donde "Competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos cognoscitivos (conocimientos, capacidades, información, etc.) para enfrentarse con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones" (p. 13).

Si bien la literatura señala una serie de competencias profesionales abordadas desde diferentes enfoques de investigación, en este estudio se consideran algunas de las competencias trabajadas dentro del Máster de Formación de Profesores de Secundaria y Bachillerato impartido por las universidades públicas de Cataluña. En este programa de formación, las competencias se organizan en dos grupos: las genéricas o transversales y las profesionales específicas del profesor de matemáticas, las cuales están en consonancia con las competencias estipuladas por el currículo español vigente. El primer grupo considera cinco competencias: 1) Saber ser profesional. Ciudadanía; 2) Comunicación; 3) Lengua extranjera; 4) Aprender a aprender/organizar formación continua; 5) Competencia digital. Por su parte, el segundo grupo contempla 10 competencias ceñidas al ámbito matemático (FONT et al., 2012), las cuales no son de interés en esta investigación. De las cinco competencias transversales anteriores, en este estudio se destaca la competencia AA, definida por estos autores como:

> capacidad de autoaprender y perfeccionarse de manera continua, mediante procesos de reflexión de su propia práctica, individual y de manera colegiada, para un desarrollo profesional autónomo y permanente que permita mejorar su propio proceso de conocimiento y argumentar la toma de decisiones. (FONT et al., 2012, p. 62)

Esta competencia es considerada por el currículo español como una de las competencias clave para el aprendizaje de los estudiantes de secundaria. Como se observa en su definición y como se declaró anteriormente, esta competencia tiene una estrecha relación con el aprendizaje autorregulado porque comparten aspectos comunes, pasando a ser éste un proceso clave en el desarrollo de la competencia AA.

1.4. Aprendizaje autorregulado en las matemáticas

La autorregulación es una competencia clave para el desarrollo de las actividades y procesos de aprendizaje productivo de las matemáticas (DE CORTE; VERSCHAFFEL; OP'T

EYNDE, 2000), ya que permite, tanto al docente como al estudiante, desarrollarse de forma autónoma para afrontar cualquier situación de aprendizaje en diferentes contextos.

Según Pintrich (2004), el aprendizaje autorregulado es un proceso activo en el cual los estudiantes establecen metas para su aprendizaje, donde monitorizan, regulan y controlan su cognición, motivación y conducta, guiados por sus metas de aprendizaje y por aspectos contextuales. Este proceso promueve un estudio autónomo, constructivo, cooperativo y diversificado (DE LA FUENTE; JUSTICIA, 2003). Además, permite planificar el tiempo, los medios que se disponen para enseñar o aprender, mejorar o mantener la motivación de los estudiantes, y superar dificultades, así como también construir mejores relaciones entre docentes y estudiantes y/o estudiantes con sus compañeros/as de clase.

Sanmartí (2010) plantea que, la diferencia entre los estudiantes que conocen o se les enseñan herramientas de autorregulación y aquellos que lo hacen de manera intuitiva, es que los primeros saben regular su aprendizaje y mejoran su nivel académico, mientras que los segundos están expuestos a desarrollar sistemas menos eficientes para aprender. Cleary y Chen (2009) añaden que los estudiantes autorregulados presentan características típicas de los estudiantes de alto rendimiento, mientras que, los de bajo rendimiento, muestran disfunción en su proceso de autorregular su aprendizaje.

Como se ha señalado en la introducción de este artículo, diversos estudios han analizado la relación entre el rendimiento académico, el conocimiento de las estrategias de autorregulación y la aplicación de estas en las matemáticas. Uno de ellos es el desarrollado por Kistner et al. (2010), quienes investigan la promoción directa e indirecta de los docentes del aprendizaje autorregulado y su relación con el desarrollo del desempeño académico de los estudiantes. 20 profesores de matemáticas alemanes con sus 538 estudiantes (14–15 años) en total fueron grabados en video para una unidad de tres lecciones sobre el teorema de Pitágoras. Entre sus resultados se observa que, cuando se les enseñó de manera explícita a autorregularse, los estudiantes mostraron una mejora en su rendimiento académico. Estos estudios evidencian la importancia de fomentar el aprendizaje autorregulado de las matemáticas en los estudiantes mediante estrategias de autorregulación promovidas por los docentes.

1.5. Promoción del aprendizaje autorregulado

La literatura insiste en que es el profesor quien debe plantearse promover la autorregulación al mismo tiempo que enseña su disciplina, mediando el desarrollo metacognitivo e impulsando las estrategias de autorregulación del aprendizaje. Esto requiere considerar su enseñanza de manera explícita, por lo que debe estar inmerso en el planteamiento y planificación de la organización de la clase (ROSARIO et al., 2007). Aunque los resultados de investigaciones apoyan firmemente la importancia de promover un aprendizaje autorregulado en los estudiantes, pocos profesores preparan efectivamente a los estudiantes a aprender de forma autónoma (HIDALGO-MONCADA; DÍEZ-PALOMAR; VANEGAS, 2020; ZIMMERMAN, 2002).

Almeida y Aportela (2019) señalan que, para desarrollar en el estudiante el poder de decisión para ejecutar y controlar de forma independiente en el momento y lugar que decida llevar a cabo su aprendizaje, el docente ha de crear condiciones pedagógicas y emplear métodos que potencien en los adolescentes la reflexión, la discusión, la solución colectiva de tareas, el intercambio y la confrontación de ideas, en un clima creativo y flexible.

Además, la literatura señala que la autorregulación puede ser desarrollada en el aula a través de diversas prácticas que puede llevar a cabo el docente para promover un aprendizaje autorregulado en sus estudiantes. En esta investigación se considera una práctica de autorregulación a toda acción que realiza el profesor para guiar a los estudiantes hacia un aprendizaje autorregulado en las matemáticas. Por lo tanto, una práctica de autorregulación forma parte de las prácticas del docente de matemáticas.

Giménez (1997) habla de prácticas para constatar lo que sucede durante una actividad o unidad didáctica, y también entrega pautas para la organización del estudio (planificación, autogestión, mentalización, critica, comunicación). De Corte, Verschaffel y Op't Eynde (2000) puntualizan la importancia de la autorregulación cognitiva en la resolución de problemas y de promoverla a través de preguntas durante el proceso de resolución. Por ejemplo: ¿qué estás haciendo exactamente?, ¿puedes describirlo?, ¿cómo encaja con la solución?, ¿qué harás con el resultado cuando lo obtengas?, sin imponer estrategias de resolución, sino que apoye a los estudiantes en sus intentos de comprender los problemas, a reflexionar sobres sus métodos y estrategias, y a internalizar las habilidades de autorregulación. Por su parte, Schoenfeld (1985) resalta la enseñanza de las heurísticas, así los estudiantes luego pueden practicar y elegir sus propios métodos bajo la supervisión del docente, quien brinda retroalimentación inmediata. Estos apoyos externos se eliminan gradualmente para que al final el estudiante se autorregule. Cueli, García y González-Castro (2013) proponen un instrumento para promover el aprendizaje autorregulado en las matemáticas basado en las fases de Zimmerman (2000). Por ejemplo, para la fase *planificación*, proponen la práctica: "antes de comenzar a hacer un ejercicio de matemáticas pienso en que voy a hacer y que necesito para realizarlo" (CUELI; GARCÍA; GONZÁLEZ-CASTRO, 2013, p. 42). Por su parte, Almeida y Aportela (2019) entregan una serie de recursos pedagógicos para potenciar la autorregulación en la actividad de estudio, algunos de los cuales son: 1) Vincular el estudio de los contenidos matemáticos al entorno y la vida escolar; 2) Buscar y comparar vías de solución diferentes para un mismo problema; 3) Elaborar materiales para facilitar el estudio individual en matemática y socializarlos. Entre otros, estos autores son la base teórica considerada para la construcción del instrumento que aquí se propone.

2. Metodología

En esta sección se describen los aspectos metodológicos considerados en el estudio. Esta investigación siguió una metodología cualitativa, con un enfoque interpretativo, que consiste en un estudio de caso intrínseco (CRESWELL, 2012).

2.1. Contexto de implementación y descripción del caso

En España, la formación inicial de los profesores de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se compone de dos partes: la primera corresponde a la formación disciplinar matemática (nivel de grado) y la segunda a la formación profesional en educación secundaria (nivel de máster) (Montes et al., 2019). El presente estudio se llevó a cabo dentro del programa de Máster de Formación de Profesores de Secundaria y Bachillerato, impartido por las universidades públicas de Cataluña, durante el año académico 2019–2020. En particular, se aborda el caso de un TFM elaborado por un futuro profesor (FP) de matemáticas.

El TFM es un documento elaborado por los futuros profesores para reflexionar sobre la labor realizada durante el periodo de prácticas educativas del máster en que se contextualiza este estudio. Además, previo a la elaboración del TFM, se enseñan los CID a los futuros profesores para pautar esta reflexión. La estructura de los TFMs consta de lo siguiente: en primer lugar, se presenta la planificación de la secuencia didáctica sobre un contenido matemático específico; posteriormente, se realiza una reflexión acerca de su implementación en el centro educativo de prácticas, guiada por los CID; y, por último, se presenta una propuesta de mejora, en la cual se plasman explícitamente nuevas actividades o, implícitamente, se menciona lo que se haría en un futuro para mejorar esta práctica. El TFM que se analizó en esta investigación, se seleccionó dado que el FP que lo elaboró presentaba una reflexión más detallada, así como también una presentación clara de las actividades que ofreció a sus estudiantes y aquellas que ofrecería en un rediseño hipotético (propuesta de mejora). Este TFM abordó el contenido matemático *Geometría plana: rectas y ángulos en el plano*, para el curso 1º de ESO (estudiantes de 12–13 años).

2.2. Técnicas e instrumento de análisis

El TFM se analizó a través de un análisis de contenido (COHEN; MANION; MORRISON, 2018), lo que permitió identificar las prácticas de autorregulación promovidas por el FP en sus estudiantes y, a su vez, constatar la valoración y argumentación que entregaba respecto a cómo desarrolló su unidad didáctica y los elementos o aspectos que mejoraría. Este análisis se realizó en tres fases: en la primera se analizó su secuencia didáctica inicial (las actividades escolares) implementada por el FP; en la segunda se analizaron las nuevas actividades incorporadas como propuestas de mejora; y en la tercera se analizó la reflexión realizada a lo largo del TFM (respecto a la unidad didáctica inicial y a la propuesta de mejora), identificando todos aquellos aspectos señalados por el FP que puedan promover la autorregulación.

Los análisis de las tres fases antes mencionadas se realizaron utilizando el instrumento *Promoción del Aprendizaje Autorregulado en las Matemáticas*, elaborado por los autores, que consta de 23 prácticas que caracterizan la promoción de la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas (HIDALGO-MONCADA; DÍEZ-PALOMAR; VANEGAS, 2020). Para el diseño de este instrumento se consideraron los planteamientos de diversos autores, como se describió en el marco teórico, de los cuales se recogieron una serie de prácticas que permiten al docente de matemáticas fomentar el aprendizaje autorregulado en sus estudiantes. Tales prácticas se agruparon utilizando el constructo de los CID (descritos en el marco teórico) que plantea el EOS, ya que esta herramienta permite al docente reflexionar acerca de todos los aspectos que deben estar involucrados durante el diseño didáctico (estudio previo, planificación, implementación y reflexión). Cabe señalar que estas 23 prácticas, si bien están relacionadas con los seis criterios de los CID y con la mayoría de sus componentes, no tienen una relación unívoca con todos los componentes. Esto se justifica en que no se han encontrado prácticas de autorregulación para todos los componentes de los CID en la literatura como, por ejemplo, el componente «Número de alumnos, horario y condiciones del aula» del criterio mediacional.

Este instrumento es una guía dirigida al docente que le permite hacer una reflexión de la práctica ya realizada en el aula respecto a la consideración o no de la promoción de un aprendizaje autorregulado y, si ya lo ha hecho, identificar qué tipo de acciones ha llevado a cabo para dicha promoción, así como también para orientarse en cómo incorporar nuevas acciones de autorregulación en su planificación futura. Además, este instrumento entrega una orientación de cómo el docente podría implementar cada una de estas prácticas, ello mediante ejemplos de preguntas que se les podrían plantear a los estudiantes para su propia reflexión y desarrollo del aprendizaje autorregulado. El instrumento ha sido validado entre pares y por comisión de investigadores expertos, así como también mediante una prueba piloto (análisis de un conjunto de TFMs), lo cual ha permitido mejorar tanto su estructura como su redacción. En el Anexo 1 se puede encontrar el instrumento en su totalidad. En este estudio, el instrumento es utilizado para identificar las prácticas de autorregulación que el FP promueve en su TFM.

3. Resultados

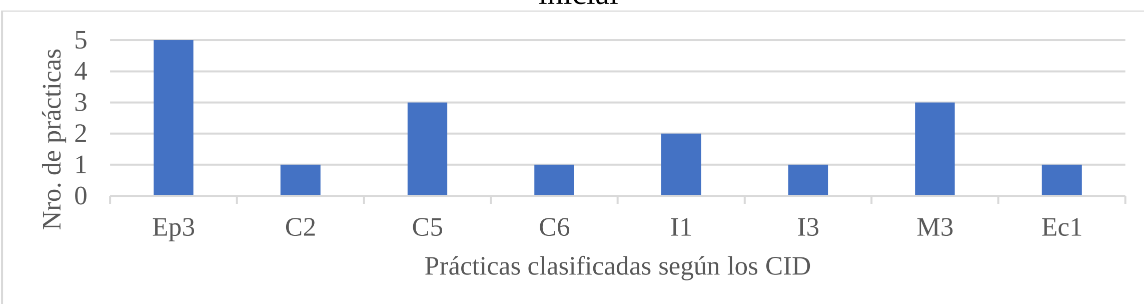
Los resultados se organizan en tres subsecciones: en la primera se describen las prácticas de autorregulación identificadas en la secuencia didáctica inicial implementada por el FP; en la segunda se describen las prácticas de autorregulación identificadas en la propuesta de mejora; y en la tercera se hace una comparación entre el grado en que el FP consideró promover un aprendizaje autorregulado en su propuesta inicial y el total de prácticas que resultaron luego de su reflexión.

Para facilitar la descripción de los resultados, las 23 prácticas fueron codificadas con la sigla del criterio de idoneidad al cual se relaciona cada una (Ep, C, I, M, A, Ec) y un número. Por ejemplo, Ep2 se refiere a la segunda práctica de autorregulación del criterio epistémico.

3.1. Prácticas de autorregulación identificadas en la secuencia didáctica inicial implementada por el FP

En la Figura 5 se presentan las prácticas de autorregulación que se identificaron en la secuencia didáctica inicial diseñada e implementada por el FP. Se observa que el FP consideró promover prácticas afines con cinco de los seis criterios de idoneidad, a saber, el epistémico, el cognitivo, el interaccional, el mediacional y el ecológico. Concretamente, se observaron prácticas tales como: *promover la argumentación de los procedimientos desarrollados* (Ep3), *promover la reflexión de estrategias* (C2), *promover la generalización, conexiones intramatemáticas, cambios de representación, etc*. (C5), *explicitar los criterios de evaluación* (C6); *promover la discusión entre pares* (I1), *generar instancias colectivas en las que los estudiantes puedan comprobar su conocimiento* (I3), *implementar diferentes medios de enseñanza* (M3) y *vincular el contenido matemático al entorno y vida cotidiana y con otras disciplinas* (Ec1). Se observó que el FP promovió con mayor frecuencia prácticas relacionadas a los criterios epistémico (Ep3) y cognitivo (C5). En menor medida, el FP promovió una práctica relacionada con el criterio ecológico (Ec1). Además, cabe señalar que el FP no consideró promover prácticas relacionadas con el criterio afectivo (A1 y A2).

Figura 5 – Número de prácticas de autorregulación promovidas en la secuencia didáctica inicial



Fuente: Elaborado por los autores

En la Figura 6 se presenta un ejemplo de actividad propuesta por el FP en su secuencia didáctica inicial. Se observó que el FP planteó preguntas que invitan al estudiante no solo a encontrar un resultado, sino también a explicar, justificar, conjeturar, por ejemplo, cuando solicita al estudiante: “Explica el significado de los números y las letras que hay escritos en el reloj”, lo cual está asociado con las prácticas Ep3 y C5. También, cuando el FP formuló preguntas del tipo: “¿Cuál es el ángulo que forman las agujas de los minutos y de las horas a cada hora del día?”, en donde se busca que los alumnos asocien determinados tipos de ángulos con ciertas horas del día.

Figura 6 – Actividad presentada por el FP en la secuencia didáctica inicial

Anexo 4. ESTUDIAMOS LAS AGUJAS DE LOS RELOJES

1. Explica el significado de los números y las letras que hay escritos en el reloj.
2. 2. Usando el transportador de ángulos, ¿qué ángulo forman las agujas del reloj cuando el reloj marca las 11 en punto? Y ¿cuándo marca la 1 en punto? ¿Qué observa?
3. ¿Cuál es el ángulo que forman la aguja de los minutos y de las horas cada hora de día?

HORA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ANGLE												

¿Qué observa?

Fuente: Traducido desde el TFM del FP

Además de identificar prácticas de autorregulación en las actividades que el FP propuso a sus estudiantes, se identificaron prácticas de autorregulación cuando este reflexionó respecto de la implementación de la secuencia didáctica, observando comentarios tales como:

Comentario 1: “en la primera sesión cuando se hizo la presentación de la unidad didáctica se enseñó cómo se evaluarían las actividades”. Aquí se observó que el FP promovió la práctica de autorregulación C6 (*explicitar criterios de evaluación de cada actividad o unidad teórica*).

Comentario 2:

> Se ha intentado que trabajaran la justificación de las preguntas de las actividades, pero no ha servido para que aprendieran. En muchos casos me ponían el resultado y después una explicación de tipo “porque lo he calculado con el transportador de ángulos”. Por tanto, lo he intentado, pero no lo he conseguido, por no haberlo preguntado en el lugar adecuado ni haberle dado más importancia. (TFM del FP)

En este fragmento, se observó que el FP promovió la práctica Ep3, sin embargo, se percató que la forma en que lo hizo no fue la adecuada.

Comentario 3:

> Todas las actividades han estado relacionadas con la vida real, pero no creo que haya conseguido todo lo que implica contextualizar las actividades. Una de las diferencias que he observado ha sido que en la actividad de “Estudiemos las rectas de nuestro barrio” el alumnado estaba motivado porque se trataba de una zona relacionada con su vida. En cambio, cuándo implementé la actividad “Descripción de caminos” (dos imágenes de caminos) los alumnos se lo tomaban como una actividad mecánica sin motivación por parte del contexto. (TFM del FP)

En este comentario valorativo se observó que el FP promovió la práctica de autorregulación Ec1, al señalar que incorporar contextos reales en las actividades resulta más motivador si estos contextos implican aspectos del entorno del estudiante.

Comentario 4:

> El diálogo y la comunicación entre alumnos surgió en actividades como “Aprendemos ángulos con los relojes”, muchos alumnos al estar acostumbrados a trabajar individualmente levantaban la mano para pedir dudas al docente, pero intenté no

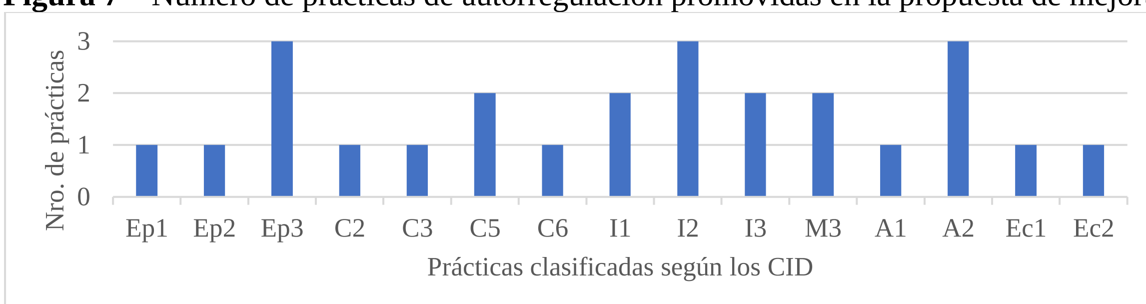
> responder hasta que la duda o la dificultad no fuera de las dos personas que formaban a la pareja. (TFM del FP)

Aquí se observó que el FP promovió la práctica de autorregulación I1, la cual busca que se promueva la discusión entre pares.

3.2. Prácticas de autorregulación identificadas en la propuesta de mejora del FP

En la Figura 7 se presentan las prácticas de autorregulación que se identificaron en la propuesta de mejora que planteó el FP. Se observó que el FP consideró promover nuevas prácticas que fomentan un aprendizaje autorregulado, como aquellas relacionadas con el criterio afectivo (A1 y A2), aspecto anteriormente no promovido. Además, se observó un aumento de prácticas relacionadas con los cinco criterios considerados inicialmente (Ep, C, I, M y Ec), tales como: *proponer la búsqueda y comparación de diferentes vías de solución para un mismo problema* (Ep1), *plantear las actividades de distintas formas, para asegurar que los estudiantes reconozcan qué hacer, para qué hacerlo, cómo hacerlo y con qué medios, y cómo representar los resultados* (C3), *fomentar el trabajo cooperativo* (I2) e *implementar diferentes formas de evaluación para un mismo contenido* (Ec2).

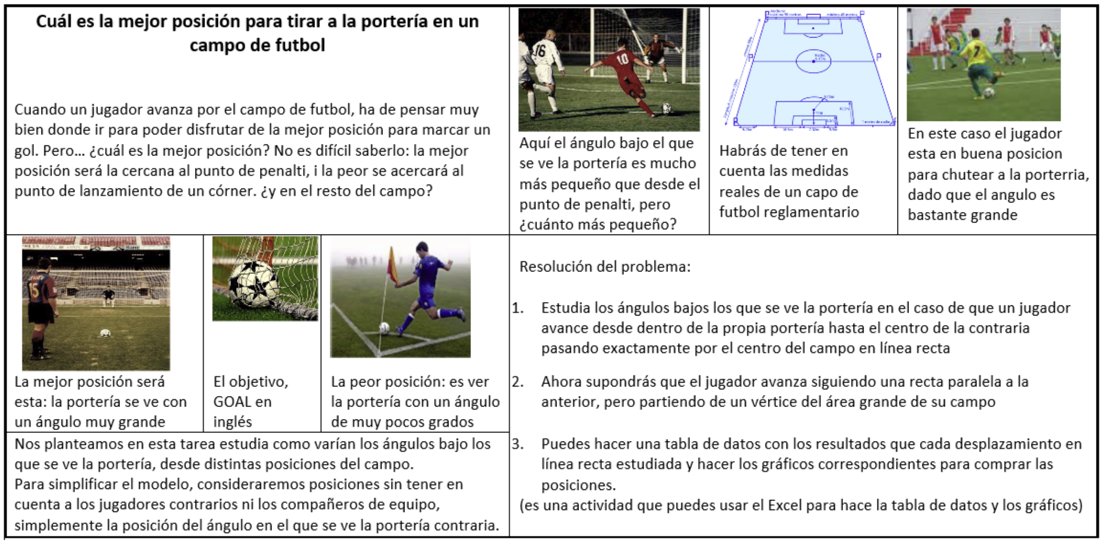
Figura 7 – Número de prácticas de autorregulación promovidas en la propuesta de mejora



Fuente: Elaborado por los autores

La **Erro! Fonte de referência não encontrada.** muestra un ejemplo de actividad planteada por el FP en su propuesta de mejora. Se observa que el FP reconsideró el planteamiento de actividades desde varios aspectos, siendo el principal la incorporación de prácticas de autorregulación relacionadas con el criterio afectivo (A1 y A2), las cuales no habían sido consideradas en un inicio.

Figura 8 – Actividad presentada por el FP en la propuesta de mejora



Cuál es la mejor posición para tirar a la portería en un campo de futbol

Cuando un jugador avanza por el campo de futbol, ha de pensar muy bien donde ir para poder disfrutar de la mejor posición para marcar un gol. Pero… ¿cuál es la mejor posición? No es difícil saberlo: la mejor posición será la cercana al punto de penalti, i la peor se acercará al punto de lanzamiento de un córner. ¿y en el resto del campo?

Aquí el ángulo bajo el que se ve la portería es mucho más pequeño que desde el punto de penalti, pero ¿cuánto más pequeño?

Habrás de tener en cuenta las medidas reales de un capo de futbol reglamentario

En este caso el jugador esta en buena posicion para chutear a la porterria, dado que el angulo es bastante grande

La mejor posición será esta: la portería se ve con un ángulo muy grande

El objetivo, GOAL en inglés

La peor posición: es ver la portería con un ángulo de muy pocos grados

Nos planteamos en esta tarea estudia como varían los ángulos bajo los que se ve la portería, desde distintas posiciones del campo.
Para simplificar el modelo, consideraremos posiciones sin tener en cuenta a los jugadores contrarios ni los compañeros de equipo, simplemente la posición del ángulo en el que se ve la portería contraria.

Resolución del problema:

1. Estudia los ángulos bajos los que se ve la portería en el caso de que un jugador avance desde dentro de la propia portería hasta el centro de la contraria pasando exactamente por el centro del campo en línea recta
2. Ahora supondrás que el jugador avanza siguiendo una recta paralela a la anterior, pero partiendo de un vértice del área grande de su campo
3. Puedes hacer una tabla de datos con los resultados que cada desplazamiento en línea recta estudiada y hacer los gráficos correspondientes para comprar las posiciones.

(es una actividad que puedes usar el Excel para hace la tabla de datos y los gráficos)

Fuente: Traducido desde el TFM del FP

En esta actividad, el FP incorporó como contexto el fútbol, buscando que los estudiantes establezcan relaciones entre las nociones matemáticas abordadas, situaciones de la vida real y la motivación que ello puede generar. Estos aspectos están asociados a las prácticas A2 (*considerar los intereses de los estudiantes, su contexto familiar y social, para generar actividades a fines con sus intereses*) y Ec1 (*vincular el estudio de los contenidos matemáticos al entorno y vida cotidiana*). También se promovieron procesos de alta demanda cognitiva, como cambios de representación y conjeturas (C5) cuando se les dio la siguiente indicación a los estudiantes: "puedes hacer una tabla de datos con los resultados de cada desplazamiento en línea recta estudiados y hacer los gráficos correspondientes para comparar las posiciones". Estas prácticas se suman a aquellas que promovieron la argumentación (Ep3) y reflexión de las estrategias utilizadas (C2), por ejemplo, cuando se les solicitó explicar cómo resolvieron el problema.

En su reflexión, el FP hizo algunos comentarios respecto a esta actividad, en los que también se observó una promoción de prácticas de autorregulación, como en los siguientes:

Comentario 1: "primero es necesario explicar que se harán equipos de cuatro (los equipos serán heterogéneos) y que cada miembro del equipo tendrá que asumir una responsabilidad". En este comentario se observó que el FP consideró promover la práctica I2 (*organizar formas de trabajo cooperativo durante la clase o fuera de ella*), además de la práctica I1 (*proponer actividades donde se fomente la discusión entre pares*).

Comentario 2: "el último apartado se trabajaría con Excel, de modo que, además de motivar al alumnado con las herramientas TIC, aprenderían a usar y ser más ágiles con las hojas de cálculo que tanto se usan en la vida real". En este comentario se observó que el FP consideró los intereses de los estudiantes (A2) e implementó diferentes medios de enseñanza (M3).

Comentario 3: "se evaluarán ellos mismos, tal y como se les habrá enseñado en la presentación de la actividad se les entregará el Anexo 12 al final de la clase y tendrán que evaluarse". En este último comentario se observó que el FP incorporó preguntas a los estudiantes que fomentaron su autoevaluación emocional, motivacional o actitudinal (A1), así como también implementó diferentes formas de evaluación (Ec2).

Como se ha presentado, además de identificar prácticas de autorregulación en las actividades que el FP planteó en su propuesta de mejora, también se identificaron otras prácticas de autorregulación cuando este reflexionó en comentarios tales como:

Comentario 1: "Sería interesante ir variando el modo de funcionar en cada clase para despertar siempre su interés por la actividad que se trabaja". Este comentario alude a la consideración de diferentes medios de enseñanza (M3).

Comentario 2:

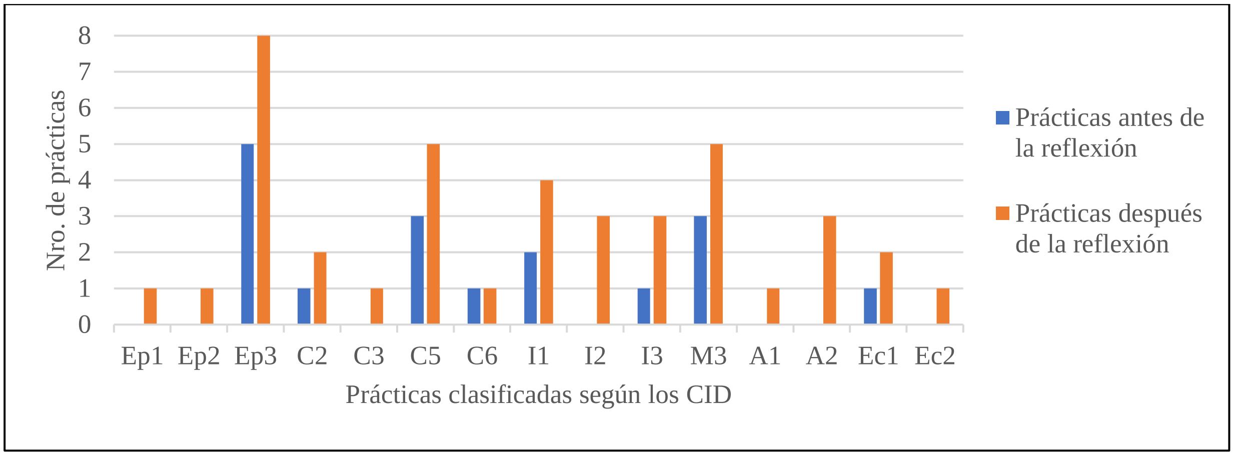
> En toda la unidad didáctica me ha dado la sensación de que faltaron indicaciones más claras y precisas, en particular en la actividad de "Estudiamos las rectas de nuestro barrio". Creo que me falto explicaciones orales más detalladas, a veces doy por supuesto que el alumnado me entiende y descuido sus caras o comentarios. Uno de los puntos importantes es la adaptación del lenguaje que se use según el nivel educativo que nos encontramos. (TFM del FP)

En este fragmento, el FP señaló la importancia de plantear las actividades de distintas formas para asegurar que los estudiantes reconozcan qué hacer, para qué hacerlo, cómo hacerlo y con qué medios, y cómo representar los resultados, comprendiendo lo que se les solicita (C3).

3.3. Síntesis de prácticas de autorregulación promovidas por el FP

En la Figura 9 se realiza una comparación entre las prácticas de autorregulación identificadas en la secuencia didáctica inicial propuesta por el FP y el total de ellas luego de su reflexión y propuesta de mejoras futuras. Cabe señalar que la cuantificación de las prácticas identificadas después de la reflexión considera tanto las prácticas promovidas antes de la reflexión como las que se promovieron en la propuesta de mejora.

Figura 9 – Número de prácticas de autorregulación promovidas antes y después de la reflexión del FP



Fuente: Elaborado por los autores

En general, se observó que el FP promovió la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas, resaltando las prácticas relacionadas con los criterios epistémico (Ep), cognitivo (C) y mediacional (M). Al hacer una comparativa entre el antes y el después de la reflexión, se constató que el número de prácticas promovidas aumentó considerablemente luego de que el FP reflexionara respecto de la secuencia didáctica implementada y los aspectos que consideraría en una propuesta futura. Luego de reflexionar, el FP incluyó nuevos aspectos, como los afectivos (A1 y A2), en los que se consideraron los intereses de los estudiantes y su autoevaluación emocional, motivacional y actitudinal. Además, aumentó la promoción de prácticas del ámbito epistémico e interaccional. Por ejemplo, en el inicio, el FP no consideró promover la identificación de errores cometidos, sus causas y cómo evitarlos (Ep2), mientras que luego de reflexionar, este es un aspecto que incluiría en planificaciones futuras.

Cabe señalar que hubo prácticas de autorregulación que no fueron consideradas ni en la secuencia didáctica inicial ni en la propuesta de mejora del FP. Algunas de estas son: *describir la forma de razonar al desarrollar un problema* (Ep4); *generar instancias de análisis críticos individuales y colectivos del estado y la forma en que están aprendiendo las matemáticas* (I4); *orientar el uso del libro de texto como medio para el estudio individual, así como cualquier otro tipo de documento de estudio o un programa digital* (I5); *orientar al estudiante en la elaboración de materiales de estudio individual en matemáticas y socializarlos* (M1); *orientar a los estudiantes sobre los tiempos de estudio para ayudarlos en su organización* (M2), entre otros.

4. Discusión y conclusiones

Desde hace algunos años, el sistema educativo español ha determinado considerar como parte fundamental del currículo el desarrollo de competencias transversales, entre otras, la de *aprender a aprender*. Esto es debido a las necesidades del contexto en que se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje, tomando relevancia tanto la formación docente como el aprendizaje de los estudiantes (PRANKE; BRAGAGNOLO, 2015). Dado que la literatura señala al aprendizaje autorregulado como un proceso clave para el desarrollo de la competencia AA (SALMERÓN, 2012), en este estudio se analizaron las prácticas de autorregulación que un futuro profesor de matemáticas de Educación Secundaria promovió en su TFM. Para esto se utilizó el instrumento *Promoción del Aprendizaje Autorregulado en las Matemáticas* diseñado por los autores.

Después de un profundo análisis realizado al TFM del FP estudiado, los resultados mostraron que la unidad didáctica planteada inicialmente por el FP promovió la autorregulación en el aprendizaje de las matemáticas, evidenciando mayoritariamente prácticas relacionadas con los criterios epistémico y cognitivo. Este resultado está en línea con lo evidenciado en los trabajos de Burgos y Castillo (2021) y Giacomone et al. (2018), quienes señalan que los futuros profesores presentan una mayor valoración en los criterios epistémico y cognitivo de sus secuencias didácticas. Dentro de estos dos criterios resaltan las prácticas relacionadas con promover la argumentación, reflexión de estrategias utilizadas, y explicitar los criterios de evaluación. Estas tres prácticas se pudieron identificar en las actividades escolares propuestas inicialmente por el FP. En menor medida se promovieron aspectos relacionados con el criterio ecológico, como el hecho de vincular los contenidos matemáticos con el entorno y vida cotidiana de los estudiantes. Por último, se observó una nula promoción de prácticas relacionadas con el criterio afectivo, las cuales se relacionan con el considerar los intereses de los estudiantes. Este resultado coincide con contribuciones obtenidas en estudios previos, tales como el de Beltran-Pellicer y Godino (2017), quienes reportan que los docentes, en efecto, consideran incluir contextos en las actividades como forma de promover el aspecto afectivo de los estudiantes (a través de la motivación), pero no estudian previamente los intereses y necesidades de los estudiantes para generar actividades afines a ellos. Estas evidencias contrastan fuertemente con lo que la literatura plantea, en cuanto a la necesidad de profundizar en la dimensión emocional del aprendizaje matemático, ya que esta permitirá al estudiante tener una experiencia más significativa, útil y funcional, incrementando la implicación y el interés y, en consecuencia, el rendimiento académico en dicha disciplina (MARTÍNEZ; VALIENTE, 2019).

Los resultados evidenciados en la propuesta de mejora mostraron que el FP incorporó las dos prácticas de autorregulación que se relacionan con el criterio afectivo, tanto el considerar los intereses de los estudiantes como la promoción de la autoevaluación emocional, actitudinal y motivacional. Además, aumentaron las prácticas relacionadas con el aspecto interaccional, tales como el trabajo cooperativo, la discusión entre pares y la generación de instancias colectivas para que los estudiantes comprueben su conocimiento. Ramos-Rodríguez y Flores (2016) señalan que los docentes, después de reflexionar, plantean y focalizan su atención en proponer nuevas tareas de enseñanza. En este caso se constató que, después de reflexionar respecto a la secuencia didáctica implementada, el FP consideró incorporar nuevas prácticas de autorregulación relacionadas, principalmente, con los criterios interaccional, ecológico y afectivo. Este hecho implica una mejora en las competencias transversales.

Si se consideran los resultados del antes (unidad didáctica inicial) y el después (propuesta de mejora), se observó un aumento significativo en la promoción de prácticas de autorregulación por parte del FP. Es plausible afirmar que este hecho se debe a que la reflexión realizada por el FP estuvo guiada por los CID (herramienta que se enseña en el máster), los cuales se consideraron para clasificar cada práctica de autorregulación del instrumento que se utilizó en este estudio. Se debe aclarar aquí que, si bien las prácticas están relacionadas con cada criterio, algunas de ellas no están asociadas con un componente específico, como M1, M2 y M4, las cuales proponen orientar a los estudiantes en el planteamiento de metas, los tiempos de estudio o elaboración de material de estudio. Además, esto coincide con que el FP no haya promovido estos aspectos ni antes ni después de reflexionar, lo que hace pensar que, con este tipo de investigaciones, se podría ampliar la mirada de los CID hacia la promoción del aprendizaje autorregulado. Sumado a esto, estudios como los de Breda; Font; Lima. (2015) y Malet; Giacomone; Repetto. (2021) dan cuenta de los distintos usos de la Idoneidad Didáctica como herramienta metodológica en diversas investigaciones, los que dejan ver que la autorregulación del aprendizaje aún no ha sido analizada con los lentes de este constructo teórico.

Se considera importante que los docentes realicen una reflexión didáctica pautada sobre su propia práctica, utilizando herramientas conceptuales y metodológicas adecuadas, como el instrumento que aquí se propone. Estas condiciones permiten un enriquecimiento en el diseño y estructuración de la práctica docente, favoreciendo la promoción un aprendizaje autorregulado. Dicho lo anterior, se cree necesario seguir investigando en la incorporación de esta competencia en la formación de profesores.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos: PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa"; y ANID/PFCHA nro. 72200072 (Chile).

Referencias

ALMEIDA, B. A.; APORTELA, I. B. La autorregulación de la actividad de estudio al aprender matemática. **Transformación**, Camagüey, v. 15, n. 3, p. 263–279, sept.–dic. 2019.

ALTUN, S.; ERDEN, M. Self-regulation-based learning strategies and self-efficacy perceptions as predictors of male and female students' mathematics achievement. **Procedia – Social and Behavorial Sciences**, Países Bajos, v. 106, p. 2354–2364, dic. 2013. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.12.270

BELTRÁN-PELLICER, P.; GODINO, J. D. Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. **Perspectiva Educacional: Formación de Profesores**, Viña del Mar, v. 56, n. 2, p. 92–116, jun. 2017. DOI: https://doi.org/10.4151/07189729-vol.56-iss.2-art.559

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. d. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 8, n. 4, p. 1–41, jul. 2015.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R.; VILLELA, M. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. **Transformación**, Camagüey, v. 14, n. 2, p. 162-176, may.–ago. 2018.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education**, Eastbourne, v. 13, n. 6, p. 1893–1918, jun. 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

BROMME, R.; TILLEMA, H. Fusing experience and theory: The structure of professional knowledge. **Learning and Instruction**, Lovaina, v. 5, n. 4, p. 261–267. 1995. DOI: https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00018-6

BURGOS, M.; CASTILLO, M. Suitability criteria used by future primary school teachers in the assessment of math educational videos. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 2, p. 1–17, jul.–dic. 2021. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.35-2.19

CARDELLE-ELAWAR, M.; SANZ DE ACEDO, M. Looking at teacher identity through self-regulation. **Psicothema**, Oviedo, v. 22, n. 2, p. 293–298. 2010.

CEREZO, R.; NÚÑEZ, J.; FERNÁNDEZ, E.; SUÁREZ-FERNÁNDEZ, N.; TUERO, E. Programas de intervención para la mejora de las competencias de aprendizaje autorregulado en educación superior. **Perspectiva Educacional: Formación de Profesores**, Viña del Mar, v. 50, n. 1, p. 1–30. 2011.

CLEARY, T. J.; CHEN, P. P. Self-regulation, motivation, and math achievement in middle school: Variations across grade level and math context. **Journal of School Psychology**, Madison, v. 47, n. 5, p. 291–314, oct. 2009. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsp.2009.04.002

CLEARY, T. J.; VELARDI, B.; SCHNAIDMAN, B. Effects of the Self-Regulation Empowerment Program (SREP) on middle school students' strategic skills, self-efficacy, and mathematics achievement. **Journal of School Psychology**, Madison, v. 64, p. 28–42, oct. 2017. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsp.2017.04.004

CHATZISTAMATIOU, M.; DERMITZAKI, I. Teaching mathematics with self-regulation and for self-regulation: Teachers' reports. **Hellenic Journal of Psychology**, Salónica, v. 10, n. 3, p. 253–274. 2013.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research Methods in Education**. 8. ed. Nueva York: Routledge, 2018. 945 p.

CRESWELL, J. W. **Educational Research**: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research. 4. ed. Boston: Pearson, 2012. 650 p.

CUELI, M.; GARCÍA, T.; GONZÁLEZ-CASTRO, P. Autorregulación y rendimiento académico en matemáticas. **Aula Abierta**, Oviedo, v. 41, n. 1, p. 39–48, ene. 2013.

DELFINO, M.; DETTORI, G.; PERSICO, D. An online course fostering self-regulation of trainee teachers. **Psicothema**, Oviedo, v. 22, n. 2, p. 299–305. 2010.

DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L.; OP'T EYNDE, P. O. Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. En: BOEKAERTS, M.; PINTRICH, P. R.; ZEIDNER, M. (Eds.). **Handbook of Self-Regulation**. San Diego: Academic Press, 2000. p. 687–726. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50050-0

DE LA FUENTE, J.; JUSTICIA, F. J. Regulación de la enseñanza para la autorregulación del aprendizaje en la universidad. **Aula Abierta**, Oviedo, v. 82, p. 161–172.

DIGNATH, C.; BÜTTNER, G. Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes-insights from video-based classroom observations and teacher interviews. **Metacognition and Learning**, Estados Unidos, v. 13, n. 2, p. 127–157, ago. 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s11409-018-9181-x

DIGNATH, C.; BÜTTNER, G.; LANGFELDT, H. How can primary school students learn self-regulated learning strategies most effectively: A meta-analysis on self-regulation training programmes. **Educational Research Review**, Ámsterdam, v. 3, n. 2, p. 101–129. 2008. DOI: https://doi.org/10.1016/j.edurev.2008.02.003

ELVIRA-VALDÉS, M. A.; PUJOL, L. Autorregulación y rendimiento académico en la transición secundaria–universidad. **Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud**, Manizales, v. 10, n. 1, p. 367–378, ene.–jun. 2012.

FONT, V. et al. Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas. Una propuesta. En: FONT, V.; GIMÉNEZ, J.; LARIOS, V.; ZORRILLA, J. F. (Eds.). **Competencias del Profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato**. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2012. p. 59–68.

GIACOMONE, B.; GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P. Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 44, n. e172011, p. 1–21. 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

GIMÉNEZ, J. **Evaluación en Matemáticas**: Una Integración de Perspectivas. Madrid: Editorial Síntesis, 1997. 329 p.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San Pedro de Montes de Oca, v. 8, n. 11, p. 111–132, dic. 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En: SERRADO, L. (Ed.). **Tendencias Actuales de la Investigación en Educación Estocástica**. Málaga: Gráficas San Pancracio, 2011. p. 9–34.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM – Mathematics Education**, Berlín, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, mar. 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

HERNÁNDEZ, F.; ROSARIO, F.; CUESTA, J. D. Impacto de un programa de autorregulación del aprendizaje en estudiantes de grado. **Revista de Educación**, Madrid, v. 353, p. 571–588, sept.–dic. 2010.

HIDALGO-MONCADA, D.; DÍEZ-PALOMAR, J.; VANEGAS, Y. Formación de maestros de educación primaria en el contexto de confinamiento. La importancia del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. **Magister: Revista de Formación del Profesorado e Innovación Educativa**, Oviedo, v. 32, n. 1, p. 40–48, sept. 2020. DOI: https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.40-48

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLINIG, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, n. 4, p. 372–400, jul. 2008. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

KISTNER, S. et al. Promotion of self-regulated learning in classrooms: Investigating frequency, quality, and consequences for student performance. **Metacognition and Learning**, Estados Unidos, v. 5, n. 2, p. 157–171, ago. 2010. DOI: https://doi.org/10.1007/s11409-010-9055-3

LAVASANI, M. G.; MIRHOSSEINI, F. S.; HEJAZI, E.; DAVOODI, M. The effect of self-regulation learning strategies training on the academic motivation and self-efficacy. **Procedia – Social and Behavioral Sciences**, Países Bajos, v. 29, p. 627–632. 2011. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.11.285

LEDEZMA, C.; BREDA, A.; SÁNCHEZ, A.; SALA, G. Didactic suitability criteria related to reflection on the implementation of mathematical modelling in a virtual context. En:

HODGEN, J.; GERANIOU, E.; BOLONDI, G.; FERRETTI, F. (Eds.). **Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education** (CERME12). Bolzano: Free University of Bozen-Bolzano/ERME, 2022. p. 3634–3641.

LEDEZMA, C.; SOL, T.; SALA-SEBASTIÀ, G.; FONT, V. Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. **Mathematics**, Basilea, v. 10, n. 18, 3339, sept. 2022. DOI: https://doi.org/10.3390/math10183339

MALET, O.; GIACOMONE, B.; REPETTO, A. M. La Idoneidad Didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. **REVEMOP**, Ouro Preto, v. 3, e202110, ene. 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202110

MARTÍNEZ, M.; VALIENTE, C. Autorregulación afectivo-motivacional, resolución de problemas y rendimiento matemático en educación primaria. **Educatio Siglo XXI**, Murcia, v. 37, n. 3, p. 33–54, nov.–feb. 2019. DOI: https://doi.org/10.6018/educatio.399151

MONTES, M.; CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; LIÑÁN-GARCÍA, M. M.; BARRERA-CASTARNADO, V. J. Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En: BADILLO, E.; CLIMENT, N.; FERNÁNDEZ, C.; GONZÁLEZ, M. T. (Eds.). **Investigación sobre el Profesor de Matemáticas**: Formación, Práctica de Aula, Conocimiento y Competencia Profesional. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 2019. p. 157–176.

NISS, M.; JANKVIST, U. T. On the mathematical competencies framework and its potentials for connecting with other theoretical perspectives. En: JANKVIST, U. T.; GERANIOU, E. (Eds.). **Mathematical Competencies in the Digital Era**. Cham: Springer, 2022. p. 15–38. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_2

PERELS, F.; DIGNATH, C.; SCHMITZ, B. Is it possible to improve mathematical achievement by means of self-regulation strategies? Evaluation of an intervention in regular math classes. **European Journal of Psychology of Education**, Lisboa, v. 24, n. 1, p. 17–31, mar. 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/bf03173472

PERELS, F.; GÜRTLER, T.; SCHMITZ, B. Training of self-regulatory and problem-solving competence. **Learning and Instruction**, Lovaina, v. 15, n. 2, p. 123–139, abr. 2005. DOI: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2005.04.010

PERRENOUD, P. **Escola e Cidadania**: O Papel da Escola na Formação para a Democracia. Traducción de F. Murad. Porto Alegre: Artmed, 2004. 184 p.

PINTRICH, P. R. A conceptual framework for assessing motivation and self-regulated learning in college students. **Educational Psychology Review**, Dordrecht, v. 16, n. 4, p. 385–407, dic. 2004. DOI: https://doi.org/10.1007/s10648-004-0006-x

PRANKE, A.; BRAGAGNOLO, L. Potencialização da aprendizagem autorregulada de bolsistas do PIBID/UFPel do curso de licenciatura em matemática a través de oficinas pedagógicas. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Río Claro, v. 29, n. 51, p. 223–240, abr. 2015. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a12

RAMOS-RODRÍGUEZ, E.; FLORES, P. Reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas en un curso de formación continua. **UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Andújar, v. 46, p. 71–89, jun. 2016.

ROSÁRIO, P. et al. Eficacia de un programa instruccional para la mejora de procesos y estrategias de aprendizaje en la enseñanza superior. **Psicothema**, Oviedo, v. 19, n. 3, p. 353–358. 2007.

ROSÁRIO, P. et al. Grade level, study time, and grade retention and their effects on motivation, self-regulated learning strategies, and mathematics achievement: A structural equation model. **European Journal of Psychology of Education**, Lisboa, v. 28, n. 4, p. 1311–1331, dic. 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10212-012-0167-9

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 8, n. 3, p. 255–281, jun. 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

SALMERÓN, H.; GUTIERREZ-BRAOJOS, C La competencia de aprender a aprender y el aprendizaje autorregulado. Posicionamientos teóricos. Editorial. **Profesorado: Revista de Currículum y Formación del Profesorado**, Granada, v. 16, n. 1, p. 5–13, abr. 2012.

SALMERÓN, H.; GUTIERREZ-BRAOJOS, C.; RODRÍGUEZ, S., SALMERÓN, P. Influencia del aprendizaje cooperativo en el desarrollo de la competencia para aprender a aprender en la infancia. **Revista Española de Orientación y Psicopedagogía**, Madrid, v. 21, n. 2, p. 308–319. 2010. DOI: https://doi.org/10.5944/reop.vol.21.num.2.2010.11534

SALMERÓN, H.; GUTIERREZ-BRAOJOS, C.; SALMERÓN-VÍLCHEZ, P.; RODRÍGUEZ, S. Metas de logro, estrategias de regulación y rendimiento académico en diferentes estudios universitarios. **Revista de Investigación Educativa**, Murcia, v. 29, n. 2, p. 467–477, may. 2011.

SÁNCHEZ, A.; FONT, V.; BREDA, A. Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. **Mathematics Education Research Journal**, Sídney, v. 34, n. 4, p. 863–885, dic. 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

SANMARTÍ, N. Aprender a evaluarse: Motor de todo aprendizaje. **Aula de Innovación Educativa**, Barcelona, v. 192, p. 26–29, jun. 2010.

SANMARTÍ, N. Avaluar la competència, avaluar per ser més competent. En: BALLESTER, L. (Dir.). **Anuari de l'Educació de les Illes Balears 2019**. Pollensa: Colonya, 2019. p. 16–27.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Orlando: Academic Press, 1985. 429 p.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En: TIROSH, D.; WOOD, T. L. (Eds.). **International Handbook of Mathematics Teacher Education Vol. 2**: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education. Róterdam: Sense Publishers, 2008. p. 321–354.

SCHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4–14, feb. 1986. DOI: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

WAEYTENS, K.; LENS, W.; VANDENBERGHE, R. 'Learning to learn': Teachers' conceptions of their supporting role. **Learning and Instruction**, Lovaina, v. 12, n. 3, p. 305–322, jun. 2002. DOI: https://doi.org/10.1016/s0959-4752(01)00024-x

YILDIZ, P.; GÜREL, R.; BOZKURT, E.; YETKIN ÖZDEMIR, I. E. Self-regulation of novice middle school mathematics teachers in the preparation process for teaching. **International Online Journal of Education and Teaching**, Ankara, v. 9, n. 1, p. 449–470, ene. 2022.

ZIMMERMAN, B. J. Self-efficacy: An essential motive to learn. **Contemporary Educational Psychology**, Orlando, v. 25, n. 1, p. 82–91, ene. 2000 DOI: https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1016

ZIMMERMAN, B. J. Becoming a self–regulated learner: An overview. **Theory into Practice**, Filadelfia, v. 41, n. 2, p. 64–70. 2002. DOI: https://doi.org/10.1207/s15430421tip4102_2

Autores

Diana Hidalgo-Moncada
Profesora de Matemática y Computación por la Universidad de Concepción
Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada
Doctoranda en Universidad de Barcelona
Línea de investigación: formación de profesores
dhidalmo7@alumnes.ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-2573-9007

Javier Díez-Palomar
Profesor de didáctica de las matemáticas
Departamento de de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática
Universidad de Barcelona
Líneas de investigación: matemática dialógica, formación del profesorado de matemáticas, enfoque ontosemiótico de las matemáticas
jdiezpalomar@ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-4447-1595

Yuly Vanegas
Profesora de didáctica de las matemáticas
Departamento de Matemáticas
Universidad de Lleida
Líneas de investigación: matemáticas y ciudadanía, formación del profesorado de matemáticas, matemáticas y educación infantil
yuly.vanegas@udl.cat
https://orcid.org/0000-0002-8365-1460

Como citar el artículo:

HIDALGO-MONCADA, D.; DÍEZ-PALOMAR, J.; VANEGAS, Y. Prácticas de Autorregulación en la Propuesta Didáctica de un Futuro Profesor de Matemáticas: Un Instrumento para la Reflexión. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 112 - 146. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p112-146.id1384

Anexo 1. Promoción del Aprendizaje Autorregulado en las Matemáticas

Este instrumento es una guía dirigida al docente, que le permite pautar la reflexión de su práctica en el aula respecto a la consideración de la promoción de un aprendizaje autorregulado e identificar qué tipo de acciones ha llevado a cabo. Como también para orientarse en cómo incorporar nuevas acciones de autorregulación en su planificación futura.

Criterio de idoneidad	**Código**	**Prácticas que promueven la autorregulación**	**Orientaciones para implementar la práctica de autorregulación**	**Preguntas de reflexión para el estudiante**
Idoneidad Epistémica	Ep1	Proponer la búsqueda y comparación de diferentes vías de solución para un mismo problema	Preguntar a los estudiantes qué procedimientos han considerado para realizar la tarea y observar cuando se presenten distintas vías de solución, sugiriendo la comparación de procedimientos para identificar semejanzas y diferencias. Si entre los estudiantes no se observan diferentes formas de solución es bueno que sea el docente quien las proponga e invite a los estudiantes a compararlas	¿He realizado el mismo procedimiento que otros compañeros? ¿He realizado alguno de los procedimientos que mostró el profesor? ¿En qué se diferencian los procedimientos que mostró el profesor? ¿Qué procedimientos son para mí más comprensibles? ¿Por qué?
	Ep2	Promover en los estudiantes la identificación de errores cometidos, las causas de estos y cómo evitarlos	Durante la retroalimentación de actividades pedir a los estudiantes que identifiquen dónde han cometido errores, que expliquen qué los causó y propongan una posible vía para evitarlos. Una opción es que el docente primero muestre a los estudiantes los resultados de una actividad y que ellos identifiquen sus errores en los procedimientos. Posteriormente el docente podría mostrar alternativas de procedimientos correctos.	¿Obtuve distintos resultados a los que señala el profesor? ¿Por qué mi procedimiento no es correcto? ¿Dónde observo algún error? ¿En qué tipo de tarea cometo más errores? ¿Cuál es la causa de mis errores? ¿Cómo puedo evitarlos?
	Ep3	Promover la argumentación y explicación de procedimientos utilizados	En el planteamiento de una actividad matemática, pedir a los estudiantes que expliquen cómo han llegado a los resultados, qué procedimientos han utilizado. También se puede pedir que	¿Cómo llegue a tal resultado? ¿Qué procedimiento utilice? ¿Por qué creo que mi respuesta es correcta?

			expliquen sus respuestas y procedimientos a otros compañeros	¿Cómo le explico a mis compañeros el procedimiento que utilice?
	Ep4	Describir la forma de razonar al desarrollar un problema, apoyando al estudiante en su intento por comprender los problemas que desarrolle de manera individual	En cada tema matemático es importante que el docente muestre un ejemplo de cómo fue razonando al desarrollar un problema o ejercicio	¿Cómo fue razonando el profesor al desarrollar un problema o ejercicio? ¿Puedo desarrollar un problema siguiendo un razonamiento parecido al que ha mostrado el profesor?
Idoneidad Cognitiva	C1	Enseñar estrategias que permitan a los estudiantes resolver problemas	Es importante que el docente no sólo proponga a sus estudiantes problemas para resolver, también es fundamental dedicar tiempo a enseñar diferentes heurísticas, por ejemplo, las propuestas por Shoenfeld (1985): Análisis, Exploración y Verificación	¿Qué estrategias heurísticas he utilizado en la resolución del problema? ¿Mis compañeros usaron las mismas estrategias? ¿Este problema me ha permitido conocer nuevas heurísticas?
	C2	Generar instancias de reflexión de las estrategias utilizadas	Reflexionar con los estudiantes las estrategias utilizadas. Por ejemplo, cuando una estrategia es mejor que otra y cuales han utilizado.	¿He aplicado algún método encontrado por mi para resolver la tarea o alguna estrategia enseñada por el profesor? ¿Cuál fue el método que utilice?
	C3	Plantear las actividades de distintas formas, para asegurar que los estudiantes reconozcan ¿Qué hacer? ¿para qué hacerlo? ¿cómo hacerlo y con qué medios? y ¿cómo representar los resultados? De esta manera, el estudiante tendrá la posibilidad de comprender todo lo que se le solicita.	Plantear las actividades de diferentes modos, es decir, además de la explicación escrita, explicar en voz alta la actividad o a través de un video o un audio.	¿Me han quedado claras las instrucciones de las actividades luego de que el profesor me explicara de diferentes maneras? ¿Me han quedado más claras las instrucciones de las actividades cuando el profesor me las ha explicado de tal manera?

	C4	Enseñar a los estudiantes a comprobar su comprensión respecto a un contenido matemático	Proponer a los estudiantes que formulen problemas y/o ejercicios, sobre un tema ya estudiado. Luego pueden intercambiar los problemas que elaboren con un compañero y resolverlos. También se puede proponer a los estudiantes que se planteen preguntas acerca de un tema o una clase.	¿Qué conceptos están implicados en este tema? ¿Utilizaba fórmulas específicas, cuáles? ¿Tenía una aplicabilidad directa en mi entorno?
	C5	Proponer actividades en las que los estudiantes deban generalizar una fórmula, hacer conexiones intramatemáticas, cambios de representación, hacer conjeturas, etc.	Promover la identificación de conexiones que se pueden establecer entre distintos contenidos matemáticos, aplicando la definición, teorema y/o propiedades de un concepto aprendido. Así como también incluir distintos modos de representación en un mismo problema o ejercicio matemático.	¿Qué vinculación hay entre los nuevos conceptos y otros que he aprendido anteriormente? ¿Qué tipos de representación he utilizado?
	C6	Explicitar criterios de evaluación de cada actividad o unidad teórica	Explicitar desde el comienzo de una unidad o antes de realizar una actividad cuáles serán los criterios de evaluación, los aspectos a considerar, si existirá coevaluación y autoevaluación en el proceso. Se puede entregar una pauta de evaluación a los estudiantes, de manera que ellos la puedan corroborar al desarrollar una tarea o al estudiar algún contenido. La pauta se puede socializar al inicio de una clase para asegurar su comprensión. Otra forma de mostrar los criterios de evaluación es mostrar trabajos de años anteriores que hayan cumplido con lo pedido.	¿Ya me informaron cuales son los criterios de evaluación para el curso, la actividad o para la unidad? ¿Cuáles son los criterios de evaluación para tal actividad o de tal unidad? ¿He cumplido con los criterios de evaluación al realizar la actividad?

Idoneidad Interaccional	I1	Proponer actividades donde se fomente la discusión entre pares.	Proponer a los estudiantes debatir, por ejemplo, dos formas de resolver un problema o ejercicio frente a dos soluciones distintas.	Para preparar al debate: ¿Cómo llegue a ese resultado? ¿Por qué creo que mi resultado es el correcto? ¿Qué aspectos tiene en común o diferencia mi procedimiento del de un compañero?
	I2	Organizar formas de trabajo cooperativo durante la clase o fuera de ella	Pedir a los estudiantes realizar actividades en grupo, las cuales impliquen que los estudiantes se designen tareas o roles para el desarrollo de estas.	¿Cómo he desarrollado mi rol en un trabajo con más compañeros? ¿Se cuál es la importancia de llevar a cabo mi rol en un trabajo con más compañeros?
	I3	Generar instancias colectivas en las que los estudiantes puedan comprobar el conocimiento que tienen acerca de un tema, sin necesidad de que estas instancias sean evaluadas.	Organizar encuentros de conocimientos matemáticos. Utilizar algún juego matemático, ya sea en papel o con alguna aplicación (Kahoot, quizizz, mentimeter, etc.). El juego no solo los motiva en las matemáticas, sino también, les permite comprobar lo que saben y no saben acerca de un concepto o tema.	¿Participo de los juegos que propone el profesor para comprobar cuanto sé acerca de un tema? ¿Cómo me va en los juegos que realiza el profesor? ¿Me sirven los juegos para darme cuenta lo que aun no comprendo bien acerca de un tema?
	I4	Generar instancias de análisis críticos individuales y colectivos del estado y la forma en que están aprendiendo las matemáticas.	Orientar al estudiante en la elaboración de un plan de acción para el análisis o autoevaluación de su aprendizaje en las matemáticas. Indicar al estudiante algunas preguntas que le sirvan de guía para que luego él formule otras en su plan.	¿Con qué frecuencia estudio matemáticas? ¿Qué resultados obtengo? ¿Cómo organizo mi estudio? ¿Qué aspectos debo reforzar o cambiar de mi forma de estudio? ¿A quién le puedo pedir ayuda, cuando no entienda algo?
	I5	Orientar el uso del libro de texto como medio para el estudio individual, así como cualquier otro tipo de documento de estudio o un ordenador.	Explicar la estructura que tiene el libro de texto o las unidades didácticas del libro (definición, ejemplo, ejercicios de menor y mayor dificultad, problemas), esto guiara al estudiante en su estudio individual. Esto se	¿Entiendo cómo usar el libro de texto (u otro documento) para estudiar de forma individual fuera de la escuela?

			debe hacer con cualquier otro tipo de documento de estudio.	
Idoneidad Mediacional	M1	Orientar al estudiante en la elaboración de materiales de estudio individual en matemáticas y socializarlos	Mostrar al estudiante formas de elaborar un resumen, un esquema, un formulario, entre otros. Podría mostrar ejemplos de unidades pasadas en formato de esquema, resumen o formulario	Para realizar un esquema: ¿Qué conceptos están implicados en el tema o unidad matemática? ¿Cómo se relacionan? ¿Cuáles son las características o propiedades involucradas en el tema o concepto?
	M2	Orientar a los estudiantes sobre los tiempos de estudio para ayudarlos en su organización.	Orientar a los estudiantes sobre los tiempos de estudio, por ejemplo, indicar cuánto tiempo se ocupará en la clase para la teoría y cuánto para la práctica. Cuánto tiempo aproximado se requerirá en el estudio individual para realizar alguna tarea o repasar lo aprendido. También se puede especificar que algún contenido requiere de mayor o menor tiempo de estudio (esto según experiencia del profesor).	¿De cuánto tiempo dispongo para estudiar la asignatura de matemáticas? ¿Cuánto tiempo me llevó realizar tal tarea? ¿Toda tarea o actividad me ocupará el mismo tiempo?
	M3	Implementar diferentes medios de enseñanza que potencien la búsqueda, procesamiento y obtención de información que debe asimilar el alumno, los cuales ayudarán a la comprensión de los conceptos, tareas o actividades matemáticas.	Utilizar libro de texto, hojas de trabajo, tarjetas de aprendizaje, asistentes matemáticos online, ppt, pdf, entre otros. Es importante incorporar algún medio de aprendizaje donde el estudiante pueda intervenir o manipular para observar propiedades o demostraciones.	¿Siento que me facilita el aprendizaje poder tener varios medios de enseñanza?

	M4	Orientar a los estudiantes en el planteamiento de metas u objetivos en la asignatura de matemáticas	Entregar a los estudiantes ejemplos de metas a corto y largo plazo, de manera que les sirvan de guía para que ellos se planteen otras o las complementen.	¿Cuáles son mis metas a corto y/o a largo plazo en la asignatura de matemáticas? ¿Qué objetivos puedo plantearme en la asignatura de matemáticas que pueda cumplir?
Idoneidad Afectiva	A1	Incorporar a las actividades, preguntas a los estudiantes que fomenten su autoevaluación emocional, motivacional o actitudinal.	En los últimos minutos de una clase se puede pedir a los estudiantes que respondan a una o dos preguntas breves dirigidas a autorregular su estado emocional, motivacional o actitudinal. También se pueden agregar una o dos preguntas al final de algunas actividades. Por ejemplo: ¿Cómo te sentiste durante la clase o al desarrollar la actividad? (estresado, angustiado, divertido, concentrado o desconcentrado) ¿En qué parte de la clase o con qué conceptos te sentiste más seguro y con confianza?	¿Cómo me sentí durante la clase, actividad o tarea? (estresado, angustiado, divertido, animado, concentrado, desconcentrado) ¿Estuve seguro y con confianza durante toda la clase? ¿Me siento más seguro con ciertos conceptos más que otros? ¿Mi actitud fue positiva o negativa durante la clase o actividad?
	A2	Considerar los intereses de los estudiantes, su contexto familiar y social, para generar actividades a fines con sus intereses, permitiendo un mejor estado emocional, motivacional y actitudinal.	De manera explícita preguntar a los estudiantes cuáles son sus actividades cotidianas favoritas, lo que hacen cada día o de vez en cuando con la familia o amigos. Para la elaboración de actividades matemáticas. Preguntarles, cuáles han sido sus actividades académicas o tareas favoritas, cuáles les gustaría repetir, en con otro contenido.	¿Me ha interesado realizar la actividad propuesta? ¿Qué cosas me gusta hacer cada día? ¿Qué actividades suelo hacer con mis amigos o en familia? ¿Cuáles son mis actividades favoritas en matemáticas? ¿Qué actividades me causan vergüenza o miedo?
Idoneidad Ecológica	Ec1	Vincular el estudio de los contenidos matemáticos al entorno y vida cotidiana. Mostrar conexiones intradisciplinares	Dar a conocer el vínculo existente entre las matemáticas y el entorno de los estudiantes. Señalar la utilidad de las matemáticas en diversas disciplinas.	¿Qué cosas, o actividades de mi vida cotidiana creo que necesitan matemáticas? ¿Qué matemáticas necesito para realizar tal actividad en mi vida?

				¿En qué otras áreas ocupo las matemáticas?
	Ec2	Implementar diferentes formas de evaluación para un mismo contenido. Esto proporciona más oportunidades al estudiante para mostrar el grado de comprensión de un tema.	Incorporar diferentes formas de evaluación para una misma unidad o concepto, por ejemplo, tareas extraclases, trabajos investigativos, experimentales, tareas interactivas con algún software, trabajos expositivos, debates, entre otros.	¿Con qué actividad de evaluación me sentí más cómodo o seguro? ¿En qué actividad de evaluación pude expresar mejor lo que sabía de un tema? ¿Me gustaría que me evaluaran de otra manera? ¿cuál?

El conocimiento didáctico matemático del objeto inecuaciones: una visión desde las concepciones y creencias

Leonardo Marcedonio Piratoba Gil
Leonardo.piratoba@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0001-9557-0994
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)
Duitama, Colombia.

Omaida Sepúlveda Delgado
omaida.sepulveda@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-2950-8137
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)
Tunja, Colombia.

Zagalo Enrique Suárez
zagalo.suarez@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-2620-586X
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)
Tunja, Colombia.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Es de gran importancia para los docentes de matemáticas utilizar herramientas para describir, explicar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) cuenta con herramientas para efectuar este tipo de análisis didáctico de los objetos matemáticos. En este sentido, se presenta la reconstrucción del significado global del objeto inecuaciones, donde se identifican algunos de sus significados de referencia, a partir del análisis semiótico a situaciones-problemas, encontradas en tres periodos de la humanidad y a partir de estas se realiza la reconstrucción a las configuraciones epistémicas presentes en la solución de las situaciones-problemas las cuales emergen del estudio histórico-epistemológico realizado para la reconstrucción del significado global referencial. Este trabajo es el resultado de una investigación realizada como estudio de caso a docentes en instituciones públicas y privadas del departamento de Boyacá (Colombia) para dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento tienen los profesores de matemáticas del objeto inecuaciones, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza, según sus concepciones y creencias? Como categorías de análisis se toman las propuestas en el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor, algunos de los resultados del estudio son las dificultades que muestran los profesores por reconocer la importancia de identificar y comprender los diferentes tipos de significados de referencia para el objeto inecuaciones.

Palabras clave: Conocimiento-Didáctico-Matemático, Enfoque-Ontosemiótico, Inecuación, Estudio-Histórico-Epistemológico, Configuración Epistémica.

O conhecimento didático matemático do objeto inequações: um olhar a partir das concepções e crenças

Resumo

É de grande importância para os professores de matemática usar ferramentas para descrever, explicar e melhorar os processos de ensino e aprendizagem. Consequentemente, a Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (AOS) possui ferramentas para realizar esse tipo de análise didática de objetos matemáticos. Nesse sentido, apresenta-se a reconstrução do significado global do objeto das inequações, onde são identificados alguns de seus significados de referência, a partir da análise semiótica de situações-problema, encontradas nos três períodos da humanidade e, a partir disso, reconstrói-se o sistema de configurações epistêmicas presentes na solução das situações-problema que emergem do estudo histórico-epistemológico realizado para a reconstrução do significado global referencial. Este trabalho é o resultado de uma pesquisa realizada sobre um estudo de caso com professores de instituições públicas e privadas do departamento de Boyacá (Colômbia) para responder à pergunta de pesquisa: Que conhecimento apresentam os professores de matemática sobre objeto inequações, com relação aos significados pretendidos nos processos de ensino, segundo suas concepções e crenças? Como categorias de análise, são tomadas as expostas no modelo de Conhecimento Didático Matemático do professor e entre os resultados do estudo conclui-se que os professores têm dificuldade em reconhecer a importância de identificar e conhecer os diferentes tipos de significados de referência para o objeto inequações.

Palavras chave: Conhecimento Didático-Matemático, Abordagem Ontossemiótica, Inequações, Estudo Histórico-Epistemológico, Configuração Epistêmica.

The mathematical didactic knowledge of the inequalities object: a vision from the conceptions and beliefs

Abstract

It is of great importance for mathematics teachers to use tools to describe, explain and improve the teaching and learning processes. Consequently, the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) has tools to carry out this type of didactic analysis of mathematical objects. In this sense, the reconstruction of the global meaning of the inequalities object is presented, where some of its reference meanings are identified, from the semiotic analysis of problem-situations, found in the 3 periods of humanity and from these the reconstruction of the epistemic configurations present in the solution of the problem-situations which emerge from the historical-epistemological study carried out for the reconstruction of the referential global meaning. This work is the result of an investigation carried out as a case study to teachers from public and private institutions in the department of Boyacá (Colombia) to answer the research question: What knowledge do mathematics teachers have of the inequalities object, with respect to the intended meanings in the teaching processes, according to their conceptions and beliefs? As categories of analysis, those exposed in the model of the teacher's Mathematical Didactic Knowledge are taken and among the results of the study it is concluded that teachers find it difficult to recognize the importance of identifying and knowing the different types of reference meanings for the inequalities object.

Keywords: Knowledge-Didactic-Mathematical, Approach-Ontosemiotic, Inequality, Historical-Epistemological Study, Epistemic Configuration**.**

Introducción

Al analizar algunas de las tendencias en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, es importante destacar la relevancia que se presenta en el estudio de las conexiones matemáticas (RODRÍGUEZ; RODRÍGUEZ; FONT, 2020). Estos resultados, han generado un consenso sobre la necesidad de incorporar en los currículos de matemáticas el estudio de los procesos de conexión al interior de ella y con los contextos. En particular, en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática - EOS (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), se formulan modelos para estudiar la complejidad de los objetos matemáticos como resultado del análisis a sus significados globales y de referencia, y de considerar el estudio de los diferentes elementos, relaciones, representaciones y definiciones de estos objetos, convirtiéndose en un tema relevante de investigación para la Didáctica de las Matemáticas.

A su vez, en el enfoque EOS, los significados de referencia se establecen en términos de prácticas matemáticas y de configuraciones de objetos primarios que las activan. Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados objetos matemáticos. Si consideramos, por ejemplo, los objetos que intervienen en la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema, se identifica el uso de lenguajes verbales, algebraicos, gráficos y numéricos (SEPÚLVEDA; SUÁREZ; PINO-FAN, 2021). Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos, que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella, en tanto acción compuesta, son satisfactorias. Por lo tanto, cuando un agente (institución o persona), realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conjunto formado por problemas, notaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Los objetos matemáticos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales), o cognitivas (redes de objetos personales) (SEPÚLVEDA, et al., 2021).

Teniendo en cuenta lo expuesto, en este artículo se aborda la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento muestran los profesores de matemáticas del objeto inecuaciones, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza, según sus concepciones y creencias?

Y se formulan como guía las preguntas: ¿Cuáles son los significados del objeto inecuaciones? ¿Cuál es el significado global del objeto inecuaciones? En este sentido, se presenta la reconstrucción del significado global del objeto inecuaciones que surge del estudio histórico-epistemológico, donde se reconocen algunos de sus significados de referencia, a partir del análisis semiótico a situaciones-problemas, emergentes en tres periodos de la humanidad y se realiza la reconstrucción de las configuraciones epistémicas presentes en la solución de las situaciones-problemas.

En concreto se profundiza en la pregunta: ¿Cómo se relacionan las configuraciones epistémicas del objeto matemático inecuaciones? Para dar respuesta a los interrogantes, se realizó una investigación de tipo exploratoria– descriptiva, con un enfoque cualitativo y entre los resultados del estudio, se evidenció la complejidad para la enseñanza y el aprendizaje del objeto inecuaciones, en relación con la resolución de problemas que involucran este objeto matemático, según las concepciones y creencias que tenían los docentes del estudio de caso al abordar el objeto matemático. En este artículo se presenta el análisis realizado para llegar a establecer el significado global del objeto matemático *inecuaciones*.

1. Referentes teóricos

En el desarrollo de la investigación, se tomó como marco teórico al Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática – EOS, desarrollado por Godino y colaboradores (GODINO, 2014; GODINO et al., 2013; GODINO; BATANERO; FONT, 2020; GODINO, BATANERO; FONT, 2007; GODINO; BATANERO; FONT, 2008; SEPÚLVEDA, 2016); se asume este referente, debido a que articula diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática, a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Este enfoque utiliza diversas herramientas teóricas y metodológicas que buscan articular aspectos institucionales y personales del conocimiento matemático con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El enfoque metodológico EOS, es un modelo donde se establecen cinco fases de análisis, lo cual permite describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática. Como menciona Ramírez (2022) estos niveles se entienden como herramientas metodológicas que permite analizar las prácticas docentes o de los alumnos referente a algún tipo de clase, tareas o libros de texto de la matemática.

De acuerdo con Font, Planas y Godino (2010) los niveles corresponden a: análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y meta normas y valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. El conjunto de nociones teóricas que componen el enfoque EOS y que hacen parte importante de la investigación, se pueden clasificar en grupos, cada uno los cuales ofrece una perspectiva para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (GODINO et al., 2007), estos son: Sistema de prácticas, Objetos Matemáticos, Configuración epistémica e Idoneidad didáctica.

1.1 Significado de los Objetos Matemáticos

Según Pino-Fan (2013) el significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene.

En este sentido, el significado del objeto matemático según Godino y Batanero (1994) es visto como: "[…] el sistema de prácticas institucionales asociados al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional en un momento dado" (p. 340).

En relación con el significado institucional, Godino et al. (1994), introducen la noción de significado de objeto personal: "[…] el significado de un objeto personal, es el sistema de prácticas personales que una persona usa para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal en un momento dado" (p. 341).

1.2 Objetos matemáticos primarios

Godino et al. (2007, p. 130) establecen los siguientes tipos de objetos matemáticos: Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en diferentes registros de expresión (escrito, oral, gestual) y representaciones mediante el lenguaje (ordinario específico matemático) que se relacionan con los objetos no lingüísticos; Situaciones problemas: aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios: son aquellas tareas que llevan a la actividad matemática; Concepto-definición: comprendidos como caracteres que se definen, como número, línea, segmento, mediana, relación, etc. Proposiciones o propiedades: enunciados sobre conceptos; Procedimientos: sucesión de actividades que realiza el sujeto ante las tareas matemáticas; ya sean algoritmos, operaciones, cálculos, entre otros; Argumentos: enunciados que buscan validar o explicar las proposiciones y procedimientos.

La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar en las diferentes bases de los procesos matemáticos como la comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación (GIACOMONE; GODINO; WILHELMI; BLANCO, 2018).

2. Metodología

La investigación realizada se sustentó teórica y metodológicamente en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – EOS (GODINO et al., 1994; 2007) el cual proporciona las categorías necesarias para el análisis y la presentación de los resultados del estudio. Por tal razón, la investigación se enmarca dentro de una investigación cualitativa de tipo descriptiva, que permite narrar e interpretar un hecho o fenómeno con el fin de establecer su estructura o comportamiento (ARIAS, 1999). En esta dirección, el estudio de los significados de referencia para el objeto inecuaciones, se realizó a nivel exploratorio-descriptivo, de tipo documental, con el objetivo de caracterizar los significados más relevantes de este objeto matemático.

Según lo expuesto, la investigación permitió clasificar el estudio según tres periodos de la humanidad (Edad antigua, Edad Moderna y Edad Contemporánea). En la Edad Antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C) se destacó el trabajo realizado por Diofanto, en relación a diversas situaciones problemas relacionadas con áreas de terrenos, proporciones, cantidades de diferentes elementos como, terrenos, alimentos, objetos entre otros; todos ellos relacionados con las inecuaciones, generando así un sistemas de prácticas matemáticas de donde emergen los primeros significados parciales del objeto inecuaciones y se relaciona el objeto inecuaciones con problemas de proporcionalidad.

En el periodo 2 de la Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C; siglo XV- siglo XVIII), Bombelli realizó grandes estudios en el desarrollo del álgebra y la creación de los números complejos favoreciendo el desarrollo de las matemáticas: en esta época se encuentra el planteamiento de problemas relacionados con geometría y complejos, los cuales se traducían en la solución de ecuaciones de grado uno y dos. Sin embargo, hacia el año 1572 surge uno de los aportes europeos más importantes de la época proporcionado por Rafael Bombelli (c.1526 - 1572), el cual corresponde al texto denominado los Cartelli y los Contracartelli, en esta obra se encuentran problemas de álgebra y cálculo. En dicha obra, Bombelli soluciona una situación problema sobre la raíz cúbica de un número complejo utilizando el método de aproximación de la raíz cúbica y usando inecuaciones (significado parcial). Por otra parte, el matemático Gregoire Vicent (1589-1667) desarrolló y estudio diferentes formas de relacionar los números con el infinito aplicando la geometría, y soluciona un problema utilizando el método de exhausción al usar inecuaciones (significado parcial).

Finalmente, en el periodo 3 de la Edad Contemporánea (1789 d. C – actualidad), del análisis a las soluciones de las inecuaciones y de los diferentes métodos de solución, emerge una de las ramas más importante en las matemáticas denominada geometría, donde surgen elementos fundamentales y se utilizan las inecuaciones, como es el caso del problema del polígono propuesto por Paolo Ruffini, donde se presenta un método de solución que hace uso de inecuaciones lineales y aproximación a números enteros. Este método consiste en plantear ecuaciones y operaciones elementales para aplicar inecuaciones y así encontrar la solución; a este sistema de prácticas se le asocia el significado parcial denominado: despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros.

En la investigación, se realizó un análisis a priori de situaciones didácticas y se diseñó un cuestionario que constaba de dos partes: la primera se relaciona con el análisis semiótico de las cuatro situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones, es decir, se analiza la tipología de los objetos primarios desde la dimensión epistémica (lenguajes, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) generando configuraciones a las cuales se le otorga un significado parcial emergente al objeto inecuaciones. Este trabajo fue realizado en un estudio de caso a cinco docentes profesores de matemáticas de grado 11 de Educación media en Colombia. La segunda parte del cuestionario se relaciona con preguntas sobre las concepciones y creencias de los profesores en cuanto al uso de estos significados parciales asignados al objeto inecuaciones.

Se realiza el estudio de caso a cinco profesores Licenciados en matemáticas, de diferentes sectores educativos en secundaria (públicos y privados) del departamento de Boyacá en Colombia: el primer docente se denomina Profesor 1 (P1), y tiene una formación académica como Licenciado en Matemáticas: cuenta con una especialización en Informática para la docencia y una maestría en Didáctica de las Matemáticas. Su experiencia laboral es de 2 años en instituciones privadas y 3 años en instituciones de educación superior en cursos de cálculo diferencial, actualmente es docente de en una institución educativa del municipio de Soata – Boyacá. El segundo docente, Profesor 2 (P2) tiene una formación académica como Ingeniero Electromecánico, su experiencia docente es de 12 años en instituciones públicas y 2 años en Instituciones de educación superior, actualmente es docente de planta en Bogotá – Cundinamarca. El tercer docente Profesor 3 (P3), tiene una formación académica como Licenciado en Matemáticas y Estadística, cuenta con una maestría en Educación Matemática y su experiencia docente es de 25 años en instituciones educativas privadas, actualmente es docente de una institución pública del municipio de Sogamoso - Boyacá. El cuarto docente Profesor 4 (P4) tiene formación académica como Ingeniero de Sistemas, su experiencia docente es de 3 años en instituciones privadas y 1 año en instituciones de educación superior en cursos de cálculo diferencial, actualmente se encuentra laborando en una institución privada de la ciudad de Duitama – Boyacá, y el quinto docente Profesor 5 (P5) tiene formación académica como Licenciado en Matemáticas y Estadística, cuenta con una especialización en Gerencia Educativa y una maestría en Ciencias Matemáticas, su experiencia docente es de 5 años en instituciones privadas, actualmente se encuentra laborando en una institución privada de la ciudad de Tunja. De esta forma se realiza el estudio centrado en los conocimientos, concepciones y creencias del objeto Inecuaciones en relación con el significado Global del objeto matemático.

Para el estudio realizado, se diseñó un cuestionario con el fin de caracterizar los significados emergentes del objeto inecuaciones según las creencias y concepciones de los cinco docentes de matemáticas para el proceso de enseñanza del objeto matemático, esto con el fin de dar respuesta a los objetivos y la pregunta de investigación. En la Tabla 1, se indica las fases para la realización del estudio y los instrumentos utilizados para la recolección y el análisis de los datos.

Tabla 1— Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Fases en la Investigación	Técnica	Recolección de Datos	Instrumentos para el análisis de la información
Fase I. Análisis Preliminar	Análisis Documental	Revisión sistemática de libros de historia de las	Análisis de diferentes sistemas de prácticas

		matemáticas, y de diferentes investigaciones en torno a las inecuaciones.	matemáticas relacionados con las inecuaciones según categorías del EOS.
Fase 2. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas	Análisis Semiótico	Construcción de configuraciones epistémicas del objeto inecuaciones. .	Reconstrucción del significado global de referencia del objeto inecuaciones según situaciones problemas y significados parciales emergentes de las configuraciones epistémicas.
Fase 3. Experimentación		Cuestionario con situaciones problemas analizados en el estudio histórico y conceptual de las inecuaciones. Evaluación y análisis del conocimiento didáctico matemático de los profesores de grado once del estudio de casos.	Configuraciones realizadas en el análisis de las inecuaciones. Configuraciones epistémicas.
Fase 4. Evaluación	Análisis semiótico.		Dimensión epistémica del profesor en relación al conocimiento del contenido del objeto Inecuaciones.

Fuente: Elaboración propia.

3. Análisis y resultados

El estudio epistemológico realizado para el objeto Inecuaciones proporcionó los elementos para llegar a la caracterización de la dimensión epistémica según el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor propuesto por Godino (2009), a partir del análisis, en primer lugar, de la categoría del Conocimiento Común del Contenido (CCC), seguido del Conocimiento Ampliado del Contenido (CAC) matemático, para terminar con el Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM). Por tanto, para esta caracterización se inició con la identificación de los significados parciales que utilizará el profesor para solucionar problemas relacionados con el objeto inecuaciones con el fin de determinar el grado de idoneidad de su práctica didáctica.

El marco teórico EOS, establece que el profesor de matemáticas debería tener un buen conocimiento del objeto inecuaciones en la categoría del CCC, el cual se relaciona con la solución a tareas concretas que puede realizar el profesor en el desarrollo del tema inecuaciones para grado Once o para cursos de Cálculo Diferencial (GODINO, 2009). Bajo esta mirada, el docente de matemáticas debe poder resolver tareas o situaciones relacionadas con este objeto matemático y tener un conocimiento más amplio que le permita generar una trazabilidad entre los significados parciales de las inecuaciones, con el fin de proponer y crear estrategias didácticas para facilitar la construcción de objetos matemáticos por parte de los estudiantes (GODINO; BATANERO, 1994, p. 341).

En la categoría del conocimiento ampliado del contenido (CAC-CHM), se establecen las conexiones que puede realizar el profesor para diseñar e implementar tareas y generalizaciones con temáticas de la propia matemática y con otros campos del saber para sus estudiantes. En el modelo del CDM, dentro de la dimensión epistémica, se define la categoría del Conocimiento especializado del contenido, que se relaciona con el proceso de enseñanza por parte del profesor y comprende el conocimiento y las habilidades para la enseñanza (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), además, incluye la representación de ideas matemáticas, las explicaciones del contenido matemático a través de procedimientos y el análisis de métodos aplicados en la solución de problemas (HILL; BALL; SCHILLING, 2008). Por tal razón, es importante conocer ¿qué es el objeto inecuaciones? (GODINO, 1994), para que, a partir del reconocimiento de este sistema de prácticas, el profesor pueda llegar a identificar los significados parciales asociados al objeto matemático. En este proceso se potencia o se desarrolla el conocimiento común del contenido matemático del docente, el conocimiento ampliado y por tanto el especializado.

Para llegar a reconstruir un significado global del objeto inecuaciones se indaga sobre situaciones problema que determinan o establecen significados parciales del objeto matemático. En este sentido y en relación con las inecuaciones, a lo largo de la historia se evidencia que la humanidad se ha venido enfrentado a diversos problemas y situaciones para mejorar las condiciones de vida del ser humano. Alguna de estas situaciones requiere de un conocimiento técnico que permita el uso de diferentes herramientas para dar solución a problemas de cada época. Según Godino y Batanero (1994), se identifica un problema como: "[…] una situación en la que se le pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución". En el mismo sentido, Sepúlveda (2016) afirma que "[…] un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea, pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente" (p. 333).

Por tal razón surgen preguntas como ¿Qué problemas se resolvieron en la antigüedad relacionados con las inecuaciones? ¿En qué situaciones se aplicó el problema? ¿Qué métodos utilizaron en la solución de estos problemas? Estas preguntas dieron inicio al estudio epistemológico y se concretaron en el: Estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones, el cual se estructuró en los tres periodos de la humanidad: Periodo 1: Edad antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C); Periodo 2: Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII) y Periodo 3: Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad).

Se resalta que, en la Edad media, no se conocen aplicaciones con desigualdades; sin embargo, algunos de los problemas de la época se beneficiaron del desarrollo de las ecuaciones y símbolos para su solución llevando a utilizar las desigualdades en los demás periodos (HALMAGHI, 2011). En cada época se identificaron algunos de los sistemas de prácticas relacionados con problemas de inecuaciones, analizándolos según la tipología de los objetos primarios con el propósito de reconstruir su respectiva configuración epistémica y determinar una categoría para un significado parcial del objeto matemático (GODINO, 1994).

A través de la historia las inecuaciones asumieron un importante papel en la solución de diferentes problemas o situaciones, donde se utilizaron diferentes formas de solución (métodos). En la Tabla 2 se presenta la síntesis de las diferentes configuraciones epistémicas, resultado del estudio histórico epistemológico.

Tabla 2— Configuraciones Epistémicas para el objeto Inecuaciones

Períodos de la historia	Situación – Problema (S.P.)	Configuración Epistémica (C.E.)	Significados Parciales del Objeto Inecuaciones
Edad Antigua	SP1. Período Grecorromano (Diofanto)	C.E.1. Problema de los vinos.	Inecuaciones con problemas de Proporcionalidad.
Edad Moderna	SP2. Problema de la Raíz.	C.E.2. Problema de Bombelli.	Método de aproximación de la raíz cúbica
Edad Contemporánea	SP3. Los números y sus relaciones con el Infinito.	C.E.3. Problema de las figuras Curvilíneas.	Método de Exhausción.
	SP4. Lados de un polígono.	C.E.4. Problema del Polígono.	Despeje de inecuaciones lineales aproximando a enteros

Fuente: Elaboración Propia

En la Edad Antigua, la mayoría de problemas se relacionaban con áreas, proporciones, cantidades de diferentes elementos como, terrenos, alimentos, objetos entre otros. Como mencionan Boyer (1987), Rey y Babini (1985), Ribnikov (1987) en sus investigaciones, el álgebra tuvo su origen en diversos pueblos de la antigüedad como Egipto, Grecia, Babilonia, entre otros, con la finalidad de resolver ecuaciones de primer y segundo grado a través de inecuaciones.

En la Edad Moderna, el análisis a los diferentes métodos de solución de problemas que involucran el uso de las desigualdades, se evidenció principalmente con los aportes relacionados en el álgebra (RUIZ, 2003). En la Edad Moderna, como menciona Boyer (1986):

> […] la geometría trajo consigo una nueva forma de entender las aplicaciones de la matemática, al utilizar axiomas, definiciones y algunos teoremas. De esto, algunos trabajos de Paolo Ruffini aportaron a la comprensión de la geometría y de diversas herramientas usadas en la solución de problemas relacionados con esta área (p.45).

Se puede establecer que la humanidad en las diversas épocas se ha venido enfrentado a problemas y situaciones en la búsqueda de mejores condiciones de vida, para algunas de estas situaciones se requiere de un conocimiento técnico que permita el uso de diferentes herramientas matemáticas tanto teóricas como aplicadas para su solución. Según Godino y Batanero (1994), al reconstruir cada configuración epistémica, emergente de la solución a situaciones problemas específicas de cada objeto matemático, es posible llegar a caracterizar de forma sistemática algunos de los significados parciales más relevantes de los objetos matemáticos, de manera que:

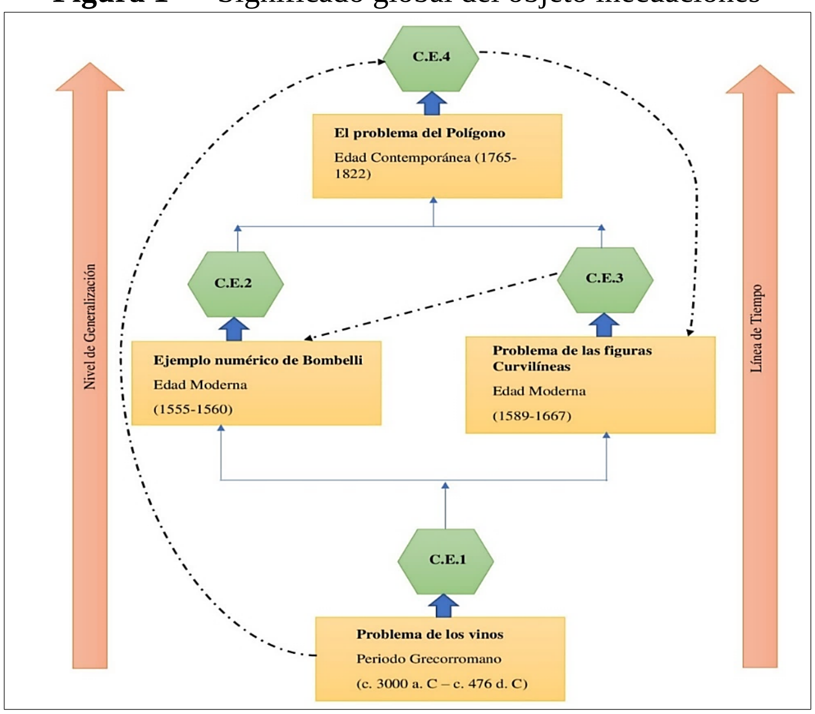
> […] en la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas. Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución a otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria" (CRISÓSTOMO; ORDÓÑEZ; CONTRERAS; GODINO 2005, p.131).

Al realizar parte del estudio histórico epistemológico para el objeto inecuaciones, se identificaron cuatro sistemas de prácticas asociadas al objeto matemático, los cuales se asocian a una configuración epistémica, y a partir de estas, se establece un significado parcial del objeto matemático. Estas configuraciones para el objeto inecuaciones se han denominado según la Tabla2: Problema de los vinos (C.E.1.); Problema de Bombelli (C.E.2.); Problema de las figuras curvilíneas (C.E.3.) y Problema del Polígono (C.E.4.)

En la Figura 1, se observan los significados parciales junto a su respectiva configuración epistémica. En esta figura se presenta la relación entre las configuraciones epistémicas de acuerdo a un nivel de generalización, así como a su ubicación en una línea de tiempo de acuerdo con su desarrollo histórico, además, se presentan algunas conexiones entre configuraciones que se representan por medio de una línea discontinua lo cual indica que con los elementos de dicha configuración es posible resolver algunas situaciones – problemas de otra configuración. Particularmente, la cuarta configuración epistémica (C.E.4.), es intensiva por sus conexiones sin tener presente el tiempo histórico donde se desarrolló, dado que, con los elementos de la C.E.4, se pueden resolver algún tipo de problemas de los sistemas de prácticas que llevan asociadas las configuraciones C.E.1, C.E.2 y C.E.3. Por otra parte, se brinda un panorama de la evolución con relación a las características y elementos de las respectivas configuraciones epistémicas y por consiguiente de los diferentes significados del objeto Inecuaciones a través del tiempo.

Las C.E.2 y C.E.3 toman algunos elementos de la C.E.1 y la C.E.4 retoma elementos establecidos en las C.E.2 y C.E.3, con el fin de generar nuevos elementos, sin importar el hecho que las configuraciones no representen problemas del mismo periodo histórico. El análisis sistemático de las cuatro configuraciones epistémicas obtenidas conforma la reconstrucción de un significado global para el objeto inecuaciones. En este estudio se analizaron tres épocas debido a que como se mencionó, en la Edad Media según el estudio realizado por Halmaghi (2011) no se usaron desigualdades, sin embargo, las desigualdades se beneficiaron del desarrollo de ecuaciones y símbolos.

Figura 1 — Significado global del objeto inecuaciones



Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis de las situaciones seleccionadas, se presentan solo dos de las cuatro situaciones-problema expuestas en la Tabla 1, las cuales involucran problemas con inecuaciones lineales relacionados con proporcionalidad y números complejos, las cuales corresponden a las configuraciones epistémicas C.E.1 y C.E.2 respectivamente.

Situación 1 – Problema: Periodo Grecorromano (Diofanto)

Esta situación problema fue tomada de la Edad Antigua (3000 a. C – c. 476 d.C), en el período grecorromano, escrito por Diofanto y se denomina el *problema de los vinos* y es descrita en Rey y Babini (1985).

Problema-1: Problema de los vinos: *Determinar las cantidades de dos clases de vino, cuyos precios son proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades.*

Rey y Babini (1985) exponen la solución del problema:

Dadas las cantidades x e y, el problema se reduce a resolver el sistema;

$$8x + 5y = z^2$$

$$z^2 + 60 = (x + y)^2$$

al tomar la expresión, $u = x + y$, reemplazándola en el sistema se obtiene,

$$u^2 - 60 = 3x + 5u = 8u - 3y$$

se tienen las desigualdades:

$$8u > u^2 - 60 > 5u$$

$$u^2 - 60 = (u - v)^2$$

Por lo tanto,

$$22v < 60 + v^2 < 24v$$

Si se toma $v = 20$ entonces,

$$u = \frac{23}{2}, x = \frac{59}{12}, y = \frac{79}{12} \text{ y } z = \frac{17}{2}$$

Análisis dado por el autor:

Si se toman las variables x e y, que representan las cantidades de vino respectivamente se establece el siguiente sistema de ecuaciones (1) y (2) expresado en forma algebraica:

$$8x + 5y = z^2 \tag{1}$$

$$z^2 + 60 = (x + y)^2 \tag{2}$$

Si tomamos una nueva incógnita u que represente la suma de x con y, en la ecuación (3):

$$u = x + y, \tag{3}$$

reemplazando (3) en (2) se obtiene la ecuación (4),

$$z^2 = u^2 - 60 \tag{4}$$

Al despejar (3) en términos de x y y se obtiene respectivamente (5) y (6)

$$x = u - y \tag{5}$$

$$y = u - x \tag{6}$$

al reemplazar (5) y (6) en (1) se obtiene las ecuaciones (7) y (8)

$$z^2 = 8u - 3y \tag{7}$$

$$z^2 = 3x + 5u \tag{8}$$

por lo tanto, al igualar (4) con (7) y con (8) se obtiene la expresión (9)

$$u^2 - 60 = 3x + 5u = 8u - 3y \tag{9}$$

que lleva a deducir la desigualdad (10)

$$8u > u^2 - 60 > 5u \tag{10}$$

Equivalente a las desigualdades (10.1) y (10.2)

$$8u + 60 - u^2 > 0 \tag{10.1}$$

Y

$$u^2 - 60 - 5u > 0 \tag{10.2}$$

El procedimiento para resolver la inecuación (10.1), consiste en:

Completar cuadrado en la desigualdad (10.1) y se obtiene la inecuación (11)

$$-(u - 4)^2 + 76 > 0, \tag{11}$$

sumar -76 a ambos lados de la inecuación (11) y se obtiene la inecuación (12)

$$-(u-4)^2+76-76>0-76, \tag{12}$$

simplificando la inecuación (12) se obtiene la inecuación (13):

$$-(u-4)^2>-76, \tag{13}$$

al multiplicar por -1 a ambos lados de la inecuación (13) se obtiene la inecuación (14):

$$(u-4)^2<76, \tag{14}$$

resolviendo la inecuación (14) se obtienen las inecuaciones (15):

$$-\sqrt{76}<u-4<\sqrt{76}, \tag{15}$$

la expresión (15) es equivalente a las inecuaciones (15.1) y (15.2):

$$-\sqrt{76}<u-4 \tag{15.1}$$

y

$$u-4<\sqrt{76}, \tag{15.2}$$

resolviendo las inecuaciones (15.1) y (15.2), se obtienen las inecuaciones (16):

$$u>-12{,}11 \quad \text{y} \quad u<12{,}11, \tag{16}$$

reescribiendo las inecuaciones (16) en la inecuación (17):

$$-12{,}11<u<12{,}11, \tag{17}$$

entonces, por el contexto del problema se toma como solución los valores positivos de u, y se tiene la inecuación (18):

$$u<12{,}11 \tag{18}$$

se aproxima al valor entero más cercano, llegando a la inecuación (19):

$$u<12 \tag{19}$$

Siguiendo procedimientos similares a los aplicados para resolver la inecuación (10.1) se resuelve la inecuación (10.2), obteniendo la inecuación (20):

$$u>11 \tag{20}$$

Considerando las soluciones de las inecuaciones cuadráticas, se encuentra que u está entre los enteros 11 y 12.

Como u^2-60 debe ser un cuadrado, entonces se introduce una nueva variable v tal que satisfaga la ecuación (21),

$$u^2 - 60 = (u - v)^2 \tag{21}$$

Utilizando los valores extremos de u, se llega a al nuevo par de inecuaciones (22):

$$22v < 60 + v^2 < 24v \tag{22}$$

que se expresan por las inecuaciones (22.1) y (22.2):

$$22v < 60 + v^2 \tag{22.1}$$

y

$$60 + v^2 < 24v \tag{22.2}$$

Al resolver (22.1) y (22.2), por procedimientos similares aplicados para resolver la ecuación (10.1) se encuentran las inecuaciones (23.1) y (23.2):

$$v > 19 \tag{23.1}$$

y

$$v < 21, \tag{23.2}$$

por tanto, se llega a la inecuación (24):

$$19 < v < 21 \tag{24}$$

Se toma el número entero que satisface la desigualdad anterior que en este caso es $v = 20$, y reemplazando se obtiene que $u = \frac{23}{2}, x = \frac{59}{12}, y = \frac{79}{12}$ y $z = \frac{17}{2}$

Análisis semiótico a la configuración (C.E.1)

En la solución dada al problema de los vinos, se utilizan los *conceptos* de cantidad y proporcionalidad en relación a la cantidad de vino; estas cantidades fueron utilizadas para identificar la cuantía de un determinado elemento. La *notación* utilizada, corresponde a escribir las cantidades de los vinos utilizando la definición de nuevas variables, aplicando la noción de proporcionalidad lo cual identifica los *elementos lingüísticos* que pudieron ser usados en esa época. En la solución presentada se resalta el objeto matemático primario de los *procedimientos*, ya que para la solución se presenta un método donde se hace uso de *incógnitas auxiliares,* para esto se toman variables y se reduce a ecuaciones lineales (sistemas) y desigualdades, lo cual establece un método para solucionar situaciones con inecuaciones**.**

Situación 2 – Problema: Edad Moderna

Problema de la raíz: *Obtener la raíz cúbica de* $52 + 47i$

La solución al problema la presentada en Rey y Babini (1985, p.347) y se describe a continuación.

Se utiliza el método de aproximación de la raíz cúbica que consiste en determinar una cantidad que es equivalente a la original como $a + bi$ y dicha cantidad $u + vi$. Si esta cantidad se eleva al cubo se obtiene $(u + vi)^3$ y realizando los debidos despejes se tienen las desigualdades:

$u^2 < (a^2 + b^2)^{1/3}$ y $u^3 > a$, de las cuales se obtienen los valores respectivos, entonces aplicando el procedimiento anterior se obtiene que la raíz es $4 + i$.

Análisis dado por el autor:

Este problema se expresa de la siguiente manera:

$$x = \sqrt[3]{52 + 47i}$$

Se toman los valores, $a = 52$ y $b = 47$. Se pasa a plantear la siguiente igualdad:

$$\sqrt[3]{a + bi} = u + vi$$

Se procede a sumar los cuadrados de ambos números, es decir $52^2 + 47^2$, lo que da 4913 y se busca un número cuyo cubo sea el número que se obtuvo anteriormente (4913) el cual es 17, para escribir la expresión:

$$a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^3$$

Como $(u^2 + v^2)^3 = 4913$ entonces $u^2 + v^2 = 17$ por tanto, despejando $u^2 + v^2$ de la expresión anterior se obtiene que:

$$u^2 + v^2 = \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

Ahora se busca un número cuyo cuadrado sea menor que 17 y cuyo cubo sea mayor que 52, en este caso se determina en el valor para u ya que es la parte entera, que expresado en forma de desigualdades corresponde a:

$$u^2 < \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

$$u^3 > a$$

Por lo tanto, $u = 4$. Y la raíz será $4 + i$.

Análisis semiótico a la Configuración (C.E.2)

En la solución del problema, la *situación problema* se relaciona con encontrar la raíz cúbica de un número complejo, lo cual permite visualizar el procedimiento usado por Bombelli conocido como el método de aproximación a la raíz cúbica (REY Y BABINI, 1985). Se usan los *conceptos* de suma, multiplicación, potenciación, desigualdades en números complejos ($\mathbb{C}$); *sumas de los cuadrados de dos números y cubo de un número.* Rey y Babini (1985) presentan un acercamiento a la solución del problema trabajando con valores complejos que permiten interpretar los elementos, lo que hace referencia a los *elementos lingüísticos*. En cuanto al *procedimiento* usado, es de tipo operacional, es decir, se limita a realizar operaciones con las ecuaciones que se obtienen. La solución del problema carece de *proposiciones* y *argumentos*.

4. Conclusiones

Para llegar a dar respuesta a interrogantes como: ¿Cuáles son los significados del objeto inecuaciones?, ¿Cuál es el significado global del objeto inecuaciones? se utiliza una serie de actividades que se relacionan con la reconstrucción del significado global del objeto inecuaciones, a través del estudio histórico-epistemológico según el origen, evolución y naturaleza del objeto matemático. Esto se realizó a través de un riguroso análisis documental de libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría, artículos de investigación científica e investigaciones relacionadas con el objeto Inecuaciones, por tanto, se concluye que el objeto inecuaciones a lo largo de la historia emerge de la solución de diversas situaciones problemas (sistemas de prácticas en diferentes etapas), las cuales están asociadas a 4 configuraciones epistémicas donde cada una de estas se relaciona con un significado parcial del objeto inecuaciones dando paso al significado global del objeto Inecuaciones.

Con el estudio epistemológico del objeto matemático, y realizando el análisis semiótico a cada situación, se concluye que el significado global del objeto emerge de la solución de diversas situaciones problemas (sistemas de prácticas en diferentes etapas), las cuales están asociadas a 4 configuraciones epistémicas donde cada una se relaciona con un significado parcial del objeto dando paso al significado global del objeto matemático. Para la Configuración epistémica C.E.1, *Problema de los vinos*, su significado parcial corresponde a Inecuaciones con problemas de proporcionalidad. Para la C.E.2, *Problema de Bombelli* el significado parcial se relaciona con el Método de aproximación de la raíz cúbica. La C.E.3 *Problema de las figuras* *curvilíneas* se relaciona con el significado parcial del método de Exhausción y finalmente la C.E.4, *Problema del polígono*, se relaciona con el significado parcial del despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros.

Es necesario presentar una muestra representativa e interconectada de significados del objeto matemático inecuaciones a los alumnos, respecto de un significado de referencia, lo que les permite resolver tipos de problemas diferentes. Por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales, es necesario presentar una muestra variada de problemas (FONT; BREDA; SECKEL, 2017; MONJE; SECKEL; BREDA, 2018). Y a su vez, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas donde el objeto matemático en cuestión tiene un rol determinante, se requiere que los alumnos dispongan de una red de significados parciales bien conectados entre sí.

En cuanto a las concepciones y creencias del profesor de matemáticas respecto a los significados parciales del objeto matemático inecuaciones, se evidenció en el estudio que en algunos casos, estos significados surgen de los libros de texto de matemáticas que ellos toman como referencia para la realización de las clases o para la preparación de secuencias didácticas lo que ocasiona una limitante al momento de la enseñanza-aprendizaje del objeto inecuaciones en los estudiantes; así como el currículo impuesto por las instituciones educativas o simplemente del hecho de seguir un texto guía, sin buscar otras herramientas u opciones que lleven a cambiar sus creencias en pro de la enseñanza y aprendizaje del objeto inecuaciones a sus estudiantes y de la preocupación por llegar a una reconstrucción del significado global de cada objeto matemático.

Agradecimiento

Este articulo ha sido desarrollado dentro del marco del proyecto de investigación con código SGI número 3334 del Grupo Álgebra y Análisis de la Facultad de Ciencias de la UPTC.

Referencias

ARIAS, F. **El proyecto de Investigación**. Caracas: Episteme, 1999.

BALL, D.; THAMES, H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 59, n. 4, p. 389-407, 2008. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487108324554

BOYER, B. **Historia de la Matemática**. Alianza, 1987.

CRISÓSTOMO, E.; ORDÓÑEZ, L.; CONTRERAS, A.; GODINO, J. Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. **Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de Funciones Semióticas**, España, p. 125-166, 2005.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J**.** Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, Granada, v. 33, n. 1, p. 89-105, 2010. DOI: https://doi.org/10.1174/021037010790317243

GIACOMONE, B.; GODINO, J.; WILHELMI, M.; BLANCO, T. Desarrollo de la competencia de análisis Ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. **Revista Complutense de Educación**, Mineco, v. 29, n. 4, p. 1109-1131, 2018. DOI: https://doi.org/10.5209/RCED.54880

GODINO, J**.** Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** [s.l], p. 13-31, 2009.

GODINO, J. **Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas**. Universidad de Granada, 2014.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. **Researches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, p. 325-355, 1994.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 39, n. 3, p. 137-135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, p. 7-37, 2008.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics**. For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 37- 42, 2019.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. El enfoque Ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica**. Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaiso, v. 12, p. 3-15, 2020.

GODINO, J.; BATANERO, C.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **REVEMAT,** Florianopolis, v. 8, p. 46-74, 2013. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

HALMAGHI, E. **Undergraduate Students' Conceptions of Inequalities: Sanding the Lens.** Tesis de Doctorado. Faculty of Education Simon Fraser University, Burnaby, 2011.

HILL, H.; BALL, D.; SCHILLING, S. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s.l], v. 39, p. 372-400, 2008. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

MONJE, Y.; SECKEL, M. J.; BREDA, A. Tratamiento de la inecuación en el curriculum y textos escolares chilenos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 480–502, ago. 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a09

PINO-FAN, L**. Evaluación de la Faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la Derivada.** Tesis (Doctorado) - Universidad de Granada, España., 2013.

PINO-FAN, L. **Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo**. 2017

PINO-FAN, L.; GODINO, J.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, 2011.

RAMÍREZ, G. **Caracterización de los procesos cognitivo-matemáticos para la validación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica.** Tesis (Doctorado)-Universidad Autónoma de Querétaro, México, 2022.

REY, J.; BABINI, J. **História de las Matemáticas**. V. 1-2. Gedisa, Barcelona, 1985.

RIBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas**. Mir, Moscú, 1987.

RUIZ, A. **Historia y Filosofía de la Matemática.** EUNED, San José, 2003.

SEPÚLVEDA, D. **Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo.** (Tesis de Doctorado). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, 2016.

SEPÚLVEDA, D.; SUÁREZ, Z.; PINO-FAN, L. Significados de referencia del objeto Grupo**. Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación**, Tunja, v. 11, n. 2, p. 297–318, 2021. DOI: https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n2.2021.12757

Autores

Leonardo Marcedonio Piratoba Gil
Profesor en Educación Básica y Media, Magister en Educación Matemática.
Leonardo.piratoba@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0001-9557-0994

Omaida Sepúlveda Delgado
Profesor titular Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Licenciada en Matemáticas, Especialista en computación para la docencia, Magister en ciencias matemáticas, Doctor en Educación.
omaida.sepulveda@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-2950-8137

Zagalo Enrique Suárez
Profesor titular Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Licenciados en ciencias de la educación Matemática y Física, Especialista en computación para la docencia, Magister en ciencias matemáticas, Doctor en Educación.
zagalo.suarez@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-2620-586X

Como citar el artículo:

PIRATOBA, L. M. G.; SEPÚLVEDA, O. D.; SUÁREZ, Z. E. El conocimiento didáctico matemático del objeto inecuaciones: una visión desde las concepciones y creencias. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 147 - 169. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p147-169.id1385

Conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros chilenos: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad en Educación Básica

María del Mar López-Martín
mdm.lopez@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-8677-9606
Universidad de Almería
Almería, España
Carmen Gloria Aguayo-Arriagada
cgaguayo@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-9576-2312
Universidad de Almería
Almería, España
Claudia Vásquez
cavasque@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-5056-5208
Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile
María Burgos Navarro
mariaburgos@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4598-7684
Universidad de Granada
Granada, España

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Es claro que el futuro maestro debe tener un conocimiento del contenido matemático, que le permita resolver las tareas que propone a sus estudiantes. Pero también debe poseer un conocimiento didáctico del contenido que le permita interpretar de manera profesional las respuestas de los estudiantes, identificar las estrategias erróneas y tomar decisiones de acción efectivas para apoyar los procesos de enseñanza y ayudar a sus alumnos a progresar en sus aprendizajes. En el presente trabajo se evalúa el conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros chilenos de Educación Básica que optan a la mención en Matemática en relación con el razonamiento probabilístico. Haciendo uso de las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico, se ha diseñado un instrumento que considera los errores frecuentes que presentan los estudiantes de Educación Básica cuando resuelven problemas de probabilidades en un contexto de urnas y pretende valorar la competencia de futuros maestros para interpretar las respuestas de los alumnos y responder a sus estrategias erróneas. Los resultados obtenidos por medio del análisis de las respuestas revelan las limitaciones que presentan los futuros maestros cuando abordan tareas en las que tienen que poner en juego tanto su conocimiento matemático como su conocimiento didáctico. Por tanto, es necesario brindar oportunidades de aprendizaje que permitan que los futuros maestros desarrollen una comprensión en profundidad de las distintas facetas involucradas en el conocimiento didáctico-matemático en torno a la probabilidad.

Palabras clave: Enfoque ontosemiótico, probabilidad, conocimiento didáctico-matemático, formación de profesores, razonamiento probabilístico.

Conhecimento didático-matemático dos futuros professores chilenos: implicações para o ensino de probabilidade no ensino básico.

Resumo

É evidente que o futuro professor deve ter conhecimento do conteúdo matemático, o que lhe permitirá resolver as tarefas que propõe aos seus alunos. Contudo, também, devem possuir conhecimentos didáticos dos conteúdos que lhes permitam interpretar as respostas dos alunos de uma forma profissional, identificar estratégias incorretas e tomar decisões de ação eficazes para apoiar os processos de ensino e ajudar os seus alunos a progredir na sua aprendizagem. Este documento avalia os conhecimentos didático-matemáticos de futuros professores chilenos de Educação Básica que optem por lecionar Matemática, em particular, o raciocínio probabilístico. Fazendo uso das ferramentas teórico-metodológicas da Abordagem Ontossemiótica, foi concebido um instrumento que considera os erros frequentes que os estudantes do Ensino Básico apresentam quando resolvem problemas de probabilidade num contexto de urnas eleitorais e visa avaliar a competência dos futuros professores para interpretar as respostas dos estudantes e responder às suas estratégias incorretas. Os resultados obtidos através da análise frontal das respostas revelam as limitações que os futuros professores apresentam ao abordar tarefas em que têm de colocar em prática, tanto os seus conhecimentos matemáticos, como os seus conhecimentos didáticos. Por conseguinte, é necessário proporcionar oportunidades de aprendizagem que permitam aos futuros professores desenvolver uma compreensão mais aprofundada das diferentes facetas envolvidas no conhecimento didático-matemático sobre probabilidade.

Palavras chave: Abordagem Ontossemiótica, probabilidade, conhecimento didático-matemático, formação de professores, raciocínio probabilístico.

Didactic-mathematical knowledge of future Chilean teachers: implications for the teaching of probability in basic education.

Abstract

It is clear that the future teacher must have knowledge of the mathematical content, which will enable him/her to solve the tasks he/she proposes to his/her students. But they must also possess didactic knowledge of the content that allows them to interpret students' responses in a professional manner, identify erroneous strategies and take effective action decisions to support the teaching processes and help their students to progress in their learning.

This paper evaluates the didactic-mathematical knowledge of future Chilean teachers of Basic Education who opt for a degree in Mathematics in relation to probabilistic reasoning. Making use of the theoretical-methodological tools of the Ontosemiotic Approach, an instrument has been designed that considers the frequent errors that Basic Education students present when solving probability problems in a context of ballot boxes and aims to assess the competence of future teachers to interpret the students' answers and respond to their erroneous strategies. The results obtained by means of frontal analysis of the answers reveal the limitations that future teachers present when tackling tasks in which they have to bring into play both their mathematical knowledge and their didactic knowledge. Therefore, it is necessary to provide learning opportunities that allow prospective teachers to develop an-in-depth understanding of the different facets involved in didactic-mathematical knowledge about probability.

Keywords: Ontosemiotic approach, probability, didactic-mathematical knowledge, teacher training, probabilistic reasoning.

Introducción

Aun cuando la probabilidad es un tema relativamente reciente en la historia de la matemática (SHAUGHNESSY, 1992), su enseñanza ha comenzado a ganar terreno en los primeros niveles educativos de los currículos de matemática de diversos países (VÁSQUEZ; CABRERA, 2022). En la actualidad, el estudio, modelado y comprensión de la incertidumbre desde diversas perspectivas ha adquirido un importante papel. En numerosas situaciones de la vida cotidiana, es fundamental que los ciudadanos manejen adecuadamente los conceptos asociados a la incertidumbre, como la interpretación de pronósticos meteorológicos, la comprensión del nivel de peligro sísmico, el análisis de encuestas y predicciones económicas, y la interpretación de márgenes de error, entre otros. La capacidad de comprender y utilizar la incertidumbre no solo mejora nuestra habilidad para tomar decisiones informadas, sino que también nos ayuda a interpretar mejor el mundo que nos rodea. Es por ello por lo que es fundamental desarrollar el razonamiento probabilístico desde los primeros niveles educativos, para que los estudiantes adquieran habilidades críticas que puedan ser aplicadas en la toma de decisiones informadas en su vida cotidiana.

Fomentar el razonamiento probabilístico en las aulas permite a los estudiantes desarrollar un tipo de pensamiento que implica el uso de probabilidades para evaluar la incertidumbre, tomar decisiones, analizar datos y realizar predicciones. Para ello, es imprescindible que las personas responsables de su enseñanza posean un conocimiento del tema a abordar en el aula. No obstante, en muchas ocasiones, el profesorado deja la enseñanza de la probabilidad para el final del curso o bien la omite, pues su conocimiento matemático y didáctico es insuficiente (BATANERO; GODINO; ROA, 2004; BATANERO et al., 2012; GÓMEZ; BATANERO; CONTRERAS, 2014; VÁSQUEZ; ALSINA, 2015a, 2015b), lo que finalmente coarta las oportunidades del alumnado para desarrollar el razonamiento probabilístico.

De ahí la importancia de indagar en el conocimiento didáctico y matemático del profesorado tanto en ejercicio como en formación (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), especialmente en los primeros niveles educativos, en los que "los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas" (EVEN; BALL, 2009, p.1-2).

En Educación Matemática se han elaborado diversos modelos que permiten caracterizar los conocimientos y las competencias que debería tener un profesor de matemáticas (BLÖMEKE et al., 2016; DEPAEPE; VERSCHAFFEL; STAR, 2020). En estos modelos, la capacidad del docente para identificar los factores claves que afectan a los procesos de estudio, explicar y valorar los procesos instruccionales, así como tomar decisiones basadas en la reflexión sobre la práctica educativa se considera esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza de las matemáticas (GODINO et al., 2017).

En el marco del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2019) se propone el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM), que categoriza los conocimientos del profesor de matemáticas según tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática, considerando como competencias clave del profesor la competencia matemática y competencia de análisis e intervención didáctica (GODINO et al., 2017). En este modelo se asume que es necesario prestar atención no solo al conocimiento matemático del profesor sino también a su conocimiento especializado a fin de asegurar competencia profesional.

El conocimiento especializado incluye una comprensión de las diferentes teorías de aprendizaje, las metodologías de enseñanza más efectivas y cómo utilizar los diversos recursos y materiales para enseñar de manera efectiva. Además, sobre cada contenido matemático específico, el profesor debe tener un conocimiento didáctico-matemático de los diferentes aspectos que afectan a su enseñanza y aprendizaje: la diversidad de significados que se ponen en juego, cómo aprenden el contenido los estudiantes, qué dificultades o errores pueden cometer y cuál es su origen, así como de qué manera se deben gestionar las interacciones en el aula, incluida la retroalimentación por parte del profesor a las prácticas matemáticas de los estudiantes, para lograr un aprendizaje efectivo del mismo (GODINO et al., 2017).

Desde esta perspectiva, la finalidad de este estudio es analizar el conocimiento didáctico-matemático en las facetas epistémica (el contenido), cognitiva (el aprendizaje, los errores y dificultades), interaccional y mediacional (gestión de las interacciones y medios para lograr el progreso en el aprendizaje) vinculado al razonamiento probabilístico de 10 futuros maestros chilenos de Educación Básica. En la experiencia, los futuros docentes deben interpretar la comprensión de estudiantes (ficticios) cuando resuelven un problema de comparación de probabilidades en el contexto de urnas, dar respuesta a sus errores y decidir cómo ayudarles a superar sus dificultades. Los resultados de este estudio permitirán avanzar en la generación de nuevos conocimientos en torno al razonamiento probabilístico de los futuros maestros de

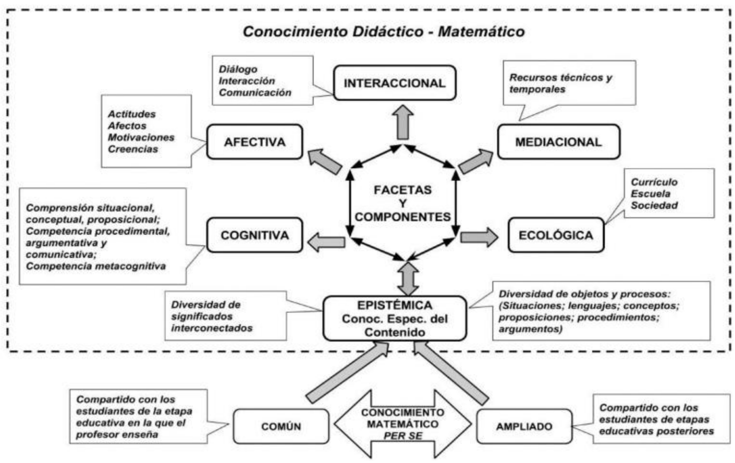
Educación Básica, y orientar el diseño de acciones formativas para el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas.

1. Perspectiva teórica y antecedentes

Desde el modelo CCDM se asume que el profesor debe disponer de los conocimientos matemáticos y didácticos que le permitan abordar los problemas que surjan en su práctica docente garantizando por un lado el desarrollo efectivo del proceso de instrucción, y por otro, la propuesta de acciones de mejora para futuras implementaciones (GODINO et al., 2017).

El modelo CCDM considera dos grandes categorías globales de los conocimientos del profesor de matemáticas que se articulan entre sí (Figura 1).

Figura 1 – Facetas y Componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático



Fuente: Godino et al. (2017, p.96).

- El *conocimiento matemático per se* engloba el conocimiento común y el conocimiento ampliado. El primero corresponde al conocimiento del contenido matemático relativo al nivel educativo donde importante docencia el profesor, mientras que el segundo permite la conexión de los contenidos matemáticos con niveles educativos superiores u otros tópicos matemáticos.
- El *conocimiento especializado o didáctico-matemático* es el conocimiento del contenido que caracteriza y diferencia al profesor de otras personas que saben matemáticas. Este conocimiento se articula en torno las diferentes facetas que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje: 1) *epistémica*, engloba a los significados institucionales del contenido y que el profesor debe poner en juego para resolver tareas en relación a un

tema específico de las matemáticas; 2) *cognitiva*, asociada a la comprensión del pensamiento del estudiante y cómo progresa su aprendizaje; 3) *ecológica*, que permite relacionar con otras disciplinas y orientar las tareas de acuerdo con el currículum institucional obligatorio; 4) *afectiva*, responde a las emociones, creencias y actitudes expresadas por los estudiantes; 5) *interaccional,* permite identificar y gestionar los conflictos y dificultades de los estudiantes; 6) *mediacional*, asociada a la elección de recursos apropiados que potencien el aprendizaje.

En esta dirección, durante las últimas décadas encontramos diversas investigaciones orientadas a profundizar en el conocimiento didáctico-matemático en torno a la probabilidad, que poseen tanto futuros maestros como maestros en activo. Dichas investigaciones ponen de manifiesto que tanto los profesores en formación como profesores en ejercicios poseen un conocimiento matemático y didáctico insuficiente para la enseñanza de la probabilidad (BATANERO et al., 2012; GÓMEZ; BATANERO; CONTRERAS, 2014; VÁSQUEZ; ALSINA, 2015a, 2015b; GEA; PARRAGUEZ; BATANERO, 2017; BEGOLLI et al., 2021;), en particular para interpretar y valorar correctamente las respuestas de alumnos (BATANERO et al., 2015). Recientemente, Burgos et al. (2022) evalúan los conocimientos y competencias de futuros maestros de primaria cuando interpretan las respuestas de estudiantes en tareas probabilísticas, así como estrategias incorrectas vinculadas con la comparación de probabilidades, en concreto con el razonamiento proporcional. A partir de los resultados se constata un razonamiento proporcional y probabilístico insuficiente que dificulta la toma de decisiones por parte de los futuros maestros.

En línea con estas investigaciones, el interés de este trabajo es indagar cómo futuros maestros chilenos de primaria dan sentido a situaciones de enseñanza que involucran al razonamiento probabilístico. Los futuros maestros deben interpretar las apreciaciones de alumnos (hipotéticos) a una situación de comparación de probabilidades, analizando cuál es el contenido matemático involucrado y qué posibles intuiciones motivaron su respuesta, para finalmente decidir cómo ofrecer una explicación a cada alumno que contribuya a su aprendizaje.

2. Metodología

Este estudio se centra en analizar el conocimiento didáctico-matemático vinculado al razonamiento probabilístico en futuros maestros de Educación Básica, por lo que se ha realizado bajo un enfoque metodológico cualitativo de tipo descriptivo (BISQUERRA, 2019) y empleando la técnica el análisis de contenido (KRIPPENDORFF, 2013).

2.1 Contexto

La muestra considerada es no probabilística y está compuesta por 10 futuros maestros chilenos de Educación Básica (en adelante FM) que se encuentran en su etapa final (octavo semestre) para optar a la especialidad en Educación Matemática. Todos ellos han aprobado con anterioridad un curso sobre conceptos básicos de estadística y probabilidad y dos cursos de didáctica de la matemática, en los que se explora y profundiza en el conocimiento didáctico-matemático que debe poseer el profesor que enseña matemáticas, con formación explícita en el modelo CCDM, y sus facetas (GODINO et al., 2017).

Para el proceso de recolección de datos, se aplicó una tarea que involucra aspectos del razonamiento probabilístico. Dicha tarea fue desarrollada de forma individual, disponiendo de un tiempo máximo de respuesta de 90 minutos. Estos FM habían resuelto con anterioridad tareas similares a la presentada y además contaban con un temario de contenidos y referencias bibliográficas mínimas a estudiar.

2.2. Instrumento para la recolección de datos

La tarea ha sido diseñada por el equipo investigador teniendo como base el trabajo de Burgos et al. (2022) en el que las autoras evalúan las competencias de FM de Educación Primaria para interpretar las respuestas de los estudiantes en tareas relacionadas con la comparación de probabilidades, identificar estrategias equivocadas y reconocer el razonamiento proporcional en la actividad matemática. La tarea presentada en la Figura 2 tiene como objetivo hacer que los FM reflexionen sobre la adecuación de las respuestas de los estudiantes ficticios a una tarea de probabilidad (ítem 1) (faceta cognitiva) y la identificación de los contenidos matemáticos que se pone en juego al dar respuesta a la tarea (ítem 2), con el fin de evaluar su conocimiento en la faceta epistémica. Además, se les pide que, en los casos de respuestas incorrectas, identifiquen las intuiciones o estrategias que han llevado a esa respuesta incorrecta (ítem 3) (faceta cognitiva) e indiquen las acciones que tomarían para explicar y corregir los errores de los estudiantes (ítem 4), con el objetivo de evaluar las facetas interaccional y mediacional.

Figura 2 – Formulación del instrumento propuesta

Tarea. En la caja A se han metido 12 fichas negras y 4 fichas blancas. En la caja B se han metido 20 fichas negras y 10 fichas blancas. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?

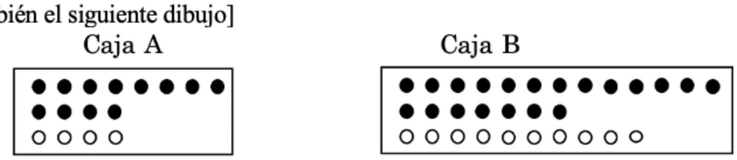
Respuestas estudiantes:

Emilia: "en la caja A porque hay pocas fichas blancas y la caja B tiene más fichas blancas"

Belén: "sacaría de la caja A porque cada 3 negras hay una blanca y en la caja B cada dos negras hay una blanca. Así que tengo más probabilidades de ganar si saco de la caja A"

Pedro: "elegiría la caja B porque tiene más fichas negras que la caja A y hay más probabilidad que salga en la B una ficha negra"

Lucas: "yo elegiría la caja B ya que hay el doble de bolas negras que blancas" [En su respuesta añade también el siguiente dibujo]



En base a las respuestas dadas de los estudiantes, se pide responder de manera justificada a las siguientes cuestiones:

Ítem 1. Para cada uno de los estudiantes:

a) ¿Crees que ha seleccionado la caja correcta?

b) ¿Crees que ha justificado correctamente su elección?

Ítem 2. ¿Qué contenido(s) matemático(s) se está(n) abordando en la tarea propuesta? Señale al menos 4 ideas clave necesarias para aprender y enseñar ese contenido.

Ítem 3. En aquellos casos en los que se ha realizado una selección errónea de la caja y/o se ha justificado incorrectamente la elección, señala las posibles intuiciones o estrategias que han llevado al estudiante a realizar dicha selección y/o justificación.

Ítem 4. Para cada justificación incorrecta:

a) ¿Cómo explicarías a cada alumno el error que ha cometido?

b) ¿Cómo ayudarías a cada alumno a superar las dificultades que han motivado dichos errores?

Fuente: Elaboración propia.

2.2.1. Análisis a priori del instrumento

La resolución del ítem 1 (faceta cognitiva) conlleva identificar la caja en la que es más probable obtener una ficha negra. En la Tabla 1 se identifican el número de casos favorables, desfavorables y posibles asociados a ambas cajas.

Tabla 1 – Datos asociados a la Tarea

Tipos de casos	Caja A	Caja B
Favorables (fichas negras)	12	20
Desfavorables (fichas blancas)	4	10
Posibles (total de fichas)	16	30

Fuente: Elaboración propia

A partir de la información descrita se tiene, aplicando la Regla de Laplace, que la probabilidad de obtener una ficha negra en la Caja A y B es, $12/16$ y $20/30$ o equivalentemente $3/4$ y $2/3$, respectivamente, comparando ambas fracciones se observa que es más probable obtener una ficha negra en A que en B. De igual forma, se puede llegar a la misma conclusión comparando la razón existente entre fichas negras y blancas en ambas cajas, es decir, en la Caja A se tiene que por cada tres fichas negras hay 1 blanca (3:1), mientras que en B esa relación es 2 negras por cada blanca (2:1). Alternativamente, también se obtiene el mismo resultado si se realiza el estudio atendiendo a los casos desfavorables, puesto que en la Caja B estos presentan una probabilidad o razón entre fichas blancas y negras superior que en la Caja A entonces es menos probable extraer una ficha negra.

Atendiendo a las resoluciones mostradas anteriormente, podemos afirmar que Belén es la única alumna que selecciona y justifica correctamente la tarea, pues establece correctamente la razón entre fichas negras y blancas, seleccionando por tanto la caja adecuada. Mientras que, en los casos restantes, se observan estrategias aditivas o univariadas. Así, en el caso de Emilia, se observa que, aunque esta indica que extraería la ficha de la Caja A, su justificación se basa en el número de casos desfavorables no teniendo en cuenta su relación con los casos favorables o posibles de cada caja. Este tipo de razonamiento se observa también en la respuesta de Pedro, pero centrándose en el número de casos favorables. Por tanto, Emilia y Pedro usan una estrategia aditiva, la primera sobre los casos desfavorables y el segundo sobre los favorables. Dado que este argumento solo conduce a una respuesta correcta cuando los casos favorables (en el caso de Emilia) y los desfavorables (en el caso de Pedro) coinciden, puede ser adecuado observar este hecho, modificando las composiciones de las cajas, y reforzar la relación de proporcionalidad en la base de la comparación de probabilidades.

Por último, Lucas, aunque establece correctamente la razón entre fichas negras y blancas en la Caja B, no establece la relación entre las cajas. A partir de esta respuesta podemos intuir que el estudiante selecciona la caja incorrecta porque no tiene en cuenta el papel que juega la Caja A, por lo que deberemos guiar nuestra actuación con objeto de que identifique la relación entre negras y blancas de dicha caja y que posteriormente identifique.

En cuanto a las ideas clave o contenidos matemáticos abordados en la tarea (ítem 2) (faceta epistémica), estos se enmarcan en el bloque de números, concretamente dentro del conjunto de los números fraccionarios, y del bloque de estadística y probabilidad. Específicamente, en el cálculo de probabilidades haciendo uso del enfoque clásico, o laplaciano, que pone en juego los tipos de sucesos (posibles, favorables y/o desfavorables) y a la misma vez la idea de espacio muestral y equiprobabilidad. Recordemos que la Regla de Laplace solamente tiene sentido en aquellos casos en los que los distintos elementos del espacio muestral (finito) son equiprobables, es decir, donde todos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Teniendo en cuenta la expresión correspondiente al enfoque clásico surge el concepto de fracción como parte-todo. De igual forma, emerge la razón de proporcionalidad.

El análisis de los ítems anteriores nos permite intuir los posibles errores o estrategias que han cometido los estudiantes al dar una respuesta o justificación incorrecta a la tarea (ítem 3) (faceta cognitiva).

Por último, en el ítem 4 (faceta interaccional y mediacional) se solicita a los futuros maestros que indiquen cómo ayudarían a los estudiantes que o bien han seleccionado la caja incorrecta o que su justificación no es adecuada. En el caso de Emilia y Pedro, para analizar el impacto del número de fichas en el cálculo de probabilidades o razones de proporción, sería recomendable realizar una modificación en el número de fichas en ambas cajas. De esta manera, se podría observar, de manera más precisa, el papel que juega el todo y las distintas partes en estos cálculos. Respecto a Lucas, se debería reforzar la idea de razón proponiendo en primer lugar situaciones similares a la Caja B para luego proceder a variar el número de fichas y que de este modo reconozca la relación de proporcionalidad entre ellas. También sería recomendable proponer situaciones en los que se modifique el número de fichas y que la respuesta correcta corresponda a una caja con un número menor de fichas, de esta forma se reforzaría la idea de que un mayor número de fichas no tiene por qué suponer una mayor probabilidad.

2.3. Procedimiento de análisis

Para la valoración del grado de corrección de las respuestas dadas por los FM se consideró la variable "grado de corrección", asignando los valores: "1" cuando la respuesta es correcta, "0" si la respuesta es incorrecta y "NR" si no responde. Los criterios para definir a cuál de estas categorías pertenece la respuesta otorgada por los FM, se desprenden a partir del análisis a priori del instrumento.

3. Resultados

Para exponer los resultados de este estudio, presentamos en primer lugar, un análisis del conocimiento didáctico-matemático desde la faceta epistémica; y, en segundo lugar, el análisis del conocimiento didáctico-matemático desde las facetas cognitiva, interaccional y mediacional.

3.1. Análisis conocimiento didáctico matemático desde la faceta epistémica

3.1.1 Análisis ítem 2

En este ítem se solicita a los FM que indiquen ¿qué contenido(s) matemático(s) se está(n) abordando en la tarea propuesta? Señalando al menos cuatro ideas clave necesarias para aprender y enseñar ese contenido.

Tras examinar las respuestas de los participantes respecto a los contenidos presentes en la resolución de la tarea propuesta, se observa que la mayoría menciona de manera genérica el bloque de Estadística y Probabilidad. En algunos casos, los conocimientos matemáticos previos necesarios para afrontar tareas de probabilidad se han considerado como contenidos específicos de esta, tal y como se aprecia en la respuesta proporcionada por FM4:

> Los contenidos matemáticos abordados en este problema son el cálculo de probabilidades, división, razones, fracciones (FM4).

Estas respuestas reflejan las limitaciones que enfrentan los futuros maestros al determinar de manera precisa los contenidos matemáticos que deben ser abordados en tareas, actividades o problemas.

En la Figura 3 se presenta una nube de palabras con los términos propuestos por los participantes en relación con las ideas clave para el aprendizaje y la enseñanza de los contenidos abordados en la tarea. Es importante destacar que nueve de los diez participantes ofrecieron una variedad de términos, sólo FM6 no respondió a la consigna pertenecientes al ámbito de la probabilidad, la estadística y la proporcionalidad.

Figura 3 – Nube de palabras de las ideas clave

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la figura, los términos propuestos están relacionados con la comprensión de conceptos básicos, como probabilidad, azar, espacio muestral y casos favorables y posibles, así como con habilidades y estrategias relacionadas con el ámbito de la aritmética.

Es importante destacar que algunos participantes, como por ejemplo FM2, no parecen haber diferenciado las ideas clave involucradas en la tarea. Este hecho puede sugerir una posible falta de comprensión en la identificación de los conceptos matemáticos fundamentales necesarios para abordar satisfactoriamente las tareas que pueden surgir en su desempeño como docentes. La falta de una comprensión sólida de estos conceptos puede incidir en la calidad de la enseñanza, lo que a su vez puede limitar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Un ejemplo de esto es la siguiente respuesta:

> Plantear el problema […] ¿Cómo puedo responder la pregunta? […] (¿Qué debemos medir y cómo? […]. […] saber cómo recolectar los datos (forma y registro de la información) para luego llegar al análisis en donde se ordenan los datos, se buscan patrones y así llegamos a la conclusión en donde se interpreta y comunican sus conclusiones generando nuevas preguntas, aquí responden la pregunta de interés, realizan inferencias y predicciones (FM2).

A pesar de que los términos relacionados con el razonamiento proporcional aparecen con menor frecuencia que conceptos como la probabilidad o el espacio muestral, algunos de los participantes resaltan la importancia de estos para una comprensión adecuada de la resolución de la tarea, tal y como se puede ver en la siguiente respuesta:

> De este contenido, 4 ideas claves necesarias para enseñarlo son el concepto de probabilidad, espacio muestral, razones y proporciones (Batanero y Godino, 2002). Estas ideas son clave para la enseñanza y aprendizaje de este contenido ya que permitirán que los y las estudiantes comprendan el razonamiento que existe detrás de las probabilidades y cómo funcionan. De esta forma, cuando deban trabajar en la realidad las matemáticas (tal como sucede en el caso anterior), sabrán como relacionar el problema con el contenido que ya conocen (FM3).

Para responder correctamente al ítem 1, los FM deben disponer del conocimiento matemático para resolver el problema, pero también deben disponer del conocimiento didáctico-matemático del contenido.

3.2. Análisis del conocimiento didáctico-matemático desde las facetas cognitiva, interaccional y mediacional

3.2.1 Análisis ítem 1

A partir de las respuestas dadas por los futuros maestros al ítem 1 podemos acceder a aspectos de la faceta cognitiva, en particular, aquellos asociados a la comprensión del pensamiento de los estudiantes y cómo progresa su aprendizaje.

A) Análisis del ítem 1a)

Así pues, se observa que para la pregunta planteada en el ítem 1a) (¿crees que ha seleccionado la caja correcta?), un 90% de los FM logra identificar que Emilia y Belén han seleccionado la caja correcta, reconociendo que estas logran establecer la razón entre fichas negras y fichas blancas. A modo de ejemplo, FM2 señala:

> Emilia y Belén han seleccionado la caja correcta ya que hay un 75% de probabilidades de sacar una bola negra en la caja A, en cambio en la caja B hay más bolas, pero la probabilidad de sacar una negra es de un 66% (FM2).

Por otro lado, solo uno de los FM señala que:

> Belén y Pedro han seleccionado la respuesta correcta, ya que la caja A tiene más fichas negras en proporción que la caja B (la cantidad de fichas totales que tiene la ficha A es de 16, de las cuales 12 son negras, obteniendo una frecuencia relativa de 0,75. En cambio la caja B tiene 30 fichas, de las cuales 20 son fichas negras, obteniendo una frecuencia relativa de 0.666…En conclusión la caja A, tiene más probabilidad de salir una ficha de color negro) (FM 10).

Este tipo de respuesta la hemos valorado como correcta, pues aun cuando selecciona equivocadamente como correcta la respuesta dada por Pedro, cuya justificación se centra en el número de casos favorables, si logra identificar a Belén como uno de los estudiantes que ha seleccionado la caja correcta.

B) Análisis del ítem 1b)

En lo que respecta al ítem 1b) (¿crees que ha justificado correctamente su elección?), a partir de la información recogida en la Tabla 2, observamos que los FM logran identificar qué estudiantes han dado o no una justificación adecuada en la realización de la tarea. Para ello, se centran en las justificaciones y argumentaciones dadas por Emilia, Belén, Pedro y Lucas. Nótese que todos los FM identifican correctamente que la justificación de Belén es la acertada; recordemos que de todos los estudiantes es la única que selecciona y justifica satisfactoriamente la tarea propuesta. Asimismo, se observa que, ante la respuesta dada por Emilia, ocho de los FM identifican que la justificación de su respuesta es errónea, pues se centra en el número de casos favorables y, solo el FM2 la considera correcta señalando:

> Emilia: Su justificación está correcta si analiza solo el dibujo, aquí se podría retroalimentar y hacerle más preguntas y lograr que no solo tome un color como referencia si no que tome ambos.

Por otro lado, en lo que respecta a la justificación de Pedro, ocho de los FM identifican que la justificación de este es incorrecta pues su razonamiento se centra únicamente en el número de casos favorables, conduciéndole a seleccionar la caja incorrecta. Ejemplo de esto es la siguiente respuesta:

> Pedro: No hay una buena justificación, porque solo está considerando las fichas de color negro por lo cual no considera las fichas de color blanca que influye al momento de realizar la extracción de una ficha y con la probabilidad de que esta sea de color negro (FM7).

Tabla 2 – Valoración numérica sobre el grado de corrección al ítem 1b)

	Emilia	**Belén**	**Pedro**	**Lucas**
FM1	1	1	1	1
FM2	0	1	1	1
FM3	1	1	1	1
FM4	1	1	NR	NR
FM5	1	1	1	1
FM6	1	1	1	0
FM7	1	1	1	1
FM8	1	1	1	1
FM9	1	1	1	1
FM10	NR	1	NR	NR

Fuente: Elaboración propia.

En lo que respecta a Lucas, siete de los FM identifican el error en la justificación de Lucas, señalando que aun cuando logra determinar correctamente la razón entre fichas negras y blancas en la Caja B no llega a establecer la relación entre ambas cajas. A modo de ejemplo:

> Para el caso de Lucas, la representación que realiza esta acorde a la tarea matemática planteada, pero al igual que Pedro se dejó llevar por su percepción, haciendo alusión a que en la caja B hay el doble de fichas negras que blancas, sin considerar que en la caja A, hay el triple de fichas negras que blancas, olvidando, al igual que Pedro, las proporciones que permiten verificar que hay mayor probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A que de la B (FM1).

Sin embargo, sólo el FM6 identifica a la justificación de la respuesta de Lucas como correcta, señalando:

> Lucas: La justificación de su respuesta se encuentra bien ya que plantea que en la caja B hay el 2 doble de negras que de blancas. Guiándose con su dibujo (FM6).

Por último, llama especialmente la atención la alta tasa de no respuesta (NR) de FM4 y FM10.

3.2.2 Análisis ítem 3

Al igual que para el ítem 1, a partir del ítem 3 los FM deben poner en juego aspectos de la faceta cognitiva para identificar las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a Emilia, Pedro y Lucas a realizar una selección errónea de la caja y/o han justificado incorrectamente la elección, señalando las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a los estudiantes a realizar dicha selección y/o justificación.

Así, a partir del análisis de las respuestas dadas por los FM, hemos detectado las siguientes categorías:

- *Estrategia intuitiva.* En esta categoría las observaciones de los FM se centran en la idea que los alumnos ficticios dan una justificación de su elección de la Caja A o B, desde su intuición. Por ejemplo: FM1 señala "Pedro y Lucas, quienes justificaban su elección basándose en sus propias percepciones (intuición), considerando dobles o cantidades mayores".
- *Estrategia univariada.* Se contempla en esta categoría aquellas justificaciones donde sólo se toman en cuenta los casos desfavorables. Por ejemplo, FM4 señala: "uno de los posibles razonamientos de la estudiante se centra en la cantidad de fichas blancas que hay en cada caja, dejando a un lado la cantidad de fichas negras"; o bien solo en los favorables ("eligen mal la respuesta debido a que creen que, por haber una mayor cantidad de pelotas negras, existirá una mayor probabilidad de sacarlas", FM5), sin existir una relación entre ambos (BURGOS et al., 2022).

En el análisis *a priori* se pone de manifiesto que la respuesta y justificación de Belén es la correcta, por lo tanto, en este ítem 3 ninguno de los FM alude a las estrategias o intuiciones de esta respuesta. Como se muestra en la Tabla 3, llama la atención que, si bien la mayoría de los FM reconocen que las justificaciones de Emilia, Pedro y Lucas son incorrectas, en este apartado la mitad de los FM no otorga una respuesta para el caso de Pedro y Lucas, y para el caso de Emilia son siete los FM que no contestan.

Tabla 3 – Categorías y frecuencias en la descripción de estrategias erróneas de Emilia, Pedro y Lucas

Categorías	Emilia	Pedro	Lucas
Estrategia visual	0	2	3
Estrategia univariada	3	3	2
No contesta	7	5	5

Fuente: Elaboración propia.

Estos resultados pueden ser producto de limitaciones de los FM a la hora de identificar los errores o las dificultades que han tenido los estudiantes ficticios de la tarea (Emilia, Pedro y Lucas) para identificar la caja correcta.

Por otro lado, se puede observar que la estrategia que los FM consideran más representativa para el caso de Emilia y Pedro se basa en la idea de no establecer una relación entre los casos favorables y desfavorables, por lo tanto, se centran en uno de ellos, reconociendo, implícitamente, la estrategia univariada en Emilia y Pedro. Ejemplo de esto se refleja en la respuesta de FM4 quien señala:

> Emilia: Uno de los posibles razonamientos de la estudiante se centra en la cantidad de fichas blancas que hay en cada caja, dejando a un lado la cantidad de fichas negras. En cuanto a Pedro, su razonamiento era similar al de Emilia, debido a que consideró solo la cantidad de fichas negras (lo contrario a Emilia) (FM4).

Para el caso de Lucas, 3 de los 5 FM que contestaron consideran que la justificación es incorrecta, porque este alumno ficticio se deja llevar por la representación pictórica que hizo de las cajas, donde se puede apreciar que en la Caja B se ven más bolas que en la Caja A, por lo tanto, lo hace intuir que donde hay más bolas existe mayor probabilidad. Esta situación se puede observar en la respuesta de FM3

> En el caso de Lucas, la respuesta es similar a la de Pedro y es factible que el razonamiento de este estudiante haya sido similar al del estudiante anterior, guiándose por sus percepciones e ideas previas, utilizándolas para poder resolver el problema que se le presentó, aquí el alumno dice que escogería la caja B porque hay el doble de bolas negras que blancas, ignorando sus proporciones y solo guiándose del número mayor en la cantidad de objetos que hay en las cajas.

Así, a partir de las respuestas dadas por los FM al ítem 1 y al ítem 3, se infiere que estos FM cuentan con conocimiento especializado vinculado a la faceta cognitiva, pues logran identificar y describir configuraciones cognitivas ante respuestas ficticias a una tarea de probabilidad. Sin embargo, presentan una mayor dificultad al momento de identificar posibles conflictos de aprendizaje que pueden presentar los estudiantes en relación con la tarea propuesta.

3.2.3 Análisis del ítem 4

El ítem 4, requiere que una vez que el FM ha identificado el conflicto semiótico, decida cómo responder a él haciendo uso de sus conocimiento didáctico-matemático asociado a las facetas interaccional y mediacional. Para ello, se solicita a los FM que señalen, por un lado, ¿cómo explicaría a cada alumno el error que ha cometido? y, por otro lado, ¿Cómo ayudaría a cada alumno a superar las dificultades que han motivado dichos errores?

A) <u>Análisis del ítem 4 a)</u>

En el ítem 4 a) los FM debían describir como explicarían el error cometido por Emilia, Pedro y Lucas al justificar la elección de la caja, para este caso se describen y ejemplifican las siguientes categorías, tomadas de Burgos et al. (2022):

- *Uso de materiales manipulativos.* Sugieren que el uso de material manipulativo ayuda a los alumnos a entender los errores cometidos. Ejemplo, FM7 señala: "utilizaría material concreto para que de esta manera puedan observar lo que van a manipular para poder evidenciar la probabilidad; y recordar que al tener dos cajas se debe evaluar ambas para ver la probabilidad mayor".
- *Uso de representaciones.* Se considera que el uso de representaciones puede facilitar la identificación de los casos favorables y posibles ("le explicaría de manera pictórica, donde podrá observar que el aumento también es de bolas blancas", FM9). Asimismo, destacan que la utilización de representaciones simbólicas solventaría los errores ("les propondría que lo escribiéramos de manera simbólica para que comprendan cómo se escribe", FM5).
- *Empleo de nuevos ejemplos o contraejemplos.* Se considera que proponer más ejemplos o usar nuevas situaciones, permite a los alumnos comprender por qué su estrategia no siempre funciona. Ejemplo, FM2 menciona:" le daría más ejemplos para que el descubra que puede haber casos en los que tengamos más cantidad de bolitas en un objeto que en otro pero la probabilidad no siempre se basa en la cantidad del objeto que se pide".
- *Afianzar conceptos.* En esta categoría tienen en cuenta que el explicar nuevamente algunos conceptos claves es necesario para que los alumnos se den cuenta de sus errores (explicarle nuevamente lo que es una probabilidad, FM1).

De este modo, a partir de la Tabla 4, en primer lugar, es importante destacar que dos de los diez participantes no dieron respuesta. De los ocho que sí respondieron, ninguno supo cómo abordar las dificultades de los tres estudiantes ficticios. Es decir, solo dos participantes (FM1 y FM8) dieron una explicación para el error de Emilia, mientras que FM2 y FM10 dieron una respuesta diferente para el caso de Pedro y Lucas, el caso contrario son cinco participantes que propusieron la misma solución para ambos. Esta situación muestra cierta complejidad para los FM, ya que consideran que los errores cometidos por Pedro y Lucas son similares y requieren la misma forma de actuación para solucionarlos. Por otra parte, solo FM7 ofreció una respuesta general para los tres casos, considerando que todos los estudiantes cometieron el mismo error y que la solución debe ser la misma para todos.

Tabla 4 – Categorías y frecuencias en las explicaciones a los errores de Emilia, Pedro y Lucas

Categorías	Emilia	Pedro	Lucas	General
Uso de materiales manipulativos	0	1	1	1
Uso de representaciones	0	2	2	0
Empleo de nuevos ejemplos o contraejemplos	0	2	0	0
Afianzar conceptos	2	3	5	1
No contesta	8	2	2	8

Fuente: Elaboración propia.

De igual manera, al observar la Tabla 4 y teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, sobre la cantidad de respuestas, se puede apreciar que en algunos casos las explicaciones a los errores cometidos que proponen los FM pueden estar incluidas en varias de las categorías planteadas. Por este motivo, se aprecia que el FM7 considera que usar material manipulativo y afianzar conceptos es la forma de explicar a los tres alumnos ficticios su error. En el caso las otras respuestas, la que tiene mayor presencia es la de explicar nuevamente los conceptos que se ponen en juego al resolver la tarea, por ejemplo, FM8 plantea:

> Emilia: Si bien has llegado al resultado correcto, debes tomar en cuenta el espacio muestral completo que corresponde a todos los posibles resultados del experimento.

Seguidamente la explicación que los FM consideran más apropiada es el uso de representaciones, como lo expone FM9:

> A Pedro y Lucas le explicaría de manera pictórica, donde podrán observar que el aumento también es de bolas blancas y por tanto ir haciendo una representación de árbol en conjunto con los casos posibles.

B) Análisis ítem 4 b)

En este ítem se solicitaba a los FM que explicasen cómo ayudarían a cada alumno a superar las dificultades que los han motivado a cometer errores, es importante recordar que según lo establecido en el análisis a priori Emilia, Pedro y Lucas eran los que cometían algún tipo de error. Después de analizar las nueve respuestas, ya que el participante FM6 no contesta a este apartado, llama la atención que solamente FM10 propone situaciones personalizadas de cómo ayudar a Pedro y Lucas, enfocadas al uso de diferentes representaciones para ayudar a los alumnos a darse cuenta de sus errores, por ejemplo:

> Pedro: primero que nada, realicemos un modelo matemático para que nos pueda ayudar a identificar y solucionar el problema. Para ello dibuja 2 cajas en proporción, te sugiero que uses los cuadrados de tu cuaderno, así es más fácil. En la caja A hace una caja con 16 cuadrados y en cada una de ellas primero pinta las negras y luego la blanca (te sugiero también que sea de 4x4), una vez que termines, dibuja la caja B con 30 cuadrados y pintas en cada cuadrado primero las negras y después las blancas (te

> sugiero que sea 5x6). Con el dibujo que ves de ambas cajas, cual se observa que tiene más probabilidad (sin que cuentes las fichas, solo mira). Si yo doblara la hoja en 2 partes iguales, como se ve la caja B al doblar la hoja…podrías evidenciar más fácil que tiene más o menos posibilidades (FM10).

En el caso de FM9, su propuesta se centra en ayudar en forma conjunta a Pedro y Lucas con ejemplos parecidos a la tarea, utilizando representaciones con material concreto y pictórico con el objetivo que los estudiantes hagan comparaciones y se puedan dar cuenta del error que cometieron. Finalmente, las otras 7 respuestas a este apartado se plantean de modo general, es decir, para Emilia, Pedro y Lucas, centrándose en estrategias pedagógicas para abordar el trabajo en el aula de clase. Por ejemplo, FM2 propone:

> Utilizaría la técnica de compartir estrategias ya que a través de las respuestas compartidas resuelven el desafío primero de manera individual, luego comparten sus respuestas en donde como docente seremos moderadores ante estas, así más que darle información de como si se resuelve serán descubridores de esta enseñanza en forma colectiva.

4. Consideraciones finales

Es fundamental que los futuros maestros posean un adecuado conocimiento del contenido matemático y del conocimiento didáctico del contenido para garantizar un proceso óptimo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, el conocimiento del contenido matemático permite al maestro comprender la complejidad de las prácticas que propone a sus estudiantes, en términos de los conceptos, propiedades y procedimientos que se pondrán en juego. Este conocimiento es la base para tomar conciencia de posibles dificultades que puedan encontrar sus estudiantes. Pero esta previsión puede quedarse muy corta, por lo que es necesario poder interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes identificando sus intuiciones y estrategias, correctas o no. Este conocimiento especializado de los factores que afectan al aprendizaje de los alumnos es imprescindible para planificar convenientemente las trayectorias didácticas y tomar decisiones de acción durante la práctica docente que involucre técnicas y estrategias, con las que satisfacer las necesidades de cada estudiante (GODINO et al., 2017).

Según la investigación llevada a cabo, se ha constatado que, en general, los futuros maestros poseen un conocimiento adecuado sobre las tareas probabilísticas que implican comparación de probabilidades en urnas. Esto les permite resolver la tarea propuesta con eficacia y precisión, identificando las respuestas correctas e incorrectas dadas por los estudiantes ficticios. No obstante, es importante destacar que los participantes muestran ciertas dificultades cuando tienen que delimitar tanto los contenidos matemáticos específicos como las ideas clave implicadas en la resolución de la tarea, ya que los términos propuestos son muy generales, como, por ejemplo, considerar la Estadística y la Probabilidad como contenidos específicos. Estos resultados son similares a los obtenidos en investigaciones previas en las que se evidenció la falta de conocimiento común y específico sobre tareas de probabilidad en futuros maestros y su incapacidad para identificar los objetos matemáticos en tareas probabilísticas, incluso cuando estos utilizaron dichos objetos para resolver correctamente los problemas planteados (BATANERO et al., 2015; VÁSQUEZ; ALSINA, 2019).

Los resultados obtenidos evidencian un conocimiento didáctico-matemático que requiere de mayor desarrollo, pues presenta ciertas debilidades. Aun cuando los FM cuentan con ciertos conocimientos vinculados a la faceta epistémica, presentan debilidades en lo que respecte a las facetas instruccional y mediacional.

Específicamente, el análisis del ítem 3 (faceta cognitiva) y el ítem 4 (faceta interaccional y mediacional) indican que estos FM tienen dificultades para identificar los errores que impiden a los estudiantes resolver o justificar adecuadamente la tarea sobre urnas. De igual forma, se evidencia, a partir de sus respuestas, que las estrategias descritas son demasiado genéricas y no diferencian concretamente cómo actuar en base al tipo de error cometido, lo que limita la propuesta de actuaciones en el proceso de instrucción. Es importante destacar que la detección del error juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que permite al docente reflexionar sobre cómo actuar ante diversas situaciones y, al mismo tiempo, explicar al estudiante los motivos por los que ha cometido el error. La concepción didáctica basada en los errores cognitivos y sus causas es un desafío pedagógico que debe ser considerado uno de los ejes conceptuales del diseño, desarrollo y evaluación de la clase (FERNÁNDEZ-PERÓN; BRITO-MELGAREJO, 2018).

Este hallazgo sugiere que a pesar de que el profesor de matemáticas tiene un buen dominio conceptual y técnico de los contenidos disciplinares, a menudo tiene dificultades para comprender cómo enseñarlos a un nivel más básico para que los estudiantes puedan entenderlos mejor en el contexto escolar (LEÓN-GÓMEZ; BARA; AZOCAR, 2013). Por tanto, surge la necesidad de mejorar la formación de los futuros maestros en cuanto a su conocimiento didáctico del contenido matemático, y proporcionarles herramientas y estrategias pedagógicas específicas que les permitan identificar y abordar adecuadamente los errores cometidos por los estudiantes durante el proceso de aprendizaje.

Aunque la muestra con la que se ha llevado a cabo el estudio es limitada, el instrumento utilizado nos brinda información valiosa sobre el nivel de conocimiento de los estudiantes de una universidad chilena al finalizar la parte general de su formación como futuros maestros, y puede servir, con las adaptaciones oportunas a nuevos contextos y contenidos. Es importante destacar que, aunque los resultados de esta investigación no pueden ser generalizables, debido al tamaño muestral, nos proporcionan información útil para mejorar la formación de los docentes que deciden especializarse en matemáticas, buscando un equilibrio entre su conocimiento matemático y didáctico.

La presente investigación puede ser un punto de inicio que permita el diseño de tareas enfocadas, por ejemplo, en un análisis más profundo de las facetas epistémica y cognitiva, interaccional y mediacional en las que se resalte, por ejemplo, la identificación de los objetos matemáticos que intervienen en esta. De igual forma, enfrentar a futuros maestros a tareas que desarrollen su conocimiento didáctico-matemático desde la faceta cognitiva, brindará oportunidades para la identificación y gestión de errores y dificultades en torno al aprendizaje de la probabilidad. Asimismo, es importante valorar, en la formación de futuros maestros, así como el papel que juega el error en el proceso de instrucción, pues el trabajo a partir de este ayuda a progresar en el conocimiento de la comprensión de la probabilidad, entre otros.

En estudios posteriores será necesario abordar de forma más precisas las características de tareas a proponer al profesorado en formación, que contribuya a desarrollar en ellos la confianza y las habilidades necesarias para comprender de una forma significativa las matemáticas y así promover el razonamiento probabilístico orientado a la resolución de problemas. Pero, sobre todo, ser capaz de usar el error de los alumnos como fuente de aprendizaje, ya que es fundamental para una enseñanza de calidad de la probabilidad.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España) y como parte del proyecto FONDECYT nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 59, n. 5, p.389–407, 2008. DOI: https://doi.org/ 10.1177/0022487108324554

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Journal of statistics Education**, Alexandria, v. 12, n. 1, 2004 DOI: https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715

BATANERO, C.; GÓMEZ-TORRES, E.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ-BATANERO; C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. **Praxis educativa**, Ponta Grossa, v. 10, n. 1, p.11–34, 2015. DOI: https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

BATANERO, C.; GÓMEZ, E.; SERRANO, L.; CONTRERAS, J. M. Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. **Redimat**, Barcelona, v. 1, n. 3, p.222–245, oct., 2012. DOI: https://dx.doi. org/10.4471/redimat.2012.13

BEGOLLI, K. N.; DAI, T.; MCGINN, K. M.; BOOTH, J. L. Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. **Instructional Science,** [s.l], v. 49, p.441–473, jul., 2021. DOI: https://doi. org/10.1007/s11251-021-09550-9

BISQUERRA, R. **Metodología de la Investigación Educativa**. España: La Muralla. 2019.

BLÖMEKE, S.; BUSSE, A.; KAISER, G.; KÖNIG, J.; SUHL, U. The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. **Teaching and Teacher Education**, [s.l], v. 56, p.35–46, may., 2016. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.02.003

BURGOS, M.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; AGUAYO-ARRIAGADA, C.; ALBANESE, V. Cognitive analysis of probability comparison tasks by preservice primary school teachers. **Uniciencia**, Heredia, v. 36, n. 1, p.1–24, nov., 2022. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.36-1.38

DEPAEPE, F.; VERSCHAFFEL, L.; STAR, J. Expertise in developing students' expertise in mathematics: Bridging teachers' professional knowledge and instructional quality. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 52, n. 2, p.179–192, may., 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-020-01148-8

EVEN, R.; BALL, D. L. (2009). **The professional education and development of teachers of mathematics**. New York: Springer, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8

FERNÁNDEZ-PERÓN, M.; BRITO-MELGAREJO, R. P. Los errores cognitivos y sus causas: una mirada desde la didáctica de las ciencias exactas. **Transformación**, Camagüey, v. 14, n. 1, p.81–89, 2018. Disponível em: http://scielo.sld.cu/pdf/trf/v14n1/trf08118.pdf

GEA, M.M.; PARRAGUEZ, R.; BATANERO, C. Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. In: **Investigación en educación matemática XXI**. Actas de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Zaragoza, 2017. Disponível em: https://cutt.ly/ eRfVp0C. Acesso em: 15 dic. 2022.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, [s.l], v. 39, n. 1, p.38–43, mar., 2019. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/26742011

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p.90–113, abr., 2017. DOI: https:// doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

GÓMEZ, E.; BATANERO, C.; CONTRERAS, C. Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p.209–229, abr., 2014. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

KRIPPENDORFF, K. **Content Analysis. An Introduction to Its Methodology** (3rd ed.). Sage Publications: California, CA, USA, 2013.

LEÓN GÓMEZ, N.; BARA, M.; AZOCAR, K. Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente. **Paradigma**, Caracas, v. XXXIV, n. 2, p.177–200, dic., 2013. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2013.p177-200.id524

SHAUGHNESSY, J. M. Research in probability and statistics: Reflections and directions. In: Grows, D. A. (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992, p.465–494.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre probabilidad: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p.681–703, ag., 2015a. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, [s.l], v. 7, p.27–48, mar., 2015b. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem. v1i7.104

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**, Granada, v. 23, n. 1, p.393–419, mar., 2019. DOI: https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i1.9160

VÁSQUEZ, C.; CABRERA, G. La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. **Revista Educación Matemática**, Guadalajara, v. 34, n. 2, p.245–274, ag., 2022. DOI: https://doi.org/10.24844/EM3402.09

Autores

María del Mar López-Martín
Doctora en Didáctica de la Matemática y Doctora en Técnicas Avanzadas en Gestión Empresarial. Profesora Titular de Universidad en el Área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Educación de la Universidad de Almería. Las líneas de investigación son estadística aplicada, didáctica de la estadística, y en la formación de profesores.
mdm.lopez@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-8677-9606

Carmen Gloria Aguayo-Arriagada
Doctora en Didáctica de la Matemática y Licenciada en Educación Primaria. Profesora de la Universidad de Almería en el Área de Didáctica de la Matemática del Departamento Educación. Las líneas de investigación son Formación del Profesor, específicamente de Educación Primaria y su conocimiento Didáctico-Matemático.
cgaguayo@ual.es
https://orcid.org/0000-0001-9576-2312

Claudia Vásquez Ortiz
Doctora por la Universidad de Girona y Licenciada en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesora Asociada de planta ordinaria del Campus Villarrica de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación se centran en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad desde las edades tempranas, y en la formación del profesorado.
cavasque@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-5056-5208

María Burgos Navarro.
Doctora en Matemáticas por la Universidad de Almería y Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Profesora Titular de Universidad en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. Investigadora Principal del Proyecto de Investigación PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033. Sus líneas de investigación son el razonamiento proporcional y algebraico y la formación de profesores.
mariaburgos@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

Como citar o artigo:
LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; AGUAYO-ARRIAGADA, C. G.; VÁSQUEZ, C.; BURGOS, M. Conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros chilenos: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad en Educación Básica. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 170 – 193 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p170-193.id1391

Conocimiento didáctico-matemático de profesores colombianos sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas

Cristian Camilo Fúneme Mateus
cristian.funeme@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-9158-427X
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Uptc)
Bogotá, Colombia.
Leidy Julieth Linares Beltrán
leidy.linares@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-8220-9814
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Uptc)
Bogotá, Colombia.
Leidy Milena Cáceres Carreño
leidymilena.caceres@uptc.edu.co
https://orcid.org/0009-0001-9591-5566
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Uptc)
Tunja, Colombia.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Este artículo presenta la caracterización del conocimiento de treinta profesores de educación básica sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. Para dicho fin, se acude a las categorías de análisis del modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (CDM) propuesto en el Enfoque ontosemiótico del aprendizaje y la instrucción matemática (EOS). Es decir, se retoman las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica para identificar qué elementos de ellas se hacen presentes en el análisis que realizan los profesores sobre situaciones de aprendizaje relacionadas con los procesos de generalización y particularización. El diseño metodológico adoptado es el cualitativo, orientado por los momentos del estudio de caso y el análisis mediante categorías. En los resultados obtenidos se muestra que para los profesores es de gran dificultad relacionar los factores afectivos y cognitivos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes; además, los docentes conciben el desarrollo de sus configuraciones didácticas únicamente mediante la interacción profesor-estudiante. Se encuentra también en los profesores un conocimiento común sobre los procesos matemáticos analizados y dificultad para establecer conexiones intra e interdisciplinares. Estos aspectos evidencian el predominio de visiones cognitivistas sobre la educación matemática en el grupo de profesores participantes.

Palabras clave: Conocimiento del Profesor. Generalización. Enfoque Ontosemiótico. Particularización. Resolución de problemas.

Conhecimento didático-matemático dos professores colombianos sobre os processos de generalização e particularização na resolução de problemas

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma caracterização do conhecimento de trinta professores de educação básica sobre os processos de generalização e particularização na resolução de problemas. Para este fim, são utilizadas as categorias de análise do conhecimento didático-matemático do modelo do professor (CDM) proposto pela Abordagem Ontosemiótica da

aprendizagem e da instrução matemática (AOS). Em outras palavras, as facetas epistêmica, cognitiva, afetiva, de meios, de interação e ecológica são retomadas a fim de identificar quais elementos delas estão presentes na análise do professor sobre situações de aprendizagem relacionadas com os processos de generalização e particularização. O desenho metodológico adotado é qualitativo, orientado pelo estudo de caso e análise de categorias. Os resultados obtidos mostram que é muito difícil para os professores relacionar fatores afetivos e cognitivos no processo de aprendizagem dos alunos; além disso, os professores concebem o desenvolvimento de suas configurações didáticas somente através da interação professor-estudante. Verifica-se também que os professores têm um conhecimento comum dos processos matemáticos analisados e dificuldade em estabelecer conexões intra e interdisciplinares. Estes aspectos mostram a predominância de visões cognitivistas sobre a educação matemática no grupo de professores participantes.
***Palavras chave*:** Conhecimento do professor. Generalização. Abordagem Ontosemiótica. Particularização. Resolução de problemas.

Didactic-mathematical knowledge of Colombian teachers about the processes of generalization and particularization in problem solving

Abstract

In this paper we report a characterization of the knowledge of thirty basic education teachers about the processes of generalization and particularization in problem solving. For this purpose, the categories of analysis of the didactic-mathematical knowledge model of the teacher (CDM) proposed in the Ontosemiotic approach to learning and mathematical instruction (EOS) are used. That is, the epistemic, cognitive, affective, mediational, interactional, and ecological facets are taken up to identify which elements of them are present in the analysis made by teachers of learning situations related to the processes of generalization and particularization. The methodological design adopted is qualitative, oriented by the moments of the case study and the analysis through categories. The results obtained show that it is very difficult for teachers to relate affective and cognitive factors in the students' learning process; in addition, teachers conceive the development of their didactic configurations only through teacher-student interaction. Common knowledge about the mathematical processes analyzed and difficulty in establishing intra- and interdisciplinary connections are also found in the teachers. These aspects show the predominance of cognitivist views on mathematics education in the group of participating teachers.
Keywords: Teacher knowledge. Generalization. Ontosemiotic approach. Particularization. Problem solving.

Introducción

A lo largo del desarrollo de la historia de la humanidad el conocimiento matemático ha emergido como el resultado de la interacción del ser humano con un mundo en el que las formas, las cantidades, las incógnitas, las regularidades y los patrones, entre otros, han marcado su necesidad de superar los límites de la intuición para pasar a la constitución de certezas y generalidades a través de un ejercicio constante de creatividad que conecta al corazón, la razón y el mundo sensorial (ZALAMEA, 2020).

En este sentido, al analizar el surgimiento de las ideas de la matemática, diversos autores han propuesto que la naturaleza del aprendizaje de esta ciencia está fuertemente relacionada con la posibilidad que se otorgue a las personas de explorar el mundo que las rodea y problematizar sobre él (POINCARÉ, 1910; MALASPINA et al., 2019; GODINO, 2022). De esta forma, la resolución de problemas se convierte en un eje fundamental a considerar en las planificaciones y desarrollos de las clases de matemáticas en el ámbito escolar (LILJEDAHL, 2019).

Ahora bien, la incorporación del trabajo con problemas en las clases de matemáticas no es algo trivial, por el contrario, implica diferentes competencias, conocimientos y habilidades tanto del profesor como del estudiante (POLYA, 1945; SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008; FELMER et al., 2016). Precisamente la falta de conciencia sobre esta necesidad de considerar los diversos factores que están en torno a la resolución de problemas ha llevado a que los estudiantes tengan dificultad al trabajar con ellos y sobre todo al abordarlos cuando se les evalúa su conocimiento, de forma que la incorporación de la resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha resultado en gran medida ineficaz (MACIEJEWSKI, 2019).

Las posibles causas de la dificultad que enfrentan los estudiantes al resolver problemas de matemáticas ha sido explorada desde diferentes puntos de vista, por ejemplo, para Santos (2020) hay que iniciar por considerar que en la sociedad se ha asociado a la matemática con un carácter de complejidad y por esto es usual que los estudiantes asuman ante un problema de matemáticas que ellos no cuentan con los conocimientos, herramientas o competencias necesarias para resolverlo, desligándose de él o simplemente dando respuestas apresuradas.

Al indagar por las razones por las cuales los estudiantes lleguen a ideas como las mencionadas antes, se encuentran explicaciones como la dada por Brousseau (1986), quien sostiene que las dinámicas de la clase suelen llevar al estudiante a considerar que su actividad en el proceso de aprendizaje de la matemática se debe limitar a responder aquello que el profesor espera, es decir, lo importante es obtener cierta aprobación del profesor. Lo anterior, lleva a que los docentes tengan la ilusión de que el estudiante le ha comprendido y a que los estudiantes cuenten con la tranquilidad de no ser expuestos desde sus dificultades, errores y obstáculos.

En atención a lo anterior, en las últimas décadas en diversos lugares e instituciones se ha intentado implementar técnicas y modelos como los propuestos por Polya (1945), Schoenfeld (1985) y Mason (2016), entre muchos otros, para el aprendizaje de la matemática desde la resolución de problemas, sin embargo, las dificultades siguen haciendo presencia en los salones de clase (POPKEWITZ, 2004; RADFORD, 2017). Es entonces cuando aparecen los interrogantes de ¿por qué si existen tanto desarrollos teóricos y metodológicos para la implementación de la resolución de problemas en las clases de matemáticas, las dificultades no desaparecen? Interrogantes como este son complejos de responder, por lo que requieren de un esfuerzo amplio y constante que la comunidad de la didáctica de la matemática ha desarrollado; no obstante, se requiere de mayor profundidad en diversos elementos que aún no han sido analizados globalmente (CAMACHO; SANTOS, 2015), entre ellos, el papel que tiene la comprensión del profesor sobre los procesos matemáticos que desarrolla un estudiante ante la resolución de un problema (FONT; RUBIO, 2016).

Más aún, en la resolución de problemas existe una amplia indagación de los momentos, estrategias, dificultades, errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes al resolver problemas (LILJEDAHL; SANTOS, 2019); sin embargo, no existen mayores evidencias de qué grado de conciencia tiene el profesor sobre aquello que está pasando con los estudiantes al momento de vivir cada uno de esos aspectos (TORREGROSA; CALLEJO, 2011).

De hecho, en los programas de formación de profesores de matemáticas se suelen dar a conocer las teorías y autores más conocidos en la resolución de problemas, pero pocas veces se prepara al profesor para analizar el tipo de actividad matemática que desarrolla el estudiante y menos la forma en que emergen procesos matemáticos específicos (D'AMORE, 2017).

De esta forma, surge el interés por indagar respecto al conocimiento didáctico-matemático de profesores respecto a procesos matemáticos que aparecen en la resolución de problemas. En particular, se indaga por un proceso matemático que ha sido considerado como el corazón del pensamiento matemático por muchos autores, el proceso de generalización (STEINBRING, 2006; RADFORD, 2015).

1. **Referencial teórico**

En esta sección se abordan los aspectos conceptuales relativos a los procesos de generalización y particularización, resaltando inicialmente diversas posiciones sobre ellos en el ámbito de la didáctica de la matemática y finalizando con la postura propia del Enfoque ontosemiótico, en donde se toma la relación que tienen dichos procesos con el conocimiento didáctico-matemático.

1.1 Elementos de la resolución de problemas en la didáctica de la matemática

La naturaleza histórica que envuelve a la matemática revela su relación con el planteamiento y resolución de problemas. Son numerosos los ejemplos que se podrían citar para mostrar la forma en que el conocimiento matemático ha surgido de la mano de la resolución de problemas, tal es el caso de la cuadratura del círculo, el último teorema de Fermat, la hipótesis de Riemann, entre muchos otros (KRANTZ, 2006).

Es por lo anterior, que con el surgimiento de la didáctica llegaron diferentes reflexiones filosóficas sobre la naturaleza del conocimiento matemático, en ellas se ha vinculado a la resolución de problemas como eje central de la actividad que posibilita su aprendizaje (FELMER et al., 2019). Sin embargo, la relación entre el aprendizaje de la matemática y la resolución de problemas se ha explorado por diferentes caminos, entre los cuales se pueden determinar dos grandes categorías: (1) la adquisición de heurísticas o esquemas para resolver problemas como camino para el aprendizaje, es decir, la resolución de los problemas en sí mismo es la finalidad; y (2) la resolución de problemas como eje que moviliza la actividad matemática, es decir, la resolución de un problema solo es un medio para aprender.

En la visión de establecer heurísticas para la resolución de problemas el trabajo de Polya plasmado en su libro *How to Solve It* (1945) ha sido de gran resonancia en el mundo. La propuesta de Polya se fundamenta en que la actividad de la resolución de problemas atraviesa cuatro momentos: comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás. En cada uno de ellos, se hace necesario poner en marcha heurísticas que permitan solucionar el problema, como, por ejemplo, mirar hacia atrás, hacer analogías, resolver un problema más sencillo, trabajar hacia atrás, entre otras.

Aunque la propuesta de Polya movilizó la generación de propuestas de enseñanza de la matemática desde la resolución de problemas, emergieron otras posiciones teóricas al considerar que Polya desconocía muchos elementos, entre ellas, el trabajo de Schoenfeld es quizá la respuesta más famosa. Para Schoenfeld (1985) las propuestas previas para considerar la resolución de problemas estaban pensadas desde un punto de vista teórico, por lo cual estudió esta temática desde lo práctico y lo empírico.

Según Schoenfeld (1982) el proceso de resolución de problemas debe ser entendido como un diálogo entre el conocimiento previo del sujeto, sus intentos de soluciones y sus pensamientos a lo largo de ellos. De forma que, no considera que las heurísticas deban ser dadas al estudiante como algo a replicar, en su lugar propone que la forma de solucionar un problema es un proceso emergente y contextualmente dependiente (LILJEDAHL, 2019).

Como consecuencia de su posicionamiento, Schoenfeld (1982) sostiene que en la resolución de problemas lo primero a considerar son los recursos, entendidos como los conocimientos previos del estudiante y las habilidades con las cuales cuenta. Luego propone las circunstancias estereotípicas, en donde enmarca aquellos procedimientos que el sujeto reconoce de inmediato ante un problema, más allá de que conozca como se realizan o no. También considera los recursos defectuosos, como aquellos conocimientos y estrategias equivocadas que posee el estudiante.

Teniendo en cuenta lo anterior, Schoenfeld (1985) propone cuatro momentos a considerar en la resolución de problemas: entendimiento del problema, consideración de varias formas de solucionarlo y elección de una de ella, monitoreo del proceso, llevar a cabo el proceso y revisión de su solución. Agregando, que la actividad grupal es de gran ayuda para interiorizar y comprender las ideas que se desarrollan al solucionar un problema.

Por su parte, Perkins (2000) sostiene que tanto Polya como Schoenfeld habían omitido que al hablar de la resolución de un problema es necesario clarificar qué se considera como problema, pues de hecho la naturaleza de los problemas matemáticos es variable y por ende no se pueden establecer diseños fijos para su resolución. Por esta razón, Perkins (2000) clarifica que existen problemas que no se pueden solucionar y problemas razonables e irrazonables. Los dos últimos son de tipo solucionables, pero los razonables puede resolverse mediante razonamientos directos, es decir, si un problema lleva al estudiante a una solución directa en la que no se requiere de un esfuerzo cognitivo mayor, entonces es razonable y en caso contrario irrazonable. De forma que esta caracterización no depende del problema es si mismo sino del sujeto que lo resuelve.

Es así, como Perkins (2000) propone considerar solución de problemas irrazonables, esto a través de lo que denomina pensamiento innovador. Este pensamiento emerge cuando el estudiante debe afrontar alguno de cuatro tipos de problemas: desierto de posibilidades, meseta sin pistas, cañón angosto de exploración y oasis de falsas promesas. Los primeros relacionados con problemas en los que hay muchos elementos por explorar y muy pocos de ellos permiten dar solución, los segundos son aquellos en que se requiere dar pistas al estudiante, los terceros son aquellos en los que existen restricciones que limitan los posibles caminos de solución y el último tipo se refiere a problemas en los que la solución parece inmediata, pero al verificarla se encuentra que no es así.

Para cerrar, Mason et al. (1982) reconocen nuevamente que los problemas no implican siempre un proceso de solución mecánico, por ello propone unas fases que realiza una persona: entrada o abordaje en donde se involucra con el problema mediante el uso de lo que se conoce inmediatamente al respecto; ataque, donde se pone en marcha las ideas previas para plantear hipótesis, probar estrategias de solución, realizar deducciones, etc.; revisión, donde se hace una exploración de lo realizado para verificar que sea correcto.

Ahora bien, todo lo mencionado corresponde a una visión que se centra en como orientar o precisar el tipo de actividad que debe desarrollar el estudiante al resolver un problema; sin embargo, en paralelo se desarrolló una visión distinta, en la cual se considera que la resolución de problemas es fundamental al aprender matemáticas, pero no se toma como eje central el establecer modelos, heurísticas o esquemas para dicha resolución. Esta visión considera que lo importante es comprender que la resolución de los problemas posibilita el aprendizaje y que el ser humano es el resultado de un proceso histórico, social y cultural que hace que el conocimiento tenga componentes objetivos y subjetivos que generan que cada persona viva una experiencia diferente y única de aprendizaje.

En esta última corriente aparecen aportes como la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), quien sostiene que el problema es un elemento particular de una concepción más amplia como lo es la situación, término entendido como un modelo de interacción entre un sujeto, un medio y un conocimiento. De forma que, el problema no es en sí mismo el que conduce al conocimiento, sino aquel que activa las acciones de los estudiantes para desarrollar a través de elementos de su lenguaje, del lenguaje de la matemática, de la interacción con sus compañeros y de un proceso de adaptación y enculturación (BROUSSEAU, 2007). Considerando entonces que los problemas son esenciales en el aprendizaje de la matemática, pero que esto no implica que existan modelos fijos, rígidos o universales que expliquen la forma en que el estudiante lo afrontará (BROUSSEAU et al., 2012).

También Radford (2018) en su teoría de la objetivación destaca la importancia de la resolución de problemas, al sostener que el plantearse, reconocer y buscar las soluciones de problemas teóricos, sociales, científicos o culturales el sujeto inicia el desarrollo de una actividad de la cual emergerá su conocimiento. Sin embargo, aclara que la resolución del problema en sí mismo no es la que genera un aprendizaje, por ende, no es preciso dar heurísticas de solución de problemas, pues el aprendizaje en la actividad matemática está enmarcado como un proceso social de objetivación en el cual el estudiante tiene un encuentro con los demás, con su entorno y allí reconocerá formas, estrategias, instrumentos y demás elementos que requiere para la solución de los problemas.

Aunque existen más teorías que consideran la resolución de problemas como eje para el aprendizaje de la matemática, se cierra esta sección con la postura teórica que se adopta en la investigación, esta es la postura del Enfoque Ontosemiótico del aprendizaje y la instrucción matemáticos (EOS), en el cual Godino (2022) precisa que la resolución de problemas es el principal desencadenante de la actividad matemática y que solo a través de ellos emergen todos los objetos matemáticos que conoce el estudiante y que podrá aprender. Aunque aclara también, que la actividad matemática está cargada de elementos semióticos, epistémicos, cognitivos, culturales e históricos que llevan a entender que la autonomía del estudiante en la búsqueda de cómo resolver el problema es lo que genera el aprendizaje.

Dicha postura implica que el profesor debe presentar al estudiante las situaciones, prever lo que puede ocurrir con ella, ofrecer los medios necesarios para que sea posible la búsqueda de la solución, más no debe interferir en su proceso induciendo a seguir modelos, enfoques o heurísticas específicas, por el contrario, se propone que la estrategia desarrollada por el estudiante es única para él, dado que se enmarca en un juego de interpretaciones semióticas que es específico de su cognición, de su interacción con la situación, con el medio y con los demás que están involucrados (GODINO et al., 2020).

En relación con la creación de problemas con fines didácticos, en el marco del EOS, se considera que es particularmente importante que el profesor identifique los objetos matemáticos primarios que emergen en la solución de un problema y también que establezca interrelaciones entre ellos; es decir, entre la situación-problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Así, se tendrán redes de objetos que intervienen y emergen, que se denominan configuraciones epistémicas (CE) cuando son consideradas desde una perspectiva institucional y configuraciones cognitivas (CC) cuando son consideradas desde una perspectiva personal (MALASPINA et al., 2019).

El análisis de estas configuraciones (CE y CC) permite adquirir información acerca de la anatomía de la solución de un problema y permite, entre otros aspectos, crear nuevos problemas por variación de los dados inicialmente, o bien crear nuevos problemas directamente para que en su solución se tenga que utilizar un determinado objeto primario (o varios). Esta manera de entender la creación de problemas usando herramientas del EOS se ha incorporado al enfoque de creación de problemas desarrollado por Malaspina y colaboradores, siendo usado en diversas experiencias didácticas en el Perú, Ecuador y España (TORRES, 2020).

1.2 La generalización y la particularización

La generalización es un proceso que se ha considerado como el corazón de la matemática y característico especialmente del pensamiento algebraico (MASON, 1996). Al pensar qué es en concreto este proceso, desde el punto de vista didáctico, se encuentra la conceptualización de Polya (1945) quien propuso que la generalización se puede entender como el proceso en el cual se pasa de la concepción de un objeto a la concepción de un conjunto de objetos, es decir, a través de él se experimenta la extensión o ampliación de objetos matemáticos.

Posteriormente, aparece la visión de Dörfler (1991) quien asume una visión operativa de la generalización, agregando que en este proceso un paso fundamental es establecer invariantes y relaciones que luego deben ser simbolizadas. Ellis (2007) se apoya en esta idea para ampliar los tipos de actividades mentales asociadas a la generalización, diferenciándolas en tres clases: asociaciones entre objetos matemáticos o situaciones, buscar o repetir acciones para identificar invariantes y extender la idea que se identifica a una estructura general.

Las actividades mentales descritas por Ellis (2007) fueron consideradas por Mason et al. (1982) para destacar la importancia de la resolución de problemas en el desarrollo de la generalización por parte de estudiantes, indicando que este proceso, desde un punto de vista del aprendizaje de la matemática, puede ser visto como el descubrimiento de leyes generales que permiten al estudiante realizar conjeturas a partir de lo que observan en el problema, justificar dichas conjeturas y finalmente transferir la ley determinada a nuevos problemas o contextos.

Las posturas anteriores son retomadas y profundizadas por Sabena et al. (2005) quienes sostienen que el punto central en la conceptualización de la generalización es entender que consiste en la percepción de algo que es válido en algunos objetos para luego pasar al establecimiento de la permanencia de lo identificado en todos los elementos de estudio. Está visión otorga elementos de tipo didáctico de gran importancia en la generalización, estos son: la necesidad de la percepción de aquello que se generalizará, la interpretación de lo percibido y la continuidad de los dos elementos anteriores en la actividad matemática del estudiante.

En esta misma dirección, Radford (2015) retoma las ideas de Kant (1800/1974) quien plateó que la generalización se basa en sintetizar tanto las semejanzas como las diferencias entre objetos diferentes y objetos semejantes. Es decir, se reconoce que es parte de la naturaleza humana el percibir aspectos de semejanza o diferencia en objetos y situaciones, dicha capacidad adquiere un carácter más sofisticado e incluso complejo cuando llega a adquirir un estatus de general. Es decir, para Radford (2010) la generalización es un proceso de tres componentes básicas: notar similitudes, formar un concepto general y establecer un esquema. Este proceso está sujeto a los estímulos visuales (números, formas, etc.) que son continuamente transformados por un proceso interpretativo y contextual intencional que depende directamente de nuestra vida personal, cultural e histórica (RADFORD, 2006).

Ahora bien, las definiciones de generalización que se han presentado contienen un elemento común, la necesidad de observar, percibir o analizar objetos particulares para luego pasar a la generalidad. Por esta razón se considera a la particularización y generalización son procesos fundamentales en el aprendizaje de la matemática que, como lo expresa Mason (1996), se distinguen en que la generalización es mirar a través de y la particularización es mirar en, dicho de otra forma, ver una generalidad a través de lo particular y ver lo particular en lo general.

En términos de Kant (1800/1974), la generalización es un proceso que va en búsqueda de lo que permanece invariante y libre de lo efímero, mientras que la particularización escapa de lo ideal para abordar lo concreto, lo momentáneo y propio de una situación en un contexto específico. De esta forma la particularización es un proceso en el que se abordan aspectos delimitados en condiciones muy precisas.

Una conceptualización precisa del proceso de particularización emergente en el ámbito de la matemática es: "pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño, o incluso de un solo objeto, contenido en el conjunto dado" (POLYA, 1945, p. 138). Esta posición es un antecedente de particular interés porque permite ver como la particularización ha sido incorporada por algunas corrientes de la didáctica de la matemática, centradas en enfoques de la resolución de problemas, como un elemento esencial en las estrategias para abordar heurísticas de solución.

La relación entre la generalización y la particularización es entendida en el EOS como de carácter dual, lo que implica que son de relación directa y mutuamente dependientes (FONT; RUBIO, 2016). Más precisamente, son dos procesos de carácter dual extensivo-intensivo, la particularización correspondiente al proceso que se desarrolla a través de casos concretos (extensivo) y la generalización el proceso de la actividad matemática que se desarrolla en el ámbito de las clases de objetos (intensivo) (FONT; CONTRERAS, 2008).

1.3 El modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM)

El Enfoque ontosemiótico del aprendizaje y la instrucción matemáticos (EOS) es un sistema teórico que ha sido desarrollado durante las tres últimas décadas principalmente en España, pero con un gran impacto en Latinoamérica (GODINO, 2022). Este sistema teórico aborda diferentes aspectos de la didáctica de la matemática al retomar aportes de las teorías más importantes que se han desarrollado, pero hace énfasis en la necesidad de avanzar hacia un carácter prescriptivo en esta ciencia (GODINO et al., 2020).

En atención a lo anterior, el EOS ha desarrollado diferentes nociones teóricas que buscan aportar en el impacto que tengan la didáctica de la matemática en el quehacer diario de los docentes y en el aprendizaje de los estudiantes, entre ellas el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) (CARPES; BISOGNIN, 2021).

El CDM es planteado a partir del estudio de los modelos de más impacto en la didáctica de la matemática a nivel mundial, como por ejemplo, el Conocimiento Base para la Enseñanza (CBE) de Shulman (1986; 1987), de quien se reconoce la importancia de entender el conocimiento del profesor en múltiples dimensiones; el Conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching o MKT) desarrollado por Ball (2000; 2004), adoptando su propuesta de considerar que además de múltiples dimensiones, también hay tipologías: conocimiento del contenido (común, especializado y horizonte), así como el conocimiento pedagógico (estudiantes, enseñanza y currículo); entre otros, como el *modelo de conocimiento del profesor* de Grossman (1990) y el *cuarteto del conocimiento* (KQ) desarrollado por Rowland et al. (2005).

En específico, el CDM estructura su modelo de conocimiento del profesor a través de las seis facetas que se consideran en el EOS: epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, ecológica y afectiva (PINO-FAN et al., 2014). En la faceta epistémica se considera si existe relación entre los significados de referencia que existen en la comunidad matemática para el objeto que se pretende enseñar y los significados que se desarrollan en el aula (GODINO et al., 2021). En concreto, el conocimiento del profesor respecto a la significatividad de dicha relación se puede explorar a través de los indicadores del Cuadro 1.

Cuadro 1 – Indicadores del CDM para faceta epistémica.

Conocimiento del Contenido	
Faceta epistémica	**Indicadores**
Conocimiento común	Resuelve la tarea.
Conocimiento especializado:	Puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas.
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
Lenguajes	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado: Conexiones.	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Fuente: Godino (2009).

En cuanto a las facetas cognitiva y afectiva, hacen referencia a la relación entre los significados de los objetos matemáticos y el desarrollo cognitivo de quienes aprenden, así como la forma en que se implican los estudiantes en las trayectorias de aprendizaje, respectivamente (GODINO et al., 2021). En esta dirección, el CDM propone los indicadores del Cuadro 2 para evaluar el conocimiento del profesor en estas facetas.

Cuadro 2 - Indicadores del CDM para facetas cognitiva y afectiva.

Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	
Faceta cognitiva y afectiva	**Indicadores**
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones, …).	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones.	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes.	Explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas o contenidos.
Actitudes, emociones, creencias, valores.	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas.

Fuente: Godino (2009).

Para la faceta interaccional se aborda la resolución de conflictos cognitivos de los estudiantes cuando aprenden los objetos matemáticos. En la faceta mediacional tiene en cuenta que tipos de recursos materiales y temporales se llevan al proceso de instrucción (GODINO et al., 2021). Aspectos que llevaron a los indicadores que se exponen en el Cuadro 3.

Cuadro 3 - Indicadores del CDM para facetas interaccional y mediacional.

Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza	
Faceta interaccional y mediacional	**Indicadores**
Configuración didáctica: Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido. Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos. Recursos materiales. Tiempo asignado.	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas).	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Fuente: Godino (2009).

Finalmente, en la faceta ecológica se apunta a reconocer la importancia del diseño curricular, de los factores sociales y del contexto en que está el estudiante. Es así, como el CDM propone los indicadores que se presentan en el Cuadro 4 para evaluar esta faceta a través de las conexiones que se pueden establecer con los objetos matemáticos tanto en el ámbito matemático como al relacionarlos con otras disciplinas (PINO-FAN et al., 2014).

Cuadro 4 - Indicadores del CDM para faceta ecológica.

Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares	
Faceta ecológica	**Indicadores**
Orientaciones curriculares.	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intradisciplinares.	Explica conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea,
Conexiones interdisciplinares.	Explica conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea.
Otros factores condicionantes.	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Fuente: Godino (2009).

Para evaluar estos indicadores, el CDM propone que el profesor de matemáticas sea expuesto a situaciones en las que: se evidencie el ajuste de sus significados personales a significados de referencia, deba expresarse a través de diferentes tipos de representaciones y que pongan en juego el conocimiento común (resolver la situación), conocimiento especializado (mostrar múltiples soluciones) y conocimiento ampliado (generalización de las soluciones) (CASTRO et al., 2013). Además, el docente debe proponer tareas, analizar prácticas didácticas y la actividad matemática de los estudiantes al resolver problemas, todos estos aspectos son descritos con precisión en el trabajo de Pino-Fan et al. (2022).

2. Metodología

Dado que la intención de la investigación en profundizar en la naturaleza del conocimiento de profesores, el enfoque seleccionado es el cualitativo con un alcance exploratorio-descriptivo, considerando que se busca identificar, describir y categorizar elementos del fenómeno sin análisis numéricos o generalizantes, lo que si se desarrolla es un análisis concreto y profundo de acciones y conductas humanas dentro de un contexto educativo particular (BAENA, 2017).

El tipo de investigación desarrollado corresponde a un estudio de caso, dado que, como lo expone Bernal (2006), la preocupación es analizar en profundidad y gran detalle una unidad de análisis especifica que está sujeta a diferentes delimitantes, entendiendo a esta unidad de análisis como un sistema que tiene interacciones particulares con un contexto que la define. Para el caso de la presente investigación, ese caso específico corresponde al conocimiento didáctico-matemático de un grupo de profesores, es decir, se analiza el conocimiento de dichos sujetos sin querer generalizar lo que sucede con ellos a todos los profesores colombianos. Es así, como la investigación se desarrolla bajo las etapas correspondientes al estudio de caso que exponen Torres et al. (2016):

- Etapa de diseño. En esta fase se desarrolló todo el estudio teórico de los procesos de generalización y particularización. Luego, se determinaron los instrumentos a implementar y la unidad de análisis que se observa.
- Implementación. Consistió en la solución del conjunto de situaciones y problemas que configuran los instrumentos de la investigación por parte de los profesores que conforman la unidad de análisis.
- Análisis e interpretación. Para este momento, se toma la información otorgada por la unidad de análisis, se sistematiza, describe y estructura para configurar los datos del fenómeno de estudio; es decir, para establecer el conocimiento didáctico-matemático de cada profesor.

Para este trabajo se decide, de manera intencional y no probabilística, indagar por el conocimiento didáctico-matemático de profesores de matemáticas que se desempeñan en educación básica primaria en el departamento de Boyacá, Colombia. El número de profesores participantes es treinta. En específico, el criterio de selección de estos profesores corresponde únicamente a que se desempeñaran en el nivel educativo y el lugar geográfico especificados, además de que aceptaran su participación a través de un acuerdo de confidencialidad.

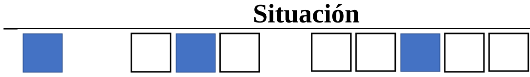
La técnica de estudio empleada es el análisis mediante categorías preestablecidas, entendidas como la toma de elementos de interés para una postura teórica, en este caso las facetas del conocimiento didáctico-matemático del CDM, para analizar de manera deductiva la información que se obtiene de los sujetos observados.

Para este análisis deductivo lo que se realiza es una codificación abierta de los datos, buscando rasgos de cada categoría en las expresiones de los profesores. Luego, se toma la codificación abierta y se sistematiza en lo que se conoce como codificación axial, es decir, se identifican todos los códigos que pertenecen a la misma categoría y se observan sus relaciones. Finalmente, se toman los resultados de las codificaciones para analizar las relaciones entre las diferentes categorías, esto se conoce como codificación selectiva (BONILLA; LÓPEZ, 2016).

3. Análisis y Resultados

Mediante un cuestionario se propuso a los profesores participantes resolver una situación en la que emergen los procesos de particularización y generalización. A continuación, se presenta la situación, las soluciones de los profesores y una descripción de ellas en relación con las categorías de análisis. La situación propuesta y los interrogantes que se formularon en ella se relacionan con las categorías del conocimiento didáctico-matemático que se presentan en el Cuadro 5.

Cuadro 5 - Relación entre situación y categorías de análisis.

Situación	Preguntas y facetas que se aborda
 **Figura 1 Figura 2 Figura 3** Un profesor pidió a sus alumnos que continuaran la secuencia anterior hasta: a) La quinta figura. b) La séptima figura. Utilizando la secuencia hasta la séptima figura: c) ¿Cuántos cuadrados azules hay en cada figura? d) ¿Cuántos cuadrados blancos hay a la derecha del cuadro azul en cada figura? e) ¿Cuántos cuadrados blancos hay a la izquierda del cuadro azul en cada figura? f) ¿Cuántos cuadrados blancos hay en total en cada figura? g) ¿Cuántos cuadrados hay en total en cada figura? A continuación, les solicitó decir cuántos cuadrados en total habrá en la figura: h) 32. i) 500. j) expresa en palabras: cómo se puede calcular el número total de cuadrados en cualquier figura.	**Faceta epistémica:** 1) Resuelva el problema planteado por el profesor. Explique su respuesta. (Conocimiento común). 2) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta? (Conocimiento especializado). 6) ¿Con cuáles conceptos previos y más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema? (Conocimiento avanzado). **Facetas cognitiva y afectiva:** 3) Describa las posibles dificultades que pueden llevar a los alumnos a responder de manera errónea. **Faceta mediacional e interaccional:** 4) ¿Qué estrategias utilizaría usted como profesor para orientar a aquellos alumnos que no logran resolver el problema? Explique en detalle su respuesta. **Faceta ecológica:** 5) ¿Para cuál o cuáles cursos considera usted pertinente este problema, de acuerdo con el currículo actual?

Fuente: Elaboración propia.

Las respuestas otorgadas por los profesores se clasifican por tipologías y se presentan ejemplos de ellas, destacando lo que estas revelan del conocimiento de los profesores respecto a los elementos abordados en cada faceta.

3.1 Faceta epistémica

En el caso de las respuestas a los interrogantes abordados en esta faceta se encontraron dos categorías (Cuadro 6), las cuales se derivan de la forma en que se dio solución a la pregunta 1 pues allí se encontraron marcadas diferencias. En el tipo A se agruparon las soluciones dadas por el 40% de los profesores quienes abordaron de forma adecuada la particularización en casos perceptibles (preguntas a-g de la situación 1); sin embargo, no lograron expresar soluciones a los interrogantes de particularizaciones no perceptibles (h-i), ni tampoco acertaron en la pregunta correspondiente a la generalización (j). La razón de por qué no otorgaron estas respuestas se evidencia en argumentos como "debe sumar dos a la figura anterior", en donde se revela que identificaron un aspecto de variación, pero al no ser generalizado no logran dar respuesta a casos particulares en los que no es posible realizar la construcción de las figuras.

Cuadro 6 - Ejemplo de respuestas en faceta epistémica.

Tipo	Pregunta	Respuesta
A	1	a) Quinta figura  b) La séptima figura.  c) En todas las figuras hay 1 cuadrado azul d) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 e) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 f) F1= 0 F2= 2 F3= 4 F4= 6 F5= 8 F6= 10 F7= 12 g) F1=1 F2= 3 F3= 5 F4= 7 F5= 9 F6= 11 F7= 13 h) No responde. i) No responde. k) Para calcular el número total de cuadrados de cualquier figura se debe sumar el número con el número anterior.
	2	Identifica patrones en secuencias aditivas o multiplicativas y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas. Secuencias con patrón de suma. Ecuaciones.
	3	Planteamiento de Ecuaciones.
B	1	a) Quinta figura  b) La séptima figura.  c) En todas las figuras hay 1 cuadrado azul d) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 e) F1= 0 F2= 1 F3= 2 F4= 3 F5= 4 F6= 5 F7= 6 f) F1= 0 F2= 2 F3= 4 F4= 6 F5= 8 F6= 10 F7= 12 g) F1=1 F2= 3 F3= 5 F4= 7 F5= 9 F6= 11 F7= 13 h) X= 63 i) X= 999 j) Para calcular el número total de cuadrados se debe recurrir al uso de una regla general.
	2	Patrón, secuencia, ecuación, formas geométricas y figuras, simbología matemática, lenguaje matemático, operaciones básicas.
	3	Secuencia, patrón, formas geométricas y figuras.

Fuente: Transcripción propia de respuestas de profesores participantes.

En el tipo B se encontraron un 60% de los profesores los cuales respondieron todas las preguntas de carácter numérico de forma correcta, sin embargo, no expresaron la forma en que se pueden establecer dichos cálculos en la pregunta j; es decir, identificaron la generalización inmersa en la situación, pero no llegaron a comprender la naturaleza de ella.

En cuanto a la identificación de procesos y propiedades presentes, todos profesores enfocaron sus respuestas a la presencia de secuencias, operaciones básicas como la adición y sustracción, el reconocimiento de figuras y las ecuaciones. Es decir, cada uno de ellos contempló una cantidad limitada de objetos matemáticos y dicha limitación se ratifica con la solución del interrogante 6, pues allí ninguno de los docentes conecta la situación con una gama amplia de objetos que están ligados al pensamiento algebraico.

3.2 Facetas cognitiva y afectiva

En la exploración de las facetas cognitiva y afectiva se esperaba el reconocimiento de obstáculos, errores, dificultades y demás, que fueran propias del razonamiento algebraico como no observar elementos variantes e invariantes, no pasar del ámbito de lo particular a lo general. Además, se esperaba expresiones referentes a la dimensión afectiva como la desmotivación, frustración, ansiedad, miedo o cualquier otra emoción negativa asociada a la necesidad.

Al reunir las respuestas de los profesores se encuentra que todos hicieron alusión a que la principal dificultad para resolver la situación estaría en que los estudiantes no podrían comprenderla e interpretarla, acompañando este aspecto con la falta de dominio de objetos matemáticos necesarios para resolver las preguntas, señalando a la adición, sustracción, multiplicación, sucesor y antecesor de un número como objetos que representan dificultad.

Cuadro 7 - Ejemplo de respuestas en las facetas cognitiva y afectiva.

Respuesta
Una de las principales dificultades que se les puede presentar a los estudiantes es la comprensión del problema, también la ubicación de los cuadrados dependiendo del número de cuadrados y la figura que pidan y/o no conocer el antecesor de un número.
Se pueden presentar dificultades de reconocimiento selectivo (visualización), para interpretación la información y consolidar el patrón de secuencia. Dificultad para abordar el problema (análisis). Dificultad para determinar el proceso (formulación de la operación/operaciones).
Falta de análisis e interpretación. No saber plantear ecuaciones. No desarrollar correctamente operaciones básicas (adición y sustracción). No saber las tablas de multiplicar.

Fuente: Transcripción propia de respuestas de profesores participantes.

Un aspecto que destaca significativamente es que todas estas respuestas hacen alusión al aspecto cognitivo, pero ninguna de ellas incluye aspectos afectivos. Además, todas las respuestas dadas por los profesores hacen alusión al estudiante como único responsable de las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje.

3.3 Facetas mediacional e interaccional

El interrogante asociado a estas facetas buscaba que los docentes hicieran explícitos elementos relacionados con la forma en que consideran la relación entre los estudiantes, profesor y los procesos de generalización y particularización. Ante lo planteado se generaron dos tipologías de soluciones las cuales se presentan en el Cuadro 8.

En el tipo A, donde se ubicó los aportes del 80% de los profesores, se encuentran respuestas relacionadas con la atención de las dificultades que emergen en un proceso de aprendizaje a partir de la mediación, específicamente de la acción del profesor a través de nuevos ejemplos en los que la "dificultad" sea menor, como por ejemplo con secuencias numéricas sencillas. En el tipo B el 20% de los profesores dieron soluciones asociadas a la interacción, planteando acciones de comunicación y gestión de las interpretaciones de los estudiantes al trabajo con secuencias numéricas.

Cuadro 8 - Ejemplo de respuestas en facetas mediacional e interaccional.

Profesor	**Respuesta**
Tipo A	Ubicación de números en la recta numérica. Explicación del procedimiento para efectuar adiciones. Explicar secuencias más sencillas (con figuras geométricas, colores, números).
Tipo B	Partiendo de una presentación de secuencias numéricas sencillas que permitan a los estudiantes interpretar y distinguir las características y patrones; por ejemplo, si son de aumento o disminución. Permitir la participación de los estudiantes desde su visualización de la situación y confrontar su saber mediante preguntas para llevarlos a desequilibrar su saber o consolidarlo paso a paso. La intención es lograr la visualización del problema despejando la información necesaria y la distractora del problema para tomar los datos válidos y necesarios. Determinar con los estudiantes los posibles patrones y poniéndolos a prueba para descartar el uso inadecuado de los procesos matemáticos.

Fuente: Transcripción propia de respuestas de profesores participantes.

Un contraste importante que sobresale en estas facetas es que los docentes asumen la responsabilidad de abordar las dificultades, esto a pesar de que en la faceta cognitiva indicaron que la emergencia de estas tiene origen en el estudiante y ninguna en las acciones de los docentes. Adicionalmente, a pesar de que previamente indicaron que las dificultades radicaban en objetos matemáticos mal comprendidos en procesos de aprendizaje anteriores, ninguno de ellos consideró acciones enfocadas a la gestión de los conocimientos previos.

3.4 Faceta ecológica

En búsqueda de determinar la manera en que relacionan los profesores la presencia de los procesos de generalización y particularización en las directrices curriculares colombianas, se planteó un interrogante cuya respuesta esperada era que la situación propuesta es posible trabajarla en cualquier nivel a partir de grado tercero de educación básica primaria.

Los profesores participantes indicaron tres soluciones distintas, el 10% señaló que la situación podría proponerse en grado quinto de básica primaria, un 20% expresó que en grado sexto y el 70% restante identificó al grado octavo, en ambos casos de la educación básica secundaria. Estas respuestas indican dos aspectos llamativos, el primero de ellos, que ningún profesor recurrió a las directrices nacionales para identificar el grado en que se indica el inicio de trabajo con situaciones como la propuesta; el segundo aspecto, es que ningún profesor consideró la posibilidad de trabajar este tipo de problemas en múltiples grados.

3.5 Clasificación del conocimiento

Con la descripción de las respuestas otorgadas por los profesores, se hace posible la clasificación del conocimiento de cada uno de ellos respecto a los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. Esta valoración se presenta mediante una clasificación de nivel nulo (0), nivel bajo (1), nivel medio (2), nivel alto (3) y nivel avanzado (4) de cada uno de los indicadores de las seis facetas propuestas por CDM.

Para iniciar, de la valoración de los indicadores propios de la faceta epistémica se encuentra que un 60% de los profesores expresan un conocimiento común alto, considerando que lograron solucionar la mayoría de los aspectos de las situaciones planteadas. El 40% restante evidenciaron rasgos de un conocimiento común de nivel medio, dado que, solo abordaron las situaciones en el ámbito de lo particular.

Respecto al conocimiento especializado, el mismo 60% mostraron un nivel alto al dar explicaciones de la forma en que pasaron de lo particular a lo general en la solución de las situaciones, no obstante, no lograron otorgar diferentes formas de solucionar el problema, ni identificaron una gama amplia de los objetos matemáticos presentes en ellas. El otro 40% de los profesor se ubican en conocimiento especializado bajo, ya que sus soluciones carecen de justificaciones, explicaciones, diversidad de formas de solución y representación, además de que no expresaron una variedad considerable de objetos matemáticos asociados a cada situación.

Para cerrar esta faceta, en el conocimiento ampliado todos los profesores se ubican en el nivel bajo, dado que, ninguno de ellos logró pasar de la identificación de objetos presentes en la solución de las preguntas, a la conexión con otros objetos propuestos por el currículo. Además, en las explicaciones de situaciones con las cuales asociaban el problema planteado, omitieron por completo expresiones alusivas a planteamientos que incorporaran elementos del proceso de generalización.

En cuanto a la valoración de las facetas cognitiva y afectiva, el conocimiento de los profesores se clasificó en un nivel bajo, siendo la mayor dificultad que experimentan, el describir con precisión el tipo de actividad cognitiva que desarrollan los estudiantes. En este caso, no logran identificar cómo se desarrollan los procesos de particularización y generalización, así como las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en su actividad matemática. Además, en las respuestas de los profesores se identificó total omisión de factores afectivos y de estrategias para involucrar a los estudiantes en la situación propuesta.

En las facetas mediacional e interaccional un 80% de los profesores tienen una clasificación de conocimiento bajo, esto debido a que ninguno de ellos logró describir cómo harían uso de las situaciones para solucionar las dificultades que de ellas emergen, es decir, lograron identificar otro tipo de situaciones que podrían vincular para ayudar a los estudiantes en su comprensión, más no identificaron los elementos de la generalización y particularización que hay en cada situación y cómo ellos permiten una gestión didáctica de lo que ocurre en el aula. En cuanto al 20% adicional, alcanza un nivel intermedio pues lograron mayor detalle de cómo utilizarían la actividad de los estudiantes en la solución de los problemas para, a través de ello, avanzar en la superación de dificultades y obstáculos; sin embargo, no lograron precisión respecto a factores como la naturaleza de las interacciones en sus estrategias, ni la gestión de recursos temporales y materiales.

Finalmente, en la faceta ecológica la valoración de todos los profesores es de un nivel de conocimiento bajo, pues intentaron identificar un grado en el que podrían aplicar las situaciones, más no lograron dar explicaciones de por qué sería adecuado en dichos grados, ni tampoco lograron establecer temas, objetos, grados o conexiones con aspectos tanto del contexto intra como del extra-matemático, para poder ubicar curricularmente este tipo de problemas de generalización y particularización.

4. Consideraciones finales

Para iniciar, en la faceta epistémica se encuentra como aspectos de relevancias que las dificultades identificadas en el conocimiento de los profesores tienen origen en la falta del hábito de justificar y argumentar su propia actividad matemática, esto revela la necesidad que existe de incorporar en los programas de formación docente espacios de reflexión sobre las prácticas docentes, pues a través de ello se adquiere la capacidad de describir con profundidad la labor docente (LLINARES; FERNÁNDEZ, 2021; BUFORN et al., 2022).

Otro aspecto encontrado fue la falta de competencia para proponer diversas soluciones a un problema. Esto ocurre, según Clemente y Llinares (2015), debido a que en los profesores predominan estructuras cognitivas que son independientes del tipo de problema y por ende se da preferencia al desarrollo de esas formas cognitivas en la actividad del estudiante; razón por la cual, más allá de que la naturaleza de los problemas ofrece múltiples formas de pasar de la particularización a la generalización, los profesores los acomodan a la forma de solución en la que predomina su estructura cognitiva y omiten otras posibilidades. En particular, en los profesores prevalece la estructura cognitiva algebraica y por ende no consideran otras formas de abordar los problemas como, por ejemplo, el razonamiento deductivo o inductivo (BURGOS; GODINO, 2022).

Ahora, en las facetas cognitiva y afectiva se encontró que las dificultades que emergen con la generalización y la particularización son atribuidas por los profesor a los estudiantes y su falta de comprensión, más no vinculan al docente en la emergencia de ellas. Esto revela, que al considerar que los estudiantes no pueden comprender problemas de generalización, el profesor hace explícito una creencia sobre el aprendizaje de la matemática, y es que dicho proceso no es posible de lograr en todos los estudiantes a través de la resolución de problemas, sino que es el docente quien debe ofrecer el conocimiento, este tipo de creencias son de fuerte arraigo en muchos docentes (BOHÓRQUEZ; D'AMORE, 2019) y consolidan un obstáculo en la ampliación de conocimiento.

Ahora, en cuanto por qué ninguno profesor llegó al nivel avanzado en esta faceta, se encuentra que en los profesores está fuertemente establecido que la generalización es un proceso matemático de naturaleza estrictamente simbólica. Todos los profesores de manera explícita o implícita consideraron que el objetivo de proponer situaciones de generalización o particularización es alcanzar expresiones algébricas, pero ninguno reflexionó sobre aquella forma de pensar que se desarrolla en los estudiantes con este tipo de actividades; es decir, omitieron por completo que la generalización también tiene una naturaleza factual y contextual que permite a los estudiantes desarrollar desde edades tempranas el pensamiento algebraico (RADFORD, 2010), para llegar en momentos más avanzados de su formación a la generalización simbólica.

Por otra parte, las facetas mediacional e interaccional, se encontraron rasgos del efecto Topaze identificado por Brousseau (1986), debido a que en los profesores existe la fuerte creencia de que la forma de mediar y relacionarse con los estudiantes ante una dificultad en el proceso de aprendizaje es disminuyendo la dificultad de la situación que se trabaja, por esta razón la propuesta de acciones de los profesores se centró en cambiar las situaciones por situaciones de generalización más sencillas, pero ninguno de ellos manifestó hacer uso de los elementos propios de la particularización y la generalización que eran los procesos matemáticos que estaba desarrollando el estudiante y de los que se necesitaba gestión por parte de ellos.

Como lo explica D'Amore et al. (2010), este fenómeno no es evidente para el profesor y para que él sea consciente de la forma en que esto afecta el aprendizaje de los estudiantes se requiere de un proceso extenso de análisis y reflexión de diversas situaciones de aprendizaje, por esta razón se encuentra como factor importante a considerar en el diseño de programas de formación docente el análisis y reflexión sobre el papel de la mediación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Finalmente, en la exploración de la faceta ecológica, se encontraron falencias respecto a los niveles escolares a los que se atribuye la presencia de situaciones propias del razonamiento algebraico, esto posiblemente ocurrió debido a lo que Kieran et al. (2016) proponen como un miedo instaurado en el docente respecto a la naturaleza del pensamiento algebraico, pues existe una creencia fuertemente establecida en muchos profesores, respecto a que el álgebra es una forma de pensamiento avanzado que se escapa del razonamiento en edades tempranas.

Referencias

BAENA, G. **Metodología de la investigación**. Ciudad de México: Grupo editorial patria. 2017.

BALL, D. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 51, n. 1, 241-247. 2000. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

BALL, D. **What are teachers learning?** Philadelphia: National Council of Supervisors of Mathematics. 2004.

BERNAL, C. **Metodología de la investigación. Para administración, economía, humanidades y ciencias sociales**. Ciudad de México: Pearson Educación. 2006.

BOHÓRQUEZ, L.; D'AMORE, B. Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. **Avances de investigación en educación matemática**, Alicante, v. 13, n. 1, p. 85-103, 2019. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.228

BONILLA, M.; LÓPEZ, A. Ejemplificación del proceso metodológico de la teoría fundamentada. **Cinta moebio**, Santiago de Chile, v. 57, n. 1, p. 305-315. 2016. DOI: https://doi.org/10.4067/S0717-554X2016000300006

BROUSSEAU, G. Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. **Recherches en didactique des mathematiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Inicio al estudio de la teoría de situaciones didácticas**. Buenos aires: Libros del zorzal. 2007.

BROUSSEAU, N.; WARFIELD, V.; BROUSSEAU, G. **Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment**. Dordrecht: Springer. 2012.

BUFORN, À.; LLINARES, S.; FERNÁNDEZ, C.; COLES, A.; BROWN, L. Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taipei, v. 53, n. 2, p. 425-443, 2022. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

BURGOS, M.; GODINO, J. Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taipei, v. 20, n. 1, p. 367-389, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

CAMACHO, M.; SANTOS, L. Aportes sobre la resolución de problemas, tecnología y formación de profesores de matemáticas. In PLANAS, N. (Coord.), **Avances y realidades de la educación matemática**, p. 113-130. Barcelona: Graó. 2015.

CARPES, G.; BISOGNIN, E. A Formação Continuada de Professores na perspectiva dos Conhecimentos Didáticos Matemáticos. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, n. 1, p. 1-23, 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202111

CASTRO, W.; PINO-FAN, L.; VELÁSQUEZ, H. El conocimiento didáctico-matemático: una propuesta de evaluación de tres de sus facetas. **Revista científica**, Bogotá, v. 2, n. 1, p. 461-465, 2013. DOI: https://doi.org/10.14483/23448350.6561

CLEMENTE, F.; LLINARES, S. Pre-service primary teachers' ways of discourse and configural reasoning in solving geometrical problems. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 33, n. 1, p. 9-27, 2015. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

D'AMORE, B. La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**, p. 43-64. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2017.

D'AMORE, B.; FANDIÑO, M. I.; MARAZZANI, I.; SARRAZY, B. **Didattica della matematica Alcuni Effetti del «contrato»**. Bologna: Archetipolibri. 2010.

DÖRFLER, W. Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop, A.; Mellin, S.; Dormolen, J. (Eds.), **Mathematical knowledge: Its growth through teaching**, p. 63-85. Dordrecht: Kluwer academic publishers. 1991.

ELLIS, A. A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. **Journal of the Learning Sciences**, London, v. 16, n. 2, p. 221–262, 2007. DOI: https://doi.org/10.1080/10508400701193705

FELMER, P.; LILJEDAHL, P.; KOICHU, B. **Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development**. Switzerland: Springer. 2019.

FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives**. Switzerland: Springer. 2016.

FONT, V.; CONTRERAS, A. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, n. 1, p. 33-52. 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

FONT, V.; RUBIO, N. Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. **La matematica e la sua didattica**, Bologna, v. 24, n. 1-2, p. 97-123, 2016.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Andújar, v. 5, n. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J. D. Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. **Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)**, Maracaibo, v. 2, n. 2, p. 1-24, 2022. DOI: https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25

GODINO, J. D.; BATANERO, C; FONT, V. El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. **Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaíso, v. 12, n. 2, p. 3-15, 2020.

GODINO, J.; BATANERO, C.; BURGOS, M.; GEA, M. Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, n. 1, p. 1-30, 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202107

GROSSMAN, P. **The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education**. New York and London: Teachers College Press. 1990.

KANT, I. **Logic**. Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company. 1974. (Original Publicado en 1800).

KIERAN, C.; PANG, J.; SCHIFTER, D.; FONG, S. **Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching**. Hamburg: Springer. 2016.

KRANTZ, S. **An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving**. Saint Louis: American Mathematical Society. 2006.

LILJEDAHL, P. Conditions for Supporting Problem Solving: Vertical Non-permanent Surfaces. In LILJEDAHL, P.; SANTOS, M. (Eds.), **Mathematical Problem Solving**, p. 289-310. Hamburg: Springer. 2019.

LILJEDAHL, P.; SANTOS, L. **Mathematical Problem Solving**. Hamburg: Springer. 2019.

LLINARES, S.; FERNÁNDEZ, C. Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. **Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española**, Madrid, v. 24, n.1, p. 185-205, 2021.

MACIEJEWSKI, W. Future-Oriented Thinking and Activity in Mathematical Problem Solving. In LILJEDAHL, P.; SANTOS, M. (Eds.), **Mathematical Problem Solving**, p. 21-40. Hamburg: Springer. 2019.

MALASPINA, U.; TORRES, C.; RUBIO, N. How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. In LILJEDAHL, P.; SANTOS, M. (Eds.), **Mathematical Problem Solving**, p. 133-154. Hamburg: Springer. 2019.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.), **Approaches to algebra perspectives for research and teaching**, p. 65-86. Dordrecht: Kluwer academic publishers. 1996.

MASON, J. When is a problem…? "When" is actually the problem! In FELMER, P; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.), **Posing and solving mathematical problems**, p. 263–283. Switzerland: Springer. 2016.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking mathematically**. London: Pearson Prentice Hall. 1982.

PERKINS, D. **Archimedes' bathtub: The art of breakthrough thinking**. Nueva York: W.W. Norton and Company. 2000.

PINO, L.; CASTRO, W.; FONT, V. A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taipei, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6.

PINO, L.; FONT, V; GODINO, J. **El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: Pautas y criterios para su evaluación y desarrollo**. Granada: Universidad de Granada. 2014.

POINCARÉ, H. Mathematical creation. **The Monist**, Oxford, v. 20, n. 3, p. 321-335, 1910. DOI: https://doi.org/10.5840/monist19102037

POLYA, G. **How to solve it**. Nueva Jersey: Princeton University Press. 1945.

POPKEWITZ, T. The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. **American Educational Research Journal**, Washington, v. 41, n. 1, p. 3-34, 2004. DOI: https://doi.org/10.3102/00028312041001003

RADFORD, L. How to look at the general through the particular: Berkeley and Kant on symbolizing mathematical generality. In SBARAGLI, S. (Ed.), **La matematica e la sua didattica: vent'anni di impegno**, p. 245-248. Roma: Carocci. 2006.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, 2010.

RADFORD, L. Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. **PNA**, Granada, v. 9, n. 3, p. 129-141, 2015.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**, p. 137-161. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2017.

RADFORD, L. On theories in mathematics education and their conceptual differences. In SIRAKOV, B.; DE SOUZA, P.; VIANA, M. (Eds.), **Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. 4**, p. 4055-4074. Singapore: World Scientific Publishing Co. 2018.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Switzerland, v. 8, n. 3, 255-281, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

SANTOS, L. M. Problem-solving in mathematics education. In LERMAN, S. (Ed.), **Encyclopedia of mathematics education**, p. 686-693. Dordrecht: Springer. 2020.

SCHOENFELD, A. Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In LESTER, F.; GAROFALO, J. (Eds.), **Mathematical problem solving: Issues in research**, p. 27–37. Pennsylvania: Franklin Institute Press. 1982.

SCHOENFELD, A. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academic Press. 1985.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In WOOD, T.; TIROSH, D. (Eds.), **International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education**, p. 321-354. Leiden: Sense Publishers. 2008.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington D. C., v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. DOI: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

SHULMAN, L. Knowledge, and teaching: Foundations of the new reform. **Educational Review**, London, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987. DOI: https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

STEINBRING, H. What makes a sign a mathematical sign? – an epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v. 61, n. 1. p. 133-162, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

TORRES, C. (2020). Developing teachers' didactic analysis competence by means of a problem-posing strategy and the quality of posed mathematical problems. In VILLALBA-CONDORI, K.; ADÚRIZ-BRAVO, A.; GARCÍA-PEÑALVO, F. LAVONEN, J.; WONG, L.; WANG, T. (Eds.). **Education and Technology in Sciences. First International Congress, CISETC 2019 Arequipa, Peru**, **Revised Selected Papers**, p. 88-100. Cham: Springer. 2019.

TORREGROSA, G.; CALLEJO, M. Procesos matemáticos en la educación secundaria. In GOÑI, J. (Coord.), **Matemáticas, complementos de formación disciplinar**, p. 29-55. Barcelona: Graó. 2011.

TORRES, R.; BLÁSQUEZ, L.; LÓPEZ, I. **Guía para la investigación cualitativa: etnografía, estudio de caso e historia de vida**. Bogotá: Casa abierta el tiempo. 2016.

ZALAMEA, F. Creativity Between Experience and Cosmos: CS Peirce and AN Whitehead on Novelty. Transactions of the Charles S. **Peirce Society**, Bloomington, v. 56, n. 4, p. 631-634, 2020. DOI: https://doi.org/10.2979/trancharpeirsoc.56.4.08

Autores

Cristian Camilo Fúneme Mateus
Licenciado en matemáticas y Magister en educación matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Magister en Ciencias-Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Actualmente profesor de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
Correo electrónico: cristian.funeme@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-9158-427X

Leidy Julieth Linares Beltrán
Licenciada en educación básica de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Especialista en informática y multimedia en Educación de la Universidad Los libertadores. Magister en didáctica de la matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Actualmente profesora del Colegio Distrital el Porvenir de Bogotá, Colombia.
Correo electrónico: leidy.linares@uptc.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-8220-9814

Leidy Milena Cáceres Carreño
Licenciada en educación básica, Especialista en Didáctica de la matemática y Magister en didáctica de la matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Actualmente profesora de la Institución Educativa Paz y Libertad del municipio San Mateo, Colombia.
Correo electrónico: leidymilena.caceres@uptc.edu.co
https://orcid.org/0009-0001-9591-5566

Como citar o artigo:

FÚNEME, C. C.; LINARES, L. J.; CÁCERES, L. M. Conocimiento didáctico-matemático de profesores colombianos sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 194 - 220 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p194-220.id1394

Diseño de un curso de formación que articula los Criterios de Idoneidad Didáctica y el Estudio de Clases como herramienta para desarrollar la reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas

Viviane Hummes
vhummes@ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-2031-8238
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España.

María José Seckel
mseckel@ucsc.cl
https://orcid.org/0000-0001-7960-746X
Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC)
Concepción, Chile.

Rodrigo Sychocki da Silva
sychocki.rodrigo@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7406-2517
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar el diseño de un curso que articula los Criterios de Idoneidad Didáctica y el Estudio de Clases, como una herramienta para desarrollar la reflexión sobre la práctica docente en un grupo de profesores de matemáticas en ejercicio en el sur de Brasil. Para llegar al diseño del curso, en primer lugar, se consideraron los resultados de estudios anteriores que analizaron artículos sobre cursos de formación que usan los Criterios de Idoneidad Didáctica y documentos y videos de experiencias de Estudio de Clases. En segundo lugar, se tomaron en cuenta los hallazgos de una experiencia realizada en un curso piloto implementado en el sur de Brasil. Como resultado, la estructura final del curso fue: 1) presentar a los participantes la dinámica y el cronograma del curso; 2) realización de un ciclo completo de Estudio de Clases; 3) enseñanza de los Criterios de Idoneidad Didáctica a los participantes; 4) reanálisis de una clase implementada usando la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica. Se concluye que el curso diseñado presenta algunas limitaciones, una vez que el curso no se implementó exactamente de acuerdo con la estructura original diseñada. Algunos factores fueron determinantes para ciertas alteraciones significativas: cambio de la modalidad del curso (de presencial para virtual); el número de profesores participantes; y el horario y las actividades previstas para el curso.

Palabras clave: Formación de profesores. Reflexión sobre la práctica. Criterios de Idoneidad Didáctica. Estudio de Clases.

Desenho de um curso de formação que articula os Critérios de Adequação Didática e o Estudo de Aula como ferramenta para desenvolver a reflexão sobre a prática de professores de matemática

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o desenho de um curso que articula os Critérios de Adequação Didática e o Estudo de Aula, como ferramenta para desenvolver a reflexão sobre a prática docente em um grupo de professores de matemática em exercício no sul do Brasil. Para chegar ao desenho do curso, em primeiro lugar, foram considerados os resultados de estudos anteriores que analisaram artigos sobre cursos de formação que utilizam os Critérios de Adequação Didática e documentos e vídeos de experiências de Estudo de Aula. Em segundo lugar, foram considerados os resultados de uma experiência realizada em um curso piloto implementado no sul do Brasil. Como resultado, a estrutura final do curso foi: 1) apresentar aos participantes a dinâmica e cronograma do curso; 2) realização de um ciclo completo de Estudo de Aula; 3) ensinar os Critérios de Adequação Didática aos participantes; 4) reanálise de uma aula implementada com a ferramenta Critérios de Adequação Didática. Conclui-se que o curso apresenta algumas limitações, uma vez que seu planejamento não foi implementado exatamente de acordo com a estrutura originalmente desenhada. Alguns fatores foram determinantes para algumas alterações significativas: mudança na modalidade do curso (de presencial para virtual); o número de professores participantes; e o cronograma e atividades previstas para o curso.
Palavras chave: Formação de professores. Reflexão sobre a prática. Critérios de Adequação Didática. Estudo de Aula.

Design of a training course that articulates the Didactical Suitability Criteria and the Lesson Study as a tool to develop reflection on the practice of mathematics teachers

Abstract

The objective of this work is to present the design of a course that articulates the Didactical Suitability Criteria and the Lesson Study, as a tool to develop reflection on teaching practice in a group of practicing mathematics teachers in southern Brazil. To arrive at the design of the course, first of all, the results of previous studies that analyzed articles on training courses that use the Didactical Suitability Criteria and documents and videos of Lesson Study experiences were considered. Secondly, the findings of an experience carried out in a pilot course implemented in southern Brazil were considered. As a result, the final structure of the course was: 1) present to the participants the dynamics and schedule of the course; 2) completion of a complete cycle of Lesson Study; 3) teaching the Didactic Suitability Criteria to the participants; 4) reanalysis of a class implemented using the Didactic Suitability Criteria tool. It is concluded that the designed course presents some limitations, since the course was not implemented exactly according to the original designed structure. Some factors were determinant for certain significant alterations: change in the modality of the course (from face-to-face to virtual); the number of participating teachers; and the schedule and activities planned for the course.
Keywords: Teacher training. Reflection on practice. Didactical Suitability Criteria. Lesson Study.

Introducción

Diferentes enfoques teóricos y metodológicos en la formación docente sugieren el trabajo colaborativo y la reflexión sobre la práctica docente como componentes clave para el desarrollo profesional y la mejora educativa. En ese sentido, la Didáctica de las Matemáticas ofrece marcos conceptuales relacionados con la mejora de la capacidad reflexiva sobre la práctica de los profesores. Entre ellos, se destacan los Criterios de Idoneidad Didáctica (GODINO; BATANERO; FONT, 2019), propuestos por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS desde ahora), y el Estudio de Clases (HUANG; TAKAHASHI; PONTE, 2019) una metodología, con origen en Japón, para investigar y reflexionar colaborativamente sobre la práctica docente en el aula.

El EOS nos proporciona los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID de ahora en adelante) y su desglose en componentes e indicadores como una herramienta para guiar la reflexión docente. Desde esta perspectiva, estos criterios pueden ser utilizados para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y evaluar su implementación (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017).

En los últimos años, se han desarrollado varios cursos de formación para enseñar los CID como un medio para organizar la reflexión sobre la práctica profesional docente en cursos de pregrado (SECKEL; FONT, 2020) y postgrado (GIACOMONE; GODINO; BELTRÁN-PELLICER, 2018; GODINO et al., 2018; MORALES-MAURE et al., 2019).

Por otra parte, el Estudio de Clases (EC de ahora en adelante) (ISODA et al., 2007) se refiere a una actividad de investigación realizada en el aula (BURGES; ROBINSON, 2010; PONTE et al., 2012), que brinda una oportunidad para el desarrollo de la reflexión a medida que se lleva a cabo la actividad docente. Se trata de una estrategia de desarrollo profesional docente que se utiliza para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En Brasil, contexto de esta investigación, en los últimos años se han desarrollado investigaciones que analizaron la contribución del EC a la formación de docentes brasileiros (ARAÚJO, 2018; BEZARRA, 2017; UTIMURA, 2015). Mas allá de eso, Richit, da Ponte y Tomkelski (2019) y Richit y Tomelski (2020) identificaron los desafíos y adaptaciones del proceso de formación y su potencial para facilitar el aprendizaje y desarrollo profesional de profesores de matemáticas en contextos de EC. Sin embargo, todavía es necesario investigar en mayor prorfundidad cuáles son los criterios que guían un ciclo de EC para generar buenos procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas y el papel que juega la reflexión docente en la generación de estos criterios.

En esta perspectiva, este estudio es parte de una investigación más amplia (HUMMES, 2022) que tenía el propósito de analizar de qué forma un curso de formación que articula los CID y el EC promueve el desarrollo de la reflexión en profesores de matemáticas en ejercicio en el sur de Brasil. En particular, el objetivo de este trabajo es presentar el diseño del curso de formación que se llevó a cabo para alcanzar el objetivo general propuesto en la investigación más extensa.

A continuación, la segunda sección de este trabajo presenta los referentes teóricos utilizados: CID y EC. En el tercer apartado, se explica la metodología utilizada. Los resultados se presentan en la cuarta sección y, finalmente, se concluye con los hallazgos, algunas reflexiones sobre el estudio (quinta sección).

1. Marco teórico

Criterios de Idoneidad Didáctica y Estudio de Clases son los enfoques teóricos que se presentan en esta sección, junto con una breve revisión de la literatura relacionada.

1.1 Criterios de Idoneidad Didáctica (CID)

Los CID propuestos en el EOS, pretende ser una respuesta parcial a la siguiente pregunta: ¿qué criterios se deben utilizar para planificar una secuencia de actividades que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los estudiantes y qué cambios se deben hacer en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia?

En el EOS se consideran los siguientes CID (GODINO; BATANERO; FONT, 2019): *idoneidad epistémica*, para evaluar si las matemáticas enseñadas son "buenas matemáticas"; *idoneidad cognitiva*, para evaluar, antes de iniciar el proceso de enseñanza, si lo que quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que los estudiantes saben, y después del proceso, si el aprendizaje adquirido se aproxima a lo que se pretendía enseñar; *idoneidad interaccional*, para evaluar si las interacciones resuelven las dudas y dificultades de los estudiantes; *idoneidad de medios*, para evaluar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza; *idoneidad afectiva*, para evaluar la implicación (intereses y motivaciones) de los estudiantes durante el proceso de enseñanza; *idoneidad ecológica*, para evaluar la adecuación del proceso de enseñanza al proyecto educativo del centro educativo, las pautas curriculares y las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los CID requiere la definición de un conjunto de componentes e indicadores observables, lo que permite evaluar el grado de idoneidad de cada uno de estos criterios. En Breda et al. (2017) se establece un sistema de indicadores que sirve de guía para el análisis y evaluación de la Idoneidad Didáctica, que se destina a un proceso de enseñanza en cualquier etapa educativa y se explica cómo se generaron estos criterios y sus respectivos componentes e indicadores (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017).

Cuadro 1 - Criterios y componentes de la Idoneidad Didáctica.

Criterio de Idoneidad	**Componente**
Epistémica	(IE1) Errores; (IE2) Ambigüedades; (IE3) Riqueza de procesos; (IE4) Representatividad.
Cognitiva	(IC1) Conocimientos previos; (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales; (IC3) Aprendizaje; (IC4) Alta demanda cognitiva.
Interaccional	(II1) Interacción profesor-alumno; (II2) Interacción entre alumnos; (II3) Autonomia; (II4) Evaluación formativa.
Mediacional	(IM1) Recursos materiales; (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula; (IM3) Tiempo.
Afectiva	(IA1) Intereses y necesidades; (IA2) Actitudes; (IA3) Emociones.
Ecológica	(IEC1) Adaptación al currículum; (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares; (IEC3) Utilidad socio laboral; (IEC4) Innovación didáctica.

Fuente: Morales-López y Font (2019).

Los CID deben entenderse como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando se orienta a alcanzar un consenso o lo que se puede considerar como mejor (GODINO; BATANERO; FONT, 2019). En esta perspectiva, la Educación Matemática puede ofrecernos principios provisionales, establecidos a partir del consenso de la comunidad interesada, que pueden servir para orientar, evaluar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como se explica en Breda et al. (2018), las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas son una primera forma de observar el consenso en la comunidad de Educación Matemática, ya que pueden ser consideradas como regularidades encontradas en los discursos que versan sobre la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas – mediante el ejemplo, presentación de una matemática contextualizada; dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos; enseñanza y aprendizaje activo (constructivista); principio de equidad en la Educación Matemática Obligatoria e incorporación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TICs) (GUSMÁN, 2007). Estas nuevas corrientes cristalizaron en los currículos de diferentes países en forma de lineamientos y principios que nos indican, a priori, cómo tener una enseñanza matemática de calidad (NCTM, 2000). Además, han tenido su impacto en la orientación oficial en diferentes países. En Brasil (contexto de esta investigación), por ejemplo, las directrices curriculares de la *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) (BRASIL, 2018), proponen el uso de algunas de estas tendencias para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica, como la modelación matemática, los medios tecnológicos, la solución de problemas, etc. Por otro lado, en el área de Educación Matemática se han generado conocimientos y resultados que gozan de un amplio consenso dentro de esta comunidad (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010).

1.2 Estudio de Clases (EC)

El EC es un método de trabajo educativo que se sustenta en la investigación colaborativa y las prácticas docentes entre profesores. Al mismo tiempo que estas actividades mejoran el aprendizaje de los estudiantes, también mejoran la práctica educativa e impulsionan el crecimiento profesional de los profesores. Consiste básicamente en el diseño colaborativo y detallado de una lección (clase) de investigación, su implementación y observación directa en el aula, así como un post-análisis (FERNÁNDEZ; YOSHIDA, 2004; HART et al., 2011; LEWIS, 2002; MURATA; TAKAHASHI, 2002; WANG-IVERSON; YOSHIDA, 2005).

En un ciclo de EC, un grupo de profesores se reúne con una problemática relacionada con el aprendizaje de sus alumnos, desarrolla una lección de investigación (clase o secuencia de clases) para ayudar a los alumnos a aprender y luego estudia y discute lo que vieron durante la implementación de esa lección. Los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los estudiantes y cómo la instrucción lo afecta a través de numerosas interacciones.

Investigadores internacionales informan de la existencia de muchos modelos de ciclos de EC. Un ciclo de EC se consideran las siguientes etapas (MURATA, 2011): estudio del currículo y establecimiento de metas; planificación de la lección; implementación y observación de la lección; reflexión crítica colectiva sobre los datos recogidos; y diseño e implementación de nueva lección.

Hay varios criterios que deben tenerse en cuenta en cada etapa a medida que se desarrolla un ciclo completo de EC (HURD; LEWIS, 2011; LIM-RATNAM, 2013). En la etapa *currículo y metas*, la consulta no debe limitarse únicamente a los currículos; más bien, debe ampliarse para incluir un análisis de diversos materiales didácticos, las opiniones de profesionales conocedores de la materia, así como estudios científicos que se centren en la enseñanza del tema de la lección. Además, se recomienda grabar toda esta discusión y especificar qué conceptos los estudiantes deben haber aprendido previamente en relación con el tema que se está estudiando y qué conceptos aprenderán en clase. Estos estudios preliminares sirven de base para desarrollar los objetivos de aprendizaje que se presentan en la próxima etapa (*planificación de la clase*).

El siguiente paso, en la etapa de *planificación de la clase*, es desarrollar los objetivos específicos de la clase, en parte mediante la investigación de los materiales que se utilizarán y, en parte, mediante el desarrollo de la metodología y el enfoque de la evaluación. Debe quedar claro a lo largo de esta etapa cómo la lección planificada permitirá a los estudiantes alcanzar los objetivos generales de aprendizaje establecidos y debe anticipar las reacciones y preguntas de los estudiantes. En esta etapa, también se toman decisiones sobre la recolección de datos para la investigación que realizará el grupo docente. El docente que llevará a cabo la lección puede realizar cambios en algunos aspectos debido a circunstancias imprevistas o porque facilitan más la (construcción) de conocimientos de los estudiantes que el plan original del grupo.

Durante la etapa de *implementación y observación* un profesor instruye a la clase mientras los demás observan y registran el procedimiento. Este docente debe aceptar que otros puedan asistir a su clase. Los estudiantes participan en cada etapa de la resolución de los problemas planteados, desde la comprensión del problema hasta la formulación de estrategias y el análisis de la resolución. Es una etapa en la que se da mucho peso a las técnicas de resolución de problemas. El maestro que dirige la clase debe fomentar esta etapa guiando a los estudiantes mientras comparten sus conocimientos, analizan, comparan y contrastan sus ideas, teniendo en cuenta factores como la eficacia, la generalización y la similitud con lo que ya se ha aprendido.

En la etapa de *reflexión crítica*, una vez impartida la clase, el grupo que diseñó la lección y otros profesionales invitados que han observado su implementación se reúnen para discutir cómo esta ha afectado el aprendizaje de los alumnos. Cada observador en ese momento expresa sus impresiones sobre la producción de conocimiento de los estudiantes.

Después de la reflexión, es posible que el grupo de profesores haga ajustes para una lección posterior sobre el mismo tema. En este sentido, se debe cambiar la planificación de la clase implementada con acciones enfocadas a mejorar lo que se ha considerado importante. Esto marca el comienzo de un nuevo ciclo que incluye rediseño y reimplementación y está situado en un escalón de mayor madurez.

2. Metodología

Se trata de una investigación cualitativa que presenta el diseño de un curso de formación que articula los CID y el EC dirigido a profesores de matemáticas en ejercício.

2.1 Estudio previo para el diseño del curso

Para llegar al diseño final del curso, en primer lugar, se realizó un análisis de documentos sobre los CID y el EC con el propósito de comprender cómo cada uno de estos enfoques propone el desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente. El análisis siguió las siguientes etapas investigativas: 1) estudio sobre el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en programas de formación docente que usan los CID; 2) estudio de artículos de investigación que caracterizan el EC y análisis de experiencias de EC realizadas en diferentes contextos y disponibles en videos de libre acceso; 3) estudio comparativo donde se articuló las características que proponen cada uno de los dos enfoques (CID y EC). Por otro lado, también se analizó la experiencia realizada en un curso piloto implementado en el sur de Brasil, su viabilidad y limitaciones.

Cabe destacar que, tanto para el análisis de los artículos como en el de los videos, se utilizó la técnica de análisis de contenido (BARDIN, 2002). En el caso de la revisión de los artículos, se utilizó esa técnica para identificar las características principales de los CID y el EC y, en el caso de los videos, se utilizó para inferir criterios que orientan la práctica del profesor en las experiencias de EC, sobre todo en las etapas de diseño y de reflexión. A continuación, se presentan brevemente los resultados encontrados en los estudios realizados y en el curso piloto.

Para estudiar cómo se desarrolla la reflexión docente en cursos de formación que utilizan los CID, se seleccionaron cuatro artículos de investigación que describen experiencias de cursos de formación que enseñan los CID (FONT et al., 2017; GIACOMONE et al., 2018; MORALES-MAURE et al., 2019; SECKEL; FONT, 2020). Especialmente, se estudiaron los momentos de reflexión previos a la introducción de la enseñanza de los CID y los momentos en que los participantes hacen uso de dicha herramienta para organizar la reflexión sobre la práctica, propia o ajena.

Este estudio permitió identificar lo siguiente: 1) en la primera etapa de estos cursos, se propone a los participantes reflexionar (sin orientación previa) sobre un episodio de aula implementado por otros profesores. 2) En el discurso de los participantes se observa que utilizan implícitamente indicadores y componentes de los CID. 3) Luego que los participantes reflexionan libremente sobre procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se introduce la enseñanza de los CID a partir del consenso de los participantes. 4) Se observa que en el momento inicial de reflexión se destina poco tiempo, lo que impide que todos los participantes compartan las reflexiones sobre la clase analizada. 5) Los participantes no realizan una planificación individual o conjunta de una secuencia de actividades, lo que impide que se realice una reflexión crítica de la planificación y mucho menos de la implementación. Los resultados y conclusiones de este estudio se pueden encontrar de forma íntegra en Hummes, Breda y Font (2022).

Por otra parte, para estudiar cómo se desarrolla la reflexión sobre la práctica en experiencias de EC, se seleccionaron los trabajos de Hurd y Lewis (2011) y Lim-Ratnam (2013), dónde describen paso a paso las etapas de un ciclo de EC. Asimismo, se buscaron videos de libre acceso sobre el EC en la plataforma web *Youtube*, a partir de los siguientes criterios: 1) el importante número de visualizaciones del video y 2) que en el video se pudiese observar el proceso del EC de forma completa, es decir, dónde hay una etapa de diseño, de implementación y de reflexión de la clase. Los videos seleccionados pueden ser encontrados en <https://www.youtube.com/watch?v=VUPTkKJ8ij8&t=1165s> y <https://www.youtube.com/watch?v=e7uPuSaPQSU&t=9s>.

En relación a las experiencias de EC observadas en los videos, se reconocieron las siguientes características: 1) en las reflexiones de los grupos de profesores se observó el uso implícito de los CID al momento de planificar, implementar y reflexionar sobre una clase llevada a cabo en el marco del EC. 2) En el ciclo de EC las etapas de reflexión son bastante amplias y están orientadas a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. 3) Además de identificar el uso implícito de los CID, se observó que al desarrollar el EC emergen reflexiones que se relacionan con la mayoría de los CID, dado que los participantes enfocan su discurso en al menos uno de los componentes que caracteriza cada CID. Los resultados completos sobre el estudio de los artículos y experiencias de EC analizados están publicados en Breda, Hummes, Silva y Sánchez (2021), Hummes, Breda y Font (2022), Hummes, Breda, Sánchez y Font (2020), Hummes, Breda y Seckel (2019) y Hummes, Breda, Seckel y Font (2020).

En un tercer momento, se analizaron las complementariedades y diferencias entre los dos marcos referenciales (o enfoques) con los cuales se sustentó el diseño del curso formativo. Los hallazgos están publicados en Hummes, Breda y Font (2020) y Hummes, Breda y Font (2022). A partir del estudio de estas fuentes (artículos y videos), su análisis e interpretación, se elaboró una tabla comparativa identificando qué CID están presentes en cada una de las etapas del EC. Específicamente, los CID se utilizaron como categorías cualitativas previas para clasificar los criterios presentes en cada etapa de un ciclo de EC. En el cuadro 2, se presentan las etapas del EC, sus características y la relación de cada una de estas etapas con las herramientas de reflexión que brindan los CID.

Cuadro 2 – Relaciones entre las etapas de un ciclo EC y los CID.

Etapas del Estudio de Clase (HURD; LEWIS, 2011; LIM-RATNAM, 2013)	**Criterios de Idoneidad Didáctica** (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2018)
Elección del tema, estudio del currículo y formulación de metas ● Elegir el tema y metas basados en los tópicos del currículo vigente. ● Estudiar cómo progresa el aprendizaje del estudiante.	● Idoneidad Ecológica (adaptación al currículo). ● Idoneidad Cognitiva (conocimientos previos; adaptación curricular a las diferencias individuales).
Planificación de la Clase ● Desarrollar el raciocinio matemático. ● Hacer el estudio de los materiales. ● Definir cómo y en qué va estar enfocada la evaluación. ● Prever reacciones y dudas de los alumnos. ● Trabajar mediante la resolución de problemas.	● Idoneidad Epistémica (riqueza de procesos). ● Idoneidad de Medios (recursos materiales; condiciones del aula). ● Idoneidad Interaccional (interacción docente-discente; evaluación formativa).

• Gestionar el proceso de instrucción de manera que los alumnos sean los constructores de su conocimiento. • Tener presente la distribución del espacio de aula y el tiempo estimado de la clase.	• Idoneidad Cognitiva (aprendizaje).
Implementación y observación de la clase	
• Procurar la participación de los alumnos en cada una de las etapas de resolución de las cuestiones propuestas (comprensión del problema, establecimiento de estrategias y análisis de resolución, etc.). • Observar el proceso de resolución de problemas. • Analizar, comparar y contrastar críticamente sus ideas.	• Idoneidad Cognitiva (alta demanda cognitiva). • Idoneidad Epistémica (riqueza de procesos). • Idoneidad Emocional (actitudes y emociones).
Reflexión de la observación	
• ¿La clase generó conocimiento por parte de los alumnos? • ¿Cuáles fueron las principales dudas de los alumnos? ¿Hubo diversidad de pensamientos? • ¿El material elegido por el grupo de profesores fue adecuado?	• Idoneidad Cognitiva (aprendizaje, adaptación curricular a las diferencias individuales). • Idoneidad de Medios (recursos materiales).

Fuente: Hummes, Breda y Font (2022).

Además, con el objetivo de verificar las posibilidades y limitaciones de implementar un curso de formación que articula los CID y el EC se implementó un estudio piloto en el sur de Brasil. El curso formativo piloto buscaba mostrar cómo en las etapas de un EC aparecen implícitamente, en las reflexiones de los participantes, algunos de los componentes e indicadores de los CID. El estudio corrobora lo que se había inferido de la revisión de la literatura con respecto al uso implícito de los CID en experiencias de EC: los CID funcionan implícitamente como regularidades en el discurso de los docentes, sin que se les haya enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión.

Una limitación del estudio piloto fue la duración del curso, que se consideró corta, para poder profundizar en todas las etapas del EC y, a partir de ahí, realizar un proceso de instrucción de los CID con los docentes participantes, para que pudiesen utilizar esta herramienta en nuevos ciclos de EC. Los resultados del curso piloto están publicados en Hummes, Font, y Breda (2019).

2.2 Contexto en lo cual se tuvo en cuenta el diseño de curso

El curso fue ofertado por medio de una formación continua promovida por la *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (UFRGS), institución pública de educación superior ubicada en la ciudad de Porto Alegre, Rio Grande do Sul (RS), sur de Brasil. El público-objetivo eran profesores de matemáticas en servicio que enseñan a estudiantes brasileños en Educación Básica. El curso propuesto previa una carga de trabajo total de 40 horas, presenciales, repartidas en cuatro meses, con reuniones semanales (total de 16 reuniones de dos horas y media cada), de marzo a julio de 2020. Estaba planificado para ser presencial, sin embargo, luego de la primera sesión, se declaró la pandemia de Covid-19 en Brasil y, con la suspensión de las actividades presenciales, fue reestructurado para implementarse de manera virtual y de forma sincrónica.

Finalmente, participaron del curso, de forma voluntaria y otorgando su consentimiento informado, ocho profesores de matemáticas que ejercen su profesión en escuelas del sur de Brasil con alumnos de 11 a 18 años. En el momento del curso, todos los participantes tenían un grado de profesor de matemáticas y una experiencia docente de entre tres y quince años y, tres de ellos, también tenían una maestría en Educación Matemática. La primera autora de este trabajo fue quién impartió las sesiones del curso a los docentes participantes.

A continuación, se presenta el diseño del curso formativo, el que se fundamenta a partir de los hallazgos presentados a modo resumen en este apartado. Para eso, en el presente trabajo, se realiza una descripción del diseño propuesto y se plantean, en términos generales, los resultados obtenidos.

4. Resultados

A continuación, se presenta el diseño del curso de formación que articula los CID y el EC, cuya propuesta surge de resultados de estudios anteriores (presentados de manera resumida en el apartado de la metodología) que han permitido el diseño del curso. En base a las evidencias de los estudios anteriores, se decidió diseñar el curso considerando las siguientes experiencias que han sido valoradas positivamente en investigaciones anteriores:

- Introducir los CID a partir del consenso de los participantes.
- Enseñar los CID una vez que los participantes identifiquen su uso implícito en las reflexiones propias y/o ajenas.

Dicho esto, el curso se estructuró considerando tres fases. En la primera fase del curso, se llevaría a cabo un ciclo completo de EC. En esta fase se considerarían las etapas típicas de un EC: *estudio del currículo y metas; planificación de la clase*; *realización y observación de la clase; reflexión y rediseño colaborativo*.

Inmediatamente después de terminar los ciclos de EC, es decir, después de planificar, implementar, observar, analizar y reflexionar sobre la clase implementada, se realizaría la segunda fase del curso: el estudio de los CID.

Después de estudiar los CID, en una tercera fase, se realizaría un nuevo análisis de la clase implementada utilizando los CID como herramienta para orientar la reflexión de los profesores y llegar a una propuesta de rediseño de la clase. Es importante subrayar que habría una fase anterior a la fase 1 (que llamamos de fase 0, sesión 1) una vez que sería el momento de presentar a los participantes la dinámica y el cronograma del curso. El siguiente cuadro (Cuadro 3) resume las fases y etapas del curso.

Cuadro 3 – Fases y etapas del curso que articula los CID y el EC

Fases del curso		**Etapa 1**	**Etapa 2**	**Etapa 3**	**Etapa 4**
Fase 1	**Desarrollo del ciclo de EC**	Estudio del currículo y establecimiento de las metas (sesión 2)	Planificación de la clase (sesiones 3 y 4)	Implementación y observación de la clase	Reflexión y rediseño de la clase (sesiones 5 y 6)
Fase 2	**Enseñanza de los CID**	CID implícitos en el ciclo del EC (sesión 7)	CID epistémico (sesión 8)	CID cognitivo (sesión 9)	CID interaccional, mediacional, afectivo y ecológico (sesión 10)
Fase 3	**Uso de los CID como una herramienta de reflexión**	Nueva reflexión con los CID de la clase implementada en el EC (sesiones 11 y 12)	Rediseño con base en la reflexión con uso de los CID (sesiones 13 y 14)	Nueva implementación	Reflexión de la nueva implementación con los CID y cierre del curso (sesiones 15 y 16)

Fuente: adaptado de Hummes (2022).

El temario de las sesiones del curso se explica en detalle a continuación.

Sesión 1: Introducción al curso y al EC

Objetivos: presentar el objetivo y la programación del curso; introducir y explicar la estructura, características y ciclo de un EC.

Descripción: en un primer momento, se presenta el objetivo del curso que es *promover el desarrollo de la competencia reflexiva en los profesores de matemáticas en ejercicio a través de un curso de formación que articula los CID y el EC*, como herramienta para organizar la reflexión de los participantes. En seguida, se presenta la estructura y organización del curso, donde se explica lo que se hará en cada sesión, su duración y fecha prevista.

Después de esta introducción, tanto los profesores del curso como los profesores participantes, realizan una presentación individual y un breve informe sobre su trayectoria académica y profesional.

A continuación, se inicia la presentación del enfoque EC, sus principales características y etapas de un ciclo completo. Una vez hecho esto, se elige el tema para el desarrollo del ciclo de EC y se hace la elección del docente que implementará la clase. La elección del tema debe centrarse en las habilidades que el grupo de profesores desearía que sus alumnos desarrollaran en la clase implementada.

Sesión 2: Estudio del currículo y estabelecimento de metas del EC

Objetivo: Desarrollar la etapa de "currículo y metas" del EC.

Descripción: Con el tema del EC elegido el grupo de profesores analiza cómo se presenta y se comporta el tema elegido en los diferentes materiales y para el año escolar para el cual se propondrá la clase del EC. Se estudia el currículo practicado en la institución del profesor que impartirá la clase y otro a nivel nacional. Se compararon los diferentes currículos con los que los profesores están familiarizados para capturar el razonamiento detrás del desarrollo de conceptos y enfoques que podrían inspirar un plan de la clase que refleje la mejor manera para que los estudiantes aprendan un contenido determinado. A partir de ese estudio se establecen las metas para el aprendizaje de la clase.

Sesión 3: Planificación de la clase del EC

Objetivo: desarrollar la etapa de "planificación de la clase" del EC.

Descripción: En esta sesión se desarrolla en colaboración un plan para la clase, que sea pertinente dentro del tema elegido, si es posible un contenido clave o núcleo del tema elegido.

Al planificar una clase de EC, se deben establecer explícitamente los fundamentos de cómo la planificación de esta clase funciona hacia los objetivos generales definidos en todas las etapas de la clase en construcción. El estudio de los materiales que se utilizarían, la determinación de qué y cómo se evaluarían, estaría marcado por el desarrollo de los objetivos de la clase. Los profesores también deben elaborar una guía para la observación de la clase que les permita inferir sobre el aprendizaje de los estudiantes. El plan de la clase debe registrarse por escrito para que el grupo de profesores pueda estudiar y observar críticamente la clase.

Sesión 4: Planificación de la clase del EC

Objetivo: Desarrollar la etapa de "planificación de la clase" del EC.

Descripción: En esta sesión se hace el seguimiento de la fase de planificación de EC, es decir, se continua la planificación de la clase.

Nota: En la semana entre las sesiones 4 y 5 del curso, se debe implementar la clase de EC. En el caso de que los profesores no puedan observar la clase esta deberá ser grabada para su análisis posterior.

Sesión 5: Reflexión crítica sobre la clase del EC

Objetivo: Analizar y reflexionar sobre la clase implementada.

Descripción: Después de la ejecución y observación de la clase, los profesores deben hacer una reflexión conjunta sobre la misma. Inmediatamente después de la clase, el grupo debe analizar los impactos de la clase en el aprendizaje de los estudiantes. En ese momento, cada observador expondrá sus impresiones sobre la producción de conocimiento de los estudiantes.

Sesión 6: Rediseño de la clase

Objetivo: Hacer un nuevo diseño de la clase considerando los análisis en la fase de reflexión.

Descripción: Después de finalizar la reflexión y análisis de clase, el grupo debe hacer sugerencias de aspectos a mejorar o mantener para la clase. Durante la reflexión, el grupo de profesores podría decidir hacer ajustes para una clase futura sobre el mismo tema. En este caso, la planificación deberá sufrir modificaciones con actuaciones encaminadas a corregir o ajustar lo que se considere pertinente.

Sesión 7: Introducción al estudio de los CID

Objetivo: Hacer explícitos a los participantes los CID, sus componentes e indicadores presentes en sus discursos en todas las etapas del ciclo de EC.

Descripción: Al desarrollar ciclos completos de EC, los profesores habrán reflexionado conjuntamente sobre cómo debería ser la secuencia de tareas que proponen. Estas reflexiones serán utilizadas como evidencia del uso implícito de algunos componentes e indicadores de los CID, lo que dará lugar a la introducción al estudio del constructo CID.

Sesión 8: Estudio del CID epistémico

Objetivo: Enseñar el CID epistémico a los profesores.

Descripción: Enseñanza del CID epistémico a partir de la presentación de cada uno de sus componentes e indicadores y de la ejecución de tareas relacionadas con este CID. Para enseñar el componente "errores", hablar que se trata de los errores que son cometidos por el profesor o que son errores de los estudiantes validados por el profesor. Además, clasificar los tipos de errores (profesor está distraído, confusión, falta de conocimiento matemático, etc.) y utilizar ejemplos de los errores más comunes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema elegido para la clase del EC. Para el componente ambigüedades ejemplificar situaciones de aprendizaje que pueden causar un entendimiento ambiguo por parte de los estudiantes, como, por ejemplo, el uso de materiales manipulativos inadecuados, el uso de metáforas en el discurso o en forma de gestos y movimientos ficticios y el uso de programas informaticos inadecuados. Para el componente "riqueza de procesos" realizar con el grupo de profesores alguna actividad sobre el tema del EC rica en procesos matemáticos, destacar la resolución de problemas y la modelización como mega procesos de la actividad matemática. Por último, para el componente "representatividad del objeto matemático que se quiere enseñar" explicar la complejidad del tema que se ha elegido para la clase del EC, sus distintos significados de acuerdo al nível escolar a que se hace la clase y conexiones entre ellos.

Sesión 9: Estudio del CID cognitivo

Objetivo: Enseñar el CID cognitivo.

Descripción: Explicar cada uno de los componentes e indicadores del CID cognitivo. Para el componente "conocimientos previos" establecer qué conocimientos necesitan tener previamente los estudiantes para comprender el tema de la clase del EC y estudiar maneras de averiguar estos conocimientos (instrumentos de evaluación inicial). Además, identificar se los tipos de actividades elegidas para la clase se aproximan de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. Para el componente "adaptación curricular a las diferencias individuales" discutir con el grupo de profesores sobre qué tipo de actividades se deben ofrecer en caso de que la clase presente diversidades, hablar de los tipos de diversidades y de la necesidad de elaborar un plan para la clase que incluía actividades de ampliación y fortalecimiento. Para el componente "aprendizaje", con el grupo de profesores, reflexionar sobre los tipos de errores más comunes y las dificultades que tienen los alumnos a la hora de resolver una determinada actividad relativa al tema de la clase del EC. Establecer una evaluación formativa para tratar de superar estas dificultades. Para el componente "alta demanda cognitiva" proponer tareas que obliguen a los participantes a realizar procesos relevantes en la actividad matemática y destacar la importancia de promover procesos metacognitivos en esas actividades.

Sesión 10: Estudio de los CID interaccional, mediacional, afectivo y ecológico

Objetivo: Enseñar los CID interaccional, mediacional, afectivo y ecológico.

Descripción: CID interaccional - sobre el componente "interacción docente-estudiante", enfatizar que el docente debe hacer una adecuada presentación del tema; que se reconozcan y resuelvan los conflictos de significado de los estudiantes, que se busque el consenso sobre la base del mejor argumento; que se deben usar varios recursos retóricos y argumentativos para involucrar y captar la atención de los estudiantes; que se debe facilitar y no excluir los estudiantes en la dinámica de la clase. Respecto al componente "interacción entre los estudiantes", reiterar que se debe fomentar el diálogo y la comunicación entre los estudiantes, se debe favorecer la inclusión en el grupo y evitar la exclusión. Sobre el componente "autonomía" destacar que la clase debe contemplar momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad de estudiar. Respecto al componente "evaluación formativa" hablar sobre la necesidad de hacer una observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes.

CID mediacional: para el componente "recursos" indagar a los participantes qué entienden por recursos en un proceso de enseñanza y aprendizaje e indagar cuáles recursos los participantes consideran interesantes para o ensino del tema de la clase del EC. Además, hablar de los tipos de materiales (manipulativos, tecnológicos, etc.). Para el componente "número de alumnos, horario y condiciones del aula", comentar el número de alumnos (si es grande o pequeño), si la organización del grupo se ajusta a las actividades previstas, si el número y distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. También discutir si el horario de clases es adecuado (el horario afecta el comportamiento de los estudiantes, es diferente si la clase es en el primer período o después de la educación física). Hablar también de las condiciones en el aula (temperatura, pizarra, proyector, internet, ruidos externos, si el aula y la distribución de los alumnos son adecuadas para el desarrollo del proceso pretendido). Para el componente "tiempo" indagar sobre cómo aprovechar (optimizar) el tiempo para trabajar el tema de la clase del EC, qué aspectos del tema dedicarías más tiempo. Además, discutir sobre el tiempo para trabajar problemas contextualizados y los conocimientos previos.

CID afectivo: para el componente "intereses y necesidades" discutir sobre la utilidad del tema de la clase del EC (puede o no interesar al alumno); la conexión con el CID cognitivo (que las tareas estén a una distancia razonable de lo que pueden desarrollar los alumnos); si las tareas son desafiantes (puede o no interesar a los estudiantes); dar ejemplos de tipos de actividades matemáticas que son de interés de los estudiantes. Para el componente "actitudes", discutir cómo promover la participación de los estudiantes en la realización de actividades, la responsabilidad y la perseverancia; qué se debe hacer para no generar fobia/miedo en relación a las matemáticas (argumentar que el esfuerzo debe ser mayor para poder perseverar en la actividad; evaluar el esfuerzo y dedicación en la realización de las tareas, respetar la voz del estudiante y promover aprendizaje significativo). Para el componente "emociones" hablar de que la emoción es una reacción individual (incluso química; que sentir como proceso de elaboración de la emoción (sentir miedo), que la afectividad significa cómo afectan las cosas (interacción con el grupo o profesor); ser docente por el carácter sólido y bien argumentado de la disciplina, el sentimiento de precisión.

CID ecológica: para el componente "adaptación al currículo" discutir que hay diferentes currículos, el currículo oficial (nacional, autonómico, municipal), currículo del centro (de la escuela, del departamento), currículo oculto, currículo implementado. Seguir el currículo pero estar abierto al componente: innovación didáctica (cambios, adaptaciones, etc.). Sobre el componente "conexiones intra e interdisciplinares" indagar sobre cómo se podría hacer conexiones intra matemáticas e interdisciplinares a la hora de trabajar el tema de la clase del EC. Para el componente "utilidad sociolaboral" explicar que el laboral tiene que ver con comprender las cosas del mundo y prepararse para el trabajo y el social debe considerar aspectos sociales y culturales. Para el componente "innovación didáctica" explicar que la idea de innovación didáctica se relaciona con la idea de apertura al cambio, algo diferente a lo que se suele hacer (por ejemplo, cambiar el plan didáctico en el contexto del Covid-19).

Sesión 11: Nueva reflexión sobre la clase del EC con los CID (sesión 1)

Objetivo: Hacer una nueva reflexión sobre la clase implementada en el ciclo del EC utilizando los CID como herramienta para organizar la reflexión del grupo.

Descripción: En esa sesión el grupo de profesores realiza una nueva reflexión de la clase implementada en la primera fase del curso (ciclo de EC) guiada por los CID. Para hacer esta reflexión, cada uno de los profesores analiza la clase desde la perspectiva de uno de los seis CID: el epistémico, el cognitivo, el mediacional, el interaccional, el afectivo y el ecológico (dependiendo el número de participantes pueden haber más de un profesor analizando la clase desde la mirada de alguna de las dimensiones de los CID). Posteriormente, cada docente presenta su análisis a todo el grupo y luego se hace una discusión global de lo que se debería mantener y lo que se debería modificar/mejorar en la clase.

Sesión 12: Nueva reflexión sobre la clase del EC con los CID (sesión 2)

Objetivo: Hacer una nueva reflexión sobre la clase implementada en el ciclo del EC utilizando los CID como herramienta para organizar la reflexión del grupo.

Descripción: continuación de la sesión anterior.

Sesión 13: Rediseño de la clase del EC con los CID (sesión 1)

Objetivo: Hacer un rediseño de la clase implementada en el EC con los CID.

Descripción: A partir de las observaciones y apuntes sobre la clase discutidas en las sesiones de reflexión sobre la clase con los CID, hacer los ajustes necesarios en la clase implementada en la primera fase del curso (ciclo del EC) regulado por los CID.

Sesión 14: Rediseño de la clase del EC con los CID (sesión 2)

Objetivo: Hacer un rediseño de la clase implementada en el EC con los CID.

Descripción: continuación de la sesión anterior.

Nota: Entre las sesiones 14 y 15 se implementa la clase rediseñada.

Sesión 15: Reflexión de la segunda implementación con los CID como guía.

Objetivo: Hacer una nueva reflexión sobre la segunda implementación utilizando los CID como herramienta para organizar la reflexión del grupo.

Descripción: En esa sesión el grupo de profesores realiza una nueva reflexión de la segunda implementación de la clase guiada por los CID. Esta reflexión se hace de manera grupal entre los participantes. Cada docente presenta su análisis con los CID sobre la clase a todo el grupo y luego se hace una discusión global de lo que se debería mantener y lo que se debería modificar/mejorar en la clase.

Sesión 16: Evaluación del curso

Objetivo: Evaluar el curso de formación.

Descripción: Realizar un cuestionario de evaluación y hacer el cierre del curso con los agradecimientos y espacio para que cada participante comente de manera general sobre sus impresiones sobre el curso.

4. Conclusiones

El objetivo de este trabajo era presentar el diseño del curso que articula los CID y los EC como una herramienta para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas. Es importante destacar que, si bien se realizó un diseño previo del curso, su implementación no siguió estrictamente la agenda del diseño. Algunos factores fueron generadores de algunos cambios considerables: a) cambio en la modalidad del curso; b) número de profesores participantes; c) horario y actividades desarrolladas en el curso.

El primer factor de cambio fue la emergencia sanitaria derivada de la pandemia del Covid-19, que orientó el estudio presencial a la modalidad a distancia. En este sentido, el curso se realizó de manera virtual. El segundo factor de cambio es que el curso no se realizó con todos los participantes inicialmente aprobados en el proceso de selección (18 profesores participantes), resultando que el número de profesores participantes activos desde el inicio hasta el final del curso fuera de ocho. En ese sentido, dado el total de participantes, los ocho docentes trabajaron juntos en la reflexión con los CID y en el rediseño de la clase de uno de los ciclos de EC desarrollados (en la tercera fase del curso no hubo división de profesores en grupos más pequeños). El tercer factor se relaciona con el hecho de que la duración del curso no fue suficiente para cumplir con el diseño inicial, lo que provocó un cambio en las actividades. Por ejemplo, no se pudo implementar la clase analizada y rediseñada con los CAD, es decir, no se pudo realizar un segundo ciclo completo de EC. Además, como el tema a planificar e implementar fue elegido por los participantes (con el curso en marcha), fue necesario dedicar un tiempo considerable a la enseñanza del CID epistémico, ya que el objeto matemático elegido (Teorema de Pitágoras) era de alta complejidad.

Por fin, es importante destacar que, después de implementar el curso, en Brasil, en el marco de la tesis de máster Franzen (2022) se ha diseñado otro curso que combina el LS y CID. Los hallazgos también pueden ser encontrados en Franzen y Silva (2022).

Los resultados presentados (HUMMES, 2022) sustentan que, para desarrollar (e investigar) la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas, un curso de formación puede ser aquel que articule los CID y el EC como herramienta metodológica para organizar la reflexión sobre la práctica docente. Por un lado, las experiencias de EC permiten una etapa inicial más amplia de reflexión sobre la planificación de la secuencia didáctica y el trabajo colaborativo a lo largo de la experiencia, lo que permite el surgimiento de algunos indicadores y componentes de los CID. De lo contrario, la enseñanza y el uso de los CID permite a los profesores tener un patrón de reflexión más completo para organizar la reflexión grupal.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación sobre formación de profesores *Use of the Lesson Study and the Concept of Didactic Suitability in the Development of the Competence in Analysis and Didactical Intervention in the Frame of Mathematics Teacher's Training*, PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), y tuvo apoyo financiero del *Programa de Doutorado Pleno no Exterior* da *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES), Brasil - Código de Financiamiento 001, bajo el proceso n.º 88881.173616/2018-01.

Referencias

BARDIN, L. **Análisis de contenido**. Madrid: Ediciones Akal, 2002.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. Networking of theories: An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En: S. BHARATH; L. ENGLISH (Org.), **Theories of mathematics education**. Berlin: Springer, 2010. p. 483-506.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponible en http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acceso en 20 de octubre de 2022.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, abr., 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13.

BREDA, A.; HUMMES, V. B.; SILVA, R. S.; SÁNCHEZ, A. The Role of the Phase of Teaching and Observation in the Lesson Study Methodology. **Bolema**, Rio Claro, v 35, n. 69, p. 263-288, abr., 2021. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13.

BREDA, A.; PINO-FAN, L. R.; FONT, V. Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the Reflection and Assessment on Teaching Practice. **EURASIA**

Journal of Mathematics, Science and Technology Education, London, v.13, n. 6, p. 1893-1918, jun., 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a.

BURGHES, D. N.; ROBINSON, D. **Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning**. Reading: CfBT Education Trust, 2010.

FERNÁNDEZ C.; YOSHIDA, M. **Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.** Mahwah: Erlbaum, 2004.

FONT, V.; BREDA, A.; PINO-FAN, L. Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En: J.M. MUÑOZ-ESOLANO; A. ARNAL-BAILER; P. BELTRÁN-PELLICER; M. L. CALLEJO, J. CARRILLO (Org.), **Investigación en Educación Matemática XXI**. Zaragoza: SEIEM, 2017. p. 255-264

FRANZEN, T. **O Estudo de Aula no contexto da formação de professores na Educação Popular: uma análise a partir dos Critérios de Idoneidade Didática**. 2022. 159 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2022. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/236519. Acesso em: 10 abr. 2023.

FRANZEN, T.; SILVA, R. S. D. O estudo de aula no contexto da formação de professores na educação popular: a análise do ensino a partir da idoneidade didática. In: **Seminário Internacional de Lesson Study no Ensino de Matemática.** E-book. Vitória, ES: Edifes Parceria, 2022.

GIACOMONE, B.; GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 44, e172011. 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011.

GODINO, J. D., BATANERO C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 37- 42, mar. 2019. https://www.jstor.org/stable/26742011.

GODINO, J.; GIACOMONE, B.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos: análisis con herramientas del modelo CCDM. **Avances de investigación en Educación Matemática**, [S. l.], v. 13, p. 63–83, 2018. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

GUZMÁN, M. Enseñanza de las ciencias y la matemática. **Revista Iberoamericana de Educación**, [S. l.], v. 43, p. 19–58, 2007.

HART, L. C.; ALSTON, A. S.; MURATA, A. (Org.). **Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together**. Dordrecht: Springer, 2011.

HUANG, R., TAKAHASHI, A.; PONTE, J. P. (Org**.). Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics**. New York: Springer, 2019.

HUMMES, V. **Uso combinado del Lesson Study y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas**. 2022. 433 f. Tese (Doutorado) – Universidade de Barcelona, Faculdade de Educação, Barcelona, 2022. Disponível em: http://hdl.handle.net/2445/190407**.** Acesso em: 10 abr. 2023.

HUMMES, V. B.; BREDA, A.; FONT, V. Concordâncias e complementaridades entre o Lesson Study e a Idoneidade Didática para o desenvolvimento da prática reflexiva na formação de professores. **Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 33, n. 2, p. 796–806, 2020.

HUMMES, V.; BREDA, A.; FONT, V. El desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas: una mirada desde el Lesson Study y los criterios de idoneidad didáctica. Em: J. G. LUGO-ARMENTA; L. R. PINO-FAN; M. POCHULU; W. F. CASTRO (Org). **Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina**. Osorno: Ulagos, 2022. p. 221–241.

HUMMES, V. B; BREDA, A.; SÁNCHEZ, A.; FONT, V. Didactical Suitability Criteria in Videos of Lesson Study. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Palermo, v. 3, p. 257–268, 2020.

HUMMES, V. B.; BREDA, A.; SECKEL, M. J. Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. Em: J. M. MARBÁN; M. ARCE; A. MAROTO; J. M. MUÑOZ-ESCOLANO; A. ALSINA (Org). **Investigación en Educación Matemática XXIII**. Valladolid: SEIEM, 2019. p. 381–390.

HUMMES, V.; BREDA, A., SECKEL, M. J.; FONT, V. Criterios de idoneidad didáctica en una clase basada en el Lesson Study. **Praxis & saber**, Tunja – Boyacá, v. 11, n. 26, p. e10667, 2020. DOI: https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667.

HUMMES, V. B.; BREDA, A.; FONT, V. Desenho de um curso de formação que combina o uso do Lesson Study e da idoneidade didática para o desenvolvimento da competência reflexiva de professores de matemática. Em: **Actas del 5 Encuentro Internacional de Educación Matemática (EIEM)**. Barranquilla, Colombia: [s.n.]. p. 190–195.

HUMMES, V.; BREDA, A.; FONT, V.; SILVA, R. S. Lesson Study e idoneidad didáctica en la reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas. In: **Seminário Internacional de Lesson Study**. Atas do SILSEM – Seminário Internacional de Lesson Study, 2022. E-book. Vitória, ES: Edifes Parceria.

HUMMES, V. B.; FONT, V.; BREDA, A. Combined use of the lesson study and the criteria of didactical suitability for the development of the reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n. 1, p. 64-82, 2019. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id496.

HURD, J.; LEWIS, C. **Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction**. EUA: Heinemann Educational Books, 2011.

ISODA, M.; STEPHENS, M.; OHARA, Y; MIYAKAWA, T. (Org.). **Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement.** World Scientific, 2007.

LEWIS, C. C. **Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change.** Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources: LLC, 2002.

LIM-RATNAM, C. Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction. **International journal for lesson and learning studies**, [S. l.], v. 2, n. 3, p. 304–306, 2013. DOI: https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2013-0025.

MORALES-LÓPEZ, Y.; FONT, V. Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 45, p. 1–19, 1 abr. 2019. DOI: https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

MORALES-MAURE, L.; DURÁN-GONZALEZ, R. E., PÉREZ-MAYA, C.; BUSTAMANTE, M. Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. **Revista Inclusiones**, [S. l.], v. 6, n. 2, p. 142–162, 2019.

MURATA, A. Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. C. HART; A. S. ALSTON; A. MURTA (Org.), **Lesson study research and practice in Mathematics Education**. New York: Springer, 2011. p. 1-12.

MURATA, A.; TAKAHASHI, A. Vehicle to connect theory, research, and practice: How teacher thinking changes in district-level Lesson Study in a Japan. Em: MEWBORN, D. S.; SZTAJN, P.; WHITE, D. Y.; WIEGEL, H. G.; BRYANT, R. L.; NOONEY, K. (Org.). **Proceedings of the 24th Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Athens, EE. UU: IGPME, 2002. p. 1879–1888.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PONTE, J. P.; BAPTISTA, M., VELEZ, I., COSTA, E. Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, n. 5, p. 7–24, 2012.

SECKEL, M. J.; FONT, V. Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. Magis. **Revista Internacional de Investigación en Educación**, Bogotá, v. 12, n. 25, p. 127–144, 2020. DOI: https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp

WANG-IVERSON, P.; YOSHIDA, M. (Org.) (2005). **Building our understanding of Lesson Study**. Philadelphia: Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources, 2005.

Autores

Viviane Hummes

Doctora por el Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades, con línea de investigación en Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Barcelona (UB). Actualmente es académica e investigadora en el vicerrectorado de investigación en la UB (ayuda Margarita Salas para jóvenes doctores) y profesora visitante del Departamento de Didáctica de la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC) en la que se desempeña en el ámbito de la formación inicial y continua del profesorado.

Correo electrónico: vhummes@ub.edu

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2031-8238

María José Seckel Santis

Doctora en formación del profesorado: práctica educativa y comunicación, con línea de investigación en Didáctica de la Matemática, por la Universidad de Barcelona (UB). Actualmente es académica e investigadora del Departamento de Didáctica de la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC) en la que se desempeña en el ámbito de la formación inicial y continua del profesorado.

Correo electrónico: mseckel@ucsc.cl

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7960-746X

Rodrigo Sychocki da Silva

Doctor en Informática en la Educación por la Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Actualmente es profesor (Enseñanza Superior) con dedicación exclusiva en el Departamento de Matemática Pura y Aplicada del Instituto de Matemática y Estadística de la UFRGS. Miembro del consejo de administración de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática en la región de Rio Grande do Sul (RS) en el período 2018 - 2021 (asesor editorial de la Revista Educação Técnica em Revista - RS) y segundo secretario en el período 2021 – 2024. Las áreas de interese e investigación son tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aportes de las teorías cognitivas al aprendizaje de las matemáticas, modelización matemática utilizando tecnología informática y tecnologías digitales en la formación docente.

Correo electrónico: sychocki.rodrigo@gmail.comm

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7406-25177

Como citar o artigo:

HUMMES, V.; SECKEL, M. J.; SILVA, R. S. Diseño de un curso de formación que articula los Criterios de Idoneidad Didáctica y el Estudio de Clases como herramienta para desarrollar la reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 221 - 245 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p221-245.id1395

¿De qué se preocupan los futuros maestros cuando diseñan problemas robóticos?

Gemma Sala-Sebastià
gsala@ub.edu
https://orcid.org/0000-0001-9830-312X
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España

Pere J. Falcó-Solsona
pfalcoso7@alumnes.ub.edu
https://orcid.org/0000-0002-0475-7284
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España

Neus Inglada Rodríguez
ninglada@ub.edu
https://orcid.org/0000-0002-5741-7531
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España

Alexandre Cortés da Silva
alcortesdasilva@ub.edu
https://orcid.org/0000-0001-7403-4893
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Es importante la incorporación del desarrollo del pensamiento computacional, ya en las primeras edades, para abordar los retos de la sociedad actual y del futuro, con un nivel científico y tecnológico en auge. Son cada vez más los países que incorporan en sus currículums el pensamiento computacional, como por ejemplo el currículum español y catalán que, en la renovación de este mismo año, por primera vez lo incorporan explícitamente en el currículum de Educación Infantil. El objetivo general de esa investigación es caracterizar la idoneidad didáctica de los diseños de los futuros maestros de Educación Infantil sobre una tarea de resolución de problemas con el uso del robot educativo Blue-Bot, para alumnado de 5 años. Los participantes fueron 97 estudiantes de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas del Grado de Educación Infantil de una universidad catalana (en España). El análisis cualitativo se llevó a cabo mediante la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados apuntan que a los futuros maestros lo que más les preocupa es la idoneidad afectiva y motivacional de sus diseños.

Palabras clave: Educación Infantil. Enfoque Ontosemiótico. Futuros maestros. Idoneidad didáctica. Problemas robóticos.

Com quais aspectos se preocupam os futuros professores quando desenham problemas robóticos?

Resumo

É importante incorporar o desenvolvimento do pensamento computacional, mesmo em uma idade precoce, a fim de enfrentar os desafios da sociedade de hoje e do futuro, visto o nível científico e tecnológico em ascensão. Há uma expansão de países que contemplam o pensamento computacional nos seus currículos, tais como os currículos espanhóis e catalães que, na reforma curricular deste ano de 2023, pela primeira vez, o incorporam explicitamente no currículo da Educação Infantil. O objetivo geral desta pesquisa é caracterizar a adequação didática dos desenhos dos futuros professores de Educação Infantil para uma tarefa de resolução de problemas utilizando o robô educativo Blue-Bot, para estudantes de 5 anos. Participam do estudo 97 estudantes do curso de Didática Matemática do Curso de Educação Infantil de uma universidade catalã (Espanha). A análise qualitativa foi realizada utilizando a ferramenta Critérios de Adequação Didática da Abordagem Ontossemiótica. Os resultados mostram que os futuros professores estão mais preocupados em incorporar nos seus desenhos os critérios de adequação afetiva e motivacional.
Palavras chave: Abordagem Ontossemiótica. Adequação didática. Desenho de problemas robóticos. Educação Infantil. Futuros professores.

What do future teachers care about when designing robotic problems?

Abstract

It is important to incorporate the development of computational thinking, even at an early age, to address the challenges of today's society and the future, with scientific and technological level on the rise. More and more countries are contemplating computational thinking into their curricula, such as the Spanish and Catalan curricula, which, in this year's renewal, explicitly incorporate it into the kindergarten curriculum for the first time. The general objective of this research is to characterize the didactic suitability of the designs of future early childhood education teachers for a problem-solving task using the educational robot Blue-Bot, for 5-year-old students. The participants were 97 students of the Mathematics Didactics course of the Early Childhood Education Degree at a Catalan university (in Spain). The qualitative analysis was carried out using the Didactic Suitability Criteria tool of the Ontosemiotic Approach. The results show that future teachers are most concerned about their designs' affective and motivational suitability.
Keywords: Early Childhood Education. Didactic Suitability. Ontosemiotic approach. Robotic problems design. Teachers in training.

Introducción

En la última década el importante desarrollo científico, tecnológico y social ha influido fomentando cambios en el sistema educativo, resultando el desarrollo del Pensamiento Computacional (PC) un aspecto central para preparar a todos los estudiantes para vivir y actuar de forma competente en el mundo contemporáneo. Según Wing (2006) y Zapata-Ros (2019), dicha incorporación debe ocurrir de manera progresiva, pero empezando ya desde la temprana edad a partir de la noción de PC desenchufado (en inglés, "Computational thinking unplugged"). La noción de PC desenchufado hace referencia, pues, al conjunto de actividades, y su diseño educativo, que se elaboran para fomentar en los niños y niñas, en las primeras etapas de desarrollo cognitivo (Educación Infantil, primer tramo de la Educación Primaria, juegos en casa con los padres y los amigos, etc.), habilidades que luego podrán ser evocadas para favorecer y potenciar un buen aprendizaje del PC en otras etapas o en la formación técnica, profesional o en la universitaria incluso. Como concreta Zapata-Ros (2019), actividades que se suelen hacer con fichas, cartulinas, juegos de salón o de patio, juguetes mecánicos, etc.

Diversos países latinos han incorporado el PC en los planes de estudios escolares (JARA; HEPP, 2016) empezando ya en la Educación Infantil (GROVER; PEA, 2013), en algunos casos por medio de una asignatura especifica de computación y en otros incluyéndolo en una asignatura de matemáticas. En España recientemente ha sido aprobada una reforma curricular de la educación que afecta a todos los niveles, desde la Etapa de Infantil hasta el Bachillerato. El currículum de la comunidad autónoma de Catalunya (España) concreta que una de las competencias específicas que debe desarrollar el estudiante en la asignatura de matemáticas al final de la Educación Básica es utilizar el PC para el desarrollo de procesos matemáticos, en particular, para resolver problemas y modelizar de forma eficiente (CATALUNYA, Decret 175/2022). Centrándonos en la etapa de Educación Infantil (alumnos de 3 a 6 años), el actual currículo catalán (CATALUNYA, Decret 21/2023), incorpora el PC por primera vez en el área de descubrimiento y exploración del entorno, con la finalidad, entre otras, de incentivar que los estudiantes desarrollen procesos de resolución de problemas (ALSINA, 2022; ESPAÑA, Real Decreto 95/2022). Se trata pues de una definición curricular, la del Ministerio de Educación de España, que muestra una clara apuesta por la integración del PC y el Pensamiento Matemático (PM).

Es una evidencia que los programas de formación de profesorado deben contemplar estas novedades curriculares, fomentando el PC en los Grados de Maestro desde la Educación Infantil (RIBEIRO; COUTINHO; COSTA, 2011). Por lo tanto, se pone de manifiesto la necesidad de orientar al profesorado en activo y al futuro profesorado de Educación Infantil para desarrollar el PM a través del PC y reflexionar sobre su práctica, sea a partir de la resolución de problemas de programación con el uso de robots educativos (SECKEL et al., 2022) o bien, a partir del diseño de problemas o de una secuencia didáctica con el uso de robots didácticos (Blue-Bot o similares) adaptados a las primeras edades (BENTON et al., 2017; SECKEL; et al., 2022; SULLIVAN; STRAWHACKER; BERS, 2017; SALA-SEBASTIÀ et al., 2023).

En los últimos cinco años se han llevado a cabo investigaciones sobre las prácticas pedagógicas y las concepciones del profesorado en relación con el uso de robots o el desarrollo del PC por medio de la robótica en el aula (TANG; TUNG; CHENG, 2020; CASEY; PENNINGTON; MIRELES, 2021; entre otros) y, en particular, con el uso de robots didácticos en las primeras edades (SCHINA; ESTEVE-GONZALEZ; USART, 2021; SECKEL et al., 2021).

La investigación que se llevó a cabo y que se expone en este artículo se centró en los futuros maestros de Educación Infantil cuando, como parte de su formación, se les pide que realicen el diseño de una práctica educativa para promover el PC en alumnado de 5 años y reflexionen sobre ella. De esta manera, el objetivo general de esta investigación fue caracterizar la idoneidad didáctica de los diseños de los futuros maestros de Educación Infantil sobre una tarea de resolución de problemas con el uso del robot educativo Blue-bot, para alumnado de 5 años.

1. Marco Teórico

El marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), ofrece el modelo del Conocimiento Didáctico–Matemático (CDM) que interpreta y caracteriza los conocimientos del profesorado a partir de tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática.

La dimensión matemática del CDM incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido (conocimiento sobre un objeto matemático concreto que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículum de matemáticas de un nivel educativo determinado) y conocimiento ampliado del contenido (están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente) (PINO-FAN; GODINO, 2015).

La dimensión didáctica del CDM incluye las siguientes subcategorías del conocimiento: conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica); conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva); conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva); conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (faceta interaccional); conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional); y conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos, etc., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes (faceta ecológica).

Finalmente, queremos hacer especial atención en este trabajo en la dimensión meta didáctico-matemática ya que es la que caracteriza los conocimientos que necesitan los docentes para reflexionar sobre su propia práctica, identificar y analizar el conjunto de normas y meta-normas que regulan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y evaluar la idoneidad didáctica para encontrar posibles mejoras en el diseño e implementación de dichos procesos (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017).

El EOS dispone de un instrumento que permite evaluar y analizar sistemáticamente los conocimientos del profesorado contemplados en la dimensión meta didáctico-matemática, los denominados Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018). Estos criterios se caracterizan de la siguiente manera: *Idoneidad Epistémica*, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; *Idoneidad Cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; *Idoneidad Interaccional*, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; *Idoneidad Mediacional*, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; *Idoneidad Afectiva*, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; *Idoneidad Ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (FONT; PLANAS; GODINO, 2010). Estos criterios son operativos para realizar análisis y valoración de prácticas educativas o diseños gracias a su desglose en componentes e indicadores. En el Cuadro 1 se detallan los componentes de cada uno de los criterios descritos anteriormente. El cuadro completo con los indicadores se puede encontrar en Breda, Pino-Fan y Font (2017).

Cuadro 1 – Criterios de idoneidad didáctica y componentes

Criterios de Idoneidad Didáctica	**Componentes**
Epistémico	Errores, Ambigüedades, Riqueza de procesos, Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Conocimientos previos, Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales, Aprendizaje, Alta demanda cognitiva.
Interaccional	Interacción profesor estudiante, Interacción entre estudiantes. Autonomía, Evaluación formativa.
Mediacional	Recursos materiales, Número de estudiantes, horario escolar y condiciones, Tiempo.
Afectivo	Intereses y necesidades, Actitudes, Emociones.
Ecológico	Adaptación al currículum, Conexiones intra-matemáticas e interdisciplinarias, Utilidad social y laboral, Innovación didáctica.

Fuente: Morales-López y Font (2019).

La noción de Idoneidad Didáctica tiene un impacto relevante en la formación de profesores en diferentes países (BREDA; FONT; LIMA, 2015), evidenciándose el uso de los CID en diferentes contextos de formación de matemáticas. Este constructo se usa tanto como dispositivo formativo pensado expresamente para enseñar la idoneidad didáctica, como herramienta para organizar la reflexión y el desarrollo del conocimiento meta didáctico-matemático del profesorado sobre su propia práctica, en cursos de formación del profesorado de Primaria y de Secundaria (BREDA, 2020; MORALES-LÓPEZ; FONT, 2019), así como, de futuros maestros de Infantil en el contexto de Catalunya (SALA-SEBASTIÀ; BREDA; FARSANI, 2022) y futuros maestros de Primaria para el uso de robots educativos (SECKEL; et al., 2021).

En relación con la adquisición de conocimientos necesarios por parte del profesorado para desarrollar PC en el alumnado, se proponen modelos de programas de formación de profesores (ESTEBANELL et al., 2018; KONG; LAI; SUN, 2020, entre otros). Concretamente, el modelo de Estebanell et al. (2018) está dirigido a la formación inicial de profesorado y contempla cuatro niveles para el desarrollo del PC: 1) nivel usuario: el profesorado se plantea preguntas sobre cómo usar un lenguaje computacional determinado para abordar problemas con un robot, videojuego, aplicación, etc., 2) nivel usuario reflexivo: el profesorado reflexiona sobre lo que ha hecho al desarrollar un problema computacional, 3) nivel maestro: el profesorado enfrenta el desafío de decidir qué enseñar, qué esperan que sus estudiantes aprendan del PC y qué recursos y estrategias se implementarán y 4) nivel maestro reflexivo: el profesorado reflexiona sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje relacionado con el PC.

Centrándonos en el diseño de problemas, es necesario que el profesorado reconozca dos aspectos básicos a la hora de diseñar problemas (ARLEGUI; PINA, 2016). El primer aspecto, basado en el tipo de tarea que implica un problema de robótica, expresa que la resolución del mismo tiene que implicar que el robot pase de un estado inicial a uno final, a través de la planificación de una secuencia de acciones (estados intermedios que se programan). El segundo aspecto, se refiere a los criterios que deben orientar el planteamiento de un problema o una secuencia de problemas, estos son: 1) ser de complejidad progresiva, 2) hacer referencia a aspectos conocidos y desconocidos y 3) situar el problema en un entorno (escenario).

2. Metodología

Esta investigación se enmarca en un paradigma interpretativo de tipo cualitativo (COHEN; MANION; MORRISON, 2007) con la finalidad de analizar la idoneidad didáctica de los diseños de tareas de resolución de problemas robóticos para alumnado de 5 años que realizaron los futuros maestros de Educación Infantil participantes.

2.1. Detalles de la secuencia didáctica implementada

Los recursos materiales utilizados en la investigación fueron los mostrados en la Figura 1, un robot educativo y unas tarjetas para representar las instrucciones para que el robot realice los movimientos que se desee. El robot educativo utilizado en la investigación fue el que se comercializa bajo el nombre de Blue-Bot. Es un robot analógico, es decir, para indicar las instrucciones para que realice los trayectos deseados se tiene que pulsar en las teclas que se encuentran en su espalda. El robot memoriza la secuencia de pulsaciones que el usuario ha realizado y cada vez que se quiera empezar una nueva secuencia de órdenes se debe pulsar la tecla de borrado, ya que, en caso contrario, las nuevas órdenes se añaden a las memorizadas con anterioridad. Con cada pulsación de avanzar (o de retroceder), el robot avanza (o retrocede) 15 cm. Con la pulsación de girar (a la derecha o a la izquierda) el robot solo gira, no avanza. La programación puede considerar que el robot haga paradas en su recorrido si se incluyen pulsaciones de la tecla “Pause”. Para escribir o representar las órdenes (pulsaciones) o algoritmo que el robot debe seguir, se pueden utilizar las tarjetas plastificadas mostradas en la Figura 1. Se trata de unas pequeñas tarjetas plastificadas que representan cada una de las teclas del robot. Cada tarjeta se reproduce las veces que se crea necesario para que los alumnos puedan escribir o representar el algoritmo de su programa para que el robot realice el trayecto requerido, antes o después de ejecutar el programa.

Figura 1 – Recursos materiales usados en la investigación, de derecha a izquierda: Blue-Bot, robot educativo y fichas para representar las instrucciones

Fuente: Elaboración propia a partir de imágenes de Internet

Los participantes del estudio fueron dos grupos de estudiantes de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas del Grado de Educación Infantil de una universidad catalana (Catalunya, España), un grupo de 50 estudiantes que estudia en el turno de mañana y el otro de 47 que estudia en el turno de tarde, en total 97 personas. Los futuros maestros y maestras se organizaron en equipos de trabajo para seguir una secuencia didáctica que les fue propuesta y, posteriormente, diseñar actividades con el Blue-Bot. En total fueron 17 equipos de trabajo denominados: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8.

Los datos para esta investigación se obtuvieron de las grabaciones de las sesiones implementadas, de las notas de campo de la primera autora y otra profesora, que actuaron como profesoras del grupo realizando una observación participante, y de los documentos escritos por los participantes, denominados [D1], [D2] y [D3].

La secuencia didáctica diseñada por la primera autora del artículo y otra profesora fue implementada con futuros maestros y maestras de Educación Infantil y contempló diversas sesiones en el aula y también trabajo autónomo de los equipos. La implementación fue realizada siguiendo el mismo esquema e indicaciones con los dos grupos de estudiantes, los del turno de mañana y los del turno de tarde.

La sesión 1, de 90 minutos de duración, fue implementada el 26/10/2022 con medio grupo y el 02/11/2022 con el otro medio grupo (de los estudiantes de cada turno), para tener una ratio de participantes lo suficientemente reducida para poder realizar las observaciones necesarias. Esta sesión 1 se dedicó a la resolución de problemas con el Blue-Bot, que fueron propuestos mediante un dossier que planteaba diversos problemas en base a preguntas, donde los futuros maestros debían actuar como usuarios (nivel usuario) para resolverlos. Las implementaciones de esta sesión fueron grabadas y se recogieron notas de campo. A continuación de haber participado en la sesión 1, los diversos equipos de participantes tenían encargado trabajo autónomo fuera del aula que consistía en escribir un documento [D1] con la reflexión profesional sobre el uso y aplicación del Blue-bot en la secuencia de resolución de problemas en que habían participado . Los documentos escritos de las tareas llevadas a cabo en la sesión 1, así como las grabaciones, se recogieron como fuente de datos a analizar en otra investigación, relacionada con la presente, que se puede consultar en Sala-Sebastià, Breda, Seckel, Farsani y Alsina (2023)[7].

La sesión 2, de 40 minutos de duración en el aula, se dedicó a la identificación de los aspectos clave que debe tener una actividad para poder ser considerada de resolución de problemas. Esta sesión se desarrolló en gran parte con una organización que contemplaba la interacción de todo el grupo clase. En primer lugar, se visionó el vídeo del cuento infantil "Por cuatro esquinitas de nada" de Jerôme Ruillier (título original "Quatre petits coins de rien du tout") que se puede encontrar en Youtube en diversos idiomas. En este cuento los personajes —un grupo de amigos, unos cuantos cuadrados y un círculo— se encuentran con un problema que logran resolver siguiendo un proceso que evidencia ciertos pasos de una resolución de problemas. Después de la visualización, los estudiantes reflexionaron en grupo, pudiendo realizar inferencias a partir del vídeo, para confeccionar una lista de características de una actividad de resolución de problemas —el documento [D2]. Estas listas se pusieron en común con todo el grupo clase y, además, cada equipo envió la suya (donde había podido incluir aspectos de la puesta en común) a un fórum de la plataforma Moodle de la asignatura para que todos los equipos las pudieran ver.

Al finalizar la sesión 2, se les encargó a los equipos de trabajo que, de forma autónoma y fuera de clase, diseñaran una actividad de resolución de problemas robóticos con Blue-Bot para alumnos de 5 años, basándose en la experiencia vivida —primero como usuarios del Blue-Bot (primera parte de la sesión 1, realizada en el aula) y después como profesionales (segunda parte de la sesión 1, en trabajo autónomo donde actuaban como usuarios reflexivos)— y también

[7] El presente artículo es una adaptación de una parte del artículo aquí citado.

en la noción de problema consensuada en la sesión 2. Los documentos de los diseños [D3] realizados por escrito por los diversos equipos, así como los correspondientes a las características de la actividad de resolución de problemas [D2], son las principales fuentes de datos analizadas en el trabajo que se presenta en este artículo.

2.2. Instrumento de análisis

Con el objetivo de recoger todas las características que los diversos equipos de estudiantes tuvieron en cuenta, se realizó un análisis de contenido de todos los documentos [D2] de los 17 equipos. Se identificaron las características emergentes y cuáles de ellas eran coincidentes entre los diversos equipos. También, se analizó si en [D2] se contemplaban las características que debe presentar un problema robótico propuestas por Arlegui y Pina (2016). Después, se analizaron los diseños de un problema robótico y su posible implementación con niños de 5 años realizado por los participantes [D3]. Un primer nivel de análisis se dedicó a identificar cuáles de las características o aspectos-clave emergentes que debe tener un problema robótico —en los documentos [D2]—, aparecían contemplados en los diseños [D3].

Por último, para identificar la idoneidad de los diseños de los equipos de participantes de la investigación, se utilizó la herramienta de los CID, sus componentes y sus indicadores (Cuadro 1). Los resultados fueron triangulados con una experta del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico.

3. Resultados

En este apartado se exponen los resultados referentes al análisis de los documentos [D2] —características de un problema robótico— y [D3] —diseños de un problema robótico para alumnado de 5 años.

3.1. Características de un problema robótico consideradas importantes

En el Cuadro 2 se muestran las características que los participantes consideraron que debía tener una actividad con objetivos didácticos para ser considerada un problema (características emergentes) a partir del análisis de los documentos [D2]. En el mismo cuadro se indica cuáles de estas características emergentes se tuvieron en cuenta en el diseño que realizaron los participantes, a partir del análisis de [D3]. Para el análisis de [D3] también se consideraron las características (números 17, 18 y 19 en el Cuadro 2) de Arlegui y Pina (2016).

Cuadro 2 – Características de los problemas robóticos en los diseños

	Características emergentes de los problemas robóticos	**Equipos que las mencionan en [D2]**	**%**	**Diseños que las contemplan en [D3]**	**%**
1	Leer con atención/ observar el problema	A1, A9	11,8	-	0
2	Plantear el problema/situación problemática	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A8, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	88,2	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	100,0
3	Formular una pregunta concreta, abierta, productiva, que haga pensar posibles soluciones	A6, A7, A8, B3, B4, B5, B6, B7, B8	52,9	A1, A5, A6, A8, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8	64,7
4	Hacer una reunión y pensar soluciones en grupo/hacer lluvia de ideas	A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	94,1	A1, A2, A4, A5, A6, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	82,4
5	Contemplar diferentes hipótesis que den respuesta al problema	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	82,4	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, B1, B4, B5, B6, B7	82,4
6	Evaluar las hipótesis para saber cuáles se pueden llevar a cabo	B3	5,9	B2, B3, B8	17,6
7	Formular una última hipótesis	A2, A3, A4, A8	23,5	A2, A3, A4, A5, A7, B7	35,3
8	Proponer una hipótesis y llevarla a cabo para ver si es correcta/ probar la hipótesis	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B6, B7, B8	88,2	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A8, A9, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8	88,2
9	En el caso de que la hipótesis no sea la solución se tiene que volver a pensar en otras hipótesis	A6, B2, B3, B5, B6, B7, B8	41,2	A2, A6, A9, B3, B4, B5, B6, B7, B8	52,9
10	Preguntarnos porqué la respuesta es correcta/Validar la solución	A1, A4, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B8	76,5	A1, A3, A6, A8, B1, B2, B4, B5, B6, B8	58,8
11	Celebrar los aciertos	A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	88,2	A4, A5, A6, A8, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	64,7
12	Reflexionar sobre posibles mejoras del proceso	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7	94,1	A1, A2, A3, A4, A5, A8, B1, B2, B3, B4, B6, B7	70,6
13	Los problemas tienen que ser motivadores para querer ser solucionados	A3	5,9	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8	82,4
14	Los problemas tienen que invitar a reflexionar y a pensar	A3	5,9	A1, A4, A5, A6, A8, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8	70,6
15	Los problemas deben tener preguntas concretas que indiquen	A5, A6	11,8	A1, A5, A6, A8, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8	64,7

	Características emergentes de los problemas robóticos	**Equipos que las mencionan en [D2]**	**%**	**Diseños que las contemplan en [D3]**	**%**
	que se quiere que resuelvan los alumnos				
16	Las preguntas deben ser productivas y abiertas, que admitan más de una solución	A5, A6, A7, A8	23,5	A1, A3, A4, A5, A6, A8, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8	76,5
	Características de los problemas robóticos según Arlegui y Pina (2016)				
17	Debe tener complejidad progresiva			A7, B1, B3,	23,5
18	Debe hacer referencia a aspectos conocidos y desconocidos			A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	100
19	Debe situarse el problema en un escenario			A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8	100

Fuente: adaptado de Sala-Sebastià et al. (2023).

Las características emergentes numeradas de 1 a 12, en general, se refieren a las etapas de resolución de un problema y las numeradas de 13 a 16 se refieren a características sobre la naturaleza de los problemas. Las características emergentes que tienen más consenso (más de un 88% de los equipos de trabajo las mencionan) son las siguientes: 2-Plantear el problema/situación problemática; 4-Hacer una reunión y pensar soluciones en grupo/hacer lluvia de ideas; 8-Proponer una hipótesis y llevarla a cabo para ver si es correcta/probar la hipótesis; 11-Celebrar los aciertos; y 12-Reflexionar sobre posibles mejoras del proceso.

También se analizaron los documentos [D3] para identificar cuáles de estas características emergentes eran tenidas en cuenta por los equipos participantes al realizar sus diseños de problemas robóticos y el resultado se muestra también en la parte derecha del Cuadro 2. En este análisis, además de las características emergentes, se identificaron cuáles de las características de problema robótico (ARLEGUI; PINA, 2016) se tenían en cuenta: 1) ser de complejidad progresiva, 2) hacer referencia a aspectos conocidos y desconocidos y 3) situar el problema en un entorno (escenario).

Como se puede observar en el Cuadro 2, prácticamente todas las características emergentes, en [D2] identificadas solo por algunos de los equipos, aumentaron su presencia en los diseños [D3]. Es decir, por ejemplo, la característica número 9, “En el caso de que la hipótesis no sea la solución se tiene que volver a pensar en otras hipótesis”, que había sido enunciada por un 41,2 % de los equipos cuando realizaron el listado de características, posteriormente al realizar sus diseños [D3], lo tienen en cuenta un 52,9% de los equipos, es decir, casi un 12% más de equipos. Hay dos características, la 11 y la 12, referidas a aspectos actitudinales y motivacionales, que sorprendentemente bajan de forma considerable el porcentaje en los diseños. La característica 1, enunciada en [D2] por dos equipos, no se contempla en ninguno de los diseños de [D3], posiblemente porque todos los problemas se plantean a partir de explicar una situación contextualizada y exponer una pregunta oral.

Las características referidas a la naturaleza de los problemas, de 13 a 16, aumentan considerablemente su presencia en los diseños [D3]. La mayoría de los equipos no las enunciaron en [D2] pero, no obstante, las tuvieron en cuenta en sus diseños.

Por otro lado, el análisis sobre las características de los problemas robóticos, de 17 a 19, revelan que solo un 23,5 % (correspondientes a 3 diseños) tienen en cuenta que los problemas presenten una complejidad progresiva (característica 17). En cambio, todos los diseños sitúan los problemas en un escenario de manera contextualizada (característica 19) y también hacen referencia a aspectos conocidos y desconocidos (característica 18).

3.2. Idoneidad didáctica de los diseños

Se analizó la idoneidad didáctica de los diseños correspondientes a los 17 equipos participantes mediante de la aplicación de los componentes —y sus indicadores— de los CID. Se han podido identificar evidencias del uso y aplicación de todos los criterios, en mayor o menor medida. En un 64,7% de los diseños se encontraron evidencias de indicadores de idoneidad afectiva, siendo el criterio que más preocupa a los futuros maestros. En segundo lugar, los diseños se preocupan por evidenciar la idoneidad interaccional (un 52,9 % de los diseños), seguido de la idoneidad epistémica (43,5% de los diseños) y de la mediacional (41,2%). Mientras que de donde obtenemos menos evidencias es de idoneidad ecológica (en un 11,8% de los diseños).

En relación con la *idoneidad epistémica*, la mitad de los diseños (9 de 17) contienen errores respecto al lenguaje computacional, sobre todo cuando describen las instrucciones que los alumnos deberían dar al robot para que realice el trayecto que se programe. Por ejemplo, cuando se explican los movimientos que debe hacer el robot, utilizan “recto” o “arriba,” en lugar de la instrucción “avanzar”; “abajo”, en lugar de la instrucción “retroceder”, y “a la derecha”, en lugar de “girar a la derecha”. Además, casi dos tercios de los diseños (11 de 17) presentan ambigüedades, ya sean de aspectos didácticos en el diseño de la actividad o de aspectos matemáticos. Por ejemplo, 6 de los diseños hacen referencia a que el robot tiene que hacer el camino “más corto” o “más rápido” o “más sencillo” pero no definen qué entienden por este tipo de trayecto o lo usan como sinónimos. Cuando tienen que definir el trayecto que debe hacer el robot, nunca hacen referencia "programar una secuencia de instrucciones" o "programar un algoritmo". Algunos diseños no cuentan con las diferentes instrucciones posibles que se pueden dar al robot, a veces solo hacen alusión a "avanzar", por ejemplo: "La alfombra está diseñada para que cada recuadro sea un movimiento del Blue-Bot, que son 15 cm, y así los niños pueden contar cuantos recuadros hacen falta para llegar a su objetivo (equipo B1)"

No obstante, todos los diseños promueven una riqueza de procesos relevantes, como la resolución de problemas, la modelización directa para responder con más de una solución posible y la argumentación. Dos tercios de los diseños (12 de 17) prevén que los niños solo utilicen el lenguaje oral para decir en voz alta la secuencia de programación del trayecto deseado antes de pulsar las teclas en el robot. No obstante, algunos equipos (B4, B8) sugieren que los niños también representen en una hoja en blanco o en el suelo un "mapa" del trayecto. Los equipos A8 y B3 son los únicos que proponen que los alumnos puedan "escribir" el algoritmo con las tarjetas de instrucciones, aunque lo plantean de forma opcional.

En relación con la *idoneidad cognitiva*, solo 4 de los diseños explicitan que se tienen en cuenta los conocimientos previos de los alumnos y, de estos, solo 2 se refieren directamente al uso de robots educativos. Solo 1 de los equipos explicita que los significados pretendidos en su diseño tienen una dificultad manejable para el alumnado, y otro prevé ciertas variables didácticas para poder aumentar progresivamente la dificultad de la tarea, por ejemplo: "Los elementos que dificultan el camino se pueden cambiar [de lugar] para ir planteando diversos retos, igualmente la casilla de inicio y de final (equipo A7)".

Además, solo 3 de los diseños incluyen actividades complementarias que se podrían considerar de ampliación y refuerzo para adaptarse a las diferencias individuales de los alumnos. Es importante destacar que ninguno de los diseños incluye los objetivos de enseñanza y aprendizaje de la actividad, ni se especifican los conocimientos concretos (sobre matemáticas, sobre PC, por ejemplo) que se espera que los alumnos puedan desarrollar mediante la actividad programada, ni se prevé ningún tipo de estrategia para evaluar el aprendizaje. En general, todos los diseños plantean actividades de alta demanda cognitiva ya que activan procesos como la formulación y prueba de hipótesis, y 2 de ellos plantean cambios de representación. En más de la mitad de los diseños (11 de 17) se prevén momentos de reflexión sobre la actividad realizada y lo aprendido, sobre cómo mejorar el proceso, sobre otras posibles respuestas, etc., donde se promueven procesos metacognitivos.

A todos los equipos les preocupa que haya una alta *idoneidad interaccional*. En primer lugar, todos los trabajos se preocupan, en mayor o menor medida, de cómo debe ser la interacción docente discente. En más de la mitad (10 de 17) de diseños, además de indicar cómo se debe presentar la situación problemática, se explicita la pregunta concreta que debe formular la maestra para que el problema planteado quede claro. En un cuarto (6 de 17) de los diseños se establece que la maestra debe observar a los alumnos para supervisar y guiar el desarrollo de la actividad y resolver conflictos, plantear buenas preguntas y entablar diálogo que les ayude a comprender, por ejemplo: "La maestra adoptará un diálogo entendedor, rico y explicativo. Tiene que incluir en su explicación ejemplos que ayuden a comprender el objetivo de la actividad (equipo A6)".

Todos los diseños promueven que haya interacción entre los alumnos y, además, en más de dos tercios de los diseños (13 de 17), se prevén espacios de debate o asamblea para que los alumnos compartan ideas y, en un tercio de los diseños (6 de 17), se espera que lleguen a consensos entre ellos, ya sea en gran grupo o entre los alumnos de cada grupo pequeño de trabajo, por ejemplo: "Más tarde, entre todos los niños decidirán cual es el camino más sencillo y rápido para llegar (equipo A2)", o bien "Entre todos se decide una hipótesis final para llegar a la otra clase (equipo A4)".

Algunos de los diseños (3 de 17) son muy dirigidos, en los cuáles la maestra tiene un rol muy intervencionista. No obstante, más de dos tercios de los diseños (12 de 17) contemplan momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad de la actividad (exploración con los robots, formulación de hipótesis, validación de hipótesis usando los robots, argumentación en grupo, etc.) favoreciéndose de este modo la autonomía de los alumnos.

Respecto a la *idoneidad mediacional,* como era de esperar, todos los diseños prevén el uso de Blue-Bot, ya que era una condición de la tarea de la sesión 2. Por lo tanto, se han identificado otros recursos materiales que se indicaban en los diseños. Aunque en la experiencia de la sesión 1 no se mencionaron ni se usaron las alfombras que existen en el mercado para el uso de los robots tipo Blue-Bot o Bee-Bot, casi dos tercios de los diseños (11 de 17) plantean el uso de estas alfombras con objetivos diversos, pero coinciden en la finalidad de limitar los posibles trayectos del robot. Nos preguntamos si ello se puede deber a la costumbre tan arraigada en los estudiantes de consultar en Internet para inspirarse y encontrar ideas a la hora de crear diseños propios.

Los participantes, en la sesión 1, bajo la supervisión de las docentes, practicaron con las tarjetas de programación (Figura 1) para representar sus algoritmos, antes de realizar las pulsaciones en el robot, o bien despué. Las docentes pusieron énfasis en evidenciar el papel de la representación del algoritmo para institucionalizar los conceptos relacionados con el desarrollo del PC. Entonces, sorprende que sólo 3 de los diseños plantee el uso de las tarjetas de representación del algoritmo de programación y, de los 3, sólo 1 forma parte de la actividad ya que los otros 2 lo proponen como un recurso de uso opcional.

Otros recursos que incorporan los diseños son: diferentes tarjetas con imágenes de objetos relacionados con la temática del contexto para poner sobre la alfombra como obstáculos o bien objetivos para el robot; lápiz y papel; un cuento infantil y sus personajes principales (Hansel y Gretel); mapa del tesoro y tesoro (monedas de chocolate); letras de canciones infantiles. Todos estos recursos materiales muestran un esfuerzo en contextualizar la actividad diseñada para favorecer el uso de visualizaciones concretas para la programación de las acciones del robot.

Por otro lado, la mitad de los diseños (9 de 17) dejan explícita la organización de los alumnos durante la actividad. Siempre en pequeños grupos durante el desarrollo de la actividad que requiere la manipulación del robot y en gran grupo en los momentos de puesta en común para compartir ideas y reflexionar sobre el trabajo realizado. Uno de los diseños explicita, además, que se trabajaría con la mitad del grupo, lo que indica una preocupación para poder desarrollar la práctica educativa con las mejores condiciones posibles en cuanto a la cantidad de niños que atender y los recursos que poner a su alcance.

En los diseños se observa una gran atención a la *idoneidad afectiva*, en relación con seleccionar tareas que despierten interés y motivación. De los 17 diseños: 7 se basan en un juego poco competitivo, algunos con “premio” (un tesoro “real” compuesto por monedas de chocolate); 6 en un problema a partir de un contexto cotidiano conocido por los niños (problema con la pecera de la clase, buscar palabras de una canción infantil, encontrar la llave del armario de la clase, etc.); 2 en centros de interés (el espacio y los planetas y los piratas); y 2 en un cuento infantil y sus personajes. Algunos diseños apelan a la empatía de los alumnos con los personajes de los cuentos o de los juegos para que los quieran ayudar y en otros se crea una necesidad de resolver el problema de forma cooperativa porque afecta a elementos que pertenecen al grupo (las llaves del armario no aparecen, los peces de su pecera que se han perdido, el robot se está quedando sin batería). Además, en la mitad de los diseños (9 de 17) se explicita que la maestra animará a los alumnos a que formulen y prueben varias hipótesis hasta encontrar la solución.

En esta misma línea de generar actitudes y sentimientos positivos de participación en la tarea, dos tercios de los diseños (12 de 17) programan momentos de debate y de reflexión en pequeño grupo donde está previsto que los niños intervengan en igualdad para aportar sus ideas, argumenten diferentes hipótesis o soluciones posibles y realicen comentarios que los otros alumnos deberán escuchar activamente para valorarlo, por ejemplo: "Los niños también darán su opinión sobre qué mejoras propondrían para resolver el problema (equipo A8)", o bien, "Motivaremos a los niños a continuar teniendo interés en aprender y adquirir nuevos conocimientos (equipo B8)".

Finalmente, respecto a la *idoneidad ecológica* se han analizado las evidencias en los diseños de los aspectos referentes a la adaptación al currículum y a las conexiones intra e interdisciplinares. Por un lado, los contenidos que se tratan, aunque no se explicitan en ninguno de los diseños, se encuadran en las directrices del currículum actual para la etapa de Educación Infantil de Catalunya, que incorpora por primera vez explícitamente el desarrollo del PC. Por otro lado, el contenido central es el PC y en la mayoría de los diseños (13 de 17) no se expresa explícitamente que se relacione con ningún otro. No obstante, casi en un cuarto de los diseños (4 de 17) la actividad se relaciona efectivamente con otros contenidos: 2 diseños se relacionan con pensamiento numérico y pensamiento espacial (otros contenidos matemáticos); 1 diseño se relaciona explícitamente con el medio ambiente; y otro con la música.

Los diseños cuidan especialmente de los aspectos en relación con la *idoneidad afectiva*, incluyen muchos elementos para motivar e implicar al alumnado en una actividad divertida y que genere emociones positivas. Para ello, principalmente, se aportan contextos de los problemas (centros de interés del alumnado, situaciones muy próximas, cotidianas y conocidas, juegos con premio, cuentos infantiles, etc.), que persiguen la implicación del alumno en la actividad. Los recursos identificados en el análisis de la idoneidad mediacional corroboran esta focalización en la parte emocional del diseño, ya que, en general, la mayoría de los recursos se usan para enriquecer el contexto. En cambio, las tarjetas de programación (Figura 1) que podrían haberse propuesto como recursos facilitadores del aprendizaje y desarrollo del PC no tienen ningún papel central, ya que se incluyen apenas cómo uso opcional.

Con el fin de lograr implicación en las actividades diseñadas, se otorga a los alumnos un papel activo y protagonista para la toma de decisiones y la expresión de justificaciones y argumentos. Para ello, se organizan en grupos de trabajo pequeños que facilite la interacción necesaria (idoneidad interaccional) para que se den estas situaciones de debate y reflexión que la maestra conducirá. Este tipo de diseños de futuros maestros de Educación Infantil con gran preocupación por obtener una alta idoneidad afectiva se encontraron también en Sala-Sebastià, Breda y Farsani (2021; 2022).

Según los resultados, la *idoneidad ecológica* es la que menos preocupa a los futuros maestros, ya que parece que ninguno de los participantes consultó el currículum para asegurar que su propuesta cumplía con las directrices legales. Además, aunque todos los diseños presentan problemas contextualizados, ninguno de ellos presenta un enfoque realmente interdisciplinar. Solo uno trata el medio ambiente de forma transversal y con poca profundidad, y un par de ellos se preocupan de establecer conexiones con otros contenidos dentro de las matemáticas (pensamiento numérico y espacial).

4. Conclusiones

Los CID, que en este trabajo se han utilizado como un elemento metodológico para realizar el análisis de los datos, si se pusieran al alcance de los futuros maestros mediante formación en el Grado, podrían ser usados como un instrumento de diseño y guía de implementación para ayudar a tener presente las diversas facetas didácticas de la práctica educativa y a equilibrarlas y de ese modo posibilitar el desarrollo del conocimiento didáctico en los futuros maestros.

Cuando los futuros maestros diseñan prácticas educativas sin haberles dado un guion detallado de cómo deben ser los diseños, emergen muchos de los elementos de consenso de la comunidad educativa, como que la tarea debe implicar y motivar a los alumnos, que los alumnos deben interactuar, compartir ideas y ayudarse entre ellos, entre otros (BREDA, 2020). Pero hay otros aspectos igual de importantes que no siempre emergen como, por ejemplo, establecer unos objetivos didácticos y unos criterios de evaluación, una secuencia de actividades de dificultad progresiva, mecanismos de institucionalización de los contenidos centrales que sean objetivo de la práctica educativa, entre otros (SECKEL et al., 2022).

Los resultados del estudio, determinados a partir de un contexto particular, presentan limitaciones ya que se han circunscrito a un área concreta de España y los participantes tienen todos un mismo perfil (futuras maestras y maestros de Educación Infantil. Los resultados quizás podrían diferir en algunos aspectos si el estudio fuese realizado con futuros maestros de primaria o con profesores en activo de otra zona geográfica u otro país. También es importante subrayar que los problemas robóticos propuestos también condicionaron a determinados tipos de respuesta y de diseños. Proponer unos problemas distintos podría implicar algunas modificaciones, aunque sutiles, en los resultados encontrados.

Finalmente, se considera relevante incorporar en la formación de los futuros maestros contenidos matemáticos y computacionales para aprender a operar con el robot Blue-Bot y desarrollar su pensamiento lógico, espacial y computacional. Además, se hace evidente la necesidad de instrucción acerca de la didáctica de los contenidos mencionados, por lo que podría ser interesante incluir en la formación de los futuros maestros instrucción acerca de los CID, para que, cuando ejerzan profesionalmente, tengan los conocimientos necesarios para abordar las exigencias del nuevo currículum.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

ALSINA, A. Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. **Epsilon-Revista de Educación Matemática**, Girona, n. 111, p. 67-89, 2022. Disponible en: https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/22043. Accedido el: 19 Mar. 2023.

ARLEGUI, J.; PINA, A. **Didáctica de la robótica educativa: un enfoque constructivista**. Dextra Editorial S.L, 2016.

BENTON, L.; HOYLES, C.; KALAS, I.; NOSS, R. Bridging primary programming and mathematics: Some findings of design research in England. **Digital Experiences in Mathematics Education**, [s.l], v. 3, n. 2, p. 115-138, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x

BREDA, A. Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 34, n. 66, p. 69-88, abril 2020. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 1-41, 2015. DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2015v8n2p%25p

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, abril 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13.

BREDA, A.; PINO-FAN, L. R.; FONT, V. Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 13, n. 6, 15 Junio 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a.

CASEY, J. E.; PENNINGTON, L. K.; MIRELES, S. V. Technology acceptance model: assessing preservice teachers' acceptance of floor-robots as a useful pedagogical tool. **Technology, Knowledge and Learning**, [s.l], 11 Junio 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s10758-020-09452-8.

CATALUNYA. Departament d'Educació. Decret 175/2022, de 27 de setembre, **Decret d'ordenació dels ensenyaments de l'educació básica.** Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, núm. 8762, 2022, 29 setembre. Catalunya: 2022. Disponible en: https://dogc.gencat.cat/ca/document-del-dogc/?documentId=938401. Accedido el: 19 Mar. 2023.

CATALUNYA. Departament d'Educació. Decret 21/2023, de 7 de febrer. **Decret d'ordenació dels ensenyaments de l'educació infantil**. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, núm. 8851, 2023, 9 febrer. Catalunya: 2023. Disponible en: https://dogc.gencat.cat/ca/document-del-dogc/?documentId=951431 Accedido el: 19 Mar. 2023.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education** (6th ed). Routledge, 2007.

ESPAÑA. Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). Real Decreto 95/2022, **Real Decreto de la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.** Madrid: 2022. Disponible en: https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95. Accedido el: 19 Mar. 2023.

ESTEBANELL, M.; LÓPEZ, V.; PERACAULA, M.; SIMARRO, C.; CORNELLÀ, P.; COUSO, D., et al. Pensament computacional en la formació de Mestres. In **Guia didàctica**. Servei de Publicacions UdG, 2018.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, [s.l], v. 33, n. 1, p. 89-105, enero 2010. DOI: https://doi.org/10.1174/021037010790317243.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 4 Enero 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GROVER, S.; PEA, R. Computational thinking in K–12. **Educational Researcher**, [s.l], v. 42, n. 1, p. 38-43, Enero, 2013. DOI: https://doi.org/10.3102/0013189x12463051.

JARA, I.; HEPP, P. Enseñar ciencias de la computación: Creando oportunidades para los jóvenes de América Latina. **Microsoft**, 2016. Disponible en: www.microsoft.com/ es-es/education. Accedido el: 19 Marzo 2023.

KONG, S. C.; LAI, M; SUN, D. Teacher development in computational thinking: design and learning outcomes of programming concepts, practices and pedagogy. **Computers & Education**, [s.l], v. 151, p. 103872, Julio 2020. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103872. Accedido: 19 Marzo 2023.

MORALES-LÓPEZ, Y.; FONT, V. Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 45, 2019. DOI: https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, 2015.

RIBEIRO, C. R.; COUTINHO, C. P.; COSTA, M. F. M. A. Robótica educativa como ferramenta pedagógica na resolução de problemas de matemática no ensino básico. In **Proceedings of the 6th Iberian Conference on Information Systems and Technologies**, p. 15-18, 2011.

SALA-SEBASTIÀ, G.; BREDA, A.; FARSANI, D. Análisis desde la Idoneidad Didáctica de una tarea de medida con futuros maestros de Educación Infantil. **Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 34, n. 2, p. 472-483, 2021.

SALA-SEBASTIÀ, G.; BREDA, A.; FARSANI, D. Future early childhood teachers designing problem-solving activities. **Journal on Mathematics Education**, [s.l], v. 13, n. 2, p. 239-256, 2022. DOI: https://doi.org/10.22342/jme.v13i2.pp239-256

SALA-SEBASTIÀ, G.; BREDA, A.; SECKEL, M. J.; FARSANI, D.; ALSINA, À. Didactic–Mathematical–Computational Knowledge of Future Teachers When Solving and Designing Robotics Problems. **Axioms**, Basel, v. 12, n. 2, p. 119, 26 Enero 2023. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms12020119.

SCHINA, D.; ESTEVE-GONZALEZ, V.; USART, M. Teachers' Perceptions of Bee-Bot Robotic Toy and Their Ability to Integrate It in Their Teaching. In: Lepuschitz, W., Merdan, M., Koppensteiner, G., Balogh, R., Obdržálek, D. (eds) **Robotics in Education. RiE 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing**, [s.l], v. 1316. Springer, Cham, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-67411-3_12.

SECKEL, M. J.; BREDA, A.; FARSANI, D.; PARRA, J. Reflections of future kindergarten teachers on the design of a mathematical instruction process didactic sequences with the use of robots. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, East Sussex, v. 18, n. 10, p. 2163, 2022. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/12442

SECKEL, M. J.; BREDA, A.; FONT, V.; VÁSQUEZ, C. Primary school teachers' conceptions about the use of robotics in mathematics. **Mathematics**, Basel, v. 9, n. 24, p. 3186, 2021. DOI: https://doi.org/10.3390/math9243186

SECKEL, M. J.; VÁSQUEZ, C.; SAMUEL, M.; BREDA, A. Errors of programming and ownership of the robot concept made by trainee kindergarten teachers during an induction training. **Education and Information Technologies**, [s.l], v. 27, n. 3, p. 2955-2975, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10639-021-10708-8.

SULLIVAN, A.; STRAWHACKER, A.; BERS, M. U. Dancing, drawing, and dramatic robots: Integrating robotics and the arts to teach foundational STEAM concepts to young children. In M. S. Khine (Ed.), **Robotics in STEM education: Redesigning the learning experience**, p. 231-260, Springer, 2017b. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-57786-9_10

TANG, A. L.; TUNG, V. W. S.; CHENG, T. O. Dual roles of educational robotics in management education: Pedagogical means and learning outcomes. **Education and Information Technologies**, [s.l], v. 25, n. 2, p. 1271-1283, 23 Octubre 2019. DOI: https://doi.org/10.1007/s10639-019-10015-3

WING, J. Computational Thinking: It represents a universally applicable attitude and skill set everyone's, not just computer scientists, would be eager to learn and use. **Communications of the ACM**, [s.l], v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

ZAPATA-ROS, M. Computational Thinking Unplugged. **Education in the Knowledge Society**, [s.l], v. 20, p. 18-29, 25 Julio 2019. DOI: https://doi.org/10.14201/eks2019_20_a18

Autores

Gemma Sala-Sebastià

Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universitat de Barcelona, Licenciada en Psicopedagogía por la Universitat Oberta de Catalunya, Diplomada en Maestra de Educación Primaria por la Universitat de Barcelona. Actualmente es investigadora i profesora Lector en el Departamento de Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica de la Facultat d'Educació de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España

Correo electrónico: gsala@ub.edu

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9830-312X

Pere J. Falcó-Solsona

Licenciado en Matemáticas por la Universitat de Barcelona, Máster de Formación del Profesorado de Secundaria (especialidad en matemáticas) por la Universitat de Barcelona, Máster de Matemática Avanzada por la Universitat de Barcelona. Actualmente es profesor de matemáticas de Educación Secundaria en Cataluña (España) y estudiante de doctorado de Didáctica de las Matemáticas dentro del programa de Doctorado de Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España

Neus Inglada Rodríguez
Licenciada en Matemáticas por la Universitat de Barcelona, Suficiencia Investigadora por la Universitat de Barcelona. Actualmente es profesora de matemáticas de Educación Secundaria en el INS Can Puig, estudiante de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas en la Universitat de Barcelona y profesora asociada en el Departamento d’Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica de la Facultat d'Educació de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España

Alexandre Cortés da Silva
Graduado en Estadística por la Universitat de Barcelona y la Universitat Politècnica de Catalunya, Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad de Matemáticas) por la Universidad Autónoma de Barcelona. Actualmente es estudiante de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas en la Universitat de Barcelona y profesor asociado en el Departamento d’Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica de la Facultat d'Educació de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España

Cómo citar el artículo:
SALA-SEBASTIÀ, G.; FALCÓ-SOLSONA, P.J.; INGLADA, N.; CORTÉS, A. ¿De qué se preocupan los futuros maestros cuando diseñan problemas robóticos? **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 246 – 268. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p246-268.id1401

Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática: formação continuada nas produções de Mestrado e Doutorado no Brasil (2016-2020)

Roger de Abreu Silva
rogerabreumat@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6029-1482
Universidade La Salle (Unilasalle)
Canoas, Brasil.

Vera Lucia Felicetti
verafelicetti@gmail.com
http://orcid.org/0000-0001-6156-7121
Universidade Católica de Pernambuco (Unicap)
Recife, Brasil.

Luciana Backes
luciana.backes@unilasalle.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-1395-122X
Universidade La Salle (Unilasalle)
Canoas, Brasil.

Adriana Breda
adriana.breda@ub.edu
https://orcid.org/0000-0002-7764-0511
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, Espanha.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumo

Objetiva-se, neste artigo, a partir da Teoria da Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática, compreender os elementos presentes na formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, a partir de um estudo das dissertações e teses brasileiras produzidas entre 2016 e 2020. Justifica-se este estudo, pois a Abordagem Ontossemiótica trata-se de uma teoria recente no campo da Educação Matemática que tem mostrado um uso crescente em cursos de formação de professores no Brasil. A perspectiva metodológica de análise dos dados abordada é a qualitativa, pautada na Análise Textual Discursiva. Os resultados mostram que a formação continuada de professores de matemática, em conjunto com as ferramentas da Abordagem Ontossemiótica, desperta reflexões sobre a prática docente e a mudança da mesma, mobilizando conhecimentos para melhor desenvolvimento de posturas críticas e reflexivas dos professores nos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: formação continuada; ensino de matemática; Abordagem Ontossemiótica; Competências e conhecimentos didático-matemáticos.

Enfoque Ontosemiotico de la Cognición y la Instrucción Matemática: formación continua en producciones de maestría y doctorado en Brasil (2016-2020)

Resumen

El objetivo de este artículo, basado en la teoría del Enfoque Ontosemiotico de la Cognición y la Instrucción Matemática, es comprender los elementos presentes en la formación continua de profesores que enseñan matemáticas en los primeros años de escolarización, a partir de un estudio de disertaciones y tesis brasileñas, producido entre 2016 y 2020. Este estudio se justifica, ya que el Enfoque Ontosemiotico es una teoría reciente en el campo de la Educación Matemática que ha demostrado un uso creciente en los cursos de formación de profesores en Brasil. La perspectiva metodológica del análisis de datos abordada es la cualitativa basada en el Análisis Textual Discursivo. Los resultados indican que la formación continua de los profesores de matemáticas, junto con las herramientas del Enfoque Ontosemiotico, suscita reflexiones sobre la práctica docente y su cambio, movilizando saberes para un mejor desarrollo de las posturas críticas y reflexivas de los profesores en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Palabras clave: formación continua; enseñanza de las matemáticas; Enfoque Ontosemiotico; Competencias y conocimientos didáctico-matemáticos.

Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction: continuing education in master's and doctoral productions in Brazil (2016-2020)

Abstract

The objective of this article, based on the theory of the Ontosemiotic Approach of Cognition and Mathematics Instruction, is to understand the elements present in the permanent training of teachers who teach mathematics in the first years, based on a study of Brazilian dissertations and theses, produced between 2016 and 2020. This study is justified, since the Ontosemiotic Approach is a recent theory in the field of Mathematics Education that has shown increasing use in teacher training courses in Brazil. The methodological perspective of data analysis addressed is the qualitative one based on Discourse Textual Analysis. The results indicate that the permanent training of mathematics teachers, together with the tools of the Ontosemiotic Approach, provokes reflections on teaching practice and its change, mobilizing knowledge for a better development of critical and reflective positions of teachers in the processes of teaching. teaching and learning mathematics.
Keywords: continuous training; mathematics teaching; OSA; DMKC.

Introdução

Diversas produções científicas, realizadas no âmbito de Programas de Pós-Graduação brasileiros, abordam o ensino da matemática na educação básica, demostrando a reflexão sobre as práticas no ensino de matemática na formação continuada de professores. A matemática, assim como outras disciplinas, exige do professor conhecimento sobre o conteúdo a ser ensinado, o currículo e aspectos pedagógicos e didáticos. Para tanto, um constante aprimoramento de tais conhecimentos, por meio de ações de formação docente, contribui para melhorias dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Um dos construtos teóricos que colabora com a formação continuada de professores de matemática e professores que ensinam matemática, é a Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS, a partir de agora) que, recentemente, vem tomando destaque nas produções acadêmicas, principalmente tratando-se da formação de professores no contexto brasileiro (BREDA; BOLONDI; DE ABREU SILVA, 2021).

No âmbito da formação continuada, Imbernón (2010) enfatiza que existe a necessidade de motivar o professor para a mudança de sua prática, e, para isso, é importante que ele reflita sobre a mesma, troque ideias e vislumbre novas possibilidades no seu fazer em sala de aula. A AOS, em colaboração com a formação de professores de matemática, segundo Godino, Batanero e Font (2019) ‒ traduzido em Breda, Bolondi e De Abreu Silva (2021, p. 5) –, considera "[...] as diferentes dimensões, fases, facetas e níveis de análise [...]" que transitam no ensinar e aprender matemática. Para os autores supracitados, os professores precisam ter conhecimentos didático-matemáticos que possibilitem o analisar, o compreender, o explicar e o valorar os processos de ensino-aprendizagem, bem como as competências profissionais necessárias para a atuação nesses processos.

Nesse sentido, a formação continuada de professores de matemática, aliada ao construto AOS, propicia que os professores, em conjunto com seus pares e com professores formadores, avaliem e melhorem suas práticas, colaborando com o que assevera Imbernón (2010, p. 93) sobre a formação continuada de professores, pois, segundo ele, nas práticas de formação continuada os docentes necessitam encontrar a solução das situações-problema enfrentadas por eles no seu dia a dia no território escolar. Para este mesmo autor (2010), o professor, ao conseguir solucionar tais situações, produz uma mudança na prática educacional. Para tanto, a formação continuada precisa estar permeada por momentos de reflexão sobre a prática e contemplar um diálogo construtivo sobre as ações que permitem melhorar essas práticas.

Para, todavia, que haja uma postura reflexiva dos docentes, o diálogo e a troca de experiência entre pares é essencial, e os espaços de formação continuada precisam oferecer tais momentos. De acordo com Schön (2007, p. 222), para que se gere a reflexão sobre a prática a formação docente precisa “cultivar atividades que conectem o conhecimento e a reflexão-na-ação dos profissionais competentes com as teorias e técnicas ensinadas como conhecimento profissional nas disciplinas acadêmicas”, de tal forma que se possa analisar se os processos e as metodologias de ensino empregados são eficientes e apropriados ou se podem ser melhorados, modificados ou mantidos.

A formação enfocada na reflexão docente nas formações continuadas, proporcionada pelas ferramentas da AOS, mostra-se uma formação emergente, uma vez que recentes produções acadêmicas em países como Espanha e Itália, e na América-Latina, como Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, Equador, México, Peru, Panamá e Venezuela, têm mostrado que o construto AOS tem apresentado resultados significativos nos processos de ensino e aprendizagem da matemática a partir da melhora da reflexão docente (KAIBER; LEMOS; PINO-FAN, 2017).

Este artigo apresenta a revisão de literatura concernente à formação continuada de professores que ensinam matemática e que utilizaram a AOS como abordagem teórico-metodológica. Esta revisão tomou como campo investigativo os repositórios brasileiros Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

1. Marco teórico: Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática

A Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS) é uma teoria da Educação Matemática que permite a articulação entre teorias existentes nesse campo e, também, no campo da formação de professores. O marco teórico da AOS considera que, ao ensinarmos conteúdos matemáticos, estamos construindo conhecimentos científicos e tecnológicos. Assim, ao referirmo-nos aos processos de ensino, estamos abordando problemas de caráter ontológico, epistemológico e semiótico sobre o conhecimento matemático, e esse construto teórico os aborda de maneira articulada. O construto AOS também considera que a Didática da Matemática, por ser uma disciplina técnico-científica, assume um caráter valorativo que compõe elementos muitas vezes contraditórios, necessitando uma concepção mais ampliada sobre a prática docente nessa disciplina (gênese, desenvolvimento, difusão, transposição e sua utilização) para uma melhor otimização dos processos de ensino e de aprendizagem (GODINO; BATANERO; FONT, 2019).

Uma releitura de Godino, Batanero e Font (2019), realizada e traduzida por Breda, Bolondi e De Abreu Silva (2021), apresenta que, desde o ponto de vista epistemológico, a AOS leciona que a atividade matemática é uma atividade humana centrada na resolução de problemas, os quais acontecem em um determinado tempo-espaço por meio de uma sequência de práticas que, muitas vezes, são consideradas processos (de atribuir significado, de conjecturar, de argumentar, etc.). Ontologicamente, essas práticas matemáticas são atravessadas por diferentes objetos que cumprem distintos papéis (de representação, de regulação, de explicação e de justificação), nos quais existe uma articulação da noção de práticas, de objetos e de processos, e as dualidades presentes entre eles. Para isso, esta abordagem oferece-nos a ferramenta denominada configuração ontossemiótica de práticas, de objetos e de processos (GODINO, 2014). Desde o ponto de vista semiótico-cognitivo, a AOS assume o princípio de que o conhecimento de um objeto, por parte de um sujeito (seja ele individual ou institucional), é o conjunto de funções semióticas que este sujeito pode estabelecer, nas quais se põe em jogo o objeto como expressão e conteúdo. Além disso, a correspondência entre um objeto e o sistema de práticas em que tal objeto intervém é interpretado como o "significado do referido objeto" (institucional ou pessoal). Para delimitar os significados de um objeto matemático, a AOS propõe a ferramenta denominada análise dos sistemas de práticas (pessoais e institucionais) e das configurações ontossemióticas implicadas nos mesmos (GODINO, 2014; GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Na AOS postula-se que a aprendizagem tem como propósito a apropriação dos significados e objetos institucionais pelos alunos, permitindo-os abordar a solução de certos problemas e se desenvolverem como pessoa. Além disso, o estudo dos significados pessoais dos alunos é um componente essencial do problema educacional, uma vez que a apropriação dos significados institucionais pretendidos é condicionada pelos significados pessoais iniciais dos alunos. Para estudar os processos instrucionais, na AOS realiza-se a análise da configuração didática (sequência de ações docentes e discentes e meios usados para abordar o estudo de uma situação-problema) e da trajetória didática (sequência de configurações didáticas).

A AOS considera essencial identificar os fatores e as normas que direcionam os processos de ensino e aprendizagem, pois possibilita avaliar a relevância das intervenções de professores e alunos, tendo em conta o conjunto de fatores e normas que condicionam o ensino e a aprendizagem; as mudanças nos tipos de padrões que ajudam a melhorar a função e o controle dos processos instrucionais; e a identificação de maneiras de agir sobre alguns fatores que influenciam o sistema. A ferramenta disponibilizada pela AOS para identificar este conjunto de normas é nomeada de tipos de normas e metanormas (GODINO, 2014, p. 38).

Além disso, a AOS oferece princípios, não considerados como regras ou leis gerais, denominados Critérios de Adequação Didática (CAD, a partir de agora), gerados por meio de um consenso na comunidade de Educação Matemática (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018) de como se deve levar a cabo os processos de ensino e aprendizagem da matemática e de como se poderiam melhorar ditos processos. Tais critérios devem ser aplicados localmente, e, nesse sentido, eles devem ser avaliados e adaptados pelo professor e devem referir-se a cada uma das facetas envolvidas nos processos de instrução matemática: epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, de interação e de meios (GODINO, 2013; BREDA, PINO-FAN; FONT, 2017).

Por fim, na AOS a formação de professores deve levar em conta e considerar as diferentes dimensões, fases, facetas e níveis de análise envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem de matemática. Além disso, os professores devem ter o conhecimento didático-matemático necessário para analisar e compreender os processos instrucionais e as competências profissionais necessárias para uma ação adequada em tais processos. As ferramentas da AOS formam um modelo de Conhecimento e Competência Didáticos Matemáticas (CCDM) (GODINO *et al.*, 2016). Esse modelo permite avaliar conhecimentos e competências, guiado por um conjunto de indicadores a cada uma das cinco competências, conforme exposto no ver Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 – Competências do CCDM, seus descritores e o que avalia

Competências do CCDM	Descritores	O que avalia
Competência de análise de significados globais.	– Quais são os significados dos objetos matemáticos envolvidos no estudo do conteúdo pretendido? – Como eles se relacionam?	Sistema de práticas (operacional e discursiva).
Competência de análise ontossemiótica de práticas matemáticas	– Quais são as configurações de objetos e processos colocados em jogo pelos alunos na resolução dos problemas? (configurações cognitivas).	A configuração de objetos e processos matemáticos emergentes e intervenientes nas práticas matemáticas (ontossemiótica).
Competência de análise e gestão de configurações didáticas	– Que tipos de interações entre pessoas e recursos são instituídos nos processos instrucionais e quais são suas consequências na aprendizagem?	A configuração didática, entendida como sistema articulado de funções do professor e do aluno, em relação a uma configuração dos objetos e processos

	– Como gerenciar as interações para otimizar o aprendizado?	matemáticos vinculados a uma situação-problema.
Competência de análise normativa	– Que regras condicionam o desenvolvimento dos processos instrucionais? – Quem, como e quando os padrões são estabelecidos? – Quais e como podem ser alterados para otimizar a aprendizagem matemática?	A dimensão normativa, ou sistema de normas, hábitos, regras pessoais do professor, do aluno e do sistema de ensino que restringem e apoiam as práticas matemáticas e didáticas.
Competência de análise e avaliação da adequação didática	– Qual é o grau de adequação didática do processo de ensino e aprendizagem aplicado sobre o conteúdo? – Que mudanças devem ser introduzidas na concepção e realização do estudo para aumentar sua adequação didática em uma próxima sequência didática?	A noção de adequação didática.

Fonte: Adaptado de Godino *et al.* (2017).

A ferramenta Critérios de Adequação Didática, proposta pela quinta competência, permite a organização e a sistematização da reflexão do professor sobre sua prática quando está em processo de valoração e melhora, podendo, então, o professor utilizar-se dos critérios e seus respectivos componentes durante a reflexão e, assim, ser capaz de identificar elementos importantes no desenvolvimento de uma aula de matemática, valorá-los e adequá-los didaticamente (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018). Os CADs propostos no CCDM, pautados no referencial teórico da AOS, pretendem apontar quais critérios devem ser utilizados para planejar uma sequência de atividades que permita avaliar e desenvolver a competência matemática dos alunos e quais mudanças devem ser feitas no redesenho dessas atividades para melhorar o desenvolvimento de cada competência (GODINO, 2013; PINO-FAN; FONT; BREDA, 2017).

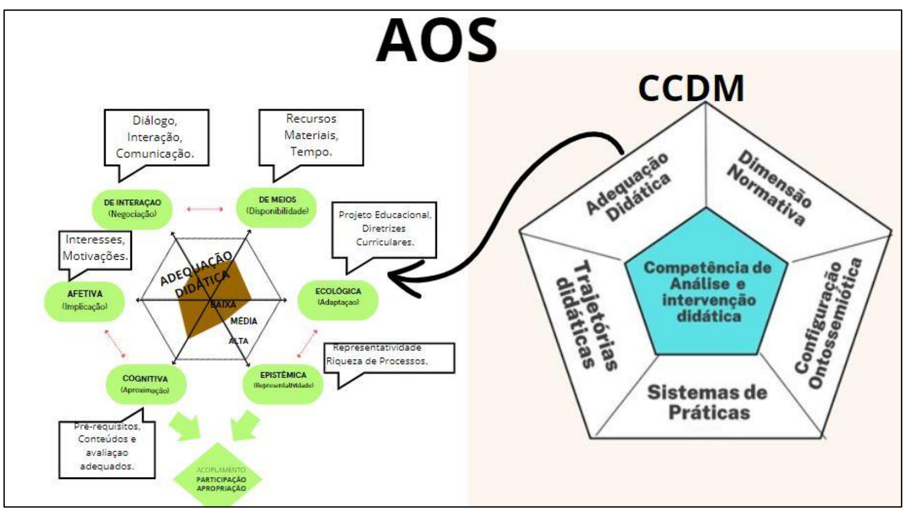
Os CADs tomam como base seis critérios de adequação: epistêmica, cognitiva, de interação, de meios, afetiva e ecológica, os quais podem servir para guiar os processos de ensino e aprendizagem de matemática e para avaliar seu estabelecimento. Na AOS os seguintes CADs são considerados (FONT; PLANAS; GODINO, 2010):

1. Adequação Epistêmica – para avaliar se a matemática ensinada é “boa matemática”;
2. Adequação Cognitiva – para avaliar, antes de iniciar o processo de instrução, se o que se quer ensinar está a uma distância razoável daquilo que os alunos sabem, e, após o processo, se as aprendizagens adquiridas estão próximas daquilo que se pretendia ensinar;

3. Adequação de Interação – para avaliar se as interações resolvem as dúvidas e dificuldades dos alunos;
4. Adequação de Meios – para avaliar a adequação dos recursos materiais e temporais utilizados no processo instrucional;
5. Adequação Afetiva – para avaliar o envolvimento (interesses e motivações) dos alunos durante o processo de instrução;
6. Adequação Ecológica – para avaliar a adequação do processo instrucional ao projeto educacional do centro, além das diretrizes curriculares e das condições do entorno social e profissional.

O CCDM está inserido no construto teórico da AOS, bem como os CADs. Na Figura 1 os seis critérios de adequação, que possibilitam avaliar a competência de adequação didática pertencente ao CCDM, dentro da Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática, são representados de forma articulada. Para cada competência do CCDM há um conjunto de ferramentas que permite identificar a competência de análise e a intervenção didática, como exemplificado na Figura 1 para a adequação didática.

Figura 1 – AOS; CCDM; CAD



Fonte: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/ (tradução nossa).

A operacionalidade dos Critérios de Adequação Didática requer a definição de um conjunto de indicadores observáveis que permita avaliar o grau de adequação de cada um desses critérios. Por exemplo, há um consenso de que é necessário efetuar matemática “boa”, mas é possível entender coisas muito diferentes sobre isso. Em Godino (2013), atualizado em Breda, Pino-Fan e Font (2017), se estabelece um sistema de indicadores que serve como um guia para a análise e a avaliação da adequação didática, que se destina a um processo instrucional em qualquer estágio educacional, explicando como esses critérios foram gerados e seus respectivos componentes e indicadores. Para aplicarmos a AOS na formação de professores, compreendemos as diversas formas de processos de ensino e aprendizagem de matemática e seus níveis de análise. Por conseguinte, os docentes necessitam ter o conhecimento didático-matemático adequado para poder analisar e compreender os processos de instrução matemática e as competências profissionais necessárias para melhor adequação do ensino. As ferramentas que estão nesse construto teórico nos levam a repensar: dimensões e componentes do conhecimento didático-matemático (PINO-FAN; GODINO, 2015) e componentes da competência de análise e intervenção didática (GODINO *et al.*, 2017).

A Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática permite-nos uma reflexão mais acurada sobre a aula de matemática, com o objetivo de aprimorar e adequar as didáticas no ensino e aprendizagem de Matemática, quando aplicada em uma formação de professores. Desta forma, os Critérios de Adequação, presente nesta teoria, contribuem para ampliar o entendimento dos conteúdos de matemática pelos professores, principalmente os que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isso justifica-se, pois durante a formação de professores eles desenvolvem competências e habilidades didático-matemáticas que proporcionam um adequado ensinar aos seus alunos e, em extensão, um melhor aprender.

2. Metodologia

A busca pelas teses e dissertações foi realizada a partir da AOS e da formação continuada de professores que ensinam matemática desenvolvidas no Brasil, em dois repositórios: Biblioteca Digital Brasileira de Teses (BDTD)[8] e Dissertações e Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (Capes)[9]. O recorte temporal levou em consideração os anos de 2016 a 2020 pelo fato de o primeiro trabalho envolvendo CCDM ter sido publicado em 2016. As palavras-chave utilizadas na busca foram: Conhecimentos Didático-Matemáticos, Competência Didático-Matemática, Enfoque Ontossemiótico, Perspectiva Ontossemiótica, Critérios de Adequação Didática, Ontossemiótico, CCDM e Critérios de Adequação Didática. A busca foi

[8] Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/
[9] Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

realizada individualmente para cada uma das oito palavras-chave e, também, por meio da combinação entre elas. A coleta ocorreu no dia 29 de maio de 2021. Foram encontrados 45 trabalhos, dos quais 18 eram teses e 27 dissertações. Quanto à metodologia para análise dos documentos, utilizou-se a abordagem qualitativa submetida à análise e interpretação dos dados em sua profundidade por meio da Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2007). Assim, foram feitas a unitarização e a categorização para se encontrar os elementos que permitiram a produção de um metatexto, que evidenciou relevância acadêmica e aproximação das metodologias aplicadas nas formações continuadas realizadas em conjunto com as ferramentas da AOS.

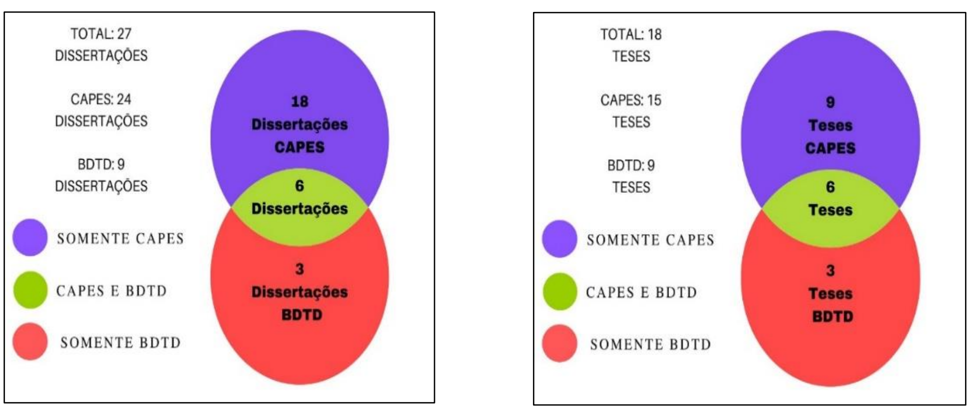
3. Resultados

As seguintes subseções apresentam os resultados deste estudo.

3.1 Unitarização dos resultados

A Figura 2 mostra o quantitativo de teses e dissertações encontradas na Capes e na BDTD. Observa-se que o maior quantitativo de trabalhos está no diretório da Capes, contabilizando 24 dissertações e 15 teses. Na BDTD foram encontradas 9 dissertações e 9 teses. Houve intersecção entre os repositórios, com 6 dissertações e 6 teses presentes em ambos, o que computou, no total, 27 dissertações e 18 teses.

Figura 2 – Quantitativo de teses e dissertações



Fonte: Os autores, 2023.

Do total de 45 trabalhos encontrados, optou-se por analisar, na íntegra, somente os defendidos em Programas de Pós-Graduação em Educação, Educação Matemática, Educação em Ciências e Matemática, Ensino de Ciências e Matemática, Educação Científica e Formação de Professores, Ensino e Educação Matemática e Tecnológica. A razão deste recorte é a de que esses programas estão em sinergia com o programa de atuação dos pesquisadores, autores deste artigo. Deste modo, considerou-se 19 trabalhos (10 teses e 9 dissertações), conforme o Quadro 2, para a leitura da metodologia constante em cada um deles. Essa leitura permitiu identificar o contexto do qual se ocupou cada estudo.

Quadro 2 – Dissertações e teses analisadas

Autor	Título/Área/Instituição	Nível	Ano
Adriana Breda	Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o Mestrado Profmat no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso/Educação em Ciências e Matemática/Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.	D	2016
Rogerio M. Ribeiro	Modelagem matemática e mobilização de conhecimentos didático-matemáticos na formação continuada de professores dos anos iniciais/ /Educação/Universidade Federal de São Carlos.	D	2016
Marcos P. de Carvalho	Um estudo da inserção de estudantes da Licenciatura em matemática no contexto da escola pública: contribuições do Pibid/Educação Matemática/Universidade Anhanguera de São Paulo.	D	2016
Maria E. dos S. Soares	Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por professores dos anos iniciais: uma análise sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico/Ensino de Ciências e Matemática/Universidade Luterana do Brasil.	D	2016
Vanice da S. F. Vieira	O ensino de matemática proposto na coleção de livros didáticos usados nos cursos técnicos de nível médio do Ifect fluminense: contextos e aplicações/Ensino de Ciências/Universidade Cruzeiro do Sul.	D	2016
Andrielly V. Lemos	Estudos de recuperação no Ensino Fundamental: uma investigação no âmbito da geometria sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática/Ensino de Ciências e Matemática/Universidade Luterana do Brasil.	D	2017
José I. F. de Carvalho	Um estudo sobre os conhecimentos didático-matemáticos de probabilidade de professores de matemática do Ensino Fundamental/Educação Matemática/Universidade Anhanguera de São Paulo.	D	2017
Kátia C. L. Santana	Relação professor-materiais curriculares em educação matemática: uma análise a partir de elementos dos recursos do currículo e dos recursos dos professores/Educação Matemática/Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.	D	2017
José F. da Silva	Um estudo do programa de consolidação das Licenciaturas no contexto da formação inicial de professores de matemática/Educação Matemática/Universidade Anhanguera de São Paulo.	D	2017
Patrícia P. G. Carpes	Conhecimentos didático-matemáticos do professor de matemática para o ensino de números racionais/Ensino de Ciências e Matemática/Universidade Franciscana.	D	2019

Luciana C. de Amorim	A atenção dada às emoções na sala de aula pelo professor de matemática: contribuições dos critérios de idoneidade didática/Educação Científica e Formação de Professores/Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.	M	2017
Celma B. Moreira	O desenvolvimento da percepção de espaço na criança da educação infantil: o papel das tarefas/Educação Científica e Formação de Professores /Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.	M	2017
Janaína M. Souza	Materiais curriculares educativos de matemática do pacto/PNAIC: um olhar desde os critérios de idoneidade didática/Educação Científica e Formação de Professores/Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.	M	2018
Danilo M. de Vasconcelos	Entre palavras, quadros e números: uma análise ontossemiótica da construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de histórias em quadrinhos/Educação em Ciências e Matemática/Universidade Federal de Pernambuco.	M	2019
Geisa P. Gomes	A relação professor-matérias curriculares no ensino de matemática: uma análise sob a perspectiva ontossemiótica/Educação Científica e Formação de Professores/Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.	M	2019
Lindomar S. A. Pereira	A gestão de tarefas matemáticas por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental/Ensino/Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.	M	2019
André F. Q. Araújo	A inter-relação entre a estatística e a probabilidade: um estudo com professores de matemática do Ensino Médio sobre a curva normal/Educação Matemática e Tecnológica/Universidade Federal de Pernambuco.	M	2020
Renata B. Ferreira.	Análise da geometria na coleção de livros didáticos de matemática no Ensino Técnico integrado ao Médio do Centro Paula Souza/Ensino de Ciências e Matemática/Universidade Cruzeiro do Sul.	M	2019
Fernanda L. Ribeiro	A geometria nos materiais curriculares brasileiros pelo enfoque ontossemiótico/Ensino de Ciências e Matemática/Universidade Cruzeiro do Sul.	M	2018

D = Doutorado; M = Mestrado.

Fonte: Dados elaborados pelos autores (2021).

Todos os trabalhos listados no Quadro 2 possuem, em sua base metodológica, a Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática, sendo seis teses com este construto teórico voltado aos Conhecimentos Didático-Matemáticos, e uma dissertação tratando dos Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos. Observa-se que no ano de 2020, pela primeira vez, aparecem os Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos.

Das dez teses coletadas, cinco apresentam análise documental, sendo elas as de Carvalho (2016), Santana (2017), Breda (2016), Vieira (2016) e Silva (2017). As outras cinco tiveram a formação continuada de professores da educação básica como âmago da pesquisa. Entre elas, quatro permearam o contexto do Ensino Fundamental, sendo duas os anos iniciais (RIBEIRO, 2016; SOARES, 2016) e três os anos finais (LEMOS, 2017; CARVALHO, 2017; CARPES, 2019).

Das nove dissertações, quatro apresentam análise documental, sendo elas as de Moreira (2017), Ribeiro (2018), Souza (2018) e Ferreira (2019); a dissertação de Gomes (2019) analisa livros didáticos usados por três professoras dos anos iniciais; uma envolve observação participante nos anos finais (AMORIM, 2017) e três tratam da formação continuada, sendo duas com professores do Ensino Médio (VASCONCELOS, 2019; ARAÚJO, 2020) e uma da formação continuada de professores dos anos iniciais (PEREIRA, 2019).

Em sua tese, Carvalho (2016), além da pesquisa documental, também realizou pesquisa de campo com professores que trabalharam no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibid), investigando as contribuições desse programa à formação docente; Santana (2017) analisou, por meio das Dimensões Matemática e Conhecimentos Didático-Matemáticos presentes na AOS, a relação entre professor e material curricular; Silva (2017) apresentou processos de Construção de Conhecimentos, Competências na AOS e o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática e professores formadores, fundamentando-se nos conhecimentos necessários à docência de matemática sob a perspectiva de Shulman (1987) e Ball, Thames e Phelps (2008). Silva (2017) também realizou entrevista semiestruturada com futuros professores; Breda (2016), em uma revisão documental produzida no Mestrado Profissional Profmat, utilizou o construto da AOS para evidenciar fragilidades no programa e a necessidade de reflexão das propostas de ensino por meio dos CADs; e, por fim, Vieira (2016) fez uma análise documental de livros didáticos do Ensino Médio, aplicando os seis critérios de adequação didática da AOS.

Ainda envolvendo análise documental, tem-se as dissertações de Moreira (2017), Ribeiro (2018), Souza (2018) e Ferreira (2019). A opção por examinar materiais curriculares da Educação Infantil no conteúdo de Geometria, trazendo as potencialidades e Limites por meio da análise pelo CAD, foi abordada por Moreira (2017). Ribeiro (2018) apresentou a análise de quadros de adequação didática nas dimensões do CAD: epistêmica, de meios e ecológica em materiais curriculares do 5°ano do Ensino Fundamental. Souza (2018) fez uma investigação nos documentos do Pacto Nacional pela Alfabetização da Idade Certa (PNAC) por intermédio dos CADs. Ferreira (2019) analisou livros didáticos a partir das ferramentas do AOS no conteúdo de Geometria, e apresentou quadros de adequação didáticas nos CADs epistêmico, de meios e ecológico.

As teses de Ribeiro (2016), Carvalho (2017) e Soares (2016) trouxeram a formação continuada de professores do Ensino Fundamental. Ribeiro (2016) ocupou-se da Mobilização de Conhecimentos Didático-Matemáticos na formação de professores dos anos iniciais, utilizando o Modelo CDM e o Modelo de Conhecimento Matemático para o ensino, de Ball, Thames e Phelps (2008). Carvalho (2017) analisou a construção de Conhecimentos Didáticos-Matemáticos da AOS de professores dos anos finais durante uma formação continuada, e trabalhou a elaboração da Engenharia Didática com 40 Professores, realizando o estudo preliminar, o desenho, a execução e a avaliação de uma aula de Matemática. Soares (2016) examinou, mediante as AOS, a experiência docente de professores dos anos iniciais em sintonia com o postulado por Tardif (2012) acerca dos saberes docentes. Ainda no Ensino Fundamental, Lemos (2017), com uma observação participante em sua tese, analisou, com a utilização da AOS, a atuação de professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Já Carpes (2019) empregou os Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) para avaliar cursos de formação de professores.

A formação continuada foi trabalhada por Araújo (2020), Pereira (2019) e Vasconcelos (2019). Araújo (2020) investigou os conhecimentos didático-matemáticos na formação continuada de professores do Ensino Médio, apresentando um estudo dos conhecimentos didático-matemáticos dos docentes com base no Modelo CCDM. Pereira (2019) investigou a gestão de tarefas matemáticas de um grupo de professores dos anos iniciais antes e depois de um processo formativo em uma pesquisa-ação utilizando o CAD. Os dados foram coletados na formação, entrevistas semiestruturadas, nas sequências de tarefas apresentadas pelos participantes e na observação direta. Vasconcelos (2019) trabalhou a construção de uma sequência didática de história em quadrinhos com professores do Ensino Médio em uma formação continuada, tendo como técnica de análise a base teórico-metodológica da AOS.

Amorim (2017) apresentou, por meio de uma observação participante, em aulas de duas professores dos anos finais, as noções teóricas (descrever, analisar, comparar) por elas utilizadas. Trabalhou os aspectos emocionais a partir do CAD. Gomes (2019) expôs a relação problema-materiais curriculares por intermédio de análise com as ferramentas da AOS. A autora analisou materiais didáticos (livros didáticos, paradidáticos, material concreto, entre outros) empregados por três professores dos anos iniciais e coletados mediante pesquisa do tipo exploratória, por meio de observação e entrevistas.

Desses 19 documentos, foram identificados estudos de formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais em 2 teses e 2 dissertações. Foi realizada leitura na íntegra de modo a considerar as aproximações das metodologias empregadas, seus objetivos de estudo, assim como as semelhanças de seus resultados na contribuição da formação continuada em conjunto com a AOS. A opção pela leitura na íntegra dessas quatro pesquisas dão-se pelo interesse dos pesquisadores, autores deste artigo, na formação continuada envolvendo professores que atuam nos anos iniciais com base no CCDM.

3.2 Análise dos dados: construção do metatexto

Respondendo ao objetivo deste estudo – compreender os elementos abordados na formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais em teses e dissertações e que utilizaram a Abordagem Ontossemiótica da Cognição e Instrução Matemática (AOS) – analisamos as aproximações dos resultados dos trabalhos e sua relevância acadêmica. As teses (RIBEIRO, 2016; SOARES, 2016) e dissertações (PEREIRA, 2019; GOMES, 2019) analisadas apresentaram que as Formações Continuadas, em conjunto com as ferramentas do AOS, permitiram aos professores dois elementos bem presentes nas conclusões: *a mobilização de conhecimentos* e *mudanças e reflexões de sua prática*.

3.2.1 Mobilização de Conhecimentos

Mediante a análise dos trabalhos selecionados, pode-se perceber que, quando os professores participam de formações continuadas que permitem uma reflexão sobre o conteúdo a ensinar, e fazem uma análise de suas transposições didáticas, eles repensam as estratégias de ensino aplicadas e validam estes conhecimentos conforme as reflexões geradas nas formações. Essa reflexão pode possibilitar o enriquecimento do processo de ensino desenvolvido no Ensino Fundamental, principalmente dos Anos Iniciais, que carece destes instrumentos em suas formações, tanto inicial quanto continuada.

Nesse sentido, a AOS, em seu modelo de CCDM, traz, em sua abordagem, essa mobilização de conhecimentos, isto é, os professores de matemática articulam os conhecimentos que estão em jogo em uma aula de matemática por meio da forma como descrevem, explicam e avaliam a sua prática nesse ensino (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017). O que podemos perceber nas leituras dos trabalhos é a relevância que as formações continuadas de professores trazem à prática docente e à mobilização de conhecimentos, contribuindo para a ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos, para que estes sejam explorados e apresentados de forma que haja uma compreensão mais acurada sobre a aula de matemática. Godino, Batanero e Font (2019) mostram que o construto AOS permite analisar e compreender os processos instrucionais e proporcionar sua conexão com a mudança de prática dos professores de Matemática, o que corrobora a mobilização de conhecimentos e a mudança de prática relacionadas pelos autores analisados.

A análise nos trabalhos lidos permitiu compreender que a AOS, em uma formação continuada de professores, desenvolve a ação crítica e reflexiva quanto aos conhecimentos abordados pelos professores em relação à sua prática docente. Conforme estudo analisado por Soares (2016) em sua tese doutoral, a formação "[...] oportunizou discussões que permitiram a mobilização de conhecimentos em uma variedade de contextos da prática" (p. 8) e "a investigação também abriu espaço a reflexões que encaminham novas questões de pesquisa direcionadas a um aprofundamento de aspectos relacionados ao conhecimento didático-matemático dos professores." (p. 195). Igualmente, na tese de Ribeiro (2016) esse relata que a formação continuada proporcionou que os professores se "envolvessem em discussões que lhes permitiram usar seus conhecimentos em uma variedade de contextos da prática, contribuindo, assim, para que elas compreendessem como precisam saber esses conteúdos e ajudá-las a compreender como usá-los." (p. 194). Ambos os autores relacionaram que a dimensão Didático-Matemática dos conhecimentos específicos da Matemática deve estar relacionada às práticas em sala de aula. Reconhecemos, em suas conclusões, as dimensões da AOS: Epistêmica, ao abordar diferentes contextos e representatividade do conteúdo a ser ensinado; Cognitiva, ao relacionar a mobilização de conteúdos às práticas, pois assim realizar-se-á uma melhor transposição didática do conteúdo aos alunos, proporcionando, igualmente, melhores possibilidade de aprendizagens; e a Ecológica, ampliando os contextos e inovações didáticas visando, assim, à relação didático-matemática com a mudança de prática.

Conclusões semelhantes são encontradas na dissertação de Pereira (2019): "[...] as professoras ao gerirem as tarefas matemáticas na sala de aula apresentam dificuldades nos conhecimentos didático-matemáticos na gestão do planejamento; as professoras reconhecem a sua importância para o processo de ensino e aprendizagem.” (p. 9) Nesse estudo a mobilização dos conhecimentos tem sua origem nas dificuldades das professoras. Podemos inferir, por meio da análise realizada nesses quatro trabalhos, que muitos educadores apresentam dificuldades na mobilização de conhecimentos e demonstram a necessidade de formação docente com forte relação didático-matemática de conteúdo, corroborando a ideia de Soares (2016), que identificou a “baixa adequação epistêmico-cognitiva, pois as docentes mostraram dificuldades relacionadas ao conhecimento específico do conteúdo.” (p. 138). Os trabalhos apresentados refletem, portanto, a existência de uma grande lacuna de conhecimentos de conteúdo didático-matemático entre os professores que ensinam matemática, sendo um campo de pesquisas com grande potencial para formações continuadas nesta dimensão didático-matemática de mobilização de conhecimentos.

3.2.2 Mudanças e reflexões sobre a prática

A AOS, em sua gênese, prevê ferramentas que promovem a análise e a reflexão didática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008) tratando-se de uma formação continuada de professores. Esse construto possibilita que os professores possam refletir sua prática pedagógica (BREDA; FONT; LIMA, 2015) de forma que haja melhoramentos da ação pedagógica por meio da AOS em formação para mudanças (adequações didáticas) e reflexões sobre suas práticas.

Pereira (2019), em sua investigação, afirmou que a formação trouxe “contribuições para a mudança na prática das professoras” e “propiciou o desenvolvimento de reflexões e o reconhecimento de limitações nas práticas docentes.” (p. 9). O “reconhecer as limitações” contribui para a tomada de consciência sobre o processo pedagógico, identificando aspectos a serem melhorados e instigando a reflexão docente, pois o professor, ao refletir, evidencia a necessidade de adequação de sua prática em relação à realidade do aluno, e pode construir estratégias que melhorem essa prática.

O estudo de Soares (2016) também contemplou a reflexão como mecanismo para que os professores desenvolvessem “posturas mais críticas e reflexivas frente ao ensino de matemática, levando-as a querer realizar efetivamente mudanças em suas práticas.” (p. 8). A presença da efetivação mostra quão significativa é a mudança na ação de continuidade na formação do perfil desses professores. Nos demais trabalhos a reflexão foi abordada enquanto teor da Adequação Epistêmica, no sentido de que a reflexão no conteúdo abordado efetiva a mudança da prática.

Nesse sentido, para Ribeiro (2016) há “mobilização de conhecimentos em uma variedade de contextos da prática, contribuindo, assim, para a compreensão da importância das reflexões acerca das Dimensões Didática e Matemática do CDM para a prática docente.” (p. 8).

Percebe-se que os professores, após a reflexão sobre o conteúdo abordado e sua prática docente, proporcionada pela formação continuada, conseguiram inferir-se criticamente a uma mudança da prática pedagógica, podendo, assim, compreender as dimensões Didático-Matemáticas presentes nas aulas de matemática e conhecendo a necessidade da reflexão crítica sobre o conteúdo a ser ensinado.

4. Considerações Finais

Das buscas nos repositórios de teses e dissertações brasileiros, duas Teses e duas Dissertações permitiram respostas e/ou observações ao objetivo proposto. A partir da ATD realizada, observou-se que a AOS, em conjunto com a formação continuada, possibilitou que os professores desenvolvessem, durante a formação, reflexões sobre a prática docente, mudanças da prática pedagógica e mobilização de conhecimentos para melhorar as suas práticas docentes. Assim, identificamos posturas críticas e reflexivas acerca das práticas pedagógicas por eles desenvolvidas no ensino de Matemática.

Percebe-se que a formação continuada no ensino de Matemática, em um contexto em que se podem inferir ferramentas como o CCDM, propicia aos professores a ampliação da dimensão de conteúdo e a ação de repensar os contextos de suas práticas para adaptação ao contexto de seus alunos, acarretando uma mudança de prática. Essa característica está nas ações dos estudantes (correção da atividade), no objeto de conhecimento, considerando a representação em congruência com os conhecimentos dos estudantes e o contexto, e na natureza dos objetos ontossemióticos, que evidenciam a necessidade de ruptura de práticas anteriores.

Consideramos que o estudo realizado possibilitou uma compreensão mais acurada das pesquisas realizadas que se apropriam das ferramentas da AOS no âmbito da formação continuada de professores, em particular dos que ensinam matemática nos anos iniciais. A partir disso, como perspectiva futura de estudo, pretendemos desenhar e criar um ciclo formativo com professores dos anos iniciais, em exercício, pautados nas ferramentas da AOS e nas competências contempladas pelo modelo CCDM dessa mesma abordagem teórica.

Agradecimentos

Trabalho desenvolvido com apoio de: a) bolsa de estudo integral custeada pelo Município de Sapucaia do Sul, conforme processo seletivo realizado com base no Edital nº 067/2020 da Universidade La Salle (Unilasalle); b) Projeto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ e por "FEDER Uma maneira de fazer Europa"; c) Bolsa Produtividade em Pesquisa 1D do CNPq.

Referências

ARAÚJO, André Fellipe Queiroz. **A inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade:** um estudo com professores de Matemática do Ensino Médio sobre a curva normal. 2020. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

AMORIM, Luciana Correia de. **A atenção dada às emoções na sala de aula pelo professor de matemática:** contribuições dos critérios de adequação didática. 2017. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Bahia, 2017.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What make it special? **Journal of Teacher Education**, [s.l.], v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487108324554

BREDA, Adriana. **Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado Profmat no Rio Grande do Sul:** uma análise dos trabalhos de conclusão de curso. 2016. 335 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Faculdade de Física, Porto Alegre, 2016.

BREDA, Adriana; BOLONDI, Giorgio; DE ABREU SILVA, Roger. Enfoque ontossemiótico da cognição e instrução matemática: um estudo metanalítico das teses produzidas no Brasil. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, p. e202117, 26 jul. 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202117

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; LIMA, Valderez Marina do Rosário. A noção de adequação didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 1-41, 2015. DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2015v8n2p%25p

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; PINO-FAN, Luis Roberto. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, abr. 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BREDA, Adriana; PINO-FAN, Luis Roberto; FONT, Vicenç. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education**, London, v. 13, n. 6, p. 1.893-1.918, 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

CARPES, Patricia Pujol Goulart. **Conhecimentos didático-matemáticos do professor de matemática para o ensino de números racionais.** 2019. 265 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2019.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.** 2017. 344 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

CARVALHO, Marcos Pavani de. **Um estudo da inserção de estudantes da Licenciatura em matemática no contexto da escola pública:** contribuições do PIBID. 2016. 208 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

FERREIRA, Renata Barbosa. **Análise da geometria na coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Técnico integrado ao Médio do Centro Paula Souza.** 2019. 186 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2019.

FONT, Vicenç; PLANAS, Núria; GODINO, Juan Díaz. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y aprendizaje**, [s.l.], v. 33, n. 1, p. 89-105, 2010. DOI: https://doi.org/10.1174/021037010790317243

GODINO, Juan Díaz. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 8, n. 11, p. 111-132, 2013.

GODINO, Juan Díaz. **Síntesis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos:** motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada, 2014. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_14abril14.pdf. Acesso em: 26 jun. 2021.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 2, p. 7-37, jul./dez. 2008.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç; GIACOMONE, Belén. Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. *In:* FERNÁNDEZ, C. *et al.* (ed.). **Investigación en Educación Matemática XX**. Málaga: SEIEM, 2016. p. 288-297.

GODINO, Juan Díaz; GIACOMONE, Belén; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas.

Bolema, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, abr. 2017. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 1, n. 39, p. 37- 42, 2019.

GOMES, Geisa Pereira. **A relação professor-materiais curricular no ensino de matemática:** uma análise sob a perspectiva ontossemiótica. 2019. 121 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Cientifica e Formação de Professores) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb, Bahia, 2019.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação continuada de professores.** Tradução Juliana dos Santos Padilha Porto Alegre: Artmed, 2010.

KAIBER, Carmen Teresa; LEMOS, Andrielly Viana; PINO-FAN, Luís Roberto. Enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 10, n. 23, p. 531-552, 2017.

LEMOS, Andrielly Viana. **Estudos de recuperação no Ensino Fundamental:** uma investigação no âmbito da geometria sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática. 2017. 354 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

MOREIRA, Celma Bento. **O desenvolvimento da percepção de espaço na criança da educação infantil:** o papel das tarefas. 2017 .165 f. Dissertação (Mestrado Programa de Pós-Graduação em Educação Cientifica e Formação de Professores) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb, Bahia, 2017.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva.** Ijuí: Editora Unijuí, 2007.

PEREIRA, Lindomar Santana Aranha. **Gestão de tarefas matemáticas por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2019. 161 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado em Ensino) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb, Bahia, 2019.

PINO-FAN, Luis Roberto; GODINO, Juan Díaz. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, 2015.

PINO-FAN, Luis Roberto; FONT, Vicenç; BREDA, Adriana. Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. *In:* KAUR, B.; HO, W. K.; TOH; T. L.; CHOY, Y B. H. (ed.). **Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Singapore: PME, 2017. p. 33- 40. Vol. 4.

RIBEIRO, Rogerio Marques. **Modelagem matemática e mobilização de conhecimentos didático-matemáticos na formação continuada de professores dos anos iniciais.**

2016. 263 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

RIBEIRO, Fernanda Lisboa. **A geometria nos materiais curriculares brasileiros pelo enfoque ontossemiótico.** 2018. 118 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2018.

SANTANA, Kátia Cristina Lima. **Relação professor-materiais curriculares em Educação Matemática:** uma análise a partir de elementos dos recursos do currículo e dos recursos dos professores. 2017. 163 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, 2017.

SCHÖN, Donald. A. **Educando o profissional reflexivo**. Tradução Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2007. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536310121/. Acesso em: 22 out. 2021.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, [s.l.], v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987. DOI: https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

SILVA, José Fernandes da. **Um estudo do programa de consolidação das Licenciaturas no contexto da formação inicial de professores de matemática.** 2017. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

SOARES, Maria Elaine dos Santos. **Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por professores dos anos iniciais:** uma análise sob a perspectiva do enfoque ontosemiótico. 2016. 230 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2016.

SOUZA, Janaina Melo. **Materiais curriculares educativos de matemática do pacto/PNAIC:** um olhar desde os critérios de adequação didática. 2016. 146 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores, Bahia, 2018.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis: Editora Vozes, 2012.

VASCONCELOS, Danilo Monteiro de. **Entre palavras, quadros e números:** uma análise ontossemiótica da construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de histórias em quadrinhos. 2019. 169 f. Dissertação (Mestrado Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

VIEIRA, Vanice da Silva Freitas. **O ensino de matemática proposto na coleção de livros didáticos usados nos cursos técnicos de nível médio do IFECT Fluminense:**

contextos e aplicações. 2016. 199 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

Autores

Roger de Abreu Silva

Assessor do Ensino de Matemática da Secretaria de Educação da rede Municipal de Sapucaia do Sul e professor da EJA da rede de Gravataí. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (Brasil). Doutorando em Educação da Universidade La Salle, Canoas-RS, Linhas de pesquisa, Educação, Educação Matemática.

rogerabreumat@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6029-1482

Vera Lucia Felicetti

Docente no Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem da Universidade Católica de Pernambuco. Pesquisadora 1D Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Realizou estudos de Pós-Doutorado na Faculdade de Educação da University of Maryland – College Park EUA com bolsa do CNPq. Fez Doutorado no Programa de Pós-Graduação na PUC/RS com estágio docente na Universidade do Texas em Austen – Estados Unidos, com bolsa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Líder da Rede Geres (http://pesquisageres.blogspot.com/). Atua na área de Educação e Educação Matemática, tendo como cerne de suas investigações os seguintes temas: estudante, Educação Superior, egressos da Educação Superior, egressos e estudantes ProUni, formação de professores, processos de ensino e de aprendizagem, comprometimento do estudante, métodos e práticas de ensino.

verafelicetti@gmail.com
http://orcid.org/0000-0001-6156-7121

Luciana Backes

Professora titular da Universidade La Salle – Canoas-RS – Programa de Pós-Graduação em Educação. Possui Graduação em Pedagogia – Habilitação Magistério e Séries Iniciais pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (1996), Especialização em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2002), Mestrado (2007) e Doutorado (2011) em Educação pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos e Sciences de Education pela Université Lumière Lyon 2 (2011). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Digital, atuando, principalmente, nos seguintes temas: processos de ensino e de aprendizagem, construção do conhecimento, formação do educador, práticas pedagógicas, educação *on-line*, educação híbrida, ambiente virtual de aprendizagem, metaverso, Espaço de Convivência Digital Virtual – Ecodi –, hibridismo dos espaços, hibridismo tecnológico digital, hibridismo das linguagens, hibridismo das modalidades, cultura emergente, gamificação e literaturalização das ciências.

luciana.backes@unilasalle.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-1395-122X

Adriana Breda
Professora e pesquisadora na Universitat de Barcelona (UB), Espanha. Possui Pós-Doutorado pela Universitat de Barcelona pelo Programa *Juan de la Cierva Formación*. Mestre e doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (Brasil), Linhas de pesquisa: Educação Matemática e Formação de Professores.
adriana.breda@ub.edu
https://orcid.org/0000-0002-7764-0511

Como citar o artigo:

SILVA, R. A.; FELICETTI, V. L.; BACKES, L.; BREDA, A. abordagem ontosemiótica da cognição e instrução matemática: formação continuada nas produções de Mestrado e Doutorado no Brasil (2016-2020). **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 269 - 292. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p269-292.id1402

Análisis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre clasificación de poliedros con futuros maestros de educación primaria

Juan Pablo Vargas Herrera
jvargahe9@alumnes.ub.edu
https://orcid.org/0000-0001-5127-4931
Universitat de Barcelona
Barcelona, España.

Yuly Vanegas
yuly.vanegas@udl.cat
https://orcid.org/0000-0002-8365-1460
Universitat de Lleida
Lleida, España.

Joaquín Giménez
quimgimenez@ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-4609-1596
Universitat de Barcelona
Barcelona, España.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

En el contexto de la Educación Matemática, se reconoce que el conocimiento estrictamente matemático no es suficiente para la enseñanza de las matemáticas. Diversas investigaciones se han orientado a caracterizar el conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores y en educación secundaria. Sin embargo, en el contexto de la formación de futuros docentes de educación primaria se encuentra en un menor nivel de exploración. El objetivo de este artículo es describir los conocimientos didáctico-matemáticos sobre la clasificación de poliedros de un grupo de futuros maestros de educación primaria. Se presenta una investigación de carácter mixto. Se usan herramientas del enfoque Onto-semiótico para analizar las respuestas de los participantes a una tarea profesional que involucra el uso de material manipulativo. Se encuentra que los futuros maestros identifican y construyen figuras prototípicas. Sus criterios de clasificación estan orientados por elementos perceptivos como la forma, el tamaño y el color; algunos realizan clasificaciones dicotómicas (regulares-irregulares), asignando en ocasiones la categoría de forma equivocada y en algún caso se alude a la simetría como elemento a considerar en una clasificación. Se identifica en el conocimiento de los futuros maestros, errores típicos del aprendizaje de la geometría como el uso de estructuras de 2D para referir a objetos en 3D, así como la denominación incorrecta de figuras geométricas y sólidos. Se propone una discusión en torno a los planteamientos de los programas de formación inicial sobre la educación geométrica de los futuros maestros.

Palabras clave: Clasificación. Educación Primaria. Formación de maestros. Poliedros. Tipos de conocimiento.

Análise dos conhecimentos didático-matemáticos sobre a classificação dos poliedros de futuros professores do ensino primário.

Resumo

No contexto da Educação Matemática, reconhece-se que o conhecimento estritamente matemático não é suficiente para o ensino da matemática. Várias pesquisas têm sido orientadas para a caracterização dos conhecimentos didático-matemáticos necessários para ensino da matemática, tanto no ensino superior, como no secundário. No entanto, no contexto da formação de futuros professores do ensino primário, dita caracterização encontra-se a um nível baixo de exploração. O objetivo deste artigo é descrever os conhecimentos didático-matemáticos sobre a classificação dos poliedros realizado por um grupo de futuros professores de escolas primárias. É apresentada uma investigação mista. Ferramentas da Abordagem Ontossemiótica são utilizadas para analisar as respostas dos participantes sobre uma tarefa profissional. Verifica-se que os futuros professores identificam e constroem figuras prototípicas. Os seus critérios de classificação são guiados por elementos perceptuais tais como forma, tamanho e cor; alguns fazem classificações dicotômicas (regular-irregulares), atribuindo, por vezes, a categoria de forma incorreta, e em alguns outros casos a simetria é aludida como um elemento a ser considerado no processo de classificação. No conhecimento dos futuros professores, são identificados erros típicos da aprendizagem da geometria, tais como a utilização de estruturas 2D para se referir a objetos 3D, bem como a designação incorreta de figuras geométricas e sólidos em geral. É proposta uma discussão sobre as implicações dos programas de formação e a sua responsabilidade na formação geométrica dos futuros professores.

Palavras-chave: Classificação. Ensino básico. Formação de docentes. Poliedros. Tipos de conhecimentos.

Analysis of didactic-mathematical knowledge on classification of polyhedral in prospective elementary school teachers.

Abstract

In the context of mathematics education, it is recognized that strictly mathematical knowledge is insufficient for teaching mathematics. Several investigations have been oriented to characterize the mathematical didactic knowledge necessary for teaching mathematics at higher and secondary education levels. However, in the context of training prospective elementary school teachers, it is at a lower level of exploration. This article aims to describe the didactic-mathematical knowledge about the classification of a polyhedron in a group of prospective elementary school teachers. Research on mixed characters is presented. Tools of the Onto-semiotic approach are used to analyze participants' responses to a professional task. It is found that future teachers identify and construct prototypical figures. Their classification criteria are oriented by perceptual elements such as shape, size and color; some make dichotomous classifications (regular-irregular), sometimes assigning the wrong shape category and in some other cases symmetry is alluded to as an element to be considered in classification. The knowledge of prospective teachers identifies typical errors in the learning of geometry, such as the use of 2D structures to refer to 3D objects, as well as the incorrect naming of geometric figures and solids in general. A discussion is proposed on the implications of training programs and their responsibility in the geometric training of prospective teachers.

Keywords: Classification. Primary education. Polyhedron. Teachers' training. Types of knowledge,

Introducción

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas. Diversas investigaciones han identificado y definido componentes para caracterizar este tipo de conocimiento (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BESWICK; CHAPMAN, 2012; CARRILLO et al., 2017, entre otros). A partir de su esquematización se busca describir, analizar, aportar elementos y promover acciones para mejorar la práctica del profesor y el aprendizaje de los estudiantes.

Existen modelos tradicionales para el estudio de conocimientos requeridos en la enseñanza de las matemáticas los cuales, han generado diferentes líneas de análisis e investigación (SHULMAN, 1986,1987; FENNEMA; FRANKE, 1992; BALL, 2000). Actualmente, se cuenta con una variedad de modelos que complementan o sugieren elementos para este tipo de estudio, entre los que se analizan, por ejemplo, el impacto de ser aprendiz en su propio proceso de aprendizaje (LLINARES; KRAINER, 2006); las creencias y el afecto en el proceso de formación docente (PHILLIPP, 2007) y las relaciones entre las creencias y los conocimientos (SULLIVAN; WOOD, 2008). Otro modelo para el estudio de conocimientos ha sido desarrollado por Ball y su equipo (BALL, THAMES; PHELPS, 2008), en éste se definen seis subdominios del conocimiento, como una evolución de lo descrito por Shulman (1986) y se entiende el conocimiento especializado del profesor de matemáticas como aquel tipo de conocimiento que lo diferencia de la gente del común y, por tanto, le es necesario y, a su vez, le permite desarrollar su labor como profesor de matemáticas.

En esta misma línea, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática, propone el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas - CCDM (PINO-FAN; GODINO, 2015; GODINO et al., 2016). Desde el CCDM se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Así, el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático de los objetos no es suficiente para una práctica adecuada del profesor de matemáticas (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015).

En el CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer, por un lado, conocimientos sobre las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza y, por otra parte, conocimientos sobre elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el "conocimiento del contenido matemático per-se". Éste se divide en dos tipos: conocimiento matemático común y extendido.

Ahora bien, al referir a los conocimientos del profesor que deben estar presentes para enseñar geometría, el panorama es bastante diverso. A pesar del convencimiento que los estudios sobre conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas son un asunto relevante y actual de la didáctica de las matemáticas, la investigación existente está centrada mayoritariamente en el profesorado de educación secundaria en formación o en servicio (GARCIA-GARCIA, 2019), y no así en el nivel inicial o de educación primaria. Adicionalmente, es un hecho ampliamente reconocido que la geometría de los sólidos se ha descuidado en muchos planes de estudios, y su enseñanza recibe poca atención en las aulas de educación primaria (BADIA; CANO, 2013; ESCRIVÁ; JAIME; GUTIÉRREZ, 2018, GUTIÉRREZ; JAIME, 2015, entre otros).

La mayor parte de las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría reportados a la fecha, se han orientado al estudio de formas, en ellos se analiza cómo estudiantes de diversas etapas identifican las propiedades que subyacen a dichas formas y si ello les sirve para clasificarlas (GUILLÉN, 2000; PATKIN, 2015). De acuerdo con Vinner, (1991) y Fujita, (2012) cuando los estudiantes deciden si un objeto pertenece o no a una determinada categoría, pueden dar respuestas sesgadas porque, en su decisión, se privilegian formas prototípicas o comunes. Por otra parte, usando el modelo de Van Hiele, varias investigaciones han reconocido que lo prototípico genera dificultades para pasar de un nivel a otro. Y ello se cumple tanto en el estudio de figuras de la geometría plana como en el de la geometría de los sólidos (ABD et al., 2017; CARREÑO; CLIMENT, 2010; entre otros).

Copley (2000) señala que muchos de los docentes introducen los conceptos geométricos en la clase con un enfoque en el que se privilegia la memorización de nombres y algunas características de las figuras. Adicionalmente, el trabajo geométrico desarrollado en la etapa de 6-12 años mayoritariamente se focaliza en el estudio de figuras planas y no tanto en figuras tridimensionales. En este sentido, Sinclair; Bruce (2015) señalan que pocas investigaciones se han centrado en el pensamiento geométrico de los niños en relación con este tipo figuras.

Dado el panorama actual, se considera que la relevancia de este estudio radica, por una parte, en que se profundiza un tema clave para el estudio de la geometría como lo es la clasificación de sólidos y la geometría 3D, objeto matemático y rama de la geometría que, además, no se aborda regularmente en las aulas de clase (GUILLÉN, 2000; VIEIRA; SANTOS, 2018; GUTIÉRREZ; JAIME, 2015; entre otros). Por otra parte, porque los estudios relativos a los conocimientos y competencias permiten nutrir los espacios y propuestas de formación en que están insertas las diferentes comunidades con las que se trabaja, como en este caso, el grupo de futuros maestros participantes de la investigación.

En esta línea, el presente estudio se plantea la pregunta de investigación ¿cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que evidencian futuros docentes respecto a la clasificación de sólidos geométricos? Se pretende que a partir de la caracterización de estos conocimientos, se diseñen propuestas para la formación docente en las que se consideren las necesidades y retos de las matemáticas escolares, particularmente de la educación geométrica. Para dar respuesta a dicha pregunta, el objetivo de este artículo es caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que evidencia un grupo de futuros maestros de educación primaria cuando abordan una tarea de construcción, análisis y clasificación de sólidos mediante el uso de material manipulativo. Para el logro de este objetivo, se consideran herramientas definidas en el modelo CCDM y se presenta un esquema general de los conocimientos de futuros maestros de primaria. Se plantea una discusión sobre la necesidad de ampliar dichos conocimientos y buscar estrategias para el avance de los programas de formación de profesores para los niveles iniciales.

1. Referentes Teóricos

Se abodarán en este apartado dos elementos fundamentales para la caracterización del conocimiento de futuros maestros. En primer lugar, aspectos referidos a la clasificación de sólidos como parte del conocimiento didáctico-matemático y, posteriormente elementos relativos al Enfoque Ontosemiótico (herramientas de análisis y antecedentes investigativos).

1.1. Aspectos relativos a la geometría de los sólidos

El proceso geométrico de clasificar puede ser entendido como ordenar o disponer por clases algo; se entiende en general, como el agrupamiento de elementos u objetos de acuerdo con la coincidencia que exista entre alguna de sus características, lo cual puede estar pre-establecido o bien, definido mediante la inspección y determinación de alguna particularidad.

Arnas; Aslam (2010) indican que explorar cómo los niños reconocen y clasifican formas geométricas y los criterios que ellos usan en la clasificación, es un elemento fundamental en la determinación del contenido de la educación matemática temprana. Clements et al. (1999) investigaron los criterios que usan los niños en edad preescolar para distinguir miembros de una clase de formas de otras figuras, evidenciando que la primera forma de clasificar es mediante el listado de características reconocibles de forma visual y que, mientras los esquemas se van desarrollando, los niños dependen principalmente de la correspondencia visual.

Por otra parte, Scaglia; Moriena (2005) enuncian que, en el proceso de clasificar figuras en clases establecidas, el uso de figuras prototípicas supone ciertas limitaciones al proceso. Tsamir; Tirosh; Levenson (2008) evidencian que los niños normalmente logran distinguir unas figuras geométricas mejor que otras cuando las agrupan con figuras prototípicas, pero tienen dificultades cuando se trabaja con ejemplos no usuales o al presentar contraejemplos.

Un modelo utilizado en la educación geométrica que brinda herramientas para entender los diferentes tipos de razonamiento es el modelo de Van Hiele. Este modelo explica cómo se produce el desarrollo y evolución del pensamiento geométrico en estudiantes y lo caracteriza utilizando cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales deben ser transitados por los estudiantes para el logro de cada aprendizaje nuevo. Diversas investigaciones han utilizado el modelo de Van Hiele en distintos contextos para el estudio de objetos geométricos y procesos (CONTRERAS; BLANCO, 2002; SCAGLIA; MORIENA, 2005; GUALDRÓN; GUTIÉRREZ, 2007, entre otros). En términos generales, actualmente se sabe que la mayoría de los estudiantes que trabajan en geometría estan entre los niveles 0 y 1 (Visualización y de análisis), de igual forma, existe un amplio consenso en que la apariencia de las figuras y su representación gráfica es un criterio predominante a la hora de estudiar la geometría de las figuras y los sólidos, particularmente en lo concerniente a las definiciones y clasificación de estos.

Finalmente, y con el objetivo de aportar a la caracterización de los conocimientos de futuros profesores de matemáticas, se encuentra la idea de hipótesis de conexión y complejización, según Muñoz et al. (2013). Esta hipótesis consiste en una serie de relaciones entre unos y otros contenidos matemáticos que se desean enseñar. Por una parte aquellos que son base o sustento del proceso de construcción de conocimientos, y por otra, aquellos que se corresponden con elementos más avanzados del nivel en que se da aquel proceso, es decir, de la progresión educativa que se desea alcanzar.

Según Muñoz et al. (2013) al trabajar con figuras planas en nivel de educación infantil, se identifican cinco etapas respecto a la clasificación: identificación, comparación, clasificación, elección y ordenación. desde esta investigación, se sabe que los alumnos en primaria tienen características propias de su edad como una mejor percepción, estructuras más analíticas y estudio de elementos más formales y abstractos. La idea de hipótesis de conexión y complejización, plantea una serie de recomendaciones para la formación de futuros maestros, como el conocimiento profundo de los objetos a enseñar, el uso de conexiones entre conceptos y el diseño de actividades que permitan descubrir elementos en geometría, como propiedades o relaciones entre figuras, etc.

1.2. Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor

En el marco del Enfoque Onto Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2007; GODINO; et al., 2017) se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas denominado modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas del profesor (CCDM) (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018; PINO-FAN; GODINO, 2015). En este modelo, los conocimientos del profesor de matemática se organizan considerando tres dimensiones: matemática, didáctica, y meta-didáctico-matemática. En el CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina el "conocimiento matemático per se". La dimensión matemática refiere, por tanto, a dos tipos de conocimientos que debe tener un profesor de matemática: el conocimiento matemático común y conocimiento matemático extendido (PINO-FAN; GODINO, 2015). El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente se asocia al nivel en que se enseña. El segundo se refiere a que el docente, además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado, debe poseer conocimientos más avanzados, que hacen parte de niveles superiores.

Dado que se entiende que el conocimiento meramente matemático de los contenidos no es suficiente para la práctica docente (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015), se hace necesario que el profesor conozca, además, los diversos factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de tales contenidos matemáticos. En este sentido, la dimensión didáctica del modelo CCDM contempla seis facetas para este tipo conocimiento (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018):

- Faceta epistémica: Referida al conocimiento especializado de la dimensión matemática. En el contexto de este estudio, referirá a los argumentos, estrategias de resolución de tareas/problemas, y de significados parciales que tienen los futuros maestros, respecto de los sólidos y su clasificación.
- Faceta cognitiva: Hace referencia al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Se tienen en cuenta aquellos elementos que el profesor prevé durante la planificación que resultarán en su posterior implementación, incluye posibles respuestas, dificultades o errores de los estudiantes al enfrentar las tareas/problemas propuestos.
- Faceta interaccional: Refiere al conocimiento sobre las interacciones que se dan en el aula, esto implica la preparación del docente para responder a interacciones de tipo profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-recursos y profesor-recursos-estudiantes.
- Faceta mediacional: Incluye el conocimiento de los recursos y medios que puedan mejorar el aprendizaje de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza. En este caso, el estudio que acá se presenta aborda el uso de material tangible (medios cubos) la riqueza de dicho material para el logro de las clasificaciones de los sólidos logrados por los futuros maestros sería un elemento de tipo mediacional.
- Faceta afectiva: En esta faceta se incluyen los conocimientos sobre aspectos afectivos, emocionales, y actitudinales de los estudiantes. Este tipo de conocimiento apunta a la idea de que el docente debe prever las sensaciones y experiencias de sus estudiantes ante una determinada actividad o tarea matemática.
- Faceta ecológica: Se refiere al conocimiento de otros aspectos que influyen en la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se incluyen conocimientos sobre el currículo, los contextos donde se desarrolla la actividad matemática, la sociedad y sus conexiones con la tarea matemática, problemas económicos y demás elementos tanto

intra como extra-matemáticos que aporten o influyan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La dimensión meta-didáctico-matemática del modelo CCDM contempla el conocimiento del profesor necesario para sistematizar la reflexión sobre su propia práctica, lo cual le permite ser capaz de valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos implementados, realizar juicios sobre estos procesos, y llevar a cabo propuestas de rediseño para su mejora en futuras implementaciones (PINO-FAN; CASTRO; FONT, 2022).

Dentro de la literatura en Didáctica de la Matemática se han reportado diversas investigaciones en donde se utiliza el modelo CCDM para estudiar los conocimientos y competencias de profesores de matemática en formación y en servicio, así como en diferentes contextos. Es así como en Gonzato; Godino; Neto (2011) se analizaron los conocimientos didáctico matemáticos que presentaba un grupo de profesores en formación sobre la visualización de objetos tridimensionales, a partir del análisis de diversas investigaciones, contenidos en libros de texto y revisión de varios currículos escolares; se construyen categorías para tareas sobre visualización de objetos tridimensionales y se diseña un cuestionario que permite la detección de dichos conocimientos en alumnos en formación. Por otra parte, en Cruz; Gea; Giacomone (2017) se presenta el diseño de criterios de idoneidad didáctica para lograr caracterizar el conocimiento matemático-didáctico sobre la geometría espacial que se dan en los primeros años escolares.

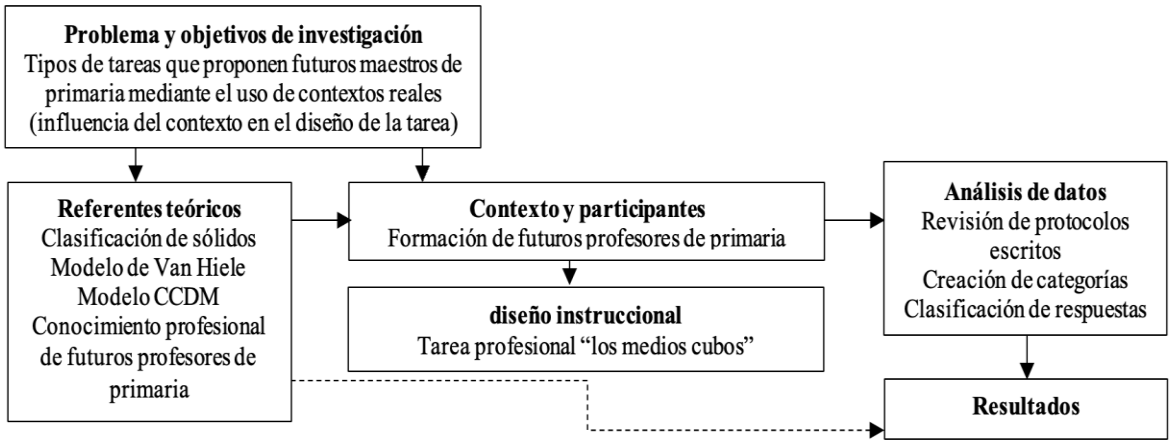
En Godino et al. (2018) se trabaja con profesores en formación y se analiza su competencia de análisis e intervención didáctica, en esta ocasión se aborda una actividad orientada al desarrollo de dicha competencia mediante la explicación y valoración de conocimientos puestos en juego en una clase grabada, en la cual un profesor enseña la semejanza de triángulos a un grupo de estudiantes de secundaria.

Tomando en cuenta la amplitud de temas que abordan los estudios realizados con el modelo CCDM, resulta interesante profundizar en los conocimientos y competencias de futuros maestros de educación primaria, abordando un tema que, hasta el momento, no ha sido estudiado con este constructo teórico, como es el caso de la clasificación.

2. Metodología

La presente investigación, es una investigación basada en el diseño (KELLY; LESH; BAEK, 2008). Se analiza el aprendizaje en contexto a través del diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza. En el esquema presentado en la Figura 1, se muestran las etapas seguidas en la implementación de una tarea profesional en torno a la idea de clasificación de sólidos y el análisis posterior de las respuestas dadas por un grupo de estudiantes del grado de educación primaria.

Figura 1 – Estructura general de la investigación, basado en Molina et al. (2011).



Fuente: Elaborado por los autores.

2.1. Contexto y participantes

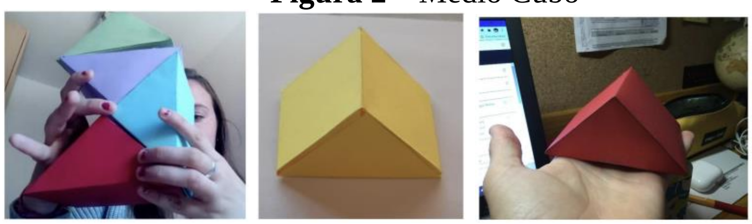
La tarea profesional fue implementada en el grado de educación primaria, participaron 148 estudiantes organizados en 32 grupos (de 3, 4 o 5 personas). Los participantes cursaban el segundo año de su programa. La asignatura en la cual se llevó a cabo la implementación se denomina "Espacio y forma". Esta asignatura es la única relativa a geometría y su didáctica dentro de su programa de formación, por lo que los conocimientos previos de los futuros maestros son únicamente los que poseen de su formación en la educación básica y media.

Los datos de la investigación son las producciones escritas de los diferentes grupos a la tarea profesional. Se recolectan y sistematizan un total de 32 protocolos escritos a través de la plataforma Moodle. El desarrollo de la tarea profesional se realizó en modalidad online, el trabajo fue sincrónico con la profesora. Se hace una primera entrega preliminar (la cual no tuvo retroalimentación) y días después la entrega final, posterior a lo cual se realiza el análisis de la tarea en conjunto y los futuros maestros reciben la retroalimentación y correcciones de sus entregas. Cabe mencionar que en los protocolos se requerían fotografías de las construcciones solicitadas, así como dibujos o representaciones con softwares graficadores.

2.2. Diseño instruccional

El diseño instruccional de esta investigación consistió en una tarea profesional (compuesta por cuatro actividades) diseñada por una de las autoras de este artículo, quien también realizó la implementación de la misma. Para su desarrollo, se solicitó a los futuros maestros elaborar físicamente y haciendo uso de cartulina, cuatro medios cubos, (sólido resultante al realizar un corte diagonal a un cubo, ver Figura 2); las producciones obtenidas con los materiales se constituían en elementos clave para la solución de toda la tarea profesional, por lo que luego de realizar alguna de las actividades, debían hacer un registro fotográfico de las construcciones obtenidas.

Figura 2 – Medio Cubo



Fuente: Elaborado por los autores

En la primera actividad, se solicitaba definir un medio cubo; posteriormente los futuros maestros debían construir sólidos mediante diferentes composiciones utilizando dos medios cubos y luego tres medios cubos. Se solicitó, además, asignar un nombre a cada uno de los sólidos construidos. En la segunda actividad se debían construir sólidos usando cuatro medios cubos, asignar un nombre a cada uno y detallar sus características. También se debía proponer una clasificación de los sólidos obtenidos y enunciar los criterios de clasificación considerados. En la tercera actividad se pregunta qué sólidos no es posible construir con los cuatro medios cubos y se solicita una definición de poliedro y una posible clasificación de los diferentes poliedros existentes. Finalmente, en la última actividad se pide buscar y añadir la imagen de edificios y/o construcciones arquitectónicas en las que se puedan identificar poliedros. Se solicita que se describan sus elementos y que se justifique el porqué de la elección. Dada la extensión de este artículo y los objetivos propuestos, se analizan tres preguntas (ver Cuadro 1) de la segunda actividad.

2.3. Análisis de datos

Para responder al objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que evidencia el grupo de futuros maestros se utilizaron herramientas de análisis del modelo CCDM.

Se asume como plantean Pino-Fan; Godino (2015) que la dimensión matemática refiere a dos tipos de conocimientos. Así, en este estudio se identifican aspectos del conocimiento común del contenido relacionados con los sólidos, sus definiciones y su clasificación. Inicialmente, se utilizó la pregunta 1 (ver Cuadro 1), que indaga sobre los poliedros que pueden construirse con los cuatro medios cubos, así como la denominación y caracterización que realizaron los futuros maestros. Se revisaron y clasificaron los nombres asignados a cada sólido.

Cuadro 1 – Preguntas, tipo de conocimiento e intencionalidad

Nº	Pregunta	Tipo de Conocimiento	Intencionalidad
1	Construye todos los poliedros que se pueden formar con cuatro piezas (medios cubos). Haz una tabla donde presentes su representación gráfica, su nombre y sus características.	Común	Obtener figuras a través de la composición. Identificar variedad de figuras Conocer lenguaje específico para describir figuras
2	Define criterios y clasifica las figuras que has obtenido en el apartado b. Explica que has tenido en cuenta para definir los criterios	Extendido	Generar categorías a partir de características de diferentes figuras.
3	¿Por qué consideras que cuando estudiamos varios tipos de figuras un proceso fundamental a trabajar es la clasificación?	Conocimiento Extendido y Meta-Didáctico	Promover actitud de Indagación. Reconocer las intenciones y motivaciones de una tarea de clasificación.

Fuente: Elaborada por los autores

Posteriormente, se identificaron aquellos conocimientos propuestos en el currículo y/o los libros de texto en educación primaria (por ejemplo, en un curso de geometría a nivel escolar y las conexiones entre los sólidos geométricos y la construcción de edificios en la actualidad). Se identificaron definiciones, propiedades y características que listaron los futuros maestros, se realizan agrupaciones y se definen unas categorías emergentes.

Para identificar aspectos del conocimiento ampliado del contenido, se analizan las respuestas dadas a la pregunta 2 (ver Cuadro 1) por los futuros maestros. Cabe mencionar que este tipo de conocimiento es aquel que deberían tener los futuros maestros, sobre los objetos matemáticos, de modo que, además de permitir su enseñanza en un momento puntual (como los sólidos en un curso de educación primaria), sirvan de base para el tratamiento y enseñanza de otros conocimientos matemáticos de niveles educativos superiores (por ejemplo, criterios de clasificación de sólidos y condiciones suficientes y necesarias para su diferenciación). En la pregunta 2 se solicita a los futuros maestros crear criterios de clasificación para los sólidos que han construido y explicar qué elementos fueron determinantes para la creación de dichas clasificaciones. Las respuestas dadas fueron categorizadas considerando elementos en común, así como patrones. Dado que en esta pregunta se solicitaban explicaciones, fue posible identificar aspectos que en la pregunta anterior no habían emergido.

Finalmente, para abordar el Conocimiento Extendido y Meta-Didáctico, se utilizó la pregunta 3 (ver Cuadro 1) que indagaba sobre la importancia de la clasificación como proceso geométrico. El análisis de esta pregunta se realizó mediante la clasificación de las respuestas en tres categorías que refieren a las relaciones que hay entre las figuras geométricas que se están analizando, la comparación y determinación de semejanzas y diferencias entre las figuras y finalmente en la organización como actividad geométrica. La clasificación de las respuestas se realizó directamente reconociendo elementos micro y macro en las justificaciones dadas por los futuros maestros, tales como objetos geométricos, procesos enunciados, definiciones utilizadas y criterios evidenciados para la construcción de cada justificación.

A partir de estos análisis, se logró describir dificultades, errores y justificaciones presentes en el conocimiento común del contenido que poseen los futuros maestros en relación con las figuras 3D y su clasificación. Para sistematizar las respuestas dadas a la pregunta sobre clasificación, se realiza una lectura inicial. Esta lectura permite la identificación de elementos que se contrastan con diferentes referentes teóricos, lo que permite que la determinación de categorías emergentes como las que se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2 – Aspectos del conocimiento común

Fragmentos de respuesta de los FM	**Categoría emergente**
Establecen una tabla agrupando según el número de vértices. [Identifican que las figuras construidas tienen 8 vértices. La mayoría tienen entre 6 y 12 vértices. Ninguna tiene 11…]. (Grupos 22, 25)	Apariencia perceptiva
“Las figuras cubo, octaedro y prisma triangular se pueden clasificar dentro de un mismo grupo ya que son poliedros regulares, mientras que las figuras 4,5, 6 son totalmente irregulares, y por lo tanto no tienen todas las caras iguales. Así, tenemos dos grupos, las regulares e irregulares”. (Grupo16)	Tentativa de clasificación por agrupación de características conocidas en 2D (regulares, irregulares) pero con errores.
“Hemos tenido en cuenta el tipo de poliedro según sus bases, la regularidad, el número de caras (bases y lados) la forma de sus bases” (Grupo 12)	Reconocimiento correcto de características 2D aplicadas a 3D.
“Hemos considerado si es cóncavo o convexo, la cantidad de vértices y aristas, y la simetría.” (Grupo 3)	Características de observación global de figuras 3D.

Fuente: Elaborada por los autores

Para sistematizar la mirada a los objetos matemáticos y el conocimiento extendido y meta-didáctico se registran los argumentos usados para valorar el proceso de clasificación. Se categorizan las respuestas como se muestra en el Cuadro 3.

Cuadro 3 – Categorías de argumentos dados al valor de la clasificación

Ejemplo de argumento enunciado	Categoría emergente
"…permite a los niños pueden agrupar los objetos según sus semejanzas y diferencias, en función de diferentes criterios: forma, color, tamaño ... Estas relaciones sirven de base para la construcción del pensamiento lógico-matemático. Piaget considera que estas relaciones lógicas son la base de la clasificación, seriación, noción del número y representación gráfica" (Grupo 23)	Permite establecer relaciones lógicas y descubrir nuevos conceptos
"El hecho de clasificar, permite comparar y ver diferencias de otras agrupaciones. También nos permite buscar regularidades entre formas y sus propiedades, comparar semejanzas y diferencias utilizando el vocabulario adecuado, comprender relaciones entre diferentes figuras de tres dimensiones, utilizando propiedades que las definen y buscar con criterio las regularidades y cambios que se producen en una colección o una secuencia" (Grupo 17)	Permite comparar, reconocer características comunes, mediante semejanzas y diferencias
"Es importante porque permite ordenar u organizar las figuras en grupos siguiendo criterios comunes, lo que facilita el desarrollo de la lógica" (Grupo 22)	Permite una organización

Fuente: Elaborada por los autores

3. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos organizados de acuerdo a cada una de las preguntas de la tarea profesional analizadas.

Pregunta 1

Haz una tabla donde presentes la representación gráfica, el nombre y las características de todos los poliedros (diferentes) que se pueden formar con las cuatro piezas

Esta pregunta tenía como intención que los futuros maestros reconocieran diferentes construcciones que se pueden lograr con cuatro medios cubos; que determinaran cuáles de ellas corresponden a poliedros, los nombraran y los describieran. La mayoría de los grupos construyó un Prisma triangular (56,2% de los grupos), Un 46,8% construyó un Hexaedro – Prisma trapezoidal y el mismo porcentaje de grupos construyó un Prisma rectangular. Otros poliedros obtenidos y correctamente nombrados se listan en la Tabla 1.

Tabla 1 – Poliedros construidos por los FM – Pregunta 1

Nombre asignado al poliedro construido	*Cantidad de grupos*	*Porcentaje*
Hexaedro - prisma trapezoidal	15	46,8%
Prisma rectangular	15	46,8%
Prisma triangular	18	56,2%
Octaedro	1	3,1%
Cubo	8	25%
Paralelepípedo	4	12,5%
Prisma tetraédrico	1	3,1%
Prisma tetraédrico irregular	1	3,1%
Ortoedro	2	6,25%

Fuente: Elaborada por los autores

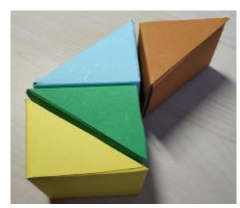
También se encontró que los futuros maestros construyeron una serie de sólidos no poliédricos (32 sólidos). Los hemos denominado "figuras en conexión" pues todos los grupos que los construyeron asignaron nombres de la cotidianidad a dichas estructuras; por ejemplo, un puente, una silla, una mesa. Sin embargo, en muchos de estos sólidos, los medios cubos se presentan separados unos de otros, o coincidiendo únicamente en un vértice. En la Figura 3, se muestran algunos ejemplos de los sólidos y los nombres asignados por los futuros maestros.

Llama la atención que el 76,3% de los grupos nombrase los sólidos como resultado del conteo de sus caras, aun cuando el sólido ya tiene un nombre establecido en geometría, o en algunos otros casos, cometiendo errores en su nominación; en este sentido, se llama prisma hexaedro a un cubo u octaedro a cualquier sólido con ocho caras.

Figura 3 – Figuras en conexión construidas por los futuros maestros

Poliedro irregular "camarón"

La doble rampa



Poliedro irregular "Ducha"

Poliedro irregular "tren"

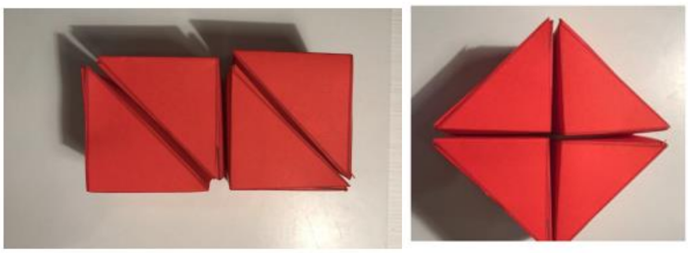
Poliedro irregular "montaña"

"El Pez"

Fuente: Elaborada por los autores

Dentro de las descripciones de los sólidos, la mayoría de los grupos (87,2%) usa el término igualdad para referir situaciones de congruencia. Adicionalmente, una serie de grupos utiliza de manera equivocada términos de la geometría plana para referir a la geometría del espacio; error asociado a la definición de los sólidos en 3D y figuras en 2D, así como a la idea de igualdad que tienen los futuros maestros, indistintamente de la dimensión (Figura 4).

Figura 4 – Sólidos denominados como rectángulo y rombo



Fuente: Elaborada por los autores

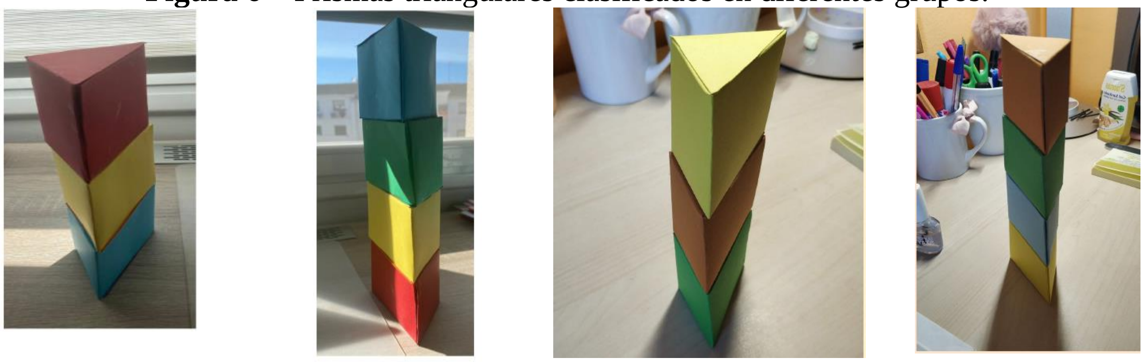
Hay una proporción de grupos (15,6%) que identifica sólidos, únicamente en su posición usual, de manera que, de los 18 grupos que identifican un prisma triangular, 5 de ellos, proponen "otro" sólido denominado "carpa", el cual corresponde al mismo prisma triangular, pero en una posición diferente (base no usual) como se muestra en la Figura 5.

Figura 5 – Sólidos denominados "carpa"

Fuente: Elaborada por los autores

El 42,5% de los grupos considera la longitud como un elemento diferenciador de los sólidos, así, por ejemplo, un prisma triangular construido con dos medios cubos lo asumen diferente a un prisma triangular construido con tres medios cubos y lo constituye como una característica diferenciadora y clasificadora (Figura 6).

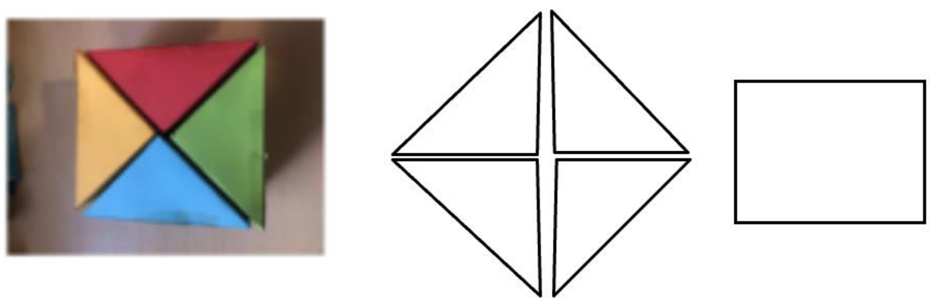
Figura 6 – Prismas triangulares clasificados en diferentes grupos.



Fuente: Elaborada por los autores

Finalmente, entre los errores más usuales en el desarrollo de esta pregunta, encontramos ocho grupos que forman, con los cuatro medios cubos, un sólido que identifican con un cubo, pero que no lo es. En efecto, con cuatro medios cubos, nunca podemos obtener un cubo. Eso muestra una dificultad asociada a la visualización, porque al unir los cuatro medios cubos, se obtiene un prisma rectangular con dos caras cuadradas y cuatro caras rectangulares como se muestra en la Figura 7. Sólo en algún caso evidencian que no es así, diciendo que se trata de un prisma de base cuadrada, pero con altura menor que el lado del cuadrado.

Figura 7 – Falso cubo, formado por 4 medios cubos



Fuente: Elaborada por los autores

Otro error, resulta al nombrar una de las figuras construidas como octaedro, ya que, al combinar los cuatro medios cubos, nunca podemos obtener una cara que sea un triángulo equilátero. En este caso, sólo hay un grupo cometiendo este error.

La Pregunta 2 tenía la intención de identificar el tipo de características, que reconocieron y utilizaron los futuros maestros para clasificar sólidos.

Pregunta 2
Define criterios y clasifica las figuras que has obtenido en el apartado b. Explica que has tenido en cuenta para definir los criterios

La mayoría de los criterios de clasificación dependen de una mera descripción del objeto, es decir que no abordan algún elemento teórico más avanzado, sino que, se queda en un proceso de verificación visual; únicamente un grupo logra rescatar elementos del origen del medio cubo como sección del cubo y de la configuración de las figuras 2D al ubicarse para construir un cuerpo en 3D. Dado que esta pregunta apunta a un tipo de conocimiento extendido, esperábamos que los estudiantes lograran una clasificación, por ejemplo, relacionada con la teoría de los poliedros e incluyeran características heredadas de la configuración y construcción del medio cubo, como una porción de un cubo.

Tabla 2 – Respuestas a la Pregunta 2

Alusiones en la clasificación	Apariencia perceptiva	Características Simetría	Otras clasificaciones	Mirada global	Ninguno
Cantidad de grupos	18	1	9	3	1
Porcentaje	56,25 %	3,12 %	28,12%	9,37 %	3,12%

Fuente: Elaborada por los autores

En general en esta pregunta (ver tabla 2), es posible reconocer que la mayoría de los grupos (56,25%) apuntan a elementos de carácter visual y descriptivo para clasificar los sólidos. Hacen mención, por ejemplo, al número de caras, vértices, lados y bases que tienen los poliedros que lograron construir. En estos casos, clasifican considerando dichos atributos. Si bien otros grupos aluden a características globales (9,37%) proponiendo una clasificación de las figuras como poliedros regulares e irregulares, lo hacen de forma equivocada, ya que ninguna de las figuras construidas es un poliedro regular. Otros grupos (28,12%) al hacer la clasificación hablan de figuras que no son posibles de obtener con los medios cubos, como las pirámides. Algunos otros refieren a prismas como poliedros convexos, lo cual es correcto; en este sentido, un grupo utiliza la idea de ángulo interior para definir convexidad y concavidad, pero no hace un nexo con el criterio de clasificación y la funcionalidad de dicho elemento.

Finalmente, únicamente un grupo (3,12%) estudia elementos de un nivel más avanzado, como lo es la composición de figuras 3D a partir de las condiciones y características propias de figuras en 2D que permiten su construcción, como el contacto entre las caras, dando una idea de concavidad y simetría. En esta categoría clasificaron aquellas figuras que se forman al unir por un vértice o una arista dos cuerpos, pero que no corresponden con poliedros. Es relevante el hecho que casi todos los grupos construyeron sólidos con dicha característica, pero ninguno los clasificó en algún grupo.

En la Pregunta 3 pretendíamos detectar la relevancia de la clasificación como proceso geométrico dentro de los conocimientos que tienen los futuros maestros y, en particular, conocer su pensamiento en torno a dicho proceso.

Pregunta 3
¿Por qué consideras que cuando estudiamos varios tipos de figuras un proceso fundamental a trabajar es la Clasificación?

Algunas respuestas de los futuros maestros resaltan elementos como el desarrollo de procesos mentales:

> "Realizar una clasificación es muy importante, ya que permite a los niños pueden agrupar los objetos según sus semejanzas y diferencias, en función de diferentes criterios: forma, color, tamaño ... Estas relaciones sirven de base para la construcción del pensamiento lógico-matemático. Piaget considera que estas relaciones lógicas son la base de la clasificación, seriación, noción del número y representación gráfica" (Respuesta pregunta 3, Grupo 12).

Mientras que otros apuntaban a elementos de tipo cognitivo, particularmente, la construcción de algún objeto geométrico:

> "Porque antes que nada tenemos que clasificar los elementos para saber de dónde partimos. El proceso de clasificación representa los primeros pasos hacia el aprendizaje de conceptos matemáticos más complejos. La clasificación genera una serie de relaciones mentales a través de las cuales los niños/as agrupan los objetos según su semejanza o diferencia, en función de los distintos criterios: forma, color, tamaño..." (Respuesta pregunta 3, Grupo 22).

Únicamente un grupo presentó evidencia de incluir elementos externos propios del contexto donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje para referir a la importancia de la clasificación:

> "Primeramente, para los niños el hecho de poder distinguir entre los diversos polígonos o figuras geométricas que forman un poliedro (rectángulo, cuadrado, triángulo), le proporciona muchas facilidades a la hora de poder relacionarse con su entorno más cercano. Además, tanto de forma directa como indirecta, las figuras están presentes en su día a día y este hecho hace que a través de las agrupaciones de las diferentes formas puedan relacionar y descubrir nuevos conceptos" (Respuesta pregunta 3, Grupo 27).

En general, la importancia otorgada al proceso de clasificación por parte de los futuros maestros se centra en aspectos como el establecimiento de relaciones; la identificación de propiedades; el reconocimiento de características comunes y no comunes o la idea de clasificación como agrupación. Como puede verse en la Tabla 3, todos los grupos centran la importancia de la clasificación, en que permite distinguir atributos basados en la comparación. Otros simplemente aluden a la clasificación como separación, planteando agrupaciones dicotómicas simples, pero sin una apropiación adecuada de las características de las figuras.

Tabla 3 – Elementos valorados como importantes en el proceso de clasificación

Categorías de explicación	Cantidad de grupos
Permite establecer relaciones lógicas y descubrir nuevos conceptos	17
Permite comparar, reconocer características comunes, mediante semejanzas y diferencias	32
Permite una organización	4

Fuente: Elaborada por los autores

Después de lo observado, podemos decir que la mayoría de los grupos identifican como un gran valor de la clasificación el reconocimiento de características comunes, pero en el momento de clasificar no plantean explícitamente los criterios, sino que enfatizan en el nombre dado a un grupo de figuras como evidencia de la clasificación.

En general, los resultados encontrados evidencian los conocimientos presentes y ausentes en los futuros maestros; respecto a los conocimientos de la dimensión matemática del modelo CCDM, un primer aspecto a destacar es la ausencia de conocimiento teórico sobre la clasificación de sólidos y la falta de criterios de diferenciación de posibles agrupaciones. Tal como se muestra en las tablas 1 y 2 hay conocimiento común sobre los sólidos (poliedros), pero es bastante limitado y en ocasiones erróneo, se manifiesta en las clasificaciones e identificaciones logradas por los futuros maestros; sin embargo, el conocimiento presente en varias ocasiones es erróneo o resulta de características y propiedades desconocidas por los futuros maestros, como se evidencia en las Figuras 3 a la 8.

Como equipo de investigadores, esperábamos encontrar algunas clasificaciones e identificaciones diferentes de los hallazgos presentados anteriormente, llama la atención que ningún grupo indicó que con los medios cubos era imposible lograr conos o esferas lo que, acompañado de las dificultades para identificar poliedros, sus agrupaciones y las implicaciones de la clasificación en elementos de mayor complejidad y mayor nivel escolar en geometría, se constituye en una evidencia más de la falta de conocimiento ampliado sobre las figuras 3D.

Con respecto a los conocimientos de la dimensión didáctica del modelo CCDM, un segundo aspecto a destacar es que el diseño de esta tarea profesional refería principalmente a las facetas, epistémica, mediacional y ecológica; de acuerdo con los resultados encontrados, los futuros maestros reconocen principalmente elementos de la faceta mediacional y aprovechan el uso de material manipulable para lograr conclusiones; sin embargo, el desconocimiento de elementos de la faceta epistémica (conocimiento de los sólidos, sus propiedades y la geometría

3D), les impide avanzar en la adquisición de nuevos conocimientos. Un elemento que es importante resaltar es que a pesar de que varias de las respuestas presentadas por los futuros maestros fueran incorrectas, la faceta ecológica que no se desarrolló en este documento, pero que vale la pena mencionarla) fue fácilmente identificable en sus conocimientos; al solicitar que justificaran la importancia de la clasificación como proceso geométrico y posteriormente pedirles que buscaran poliedros en su entorno, fueron rápidamente identificadas asociaciones y conexiones que realizaron con diversos edificios y construcciones.

4. Discusión y conclusiones

En relación con el conocimiento común, en este estudio se constata que la apariencia perceptual domina sobre ciertos aspectos conceptuales (BERNABEU; LLINARES; MORENO, 2017; GONZATO; GODINO; NETO, 2011). Los futuros maestros identifican básicamente argumentos visuales, semejantes a los que usan los propios niños en las primeras edades. No se observa una aplicación del conocimiento matemático supuesto de las clasificaciones conocidas de las figuras en el plano en el caso de los prismas. Siguiendo la idea de hipótesis de conexión y complejización presentada en Muñoz et al. (2013), es posible identificar las etapas por las cuales avanzan los futuros maestros. En un primer momento, coinciden con la primera etapa de identificación de atributos; en este caso, identifican atributos tanto de tipo global, como particular, pero no son suficientemente claros como para permitir el reconocimiento de particularidades de cada uno de los sólidos encontrados.

Respecto a la etapa de comparación, es posible evidenciar que los futuros maestros intentan reconocer atributos de nuevos sólidos a través de lo que saben sobre otros; sin embargo, no hay un valor asociado a la justificación de dichas semejanzas o diferencias, lo que permite que lleguen a conclusiones erróneas, en tanto la comparación como proceso de reconocer aquellos elementos en común supone un primer paso hacia la comprensión de clasificaciones inclusivas (MUÑOZ et al., 2013). La etapa de clasificación evidenció el uso de criterios no simultáneos y agrupaciones disjuntas en la mayoría de los casos; coincidimos plenamente en que dado el poco nivel de profundidad que presentan los futuros maestros en cuanto a la geometría 3D, las clasificaciones logradas son básicas y con muy bajo nivel de dificultad; los criterios que seleccionaron normalmente, son necesarios pero no suficientes para el logro de clasificaciones correctas, lo que además deja abierto el camino a futuras dificultades y errores en la enseñanza de dichos objetos geométricos.

Coincidimos en que el proceso de clasificación depende de la habilidad de identificar semejanzas y diferencias entre figuras y explicar por qué una cierta figura es un ejemplo de dicha clase (WALCOTT; MOHR; KASTBERG, 2009). A pesar de esto, los resultados evidencian que, al describir elementos de la clasificación, los futuros maestros suelen mostrar los ejemplos y características, pero no tanto los criterios comunes y de distinción, aunque se estén valorando como importantes. Del mismo modo, constatamos que les cuesta reconocer cómo ciertos elementos de visualización se asocian a representaciones que permiten identificar propiedades. Por ejemplo, esperábamos que hubiese propuestas de clasificación donde se consideraran el número de concavidades o de simetrías.

Ahora bien, respecto al conocimiento ampliado, la investigación constata que la falta de conocimientos comunes no permite el avance a otros niveles y estadios del conocimiento; en este sentido, se identifica ausencia de elementos necesarios para la identificación de conocimiento ampliado en los futuros maestros, de ahí que no pudieran establecer criterios de clasificación que dieran paso a clasificaciones inclusivas correctas. De igual manera, el hecho que la riqueza de la clasificación esté dada por la posibilidad de generar comparaciones, identificar elementos en común y diferentes en los sólidos obtenidos, es una evidencia de la falta de conocimiento ampliado sobre la geometría 3D.

El análisis realizado nos permite reiterar que hay un dominio perceptivo en la caracterización de figuras 3D y un nivel bajo de estructuración a partir de propiedades. Las argumentaciones dadas por los futuros maestros sobre el valor de la clasificación están en un nivel inicial, lo que es, además, un indicio sobre cómo podrían a futuro tratar este proceso en la clase de matemáticas en la educación primaria. El resolver la propia pregunta llevó a los futuros maestros a cuestionarse sobre los modelos de clasificación que aparentemente habían aprendido en su etapa escolar, pero al no tener una apropiación amplia de los atributos de los sólidos, no fueron capaces de reconocer propiedades generalizables que les permitirían hacer clasificaciones más ricas.

El lenguaje que se establece en el grupo de estudiantes para maestro es mayoritariamente de naturaleza descriptiva y sugiere que sus miembros se encuentran en el segundo nivel de Van Hiele (GUTIÉRREZ; JAIME, 1998). Podemos decir que interpretamos nuestros resultados en el sentido de mostrar la dificultad en relacionar la comprensión de las figuras geométricas, con la coordinación de dos sistemas semióticos de representación. El discursivo (oral o escrito) y el no discursivo (dibujos, fotos de las figuras) (DUVAL, 2017). En efecto, a pesar de tener los elementos manipulativos los estudiantes no son capaces de formular explicaciones matemáticamente bien formuladas.

Respecto a los conocimientos didácticos-matemáticos y la riqueza del uso del material manipulable, si bien los futuros maestros logran sorprenderse de la gran variedad de figuras que se pueden construir con el material indicado, no parece suficiente para reconocer, por ejemplo, que se pueden obtener diferentes tipos de prismas, y que esta variedad, posibilita proponer diversos tipos de clasificaciones, iniciando con aquellas en las que se privilegia un tipo de atributo, para dar paso luego a unas más complejas donde haya combinación de atributos.

Esto nos lleva a pensar que, el uso de material manipulativo como mediador de las observaciones y respuestas permitió oportunidades de reflexión sobre la congruencia de figuras que se pueden observar en distintas posiciones. Pero no es suficiente para un conocimiento matemático común adecuado, porque muchos grupos no son capaces de sistematizar el proceso de construcción de figuras, y se conforman con haber encontrado unas cuantas.

Consideramos que este tipo de estudios son relevantes, en tanto la determinación de los conocimientos que se han descrito, sirve como punto de partida para propuestas de mejora en torno a los procesos formativos, así como también, desarrollan en los participantes de la investigación, conocimientos nuevos, competencias y procesos que normalmente no se desarrollan en modelos clásicos para la enseñanza de la geometría.

Finalmente, respecto a las herramientas del Enfoque Ontosemiótico y su relación con el diseño de tareas profesionales para la formación de futuros maestros, coincidimos con Godino et al. (2016), en que la mirada a nivel macroscópico de la práctica docente debe constituirse en una competencia del profesor de matemáticas y, por tanto, ser la base para el diseño de acciones formativas. Así es que, "el profesor de matemática debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente" (GODINO et al., 2016, p.282). En este sentido, proponer tareas profesionales a los futuros maestros que aborden conocimientos y competencias en torno a objetos geométricos y pongan en evidencia las dificultades o ausencias de conocimientos permite la discusión con ellos y su formación permanente en torno a dichos elementos. De igual manera, el análisis de la idoneidad didáctica permite una mirada global al proceso de enseñanza y aprendizaje y pone de manifiesto para los futuros docentes, la necesidad de tener en cuenta los diferentes factores que están involucrados en dicho proceso, no solamente lo epistémico y cognitivo como tradicionalmente se ha venido haciendo.

Agradecimientos

Este estudio fue desarrollado en el marco de los proyectos: 72200072 financiado por ANID/PFCHA Chile; PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039 /501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa" y PID2019-104964GB-I00 MICINN.

Referencias

ABD, R.; ABDULLAH, A.; MOKHTAR, M.; ATAN, N.; ABU, M. Evaluation by experts and designated users on the learning strategy using sketchup make for elevating visual spatial skills and geometry thinking. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 819–840. 2017. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a15

ARNAS, Y. A.; ASLAM, A. G. D. Children's classification of geometric shapes. **Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Derogase**, Çukurova, v.19, n.1, p. 254–270. 2010

BADIA, A.; CANO, M. **Dificultades de aprendizaje de contenidos curriculares**. 1 ed. Barcelona: Ed. UOC, 2013.

BALL, D. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 51, p. 241–247, 2000. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special? **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487108324554

BERNABEU, M.; LLINARES, S.; MORENO, M. Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI** (pp. 157–166). Zaragoza: SEIEM, 2017.

BESWICK, K.; CHAPMAN, O. Discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. Conducted at the **12th International Congress on Mathematics Education** held in Seoul, South Korea, 2012.

CARREÑO, E.; CLIMENT, N. Conocimiento del contenido sobre polígonos de estu- diantes para profesor de matemáticas. **PNA**, Granada, v. 5, n. 1, p. 183–195, 2010.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; RIBEIRO, C. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. **RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education**, [s.l], v. 7, n. 2, p. 88–107, 2017.

CLEMENTS, D.; SWAMINATHAN, S.; HANNIBAL, M.; SARAMA, J. Young children's concepts of shape. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s.l], v. 30, p. 192–212, 1999. DOI: https://doi.org/10.2307/749610

COPLEY, J. **The young child and mathematics.** Washington, DC: National Association for the Education of Young Children, 2000.

CONTRERAS, L.; BLANCO, L. Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.), **Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente** (pp. 93–124). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 2002.

CRUZ A.; GEA M.; GIACOMONE B. Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**, 2017.

DUVAL, R. **Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations**. Cham: Springer, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

ESCRIVÁ, M.; JAIME, A.; GUTIÉRREZ, Á. Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. **Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia**, Valladolid, v. 7, n. 1, p. 42–62, 2018. DOI: https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.42-62

FENNEMA, E.; FRANKE, M. Teachers' knowledge and its impact. In A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics** (pp. 147–164). New York, NY, England: Macmillan, 1992.

FONT, V.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97–124, 2013. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

FUJITA, T. Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. **The Journal of Mathematical Behavior**, [s.l], v. 31, n. 1, p. 60–72, 2012. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003

GARCÍA-GARCÍA, J. Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. **Números: Revista de didáctica de las matemáticas**, Canarias, v. 100, p. 129–133, 2019.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. The Onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM**, Hamburgo, v. 39, n. 1, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V.; GIACOMONE, B. Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T.

Fernández y A. Berciano (eds.), **Investigación en educación matemática XIX** (pp. 272–285). Málaga: SEIEM. 2016.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, [s.l], n. 13, p. 63 – 83, 2018. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

GONZATO, M.; GODINO, J.; NETO, T. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 23, n. 3, p. 5–37, 2011. DOI: https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1984

GUALDRÓN, E.; GUTIÉRREZ, A. Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XI** (pp. 369–380). Tenerife, España: Caja Canarias y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. 2007.

GUILLÉN, G. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 18, n. 1, p. 35–53, 2000. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4055

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, v. 20, n. 2&3, p. 27–46, 1998.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. **PNA**, Granada, v. 9, n. 2, p. 53–83, 2015.

KELLY, A.; LESH, R.; BAEK, J. **Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching**. New York, NY: Rotledge, 2008.

LLINARES, S.; KRAINER, K. Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. in A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future** (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers. 2006.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; MOLINA, J.; CASTRO, E. Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 29, n. 1, p. 75–88, 2011. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

MUÑÓZ-CATALÁN, M.; MONTES, M.; CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS-GONZÁLEZ, L.; AGUILAR-GONZÁLEZ Á. **La clasificación de las figuras planas en primaria: Una visión de progresión entre etapas y ciclos**. Universidad de Huelva Servicio de Publicaciones, 2013.

PATKIN, D. Various ways of inculcating new solid geometry concepts. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, Turquía, v. 3, n. 2, p. 140–154, 2015. DOI: https://doi.org/10.18404/ijemst.99466

PHILIPP, R. Mathematics teachers' beliefs and affect. In F.K. Lester (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Pub. 2007.

PINO-FAN, L.; ASSIS, A.; CASTRO, W. Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. **EURASIA J. Math. Sci. Technol. Educ**, London, v. 11, p. 1429–1456, 2015. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

PINO-FAN, L.; CASTRO, W.; FONT, V. A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. **Int. J. Sci. Math. Educ**, Turquía, v. 20, p. 1–26, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

PINO-FAN, L.; GODINO, J. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87–109, 2015. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/552/549

PINO-FAN, L.; GODINO, J.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. **J. Math. Teach. Educ**, [s.l], v. 21, p. 63–94, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

SCAGLIA, S.; MORIENA, S. Prototipos y estereotipos en geometría. **Educación Matemática**, Guadalajara, *v.* 17, n. 3, p. 105–120, 2005.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, [s.l], v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review,** Cambridge v. 57, n. 1, p. 1–22, 1987.

SINCLAIR, N.; BRUCE, C. New opportunities in geometry education at the primary school. **ZDM**, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 319–329, 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4

SULLIVAN, P.; WOOD, T. (Eds.) **The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development.** Rotterdam: Sense Publishers. 2008.

TSAMIR, P.; TIROSH, D.; LEVENSON, E. Intuitive nonexamples: The case of triangles. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, n. 2, p. 81–95, 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5

VIEIRA, P.; SANTOS, L. Compreensão da Representação Bidimensional de Policubos por Alunos do 6o ano em Tarefas de Avaliação Externa. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 847–868, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

VINNER, S. The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991.

WALCOTT, C.; MOHR, D.; KASTBERG, S. Making sense of shape: An analysis of children's written responses. **Journal of Mathematical Behavior**, [s.l], v. 28, p. 30–40, 2009. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.001

Autores

Juan Pablo Vargas Herrera

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Magister en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile y Estudiante del Doctorado en Didáctica de las ciencias, las artes y las humanidades de la Universidad de Barcelona. Ha desarrollado docencia en diversas instituciones de educación secundaria y superior y estudia la formación de futuros maestros de matemáticas, el desarrollo del pensamiento geométrico y los fenómenos asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde el Enfoque Ontosemiótico.

Jvargahe9@alumnes.ub.edu

https://orcid.org/0000-0001-5127-4931

Yuly Vanegas

Doctora en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Barcelona. Profesora Lectora Serra Húnter del Departamento de Matemáticas de la Universitat de Lleida. Miembro del grupo de investigación: Práctica Educativa y Actividad Matemática – GIPEAM. Actualmente coordina el grupo IEMI de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades, la formación de profesores y el aprendizaje interdisciplinar a través de las matemáticas.

yuly.vanegas@udl.cat

https://orcid.org/0000-0002-8365-1460

Joaquín Giménez

Doctor en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona. Profesor Catedrático de Didáctica de las matemáticas en la Universidad de Barcelona. Miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Educación Matemática (CIEAEM), así como de otras redes nacionales e internacionales de investigación en educación matemática. Miembro del grupo de investigación: Grupo de Investigación Enseñanza y Aprendizaje Virtual - GREAV. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes etapas y en la formación del profesorado.

quimgimenez@ub.edu

https://orcid.org/0000-0003-4609-1596

Como citar o artigo:

VARGAS J.; VANEGAS, Y.; GIMÉNEZ J. Análisis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre clasificación de poliedros en futuros profesores de educación primaria. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 293 – 320 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p293-320.id1404

Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de ingeniería comercial en Chile

Maritza Galindo Illanes
maritza.galindo@uss.cl
https://orcid.org/0000-0003-1394-2075
Universidad San Sebastián (USS)
Concepción, Chile.

Adriana Breda
adriana.breda@ub.edu
https://orcid.org/0000-0002-7764-0511
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España.

Hugo Alvarado Martinez
alvaradomartinez@ucsc.cl
https://orcid.org/0000-0002-3729-3631
Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC)
Concepción, Chile.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo presentar un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de ingeniería comercial en Chile, aplicando algunas herramientas del marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). El diseño metodológico considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, integra las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada. El diseño metodológico se implementará en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en una universidad chilena, por lo que el tiempo destinado para el diseño instruccional obedece a lo establecido en el programa de la asignatura, es decir, para la enseñanza de la derivada se dispone de 5 semanas, cada semana considera 4 sesiones presenciales de aula, de 80 minutos cada una, y 2 horas cronológicas de trabajo autónomo. La propuesta de diseño instruccional de enseñanza de la derivada espera superar algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, evidenciadas en diversas investigaciones. En particular, las dificultades de los estudiantes de Ingeniería Comercial. Además de proporcionar un diseño instruccional de enseñanza que ejemplifique el uso de algunas herramientas del EOS.

Palabras clave: Derivada; Diseño Instruccional; Enfoque Ontosemiótico; Estudiantes de Ingeniería Comercial.

Desenho de um processo de ensino da derivada para estudantes de engenharia comercial no Chile

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar o planejamento de um processo de ensino e aprendizagem da derivada para estudantes universitários de engenharia comercial no Chile, aplicando algumas ferramentas do quadro teórico da Abordagem Ontossemiótica (AOS). O desenho metodológico considera várias configurações ontossemióticas nas situações-problema sobre tangentes, cálculo de taxas instantâneas de variação, aplicações da derivada para o cálculo de máximos e mínimos, análise de gráficos de funções e cálculo de derivadas a partir de regras e teoremas de derivação. Além disso, integra as TIC nas diversas atividades, favorecendo a transição entre os tipos de linguagem escrita, numérica, gráfica e simbólica, permitindo que os alunos construam progressivamente o significado da derivada. O desenho metodológico será implementado na disciplina de Cálculo Aplicado aos Negócios em uma universidade chilena, portanto, o tempo destinado ao desenho instrucional obedece ao estabelecido no programa do curso, ou seja, para o ensino da derivada são 5 semanas, cada semana contempla 4 sessões presenciais, de 80 minutos cada, e 2 horas cronológicas de trabalho autónomo. A proposta de desenho instrucional para o ensino da derivada, além de fornecer um design de ensino instrucional que exemplifica o uso de algumas ferramentas do AOS, espera superar algumas das dificuldades de aprendizagem dos alunos de Engenharia Comercial, evidenciadas em pesquisas previas.

Palavras chave: Derivada; Desenho Instrucional; Abordagem Ontossemiótica; Estudantes de Engenharia Comercial.

Design of a derivative teaching process for business engineering students in Chile

Abstract

This paper aims to present an instructional design for teaching the derivative to commercial engineering university students in Chile, applying some tools from the theoretical framework of the ontosemiotic approach (OSA). The methodological design considers various ontosemiotic configurations in the situations-problems on tangents, calculation of instantaneous rates of change and instantaneous rates of variation, applications of the derivative for the calculation of maximums and minimums, analysis of graphs of functions, and the calculation of derivatives. from derivation rules and theorems. In addition, it integrates ICT in the various activities, favoring the transit between the types of written, numerical, graphic, and symbolic languages, allowing the student to progressively build the meaning of the derivative. The methodological design will be implemented in the subject of Calculus Applied to Business at a Chilean university, so the time allocated for the instructional design obeys what is established in the course program, that is, for the teaching of the derivative, It has 5 weeks, each week includes 4 classroom sessions of 80 minutes each and 2 chronological hours of autonomous work. The instructional design proposal for derivative teaching hopes to overcome some of the learning difficulties of students, evidenced in various investigations. In particular, the difficulties of the students of Commercial Engineering. In addition to providing an instructional teaching design that exemplifies the use of some EOS tools.

Keywords: Derivative; Instructional design; Ontosemiotic approach; Business Engineering students.

Introducción

La derivada es uno de los objetos matemáticos fundamentales presente en la formación de los ingenieros, lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (LARIOS; JIMÉNEZ, 2022; LARIOS; MURILLO; REYES, 2021; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2016; RODRÍGUEZ-NIETO; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ; FONT, 2022). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, 2019), lo cual se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios de la derivada en carreras de Ingeniería Comercial destacan tener presente la relación entre los conceptos económicos y matemáticos, siendo los modos de representación los más utilizados en microeconomía (BALLARD; JOHNSON, 2004; BUTLER; FINEGAN; SIEGFRIED, 1994; GARCÍA; AZCÁRATE; MORENO, 2006; HEY, 2005). También, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (ARIZA-COBOS; LINARES-CISCAR, 2009).

En esta línea, este trabajo hace parte de una investigación más amplia que pretende profundizar la comprensión de los futuros ingenieros comerciales acerca al objeto matemático derivada en el contexto chileno. Para atender dicho objetivo, se ha realizado un estudio en diferentes etapas.

La primera etapa fue un estudio diagnóstico, lo cual reveló que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades en el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones(GALINDO ILLANES *et al*., 2022; GALINDO ILLANES; BREDA, 2020).

La segunda etapa fue el estudio del tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, lo cual mostró que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (GALINDO ILLANES; BREDA, 2022).

La tercera etapa fue el estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreas de Ingeniería Comercial en Chile, que registró: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos; b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y; c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada (GALLINDO ILLANES; BREDA, 2023).

Con base en lo anterior, este trabajo tiene como objetivo dar a conocer el diseño de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena. Para ello, se ha tenido en cuenta, además de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (explicadas en la secuencia del texto), los resultados de las etapas del estudio previamente mencionado.

1. Marco teórico

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente en Godino, Batanero y Font (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que tiene lugar en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar, etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que tiene lugar durante la resolución de estas situaciones problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Asimismo, las dualidades antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el "significado de ese objeto" (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (FONT, GODINO Y GALLARDO, 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (GODINO, 2014; GODINO Y BATANERO, 1994).

Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos en el EOS: el caso de la derivada

En Font, Godino y Gallardo (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad en término de una pluralidad de significados es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite. En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. Por ejemplo, en Pino-Fan, Godino y Font (2015), se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

De acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS) (GODINO, BATANERO Y FONT, 2019), por problemas sobre tangentes se entiende las prácticas que realiza el alumno para resolver problemas en los que la pendiente de la recta tangente (significado geométrico de la derivada) tiene un papel relevante en su resolución, lo cual implica concebirla también como "conocimiento y aplicación de las normas" que regulan la práctica y los objetos primarios que intervienen en ella (problemas, procedimientos, proposiciones, definiciones y argumentos) (GALINDO; BREDA, 2020; GALINDO et. al., 2022). De igual forma, consideraremos, en este trabajo, las tres configuraciones epistémicas: manipulativas (el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos sin utilizar notación o cálculo algebraico), algebraica (se caracteriza por un lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso de elementos de álgebra y análisis) y computacional (se caracteriza por el lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo) adaptadas de Alvarado, Galindo y Retamal (2013), en el contexto de la derivada.

2. Metodología

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

Contexto del estudio

Participantes

Participarán en la investigación estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Facultad de Economía y Negocios de una universidad del sur de Chile, con edades entre 19 y 20 años. El plan de estudios de Ingeniería Comercial considera la asignatura de cálculo aplicado a los negocios en el tercer semestre académico, y tiene como prerrequisito el curso de Álgebra o Métodos Cuantitativos.

Bases para una propuesta didáctica

El plan de intervención consideró, para el desarrollo de la enseñanza de la derivada, los siguientes elementos:

a) **Campos de problema**. A partir del significado institucional pretendido y el análisis de referencia de Galindo y Breda (2023), la propuesta considera los campos de problemas sobre: tangentes (CP1), el cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación (CP2), aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones (CP3), y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP4).

b) **Configuraciones epistémicas**. La propuesta considera las configuraciones epistémicas caracterizadas y utilizadas por Galindo et al. (2022), estas son:

   (i) Configuración Manipulativa, el estudiante trabaja con papel, regla y lápiz. El lenguaje utilizado en esta configuración es el característico de los procedimientos descriptivos y de la geometría analítica.

   (ii) Configuración Computacional, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, *GeoGebra* (versión gratuita) y código QR. El lenguaje y los procedimientos son de tipo gráfico, geométrico y descriptivo.

   (iii) Configuración Algebraica, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, Software educativos como *Symbolab* (versión gratuita) y *Wolfram Alpha* (versión gratuita). El lenguaje y procedimientos son de tipo simbólico y tabular.

c) **Trabajo presencial de aula y trabajo autónomo fuera de aula**. La trayectoria didáctica considera sesiones en aula y sesiones fuera del aula, todas dirigidas por el docente de la asignatura. Las sesiones de aula se desarrollan en formato presencial y en los horarios establecidos de clases. Sin embargo, las sesiones fuera de aula no tienen horario establecido y considera el trabajo autónomo del estudiante.

3. Resultados

Desarrollo de la enseñanza

El programa de actividad curricular de Cálculo Aplicado a los Negocios se desarrolla en 15 semanas, cada semana dispone de 4 sesiones presenciales en aula, cada sesión tiene una duración de 80 minutos. Además, cada semana dispone de 2 horas cronológicas de trabajo autónomo, declaradas en el programa curricular de la asignatura.

La unidad 1 de aprendizaje corresponde al estudio de la derivada de funciones reales, para el desarrollo de la enseñanza se contemplan 5 semanas de clases, considerando la Temporalización y Planificación descritas en el Cuadro 1:

Cuadro 1 – Temporalización y Planificación de los Campos de Problemas.

Semana	CP	Sesiones Presenciales (SP)	Tiempo SP	Sesiones Trabajo Autónomo (TA)	Tiempo TA
1	1	1 - 4	320 minutos	1	120 minutos
2	2	5 - 8	320 minutos	2	120 minutos
3	3	9 - 12	320 minutos	3	120 minutos
4	4	13 - 16	320 minutos	4	120 minutos
5	4	13 - 16	320 minutos	4	120 minutos

Fuente: Elaboración de los autores

Las sesiones presenciales de aula se realizaron en los horarios establecidos para las clases teóricas y prácticas, las actividades consideradas fueron individuales y grupales colaborativas favoreciendo el dialogo, la retroalimentación y la consolidación de los conocimientos adquiridos por el estudiante durante su trabajo autónomo. Las sesiones fuera de aula son parte del trabajo autónomo del estudiante e incluyen actividades como visualizar videos educativos, leer apuntes teórico-práctico y realizar las tareas, disponibles en la plataforma virtual Moodle.

La planificación del estudio de los campos de problemas de la derivada contempla veinte sesiones presenciales de aula y cinco sesiones de trabajo autónomo fuera de aula, en un tiempo de cinco semanas (ver Cuadros 2, 3, 4, 5 y 6).

Cuadro 2 – Semana 1: Temporalización y Planificación de los Problemas sobre Tangentes.

Sesión Presencial (SP)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1	Tarea SP1	Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.	Tabular Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
2	Tarea SP2	Identificación de la recta tangente a una curva.	Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
3	Tarea SP3	Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular. (Consolidar utilizando teoría de límite intuitivamente)	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
4	Tarea SP4	Articulación de la derivada de una función en un punto y su función derivada. (Consolidar utilizando teoría de límite)	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
5	Tarea SP5	Aplicación de la función derivada (Utilizando definición de límite)	Gráfico Simbólico Descriptivo	Computacionales
Sesión Trabajo Autónomo (TA)	**Acción didáctica**	**Objetivo de la acción didáctica**	**Lenguajes**	**Configuraciones**
1	Tarea TA1	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la construcción de la ecuación de una recta tangente a una curva.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
2	Tarea TA2	Aplicación de la recta tangente a problemas económicos. Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores

Para comenzar el estudio de la derivada, es fundamental construir previamente el concepto de la recta tangente a una curva considerando las concepciones cartesiana y euclidiana (GALINDO, et al., 2022), para esto en la sesión presencial 1 y 2 (Tarea SP1 y Tarea SP2) y en las sesiones de trabajo autónomo (Tarea TA1 y Tarea TA2) se propone a los estudiantes resolver tareas que le permitirán ampliar la concepción euclidiana a la cartesiana, mediante la construcción de la recta tangente como límite de rectas secantes utilizando configuraciones manipulativas y computacionales, a través de las gráficas utilizando regla y lápiz, y del uso de un applet de *GeoGebra*, el lenguaje utilizado será mayormente geométrico. Además, con el propósito de la tematización del esquema de recta tangente (GALINDO, et al., 2022) se consideran aplicaciones económicas, relacionando el concepto de pendiente de la recta secante con el de costo medio y el concepto de costo marginal como la aproximación de los costos medios calculados, destacando su equivalencia con la pendiente de la recta tangente.

En la sesión presencial 3, se considera la Tarea SP3 que relaciona la pendiente de la recta tangente a una curva con la derivada de la función en el punto de tangencia. El propósito es consolidar en el estudiantado el concepto de derivada puntual como límite de pendientes de rectas secantes, conociendo el proceso de la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto de tangencia, (ORTS et al., 2016). En la sesión de trabajo autónomo (Tarea TA2) se consolida la interpretación geométrica de la derivada, fortaleciendo el vínculo entre la recta tangente y la derivada en un punto.

La sesión presencial 4, articula la derivada de una función en un punto y su función derivada. Para ello se considera la Tarea SP4 que promueve el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de f', la expresión simbólica de la función $f(x)$ es conocida y se construye la función que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, ésta corresponde a la función simbólica de $f'(x)$ (FONT, 2005), entre los ejercicios desarrollados se considera el problema propuesto por Galindo, et al., (2022).

En la sesión presencial 5, se generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. Se espera que el estudiante interprete la función derivada $f'(x)$ como la función cuyas imágenes, $y_0 = f'(x_0)$, corresponden a las pendientes de las rectas tangentes a la función f en x_0, a través de la Tarea SP5 que corresponde a la manipulación de unos applets de *GeoGebra*.

A continuación, se consideran ejemplos de algunas tareas realizadas durante la semana1:

Figura 1 – Tareas sesión presencial 1

TAREA SESIÓN PRESENCIAL 1 CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS
Objetivo de la acción didáctica: Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.

Tiempo de duración: 80 minutos.

i. Problema 1: 30 minutos.
ii. Problema 2: 10 minutos.
iii. Problema 3: 10 minutos.
iv. Problema 4: 10 minutos.
v. Reflexión y cierre por problema: 20 minutos.

PROBLEMA 1. Sea $f(x) = x^2$ una función real de variable real. Determine la pendiente de las rectas secantes que contiene a los puntos $P(-1,1)$ y $Q\big(x, f(x)\big)$.

$Q\big(x, f(x)\big)$	$(1,1)$	$(0.5{,}0.25)$	$(-0.5{,}0.25)$
$Pendiente\ PQ$			

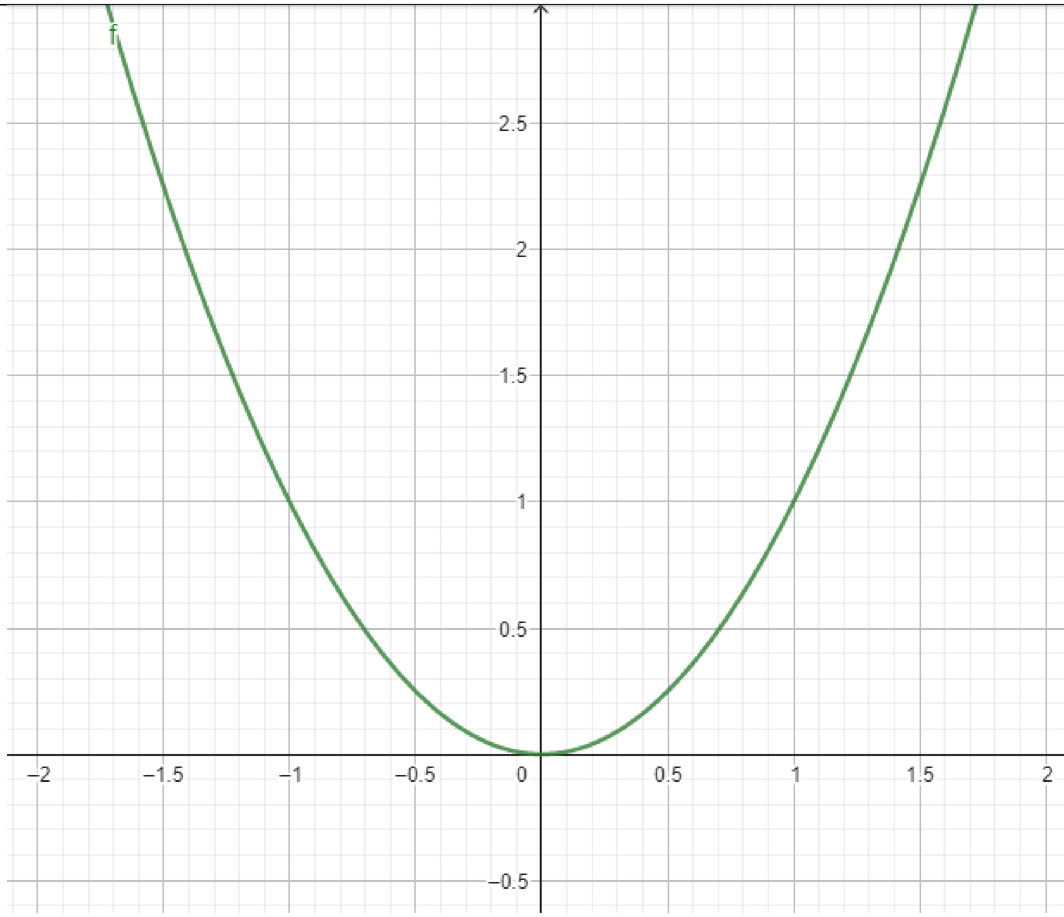
Aproximándose al $Punto\ P$ por la derecha:

b) ¿Cuál es el valor aproximado de la $Pendiente\ de\ la\ recta\ PQ$ cuando el $Punto\ Q$ se aproxima a P por la derecha?

c) Ahora, plantea dos nuevos puntos que se aproximen al $Punto\ P$ por la derecha y calcula las respectivas $Pendientes\ de\ las\ rectas\ PQ$.

$Q\big(x, f(x)\big)$	(,)	(,)
$Pendiente\ PQ$		

d) Grafique las rectas secantes a f , considerando los puntos propuestos en a) y b).



Aproximándose $Punto\ P$ por la izquierda:

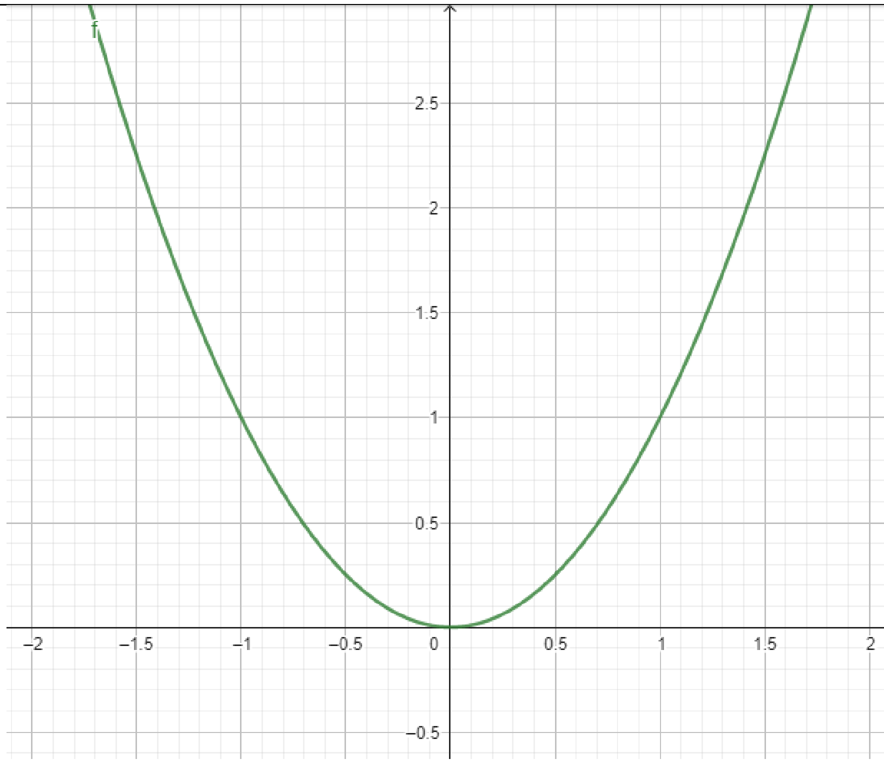
$Q(x, f(x))$	$(-2,4)$	$(-1.5,2.25)$	$(-1.3,1.69)$
$Pendiente\ PQ$			

e) ¿Cuál es el valor aproximado de la $Pendiente\ de\ la\ recta\ PQ$ cuando el $Punto\ Q$ se aproxima a P por la izquierda?

f) Ahora, plantea dos nuevos puntos que se aproximen al $Punto\ P$ por la izquierda y calcula las respectivas $Pendientes\ de\ las\ rectas\ PQ$

$Q(x, f(x))$	(,)	(,)
$Pendiente\ PQ$		

g) Grafique las rectas secantes a f, considerando los puntos propuestos en e) y f).



Ahora, concluya respecto a las gráficas elaboradas.

¿Entre qué valores debe estar la pendiente de la recta tangente a la curva en el $Punto\ P$?

PROBLEMA 2. Utilice su teléfono para escanear el siguiente código QR o acceda al siguiente link https://ggbm.at/pPAJ6Zf8.

Fije el punto A sobre la curva y aproxime el punto $\boldsymbol{B}$ (perteneciente a la gráfica de la función) $\boldsymbol{f}$, hacia el punto $\boldsymbol{A}$. Explique con sus palabras por qué puede determinar la pendiente de la recta tangente $\boldsymbol{f}$ en el punto de abscisa **4** y determine su valor.

Fuente: Elaboración de las autoras.

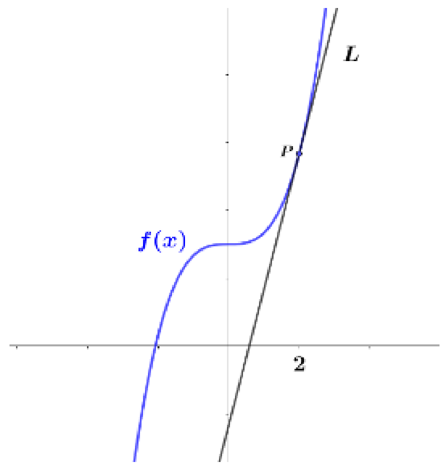
Figura 2 – Tareas sesión presencial 2

TAREA SESIÓN PRESENCIAL 2
CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

Objetivo de la acción didáctica: Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular.
Tiempo de duración: 80 minutos.

- Problema 1: 20 minutos.
- Problema 2: 40 minutos.
- Reflexión de cierre: 20 minutos.

PROBLEMA 1. Considerando el gráfico de la función $\boldsymbol{f}$. Determine la derivada de $\boldsymbol{f}$ en el punto de abscisa $\mathbf{2}$, si se sabe que la recta $\boldsymbol{L}$ es tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa $\mathbf{2}$ y ésta corta al eje $\boldsymbol{x}$ en $\mathbf{7/12}$ y corta al eje $\boldsymbol{y}$ en $\mathbf{-7/3}$. Justifique adecuadamente.



PROBLEMA 2. Sea $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ una función real de variable real.

a) Con apoyo de *Symbolab*, obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x_0 = 1}$, es decir, $\boldsymbol{m_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

b) ¿Cuál es el valor de la derivada de la función $\boldsymbol{f}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x_0 = 1}$?

c) Complete la siguiente tabla.

x_0	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(x_0)$											

d) Basado en la tabla anterior, represente los puntos $(\boldsymbol{x_0, f'(x_0)})$ en un plano cartesiano.

e) Trace la gráfica de la curva que contiene los puntos $(\boldsymbol{x_0, f'(x_0)})$.

Modele la curva antes dibujada para cualquier punto y explique en propias palabras lo que ella representa.

Fuente: Elaboración de los autores.

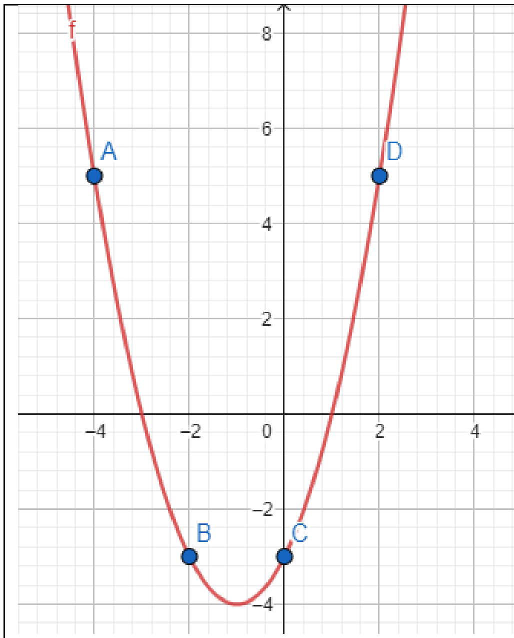
Figura 3 – Tareas sesión presencial 4

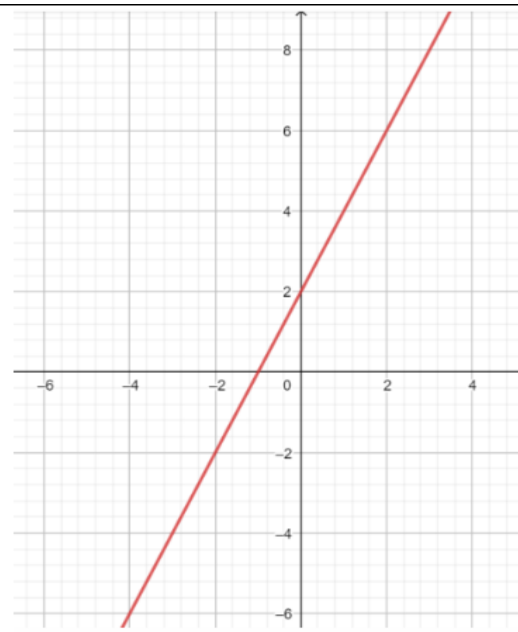
TAREA SESIÓN PRESENCIAL 4
CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

Objetivo de la acción didáctica: Aplicación de la función derivada
Tiempo de duración: 60 minutos.

- Problema 1: 20 minutos.
- Problema 2: 20 minutos.
- Problema 3: 20 minutos.
- Reflexión y cierre por problema: 20 minutos.

PROBLEMA 1.
Se sabe que la gráfica de una función f es: y la gráfica de su función derivada f' es:





a) Observando el gráfico de la función derivada, determine: $\boldsymbol{f'(-4), f'(-2), f'(0)\ y\ f(2)}$
b) Determine la pendiente de la recta tangente a la función en $\boldsymbol{x = -4, x = -2\ y\ x = 2}$.
c) Determine la ecuación de la recta tangente a la función en:$A(-4{,}5),\ B(-2,-3),\ C(0,-3)\ y\ D(2{,}5)$
d) Determine donde la $\boldsymbol{f'(x)}$ es: positiva, negativa e igual a cero.

PROBLEMA 2. Realizar el cálculo de las funciones derivadas utilizando la definición de límite:
$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$
a) $f(x) = x^2$

Utilice su teléfono para escanear el siguiente código QR o acceda al siguiente link
https://www.geogebra.org/m/nymrqbbn

Para los siguientes ítems utilice el applet anterior y cambie la función según corresponda.

b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = x^2 + 1$
d) $f(x) = x^2 + 2x$

Fuente: Elaboración de los autores.

Figura 4 – Tareas sesión Trabajo Autónomo TA2

TAREA TRABAJO AUTÓNOMO 2
CÁLCULO APLICADO A LOS NEGOCIOS

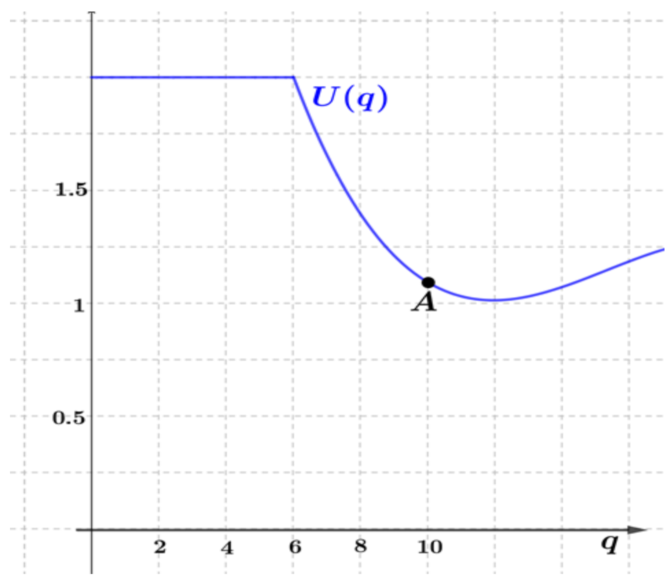
Objetivo de la acción didáctica: Aplicación de la recta tangente a problemas económicos. Aplicación de la interpretación geométrica de la derivada.

PROBLEMA 1. Considere la siguiente tabla que relaciona la Utilidad (U) (en unidades monetarias) y la cantidad producida y vendida (q) de un emprendimiento familiar de cajas de chocolates artesanales.

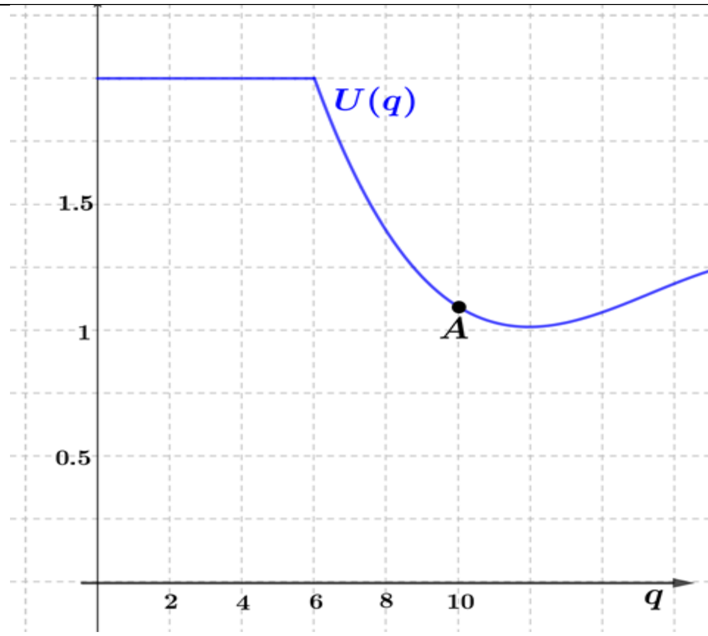
Tabla de valores				
q	9.7	9.8	9.9	10
$U(q)$	1.53	1.31	1.17	1.07

a) Esboce las gráficas de las siguientes rectas secantes a la gráfica de U que contienen a los siguientes puntos y calcule en cada caso la utilidad media.

A(9.7, 1.53)	P (10, 1.07)	Utilidad media (U_{me}) =

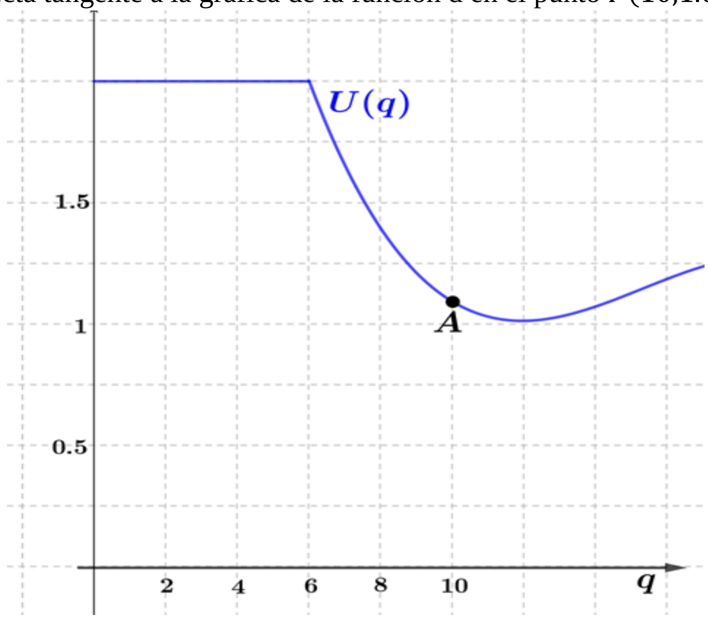


B(9.9, 1.17)	P (10, 1.07)	Utilidad media (U_{me}) =



b) Interprete los valores encontrados.

c) Esboce la recta tangente a la gráfica de la función d en el punto $P(10{,}1.07)$.



d) Explique de qué forma usted podría aproximar geométricamente la Utilidad Marginal (U_{mg}) en el $Punto\ P$.

e) ¿Cuál es el valor aproximado de la Utilidad Marginal (U_{mg})en el $Punto\ P$?

Fuente: Elaboración de los autores.

A continuación, se presenta la temporalización y la planificación de las semanas 2, 3, 4 y 5:

Cuadro 3 – Semana 2: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de tasas instantáneas de cambio y de tasas instantáneas de variación

Sesión	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
6	Tarea SP6	Introducción a las tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, utilizando funciones reales y aplicaciones económicas.	Gráfico Simbólico Tabular	Manipulativas Computacional
7	Tarea SP7	Articulación entre la recta tangente en un punto, y las tasas instantáneas de cambio y de variación, utilizando aplicaciones físicas y económicas.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
8	Tarea SP8	Articulación entre las tasas instantáneas de cambio y de variación, y la derivada de una función en un punto, utilizando aplicaciones físicas y económicas.	Gráfico Simbólico Descriptivo	Computacionales
9	Tarea SP9	Generalización de la derivada de una función en un punto y su función derivada (definición algebraica de la derivada como el límite de la razón de cambio)	Tabular Simbólico	Computacionales Algebraica
Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
3	Tarea TA3	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de incrementos de funciones económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
4	Tarea TA4	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de tasas promedios e instantáneas de funciones económicas utilizando derivadas.	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de robustecer la idea gráfica de derivada y su relación con la función, considerado un elemento clave para la comprensión de la medida de variación (ARIZA-COBOS; LINARES-CISCAR, 2009), es fundamental construir el concepto de la derivada como una razón de cambio, con el fin de entender las aplicaciones del cálculo diferencial (PORTILLO-LARA, et al., 2019).

En la sesión presencial 6 (Tarea SP6) y en las sesiones de trabajo autónomo (Tarea TA3) se propone a los estudiantes resolver tareas que permiten introducir el concepto de incremento y de tasas de cambio, de funciones reales y económicas, utilizando configuraciones computacionales, a través del uso de un applet de *GeoGebra* que ayuda a comprender la variación en sus diferentes niveles cognitivos (PORTILLO-LARA, et al., 2019), el lenguaje utilizado será mayormente geométrico y simbólico.

En la sesión presencial 7, se considera la Tarea SP7 que relaciona las tasas instantáneas de cambio y de variación, con la pendiente de la recta tangente a una curva, con el propósito de desencapsular la recta tangente a través de tareas aplicadas a funciones económicas y físicas, favoreciendo la comprensión del concepto de la derivada como una razón de cambio.

La sesión presencial 8, se considera la Tareas SP8 que articula las tasas instantáneas de cambio y de variación, con la derivada de una función en un punto. Cuyo propósito es promover el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de f' como razón de cambio. A través de aplicaciones económicas y físicas.

En la sesión presencial 9, que generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la razón de cambio de f en el punto $(x, f(x))$. Se espera que el estudiante interprete la función derivada $f'(x)$ como la función cuyas imágenes, $y_0 = f'(x_0)$, corresponden a las razones de cambio de la función f en x_0, a través de la Tarea SP9 que corresponde a la manipulación de unos applets de *GeoGebra*.

A continuación, se presenta la temporalización y la planificación de la semana 3:

Cuadro 4 – Semana 3: Temporalización y Planificación de los problemas de cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
10	Tarea SP10	Definición del álgebra de las derivadas	Simbólico	Algebraica
11	Tarea SP11	Definición de las reglas de derivadas para las funciones: • $f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{R}$, x^n y x^{-n} bien definidas • $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ • $f(x) = \ln(x), \forall x > 0$ Aplicación del álgebra de las derivadas y de las reglas de derivación.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
12	Tarea SP12	Definición de las derivadas de las funciones exponencial y logaritmo, y de la regla de la cadena, aplicada a funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
13	Tarea SP13	Aplicación de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Algebraica

Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
5	Tarea TA5	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de derivadas utilizando el álgebra de derivadas y las reglas de derivación.	Simbólico	Computacional Algebraica
6	Tarea TA6	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el uso de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de robustecer la interpretación geométrica de la derivada y el concepto de la derivada como razón de cambio, resulta beneficioso establecer el álgebra de la función derivada y las reglas de derivadas para las funciones establecidas en el programa de la asignatura.

La sesión presencial 10 (Tarea SP10) tiene el propósito de establecer el álgebra de la función derivada. Para definición de estas, se utilizará un lenguaje mayormente simbólico y la configuración será algebraica.

Las sesiones presenciales 11 y 12 (Tarea SP11, Tarea SP12, Tarea TA5) tienen por propósito, establecer las reglas de derivadas y aplicarlas junto álgebra de la función derivada. Si bien, al establecer las reglas de derivadas, el lenguaje será mayormente simbólico, también se utilizará un lenguaje gráfico, a través de un applet de GeoGebra que permitirá visualizar gráficamente la función derivada. Además, se utilizará Symbolab para verificar los resultados de los cálculos algebraicos involucrados en la obtención de las funciones derivadas.

En la sesión presencial 13 (Tarea SP13) y la sesión de trabajo autónomo (Tarea TA6) se propone a los estudiantes aplicar el álgebra de la función derivada y las reglas de derivación en el cálculo de funciones marginales (costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal), utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico.

Cuadro 5 – Semana 4: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de monotonía de funciones reales y económicas.

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
14	Tarea SP14	Articulación de la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada para extremos relativos.	Gráfico Simbólico	Computacional
15	Tarea SP15	Aplicación del criterio de la primera derivada a problemas	Gráfico Simbólico	Algebraica

		clásicos de optimización de funciones reales y económicas.		
16	Tarea SP16	Aplicación de la primera derivada al análisis de la monotonía de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
17	Tarea SP17	Aplicación del criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y funciones económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
Sesión Trabajo autónomo	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
7	Tarea TA7	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
8	Tarea TA8	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de fortalecer la interpretación geométrica de la derivada en la semana 1, el concepto de la derivada como razón de cambio en la semana 2, y establecer el álgebra de la función derivada y las reglas de derivadas en la semana 3. En la semana 4, se pretende establecer los criterios de la primera y segunda derivada para la optimización de funciones reales y económicas, además de aplicar la primera derivada al trazado de curvas de funciones reales y económicas.

En la sesión presencial 14 (Tarea SP14) se establece una articulación entre la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada, a través del análisis de la monotonía de una función real. Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y en menor medida simbólico. La configuración será computacional gracias a la integración de un applet de GeoGebra.

La sesión presencial 15 y 16 (Tarea SP15, SP16) y trabajo autónomo (Tarea TA7 y Tarea TA8) tienen como propósito aplicar el criterio de la primera derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Además, se aplicará la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico y las configuraciones serán computacionales y algebraicas, a través de un applet de Geogebra.

La sesión presencial 17 (Tarea SP17) y trabajo autónomo (Tarea TA7) tienen como propósito aplicar el criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico, y las configuraciones serán algebraicas.

Cuadro 6 – Semana 5: Temporalización y Planificación de los problemas de aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de concavidad de funciones reales y económicas

Sesión Presencial	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
18	Tarea SP18	Aplicación de la segunda derivada al análisis de la concavidad de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Geométrico Gráfico	Computacional
19	Tarea SP19	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Descriptivo	Manipulativa
20	Tarea SP20	Modelamiento de la función costo para la construcción de una caja sin tapa.	Geométrico Simbólico	Algebraica
21	Tarea SP21	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Simbólico	Computacional Algebraica
Sesión Trabajo autónomo	**Acción didáctica**	**Objetivo de la acción didáctica**	**Lenguajes**	**Configuraciones**
7	Tarea TA9	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la segunda derivada para el análisis de la concavidad de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
8	Tarea TA10	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

Fuente: Elaboración de los autores.

Luego de establecer como aplicación de la primera derivada, la optimización y el análisis de la monotonía, de funciones reales y económicas, y como aplicación de la segunda derivada la optimización de funciones reales y económicas. La semana 5 tienen como propósito, por un lado, mostrar la aplicación de la segunda derivada para el análisis de la concavidad de funciones reales y económicas en el trazado de curvas (SP18, TA9 y TA10), y, por otro lado, consolidar de manera manipulativa la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de una función costo (SP19, SP20, SP21).

Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y geométrico, y en menor medida simbólico y descriptivo. La configuración será computacional, manipulativa y algebraica.

Instrumentos de colecta de datos

Al finalizar cada campo de problemas se considera un instrumento evaluativo que permitirá realizar un análisis exploratorio del aprendizaje de los estudiantes. A continuación, por motivos de espacio se presentan cuatro tareas representativas de cada instrumento aplicado. A continuación, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 1, éste nos proporcionará información en torno al conocimiento especializado del estudiante sobre tangentes, ya que durante el desarrollo deberá llevar a cabo la tematización del esquema de recta tangente y concluir el significado geométrico de la derivada en un punto para dar respuesta al enunciado (Figura 5).

Figura 5 – Problema 2 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1).

PROBLEMA 2. Se sabe que la función $\boldsymbol{Ingreso}$ $(\boldsymbol{I})$ está dada por $\boldsymbol{I(q) = q^2}$, con $\boldsymbol{q \geq 0}$, donde q representa unidades.

Se sabe que la gráfica de la función $Ingreso$ (I) es:

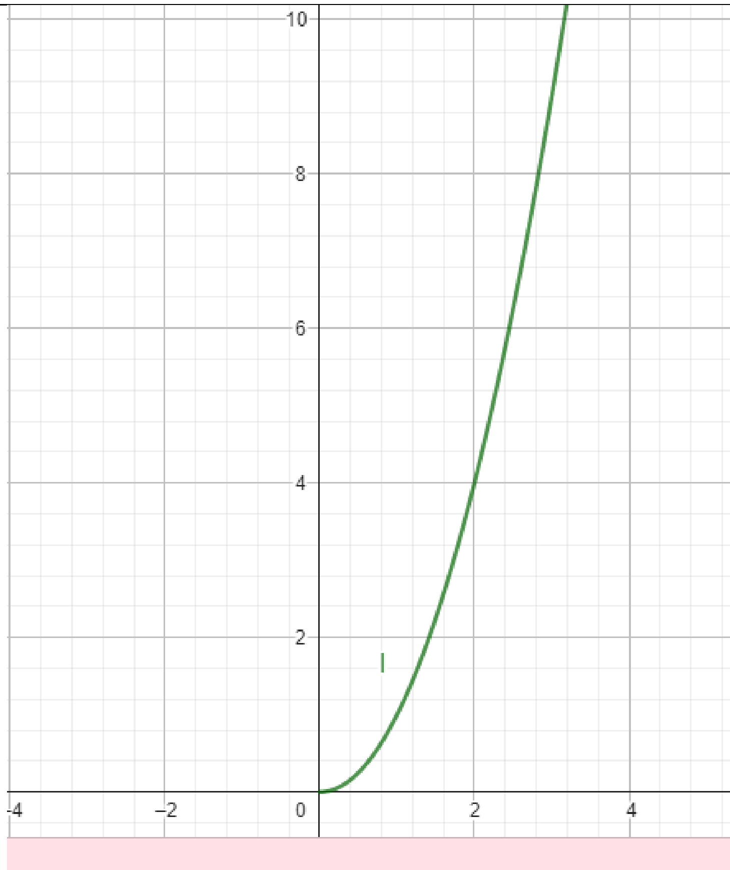


Gráfico 1: Función $Ingreso\ (I(q))$

y la gráfica de su función derivada $\boldsymbol{I'(q)}$ (Ingreso Marginal) es:

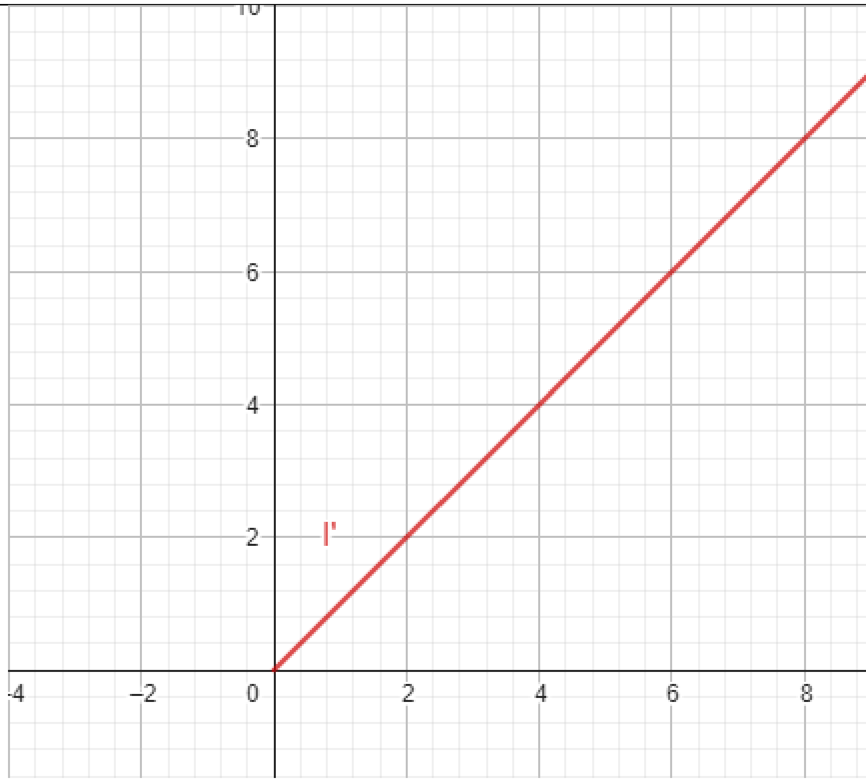


Gráfico 2: Función $Ingreso\ Marginal\ (I'(q))$

a) Determine la pendiente de la recta tangente en $\boldsymbol{q = 1, q = 4\ y\ q = 0}$.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la función en $\boldsymbol{q = 4\ y\ q = 0}$.
c) Determine dónde el $\boldsymbol{Ingreso\ Marginal}$ es positivo, negativo o igual a 0. Considerando que se trabaja con unidades.
d) Explique con sus propias palabras el comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal.

Fuente: Elaboración de los autores.

En este problema el estudiante debe analizar los gráficos estableciendo la información que permitirá determinar las pendientes de las rectas tangentes solicitadas y la posterior construcción de éstas.

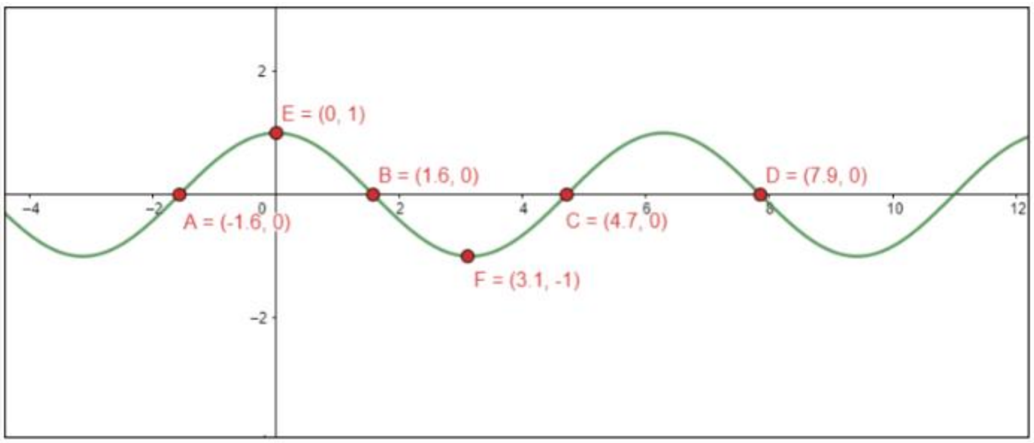
Por ejemplo:

- Para determinar la pendiente de la recta tangente en $q = 4$, el estudiante debe observar el gráfico 2 y establecer que la pendiente de la recta tangente es $I'(4) = m_{tg}$ =8. Finalmente, el estudiante puede construir la ecuación de la recta tangente ($I = 8q - 16$), observando del gráfico 1 que $I(4) = 16$.

A continuación, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 4. El cual nos permite analizar la comprensión del estudiante en torno a la representación gráfica de la función derivada $f´$, a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos. Ver Figura 6.

Figura 6 – Problema 1 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP4).

PROBLEMA 1. Considere la función f, cuyo gráfico de su función derivada ($f´$) es el siguiente:



Determine si las siguientes alternativas son verdaderas o falsa, justificando adecuadamente:

a) Los puntos A, C y D son máximos relativos.
b) El punto F representa un mínimo relativo.
c) El punto E representa un máximo relativo.
d) La función alcanza un máximo relativo en B.

Fuente: Elaboración de los autores

En este problema se espera que el estudiante aplique el criterio de la primera derivada para justificar la alternativa que seleccionará. Para ello, debe analizar el gráfico de $f´$.

Por ejemplo:

- En A, B, C y D, $f´(x) = 0$, es decir son puntos críticos y posibles extremos relativos.
- Entre $]A, B[$, $f´(x) \geq 0$, es decir, la función f es creciente. Luego, entre $]B, C[$, $f´(x) \leq 0$, es decir, la función f es decreciente. El estudiante debe concluir que en B la función alcanza un máximo relativo justificando a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos.

Luego de aplicar los instrumentos evaluativos, al finalizar la implementación del diseño instruccional, se realizará un análisis de tipo mixto (JHONSON; ONWUEGBUZIE, 2004), por medio de la noción de configuraciones de los objetos primarios del EOS, que nos permitirá realizar un análisis exploratorio, cuantificando la cantidad de acciones correctas (frecuencia) relacionadas a las resoluciones de los estudiantes en los problemas propuestos para cada uno de los objetos primarios. Además, desde el punto de vista cualitativo, será posible identificar las respuestas y argumentos correctos e incorrectos de los estudiantes al resolver las tareas propuestas.

4. Reflexiones finales

El objetivo de ese trabajo fue dar a conocer el diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de ingeniería comercial en Chile, aplicando algunas herramientas del marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). El diseño metodológico considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, cálculo de tasas instantáneas de cambio y tasas instantáneas de variación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, integra las TIC en las diversas actividades, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico, permitiendo a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada.

El diseño metodológico que se implementará en la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios en una universidad chilena espera superar algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería Comercial.

Como línea futura, la implementación del curso será valorado a partir de la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018), a fin de medir el grado en que el proceso de instrucción es de calidad y posibilita el aprendizaje de los alumnos.

Agradecimientos

Este artículo contó con el apoyo de la Vicerrectoría de Investigación y Doctorado de la Universidad San Sebastián- proyecto USS-FIN-23-DOCI-04 y por el proyecto PID2021-

127104NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

ALVARADO MARTÍNEZ, H. A.; GALINDO ILLANES, M. K.; RETAMAL PÉREZ, M. L. Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 30, n. 3, p. 151–183, 2018. DOI: https://doi.org/10.24844/EM3003.07

ARIZA-COBOS, Á.; LINARES-CISCAR, S. Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. **Enseñanza de las ciencias**: revista de investigación y experiencias didácticas, Buenos Aires, v. 27, n. 1, p. 127-136, 2009. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

BALLARD, C. L.; JOHNSON, M. F. Basic math skills and performance in an introductory economics class. **The Journal of Economic Education**, Filadelfia, v. 35, n. 1, p. 3-23, 2004. DOI: https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, abr., 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BUTLER, J. S.; FINEGAN, T. A.; SIEGFRIED, J. J. Does more calculus improve student learning in intermediate micro and macro-economic theory? **The American Economic Review**, Pittsburgh, v. 84, n. 2, p. 206-210, 1994.

FONT, V. **Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada**. En Maz, A., Gómez B., y Torralbo M. (Ed.), Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba: SEIEM. pp. 109-128, 2005.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97-124, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

GALINDO ILLANES, M. K. et al. Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 18, n. 7, p. em2130, 2022. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/12162

GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. **Interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de ingeniería comercial**. Actas del V Encuentro Internacional en Educación Matemática. **Anais**...Barranquilla: Universidad del Atlántico, 2020.

GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. **El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile**. Investigación en Educación Matemática XXV. **Anais**... Santiago de Compostela: SEIEM, 2022.

GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. **Bolema**, Rio Claro, v. 37, n. 75, p. 271-295, 2023. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13

GARCÍA, L.; AZCÁRATE, C.; MORENO, M. Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 1, p. 85-116, 2006.

GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática:** motivación, supuestos y herramientas teóricas. Granada: Universidad de Granada, 2014. Disponible en: <http://www. ugr. es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14. pdf>. Acceso en: 23 jul. 2022

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 39, n. 1–2, p. 127-135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 39, n. 1, p. 37-42, 2019.

HEY, J. D. I teach economics, not algebra and calculus. **The Journal of Economic Education**, Philadelphia, v. 36, n. 3, p. 292-304, 2005. DOI: https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304

JOHNSON, R. B.; ONWUEGBUZIE, A. J. Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. **Educational researcher**, [s.l], v. 33, n. 7, p. 14-26, 2004. DOI: https://doi.org/10.3102/0013189X033007014

LARIOS, V.; JIMÉNEZ, A. Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. **Praxis & Saber**, Tunja, v. 13, n. 33, p. e12274–e12274, 2022.

LARIOS, V.; MURILLO, R. E. P.; REYES, H. M. Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, v. 20, n. 20, p. 105-124, oct. 2021. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem20.4002

PINO-FAN, L. R. *et al*. Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **Paradígma**, Maracay, v. 34, n. 2, p. 129-150, 2013.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, 2011.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, D. J.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, abr., 2015. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 21, n. 1, p. 63-94, may 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

PORTILLO-LARA, H. J.; ÁVILA-SANDOVAL, M. S., CRUZ-QUIÑONES, M. Á., LÓPEZ-RUVALCABA, C. Geogebra y problemas de optimización. **Cultura Científica y Tecnológica,** [s.l], v.16, n. 1, p.5-11, septiembre-diciembre, 2019. DOI: https://doi.org/10.20983/culcyt.2019.1.2.1

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F.; FONT, V. Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. En: LUGO-ARMENTA, J. G. et al. (eds.). **Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos:** investigaciones y desarrollos en América Latina. Osorno: Universidad de Lagos, 2022. p. 193-219 (Vol. 1).

Autores

Maritza Galindo Illanes

Docente Investigadora de la Universidad San Sebastián

(c)Doctorado en Didáctica las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades. Línea Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (Universitat de Barcelona, España); Magister en Educación Superior Mención Pedagogía Universitaria (Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile); Licenciado en Matemática (Universidad de Concepción, Chile).

Dirección: Gobernador Juan Henríquez 1242, Lomas de San Andrés, Concepción, Chile.

Adriana Breda

Docente e investigadora en el Departamento de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Barcelona. Doctora y Magister en Educación en Ciencias y Matemáticas (PUCRS). Licenciada en Matemáticas y Ciencias Actuariales (UFRGS).

Dirección: Passeig Vall d'Hebron, 171, 08035, Barcelona, España.

Hugo Alvarado Martínez

Profesor Asociado del Departamento de Matemática y Física Aplicadas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Magíster en Estadística por la Universidad de Concepción, Chile y Profesor de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Cómo citar el artículo:

GALINDO, M.; BREDA, A; ALVARADO, H. Diseño de un Proceso de Enseñanza de la Derivada para Estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 /321 – 350 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p321-350.id1386

De las configuraciones semióticas a las configuraciones epistémicas de una tarea de dibujo geométrico: lo que se espera y lo que se implementa

Elvira Garcia Mora
elviragarciamora@ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-4125-0295
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, Catalunya, España.

Francisco Javier Díez Palomar
jdiezpalomar@ub.edu
https://orcid.org/0000-003-4447-1595
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, Catalunya, España.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

El uso del constructo configuración epistémica permite reflexionar sobre los objetos matemáticos movilizados en una tarea y ayuda en la identificación de conflictos cognitivos y semióticos. Lo anterior es posible al reconocer términos verbales, simbólicos y gráficos (lenguaje matemático), ejercicios y ejemplos (situaciones-problema), las definiciones, los procedimientos, las proposiciones y los argumentos utilizados en un episodio dentro del aula . El profesor en activo es consciente de las variaciones que sufre una tarea al momento de su implementación en el aula. En una implementación exitosa, los alumnos reaccionen más o menos según lo diseñado. Al utilizar herramientas de análisis didáctico, como la configuración epistémica, el profesor observa que en un episodio de clase exitoso se presentan los seis objetos primarios según se tenía previsto al momento del diseño. Cuando la implementación de la tarea no muestra las evidencias de aprendizaje previstas, el profesor puede identificar las variaciones en los objetos primarios previstos al contrastar la configuración epistémica hipotética o esperada con la configuración epistémica real o de la implementación. El objetivo de esta comunicación es valorar el nivel de éxito de la implementación de una tarea de dibujo geométrico, dirigida a alumnos de secundaria, al contrastar sus estados hipotético e implementado. De acuerdo con los resultados, la implementación fallida de la tarea se debió a desfases en los seis objetos primarios de la configuración epistémica.
Palabras clave: Análisis Didáctico. Configuración Didáctica. Configuración Epistémica. Enfoque Onto-semiótico. Reflexión sobre la Propia Práctica.

Das configurações semióticas às configurações epistêmicas de uma tarefa de desenho geométrico: o que se espera e o que se implementa

Resumo

A utilização do construto configuração epistêmica permite refletir sobre os objetos matemáticos mobilizados em uma tarefa e auxilia na identificação de conflitos cognitivos e semióticos. Isso é possível por meio do reconhecimento de termos verbais, simbólicos e gráficos (linguagem

matemática), exercícios e exemplos (situações-problema), definições, procedimentos, proposições e argumentos utilizados em um episódio em sala de aula. O professor ativo está atento às variações que uma tarefa sofre no momento de sua execução em sala de aula. Em uma implementação bem-sucedida, os alunos reagirão mais ou menos conforme planejado. Usando ferramentas de análise didática, como configuração epistêmica, o professor observa que em um episódio de aula bem-sucedido os seis objetos primários são apresentados conforme planejado no momento do *design*. Quando a implementação da tarefa não mostra a evidência prevista de aprendizagem, o professor pode identificar variações nos objetos primários previstos, contrastando a configuração epistêmica hipotética ou esperada com a configuração epistêmica real ou de implementação. O objetivo desta comunicação é avaliar o nível de sucesso da implementação de uma tarefa de desenho geométrico, destinada a alunos do ensino secundário, contrastando os seus estados hipotético e implementado. De acordo com os resultados, a falha na implementação da tarefa deveu-se a incompatibilidades nos seis objetos primários da configuração epistêmica.
Palavras chave: Análise Didática. Configuração Didática. Configuração Epistémica. Abordagem ontossemiótica. Reflexão sobre sua própria prática.

From semiotic configurations to epistemic configurations of a geometric drawing task: what is expected and what is implemented

Abstract

The use of the epistemic configuration construct allows one to reflect on the mathematical objects mobilized in a task and helps in the identification of cognitive and semiotic conflicts. This is possible by recognizing verbal, symbolic, and graphic terms (mathematical language), exercises and examples (problem situations), definitions, procedures, propositions and arguments used in an episode in the classroom. The active teacher is aware of the variations that a task undergoes at the time of its implementation in the classroom. In a successful implementation, learners will react as designed. Using didactic analysis tools, such as epistemic configuration, the teacher observes that in a successful class episode, the six primary objects are presented as planned at the time of design. When the implementation of the task does not show the predicted evidence of learning, the teacher can identify variations in the predicted primary objects by contrasting the hypothesized or expected epistemic configuration with the actual or implementation epistemic configuration. The objective of this communication is to assess the level of success of the implementation of a geometric drawing task, aimed at secondary school students, by contrasting its hypothetical and implemented states. According to the results, the failed implementation of the task was due to mismatches in the six primary objects of the epistemic configuration.
Keywords: Didactic Analysis. Didactic Configuration. Epistemic Configuration. OntoSemiotic Approach. Reflection on Own's Practice.

Introducción

La tarea docente es difícil (VEENMAN, 1984; GODINO, 1993; GROSSMAN; HAMMERNESS; McDONALD, 2009). Para Veenman (1984), Sykes, Bird y Kennedy (2010), los primeros años de docencia son fundamentales en la modelización de lo que Rauner (2007) caracteriza como “profesor experto”. Viendo con detalle la historia particular de cada profesor podemos darnos cuenta de los rasgos que le forjaron (TRIPP, 1994). Pero además de la experiencia, el profesor requiere de una formación profesional para construir rutinas de enseñanza (GROSSMAN; HAMMERNESS; McDONALD, 2009). Godino (1993) plantea la existencia del “dilema teoría-aplicación en las concepciones de la didáctica” para mencionar la discusión que existe entre dos tendencias: la producción de conocimientos teóricos y prácticos. En este sentido, Rauner (2007) diferencia el conocimiento práctico de la competencia ocupacional, pero reconoce que un profesor puede desarrollar su labor docente con efectividad cuando logra combinar el conocimiento teórico con el conocimiento práctico para lograr un conocimiento contextualizado que orienta sus actuaciones, es decir: "el conocimiento del proceso de trabajo". Camargo (2019) sitúa como punto de partida del estudio del conocimiento profesional del profesorado y los niveles de consecución de los alumnos. Cuando los resultados de las evaluaciones son precarios se genera una "crisis de confianza" en torno al conocimiento del profesor que hace de la investigación sobre la práctica del profesorado un campo "vigente y dinámico". El estudio de este ámbito hace posible: (1) contextualizar las circunstancias con las que el profesor construye e interpreta sus conocimientos matemáticos, (2) identificar el conocimiento práctico que emplea en su labor docente de las matemáticas y (3) “caracterizar el papel del profesor en la constitución de prácticas matemáticas en el aula” (CAMARGO, 2019).

El objetivo de este artículo es presentar el constructo *configuración epistémica* como una herramienta para sistematizar la identificación de los aspectos que hacen que la implementación de una tarea de tipo matemático sea o no exitosa. Para ello, se expone la investigación realizada a partir del análisis del diseño y de la implementación de dos tareas de geometría con alumnado de 12 a 14 años, contrastando la configuración epistémica hipotética o esperada con la configuración epistémica implementada.

1. Marco teórico

El Enfoque Onto-semiótico (EOS), desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007), es un “sistema teórico modular e inclusivo para la educación matemática” (GODINO, 2018) conformado de un conjunto de constructos con los que es posible analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Este marco teórico de principios y herramientas del conocimiento y la instrucción matemáticas, el EOS, es el producto de una sucesión de trabajos de investigación que empezaron en 1993. Las aportaciones científicas de este grupo de investigadores se dividen en tres períodos, definidos por los productos de investigación: (1) dimensión institucional y personal del conocimiento matemático, (2) modelos ontológicos y semióticos para describir la actividad matemática y la comunicación de las producciones matemáticas y (3) la instrucción matemática como un proceso con seis dimensiones (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Para sintetizar las ideas del EOS, las palabras de Godino, Batanero y Font (2020) son las más adecuadas: considerando el rasgo científico-tecnológico del conocimiento que se pretende construir, existen problemas teóricos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo, predictivo), y también se debe considerar la manera idónea de desarrollarlos (componente tecnológico-prescriptivo).

Siguiendo la "cimentación axiomática de las matemáticas", Godino y Batanero construyeron las bases del EOS, las nociones o "elementos clave de la modelización semiótica y antropológica del conocimiento matemático": prácticas, objetos y procesos. Años después, con la colaboración de otros investigadores, se definieron otras "entidades primarias" onto-semióticas como: función semiótica (GODINO, 2018). Todas estas nociones son necesarias para analizar los objetos, prácticas y procesos. Dentro del marco teórico del EOS, se entiende por objeto matemático a cualquier entidad relacionada con la actividad o práctica matemática; por ejemplo: conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos, lenguajes simbólicos, lenguajes verbales, lenguajes gráficos, situaciones-problemas, etc. Se define en la práctica matemática como una actuación o expresión, sea verbal o escrita, con la que un individuo resuelve problemas de cariz matemático, comunica su resultado, le da validez y lo generaliza para su aplicación en contextos y problemas diferentes (GODINO, 2018). Por un lado, el EOS reconoce la noción proceso como una secuencia de prácticas matemáticas de las que emerge un objeto matemático. Particularmente, los atributos añadidos por Font y Rubio (citados por GODINO, 2018) a esta noción indican que se trata de acción temporal que tiene un objetivo determinado, que debe ser la respuesta a una tarea propuesta (GODINO, 2018). Por otra parte, la función semiótica se refiere a la noción con la que es posible establecer relaciones entre entidades primarias; más bien puede interpretarse como la correspondencia que existe entre un antecedente y su consiguiente. Son ejemplos de funciones semióticas, las correspondencias expresión-contenido o significante-significado (GODINO, 2018). El EOS considera que toda configuración didáctica está compuesta por otras tres configuraciones: epistémica, institucional y cognitivo-afectiva. A la componente epistémica corresponden todas las entidades primarias que se requieren para desarrollar una labor de carácter matemático. El segundo componente, la configuración institucional, considera las interacciones. Por último, la configuración cognitivo-afectiva se relaciona con el aprendizaje, por tanto, es de tipo afectivo y personal (GODINO; BATANERO; FONT, 2020).

Como se ha visto, la noción objeto matemático es muy amplia y general, por tanto, es necesario definir “un sistema detallado de categorías de objetos” que considere la naturaleza del objeto en análisis y su función. Este sistema es la configuración onto-semiótica de los objetos, prácticas y procesos. Según Godino, Batanero y Font (2020), es posible reconocer seis entidades primarias: (1) concepto, (2) proposición, (3) argumento, (4) situación-problema, (5) lenguaje, y (6) procedimiento. Conviene aclarar el significado de algunos de estos objetos primarios. Para el EOS, un concepto se puede utilizar una vez que se fije una definición. Por tanto, no debe confundirse con lo que es una proposición, ya que, a diferencia de un concepto, el enunciado de una proposición puede no ser verdadero y entonces requiere de un argumento que le dé validez (GODINO, 2018). En resumen, en el marco teórico del EOS, “la noción de configuración onto-semiótica de prácticas, objetos y procesos” es una guía para desarrollar el análisis didáctico de contenidos matemáticos (GODINO, 2018) que articula estas nociones (práctica, objeto y proceso) teniendo en cuenta las dualidades institucional y personal desde las que se analizan (GODINO; BATANERO; FONT, 2020).

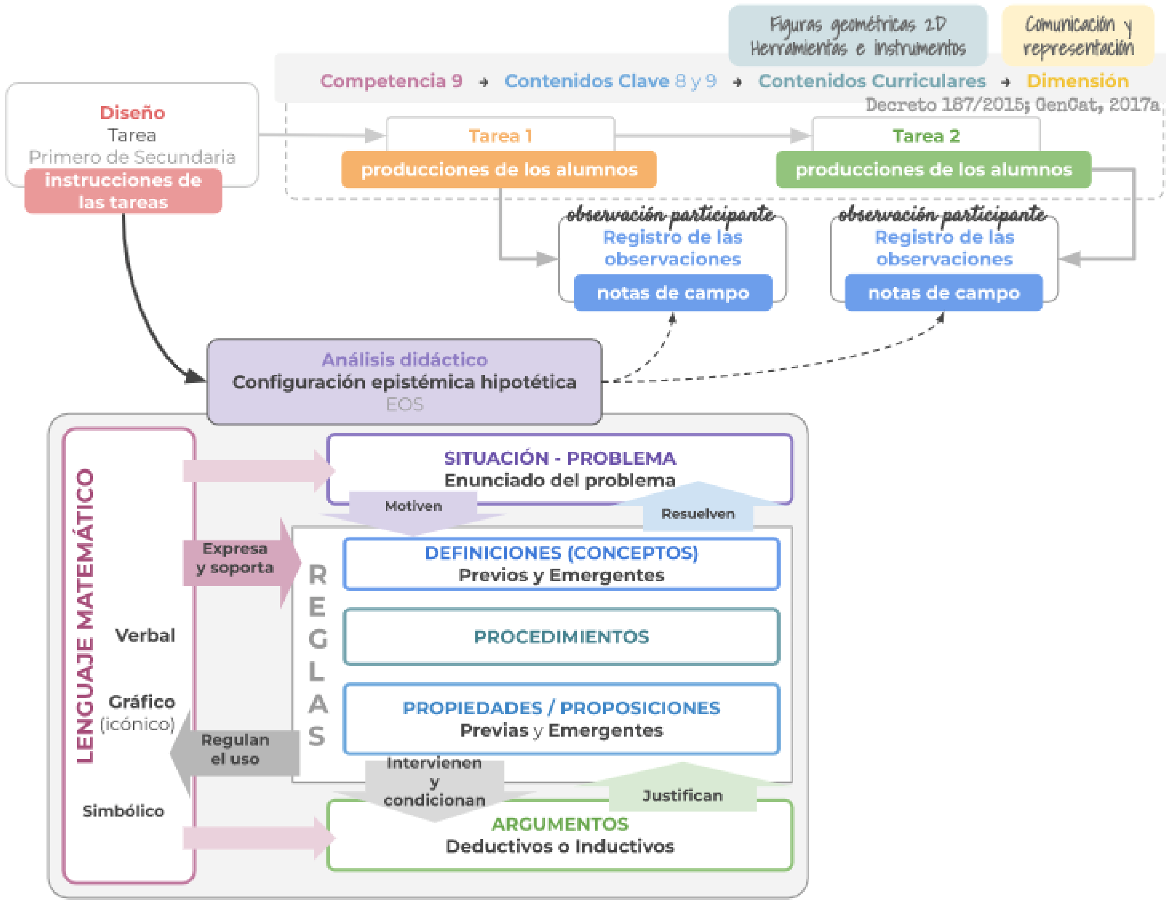
La reflexión sobre los resultados académicos de los estudiantes está relacionada con la formación del profesorado en la construcción de lo que se llama competencia de análisis didáctico (FUERTES, 2011). Según el modelo de Conocimientos y Competencias Didácticas y Matemáticas (modelo CCDM) (FONT, 2011; BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017; GODINO; GIACOMONE; BATANERO; FONT, 2017; PINO-FAN; FONT; BREDA, 2017; PINO-FAN; CASTRO; FONT, 2022), la competencia de análisis didáctico es una “acción competente” que integra un conjunto de conocimientos, habilidades, disposiciones afectivas para la acción, herramientas de reflexión entre otros aspectos que hacen posible el desarrollo efectivo de la labor docente. El modelo CCDM plantea dos competencias clave en la práctica docente del profesor de matemáticas: (1) la competencia matemática y (2) la competencia de análisis e intervención didáctica de los procesos de instrucción matemática. Por lo que respecta a la competencia matemática, el profesor de matemáticas debe conocer los contenidos matemáticos que lleva al aula. Mientras que la competencia de análisis e intervención didáctica de los procesos de instrucción matemática se refiere al diseño, aplicación y valoración de las secuencias de aprendizaje mediante la aplicación de técnicas de análisis didáctico con las que pueda establecer ciclos de planificación, implementación, evaluación y planteamiento de propuestas de mejora (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017). Ávila (2008) explica que la mejora de esta competencia de análisis e intervención didáctica se consigue "entrenando" al profesor para que con su observación sea capaz de identificar aspectos clave de la planificación docente, así como del desarrollo y implementación de las secuencias didácticas en el aula. En concreto, que el profesor desarrolle una "mirada crítica propositiva". Se ha identificado que la aplicación del constructo configuración epistémica del EOS antes y después de la sesión de matemáticas permite una doble función de estos instrumentos: (1) como herramientas para establecer una situación hipotética con la que proponer metas a conseguir en la implementación de un proceso de instrucción matemática en el aula, y (2) como instrumentos para evaluar el grado de éxito de la implementación de una tarea en el aula. Con la aplicación recurrente de los constructos del EOS se hizo posible desarrollar el modelo CCDM (FONT, 2011; BREDA; PINO-FAN, FONT; GODINO et al., 2017; PINO-FAN; FONT; BREDA, 2017): la creación de ciclos de planificación, implementación, valoración y mejora de los procesos de instrucción matemáticos.

2. Metodología

En la educación, los casos que son relevantes para realizar un estudio se relacionan con el análisis de las personas y/o de los programas educativos (STAKE, 1998). Con el propósito de entender todo lo que es único o similar en las personas y/o los programas educativos, en esta investigación se planteó un estudio de caso intrínseco (STAKE, 1998; 2003; 2010) centrado en un grupo específico de alumnos. En el estudio que se discute aquí nos centramos en la enseñanza del dibujo geométrico a alumnos del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de Catalunya. Los alumnos de dicho curso se encuentran en un rango de edades de los 12 a los 14 años. El criterio de selección del centro en el cual se desarrolló la investigación se basó en la aceptación de la propuesta y el consentimiento (informado) para participar. Sólo se recibió respuesta de un profesor de un instituto público en Barcelona. El diseño de este estudio de caso se distribuyó en cinco fases: (1) el diseño de las tareas, (2) una sesión tipo clase de preparación, (3) una sesión tipo clase de aplicación, (4) el registro de las observaciones, y (5) el análisis de las observaciones mediante la aplicación de herramientas de reflexión del EOS (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017; BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018).

Entre los instrumentos para recoger la información en un estudio cualitativo se encuentran los documentos producidos por los participantes y los registros realizados por el observador, es decir el propio investigador (MASSOT; DORIO; SABARIEGO, 2009; PATTON, 2002; STAKE, 1998). Según el esquema de los elementos de este estudio de caso (Figura 1), los instrumentos para la recogida de datos experimentales son: las instrucciones dirigidas a los alumnos, las producciones hechas por los alumnos y las notas de campo de las observaciones. En primer lugar, en la etapa de diseño de las tareas se produjeron las propuestas de las actividades dirigidas a los alumnos. Seguidamente, en las dos sesiones en el aula, de las visitas al centro educativo se obtuvieron las producciones hechas por los alumnos en la propuesta presentada con dos tareas, denominadas Tarea 1 y Tarea 2. Finalmente, se obtuvieron las notas de campo, las cuales son el instrumento donde se registraron las observaciones de los fenómenos sucedidos durante la implementación de las tareas.

Figura 1 – Esquema de la relación entre los instrumentos de recogida de datos y la configuración epistémica hipotética de las tareas de dibujo geométrico del estudio



Fuente: Elaboración propia

El diseño de la primera tarea, Tarea 1, se realizó a partir del rasgo competencial del currículo de ESO de la Generalitat de Catalunya vigente en 2019, momento del diseño de la investigación, (Ley 187/2015) y las condiciones de grupo (número de alumnos), la disposición del aula (materiales de los que se dispone), la organización del centro educativo (la duración de las sesiones) y la relación con una tarea consecutiva (denominada Tarea 2). La selección de los contenidos curriculares de la Tarea 1 se hizo considerando el objetivo de implementar con los alumnos una actividad de carácter geométrico en la que deba utilizarse el dibujo geométrico como antecedente a la construcción de un cuerpo geométrico tridimensional. Según se indica en el currículo del primer curso de ESO (Ley 187/2015), los contenidos curriculares del bloque “Espacio y forma” se organizan en dos grupos con las cabeceras de los siguientes contenidos clave: Sentido espacial y representación de figuras tridimensionales y Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción. Los objetivos de aprendizaje de la Tarea

1 se orientaron en los contenidos curriculares, por tanto, con estos objetivos de aprendizaje se establece el propósito de ayudar a los alumnos a identificar características de un cuerpo geométrico presentado en una imagen y a utilizar instrumentos de dibujo geométrico. Sin perder el rasgo competencial de la dimensión de Comunicación y representación, también es objetivo de la Tarea 1 que exista diálogo entre los alumnos para llegar con éxito a la obtención de una representación física de un cuerpo geométrico. El contexto donde se plantean las tareas es un festival de globos aerostáticos. La consigna dirigida a los alumnos (organizados en grupos), en esta primera tarea (Tarea1) consistió en dibujar todas las caras de un octaedro para, posteriormente, reunir las ocho figuras planas para formar con ellas un desarrollo plano que permitiera la construcción del cuerpo tridimensional por medio de pliegues. Con el fin de obtener el registro del trabajo de grupo, se preparó una hoja de respuestas con preguntas dirigidas a la justificación de los procedimientos de dibujo realizados por cada grupo de trabajo (Cuadro 1).

Cuadro 1 – Preguntas de la hoja de respuestas de la Tarea 1

Preguntas
1. ¿Cuál es la información numérica dada en el problema? 2. ¿Cuál es la información no numérica dada en el problema? 3. ¿Cuál es la información numérica que se requiere para resolver el problema? 4. ¿Cuál es la información no numérica que se requiere para resolver el problema? 5. ¿Cuál es la información que no tiene utilidad en la resolución del problema? 6. ¿Cuáles son las operaciones o dibujos necesarios en el primer paso de la resolución del problema? 7. ¿Cómo describes este primer paso sin hacer operaciones o dibujos? 8. ¿Cuáles son las operaciones o dibujos necesarios en el segundo paso de la resolución del problema? 9. ¿Cómo describes este segundo paso sin hacer operaciones o dibujos? 10. ¿Cuál es la información numérica obtenida de la resolución de este problema? 11. ¿Cuál es la información no numérica obtenida de la resolución de este problema? 12. ¿Cuáles son los conceptos de geometría que has utilizado en este ejercicio? 13. ¿Encuentras de utilidad este problema?

Fuente: Elaboración propia

La Tarea 2 se diseñó como una actividad para dar seguimiento a la Tarea 1. En este sentido, puede considerarse como una sesión complementaria o de ampliación. Las consideraciones curriculares del diseño de la Tarea 2 tienen como punto de partida el diseño didáctico de la Tarea 1. El propósito general de esta segunda sesión fue que los alumnos compararan las superficies de diversos cuerpos geométricos. El contexto elegido para la Tarea

2 fue el despliegue del globo terráqueo en diferentes poliedros. La consigna para los alumnos consistió en solicitarles la construcción del dibujo geométrico del desarrollo plano de un poliedro regular sobre un mapamundi para la posterior construcción del cuerpo tridimensional que corresponde a dicho desarrollo plano. Los requerimientos de materiales de esta segunda tarea fueron: mapas, instrumentos de dibujo (regla, escuadra y cartabón) y un mapamundi en blanco y negro en una hoja A4. En cuanto a las orientaciones para implementar la actividad en el aula, se preparó una hoja con diversos desarrollos planos de los poliedros propuestos a los alumnos para facilitar la actuación del investigador al momento de dirigir el dibujo geométrico de los alumnos o de atender dudas y preguntas de los estudiantes sobre las figuras asignadas.

Una vez obtenidos los datos, el análisis didáctico que se realiza se verificó por medio de la triangulación entre los investigadores involucrados en el estudio y la discusión de las evidencias y hallazgos con otros investigadores en diversos encuentros como seminarios, simposios, jornadas y congresos.

3. Resultados

Desde la perspectiva del EOS, la identificación de las entidades primarias es el punto de partida del análisis didáctico de la actividad matemática. En otros términos, las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos, los procesos matemáticos y las funciones semióticas son elementos clave para modelizar las facetas semióticas y antropológicas del conocimiento matemático (GODINO, 2018). Godino, Batanero y Font (2009) establecen la relación e interdependencia entre los objetos matemáticos primarios de una actividad matemática. La identificación de los objetos matemáticos que se pretenden llevar al aula al implementar la tarea de dibujo geométrico proviene del diseño didáctico de las tareas. Con el establecimiento de la configuración epistémica hipotética de cada una de las dos tareas, es posible centrar la atención en los objetos matemáticos que se espera puedan surgir al implementar las tareas en el aula (Figura 1).

En el Cuadro 2 se sintetiza el resultado del análisis de los objetos matemáticos primarios que integran la *configuración epistémica hipotética de la Tarea 1*. El primero de estos, “las situaciones-problema” de la Tarea 1 (SP1), son una copia textual del reto planteado en la clase.

A partir del planteamiento de la "situación-problema" de la Tarea 1 se puede identificar otro objeto primario: el lenguaje matemático verbal/escrito (LMVE1). La pareja de hojas de instrucciones permite la identificación de otro objeto primario: el lenguaje matemático gráfico de la Tarea 1 (LMG1). En este caso, se trata de dos representaciones gráficas icónicas de un octaedro y del desarrollo plano de un octaedro, así como los términos del lenguaje matemático verbal/escrito de la Tarea 1 (LMVE1). Para identificar las propiedades/proposiciones de la Tarea 1 (PP1), se analizó el primer objetivo de aprendizaje que se pretende que los alumnos reconozcan. El objeto matemático primario llamado Procedimientos (P1) se identificó en el diseño didáctico de la Tarea 1 y en los Objetivos de aprendizaje. La organización de los objetos matemáticos primarios de la Tarea 1, según la propuesta de Godino, Batanero y Font (2008), ayuda a identificar las relaciones e interdependencias que existen entre ellos. La *configuración epistémica hipotética* en la que se presentan los objetos matemáticos primarios provenientes de los instrumentos de recogida de información y registrados en el Cuadro 2, es el esquema de la Figura 2.

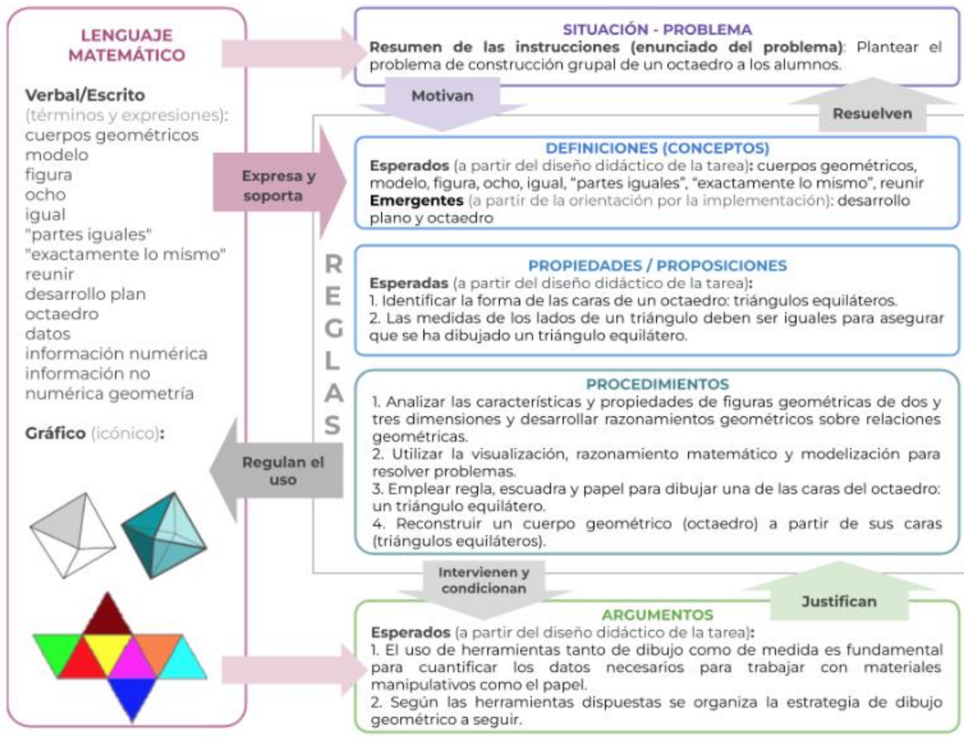
Cuadro 2 – Unidades de análisis de la *configuración epistémica hipotética* de la Tarea 1

Código	Objeto Primario	Descripción del Objeto Primario
SP1	Situaciones-Problema de la Tarea 1	Plantear el problema de construcción grupal de un octaedro a la clase.
DC1	Definiciones (Conceptos) de la Tarea 1	Cuerpos geométricos, modelo, figura, ocho, igual, partes iguales, exactamente lo mismo, reunir Emergentes: desarrollo plano y octaedro
LMVE1	Lenguaje Matemático Verbal/Escrito de la Tarea 1	Cuerpos geométricos, modelo, figura, ocho, igual, partes iguales, exactamente lo mismo, reunir, desarrollo plano, octaedro, datos, información numérica dada, información no numérica dada y geometría
LMG1	Lenguaje Matemático Gráfico de la Tarea 1	Representación gráfica icónica de un octaedro en grises. Representación gráfica icónica de un octaedro en verde con transparencias. Desarrollo plano de un octaedro con las caras diferenciadas por colores
PP1	Propiedades / Proposiciones de la Tarea 1	1. Identificar la forma de las caras de un octaedro: triángulos equiláteros. 2. Las medidas de los lados de un triángulo deben ser iguales para asegurar que se ha dibujado un triángulo equilátero.
P1	Procedimientos de la Tarea 1	1. Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos geométricos sobre relaciones geométricas. 2. Utilizar la visualización, razonamiento matemático y modelización para resolver problemas. 3. Emplear regla, escuadra y papel para dibujar una de las caras del octaedro: un triángulo equilátero. 4. Reconstruir un cuerpo geométrico (octaedro) a partir de sus caras

		(triángulos equiláteros).
A1	Argumentos de la Tarea 1	1. El uso de herramientas tanto de dibujo como de medida es fundamental para cuantificar los datos necesarios para trabajar con materiales manipulativos como el papel. 2. Según las herramientas dispuestas se organiza la estrategia de dibujo geométrico a seguir.

Fuente: Elaboración propia

Figura 2 – Esquema de la *configuración epistémica hipotética* de la Tarea 1



Fuente: Elaboración propia

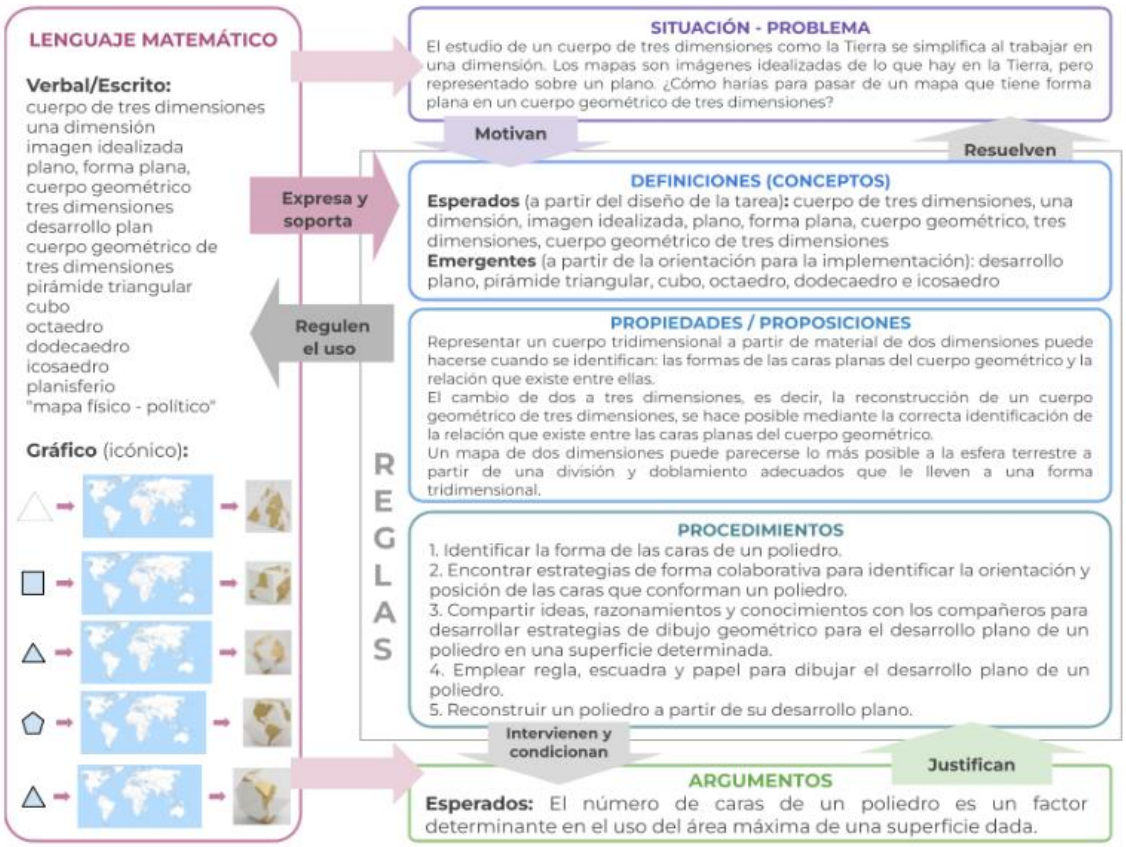
El análisis realizado de la Tarea 2 es similar al utilizado para establecer la configuración epistémica hipotética de la Tarea 1. La *configuración epistémica hipotética de la Tarea 2* depende de los siguientes elementos de la actividad: el resumen de la tarea, la situación, las instrucciones para dar a los alumnos, el material a entregar, las orientaciones por el investigador, los objetivos de aprendizaje y los procesos relacionados con los contenidos clave y curriculares. Para establecer la configuración de objetos primarios, el Cuadro 3 muestra los elementos de este constructo para el caso de la Tarea 2. La relación entre los objetos matemáticos primarios que se espera se presente al implementar la Tarea 1 puede identificarse en su *configuración epistémica hipotética* (Figura 3).

Cuadro 3 – Unidades de análisis de la *configuración epistémica hipotética* de la Tarea 2

Código	Objeto Primario	Descripción del Objeto Primario
SP2	Situaciones-Problema de la Tarea 2	El estudio de un cuerpo de tres dimensiones como la Tierra se simplifica al trabajar en una dimensión. Los mapas son imágenes idealizadas de lo que hay en la Tierra, pero representado sobre un plano. ¿Cómo harías para pasar de un mapa que tiene forma plana en un cuerpo geométrico de tres dimensiones?
DC2	Definiciones (Conceptos) de la Tarea 2	cuerpo de tres dimensiones, una dimensión, imagen idealizada, plano, forma plana, cuerpo geométrico, tres dimensiones, cuerpo geométrico de tres dimensiones. **Emergentes:** desarrollo plano, pirámide triangular, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro
LMVE2	Lenguaje Matemático Verbal/Escrito de la Tarea 2	cuerpo de tres dimensiones, una dimensión, imagen idealizada, plano, forma plana, cuerpo geométrico, tres dimensiones, cuerpo geométrico de tres dimensiones, desarrollo plano, pirámide triangular, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro, “planisferio”, “mapa físico - político”
LMG2	Lenguaje Matemático Gráfico de la Tarea 2	Representación gráfica de la relación entre las caras (triángulo equilátero, cuadrado y pentágono), el mapamundi y el cuerpo geométrico asociado a la forma geométrica de la cara mostrada (isométrico de una pirámide triangular, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro)
PP2	Propiedades / Proposiciones de la Tarea 2	Representar un cuerpo tridimensional a partir de material de dos dimensiones puede hacerse cuando se identifican: las formas de las caras planas del cuerpo geométrico y la relación que existe entre ellas. El cambio de dos a tres dimensiones, es decir, la reconstrucción de un cuerpo geométrico de tres dimensiones, se hace posible mediante la correcta identificación de la relación que existe entre las caras planas del cuerpo geométrico. Un mapa de dos dimensiones puede parecerse lo más posible a la esfera terrestre a partir de una división y doblamiento adecuados que le lleven a una forma tridimensional.
P2	Procedimientos de la Tarea 2	1. Identificar la forma de las caras de un poliedro. 2. Encontrar estrategias de forma colaborativa para identificar la orientación y posición de las caras que conforman un poliedro. 3. Compartir ideas, razonamientos y conocimientos con los compañeros para desarrollar estrategias de dibujo geométrico para el desarrollo plano de un poliedro en una superficie determinada. 4. Emplear regla, escuadra y papel para dibujar el desarrollo plano de un poliedro. 5. Reconstruir un poliedro a partir de su desarrollo plano.
A2	Argumentos de la Tarea 2	El número de caras de un poliedro es un factor determinante en el uso del área máxima de una superficie dada.

Fuente: Elaboración propia

Figura 3 – Esquema de la *configuración epistémica hipotética* de la Tarea 2



Fuente: Elaboración propia

Siguiendo con el relato de las notas de campo y el mismo orden de identificación de los objetos primarios por la identificación de la configuración epistémica hipotética de la Tarea 1 se hizo la caracterización de la implementación en el aula de esta tarea, es decir la *configuración epistémica implementada* (Cuadro 4).

Cuadro 4 – Unidades de análisis de la *configuración epistémica implementada* de la Tarea 1

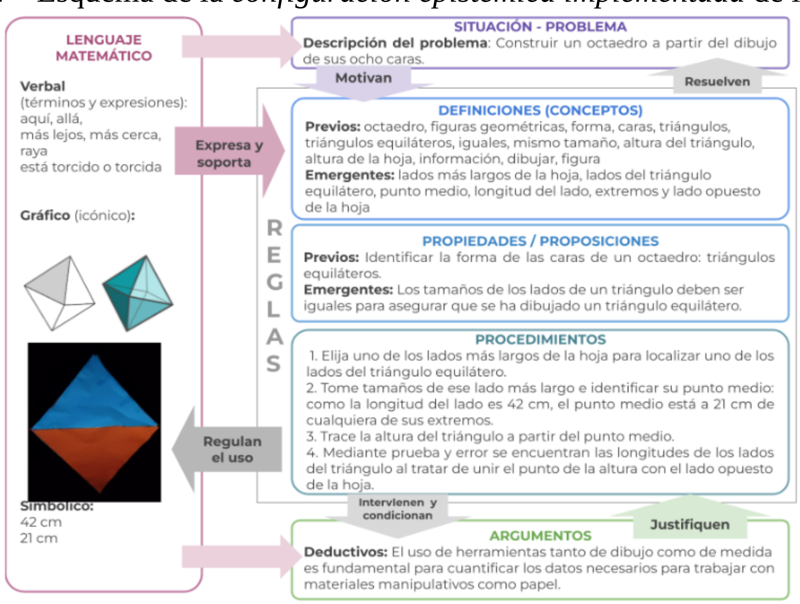
Código	Objeto Primario	Descripción del Objeto Primario
SP1	Situaciones-Problema de la Tarea 1	Plantear el problema de construcción grupal de un octaedro a los alumnos (sin contexto).
DC1	Definiciones (Conceptos) de la Tarea 1	Octaedro, figuras geométricas, forma, caras, triángulos, triángulos equiláteros, iguales, mismo tamaño, altura del triángulo, altura de la hoja, información, dibujar, figura Emergentes: lados más largos de la hoja, lados del triángulo equilátero, punto medio, longitud del lado, extremos y lado opuesto de la hoja
LMVE1	Lenguaje Matemático Verbal/Escrito de la Tarea 1	Verbal: aquí, allá, más lejos, más cerca, raya y está torcido o torcida Escrito: 42 cm, 21 cm

LMG1	Lenguaje Matemático Gráfico de la Tarea 1	Representación gráfica icónica de un octaedro en grises Representación gráfica icónica de un octaedro en verde con transparencias Triángulos dibujados por los alumnos
PP1	Propiedades / Proposiciones de la Tarea 1	Previas: Identificar la forma de las caras de un octaedro: triángulos equiláteros. Emergentes: Los tamaños de los lados de un triángulo deben ser iguales para asegurar que se ha dibujado un triángulo equilátero.
P1	Procedimientos de la Tarea 1	1. Elija uno de los lados más largos de la hoja para localizar uno de los lados del triángulo equilátero. 2. Tome tamaños de ese lado más largo e identificar su punto medio: como la longitud del lado es 42 cm, el punto medio está a 21 cm de cualquiera de sus extremos. 3. Trace la altura del triángulo a partir del punto medio. 4. Mediante prueba y error se encuentran las longitudes de los lados del triángulo al tratar de unir el punto de la altura con el lado opuesto de la hoja.
A1	Argumentos de la Tarea 1	El uso de herramientas tanto de dibujo como de medida es fundamental para cuantificar los datos necesarios para trabajar con materiales manipulativos como papel.

Fuente: Elaboración propia

Siguiendo el esquema propuesto por Godino, Batanero y Font (2008), en la Figura 4, se muestra la representación gráfica de las relaciones e interdependencias entre los objetos primarios al momento de su implementación, es decir, la *configuración epistémica implementada* de la Tarea 1.

Figura 4 – Esquema de la *configuración epistémica implementada* de la Tarea 1



Fuente: Elaboración propia

Se aplica el mismo procedimiento que se utilizó para establecer los objetos primarios de la Tarea 1 en la obtención de la *configuración epistémica implementada* de la Tarea 2 (Cuadro 5).

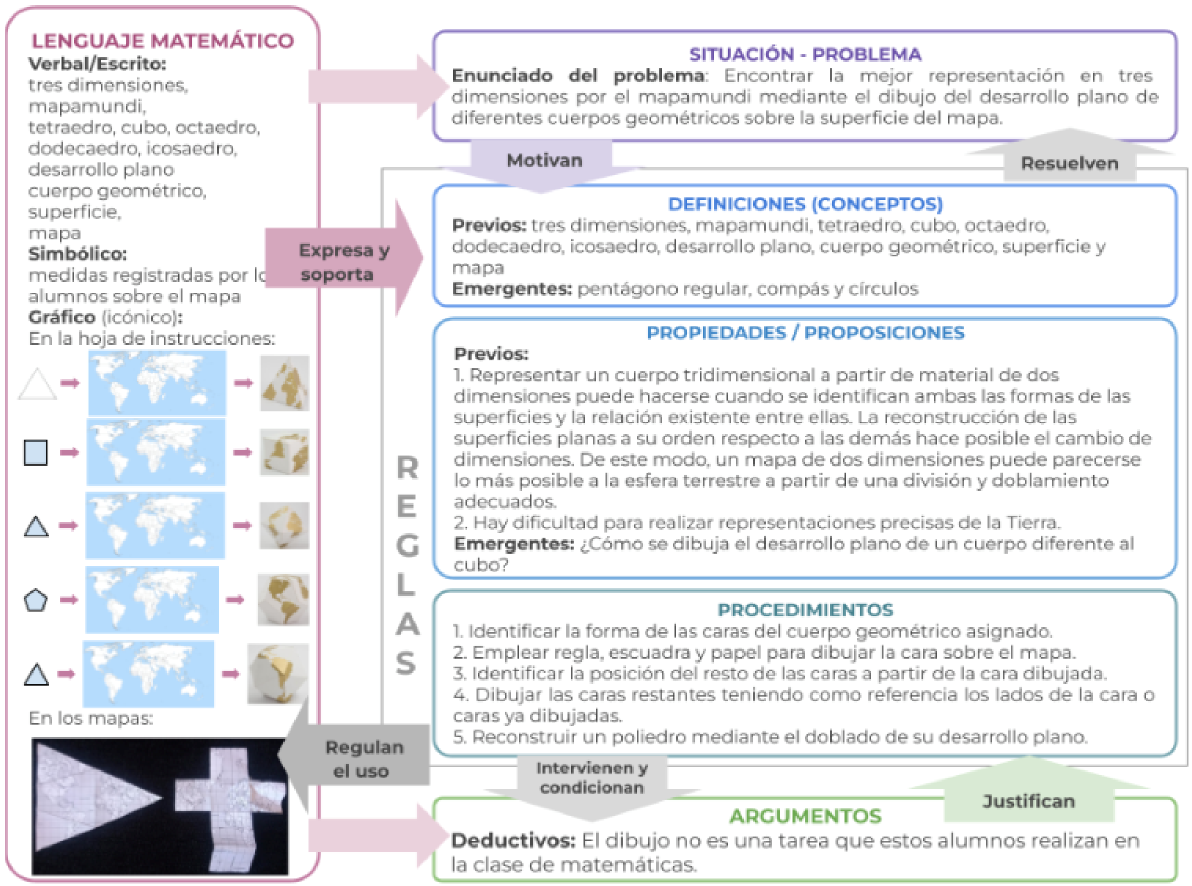
Cuadro 5 – Unidades de análisis de la *configuración epistémica implementada* de la Tarea 2

Código	Objeto Primario	Descripción del Objeto Primario
SP2	Situaciones-Problema de la Tarea 2	Encontrar la mejor representación en tres dimensiones por el mapamundi mediante el dibujo del desarrollo plano de diferentes cuerpos geométricos sobre la superficie del mapa.
DC2	Definiciones (Conceptos) de la Tarea 2	Previas: tres dimensiones, mapamundi, tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro, desarrollo plano, cuerpo geométrico, superficie y mapa. Emergentes: pentágono regular, compás y círculos
LMVE2	Lenguaje Matemático Verbal/Escrito de la Tarea 2	tres dimensiones, mapamundi, tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro, desarrollo plano, cuerpo geométrico, superficie, mapa, pentágono regular, compás y círculos
LMG2	Lenguaje Matemático Gráfico de la Tarea 2	Representación gráfica de la relación entre las caras (triángulo equilátero, cuadrado y pentágono), el mapamundi y el cuerpo geométrico asociado a la forma geométrica de la cara mostrada (isométrico de una pirámide triangular, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) y desarrollo plan asignado dibujado sobre el mapamundi entregado
PP2	Propiedades / Proposiciones de la Tarea 2	Previas: Representar un cuerpo tridimensional a partir de material de dos dimensiones puede hacerse cuando se identifican ambas las formas de las superficies y la relación existente entre ellas. La reconstrucción de las superficies planas a su orden respecto a las demás hace posible el cambio de dimensiones. De este modo, un mapa de dos dimensiones puede parecerse lo más posible a la esfera terrestre a partir de una división y doblamiento adecuados. Hay dificultad para realizar representaciones cuidadosas de la Tierra. Emergentes: ¿Cómo se dibuja el desarrollo plano de un cuerpo diferente al cubo?
P2	Procedimientos de la Tarea 2	1. Identificar la forma de las caras del cuerpo geométrico asignado. 2. Emplear regla, escuadra y papel para dibujar la cara sobre el mapa. 3. Identificar la posición del resto de las caras a partir de la cara dibujada. 4. Dibujar las caras restantes teniendo como referencia los lados de la cara o caras ya dibujadas. 5. Reconstruir un poliedro mediante el doblado de su desarrollo plano.
A2	Argumentos de la Tarea 2	El dibujo no es una tarea que estos alumnos realizan en la clase de matemáticas.

Fuente: Elaboración propia

Los objetos primarios registrados en el Cuadro 5 permiten construir el esquema para ilustrar las relaciones e interdependencias entre ellos se presenta en la Figura 5.

Figura 5 – Esquema de la *configuración epistémica implementada* de la Tarea 2



Fuente: Elaboración propia

4. Discusión de las configuraciones epistémicas

Las configuraciones epistémicas que muestran la relación entre los objetos matemáticos primarios de las actividades matemáticas (GODINO; BATANERO; FONT, 2008) que integran el trabajo de investigación se presentan en dos etapas: (1) a priori, para establecer los objetos matemáticos que se espera que surjan en la implementación de las tareas, y (2) a posteriori, para reconocer todos los objetos matemáticos surgidos al implementar las tareas en el aula. En este artículo se contrastan estos dos instrumentos de análisis didáctico del EOS para cada una de las dos tareas de dibujo geométrico llevadas al aula para identificar y comparar el lenguaje matemático, las situaciones-problema, las definiciones, los procedimientos, las propiedades y argumentos que se esperaba pudieran surgir en la implementación y que finalmente se observaron.

Al comparar el primer objeto matemático primario de las configuraciones epistémicas, las situaciones-problema, puede observarse una primera diferencia: la falta de contextualización. Aunque en la hoja de instrucciones entregada de la Tarea 1 a los alumnos se registra un contexto, el comportamiento de los alumnos hizo que quien actuaba de docente (la autora de este trabajo de investigación) avanzara en el desarrollo de la actividad para mantener el control de la clase. La creación de pautas de interacción que ayuden a los alumnos en su proceso de estudio es una función primordial del docente o facilitador. Según se observa, la variación de las situaciones-problema de la Tarea 1 incidió en el siguiente objeto primario de las configuraciones epistémicas, las definiciones o conceptos. En primer lugar, conceptos relacionados con el contexto de la Tarea 1 considerados en la configuración epistémica hipotética desaparecieron, dando pie a que surgieran conceptos relacionados con la orientación del dibujo geométrico presentada a los alumnos para ayudarles a resolver sus dudas.

En relación al lenguaje matemático verbal y escrito, la configuración epistémica de la implementación de la Tarea 1 muestra que los registros de los alumnos son coloquiales y que los términos que se esperaba encontrar en los diálogos de los alumnos no se lograron. Pero también se ha identificado un aspecto que quedó fuera de toda consideración: que los alumnos hacen registro de las medidas que toman cuando realizan dibujo geométrico. El lenguaje matemático gráfico, las propiedades/proposiciones y los procedimientos son objetos matemáticos primarios que mantuvo similitudes entre su descripción en la configuración epistémica hipotética y la configuración epistémica producida a partir de los datos de la implementación. Esto puede relacionarse con la intervención de la facilitadora de la sesión, primera autora de este artículo, quien pautó de manera muy concreta el dibujo geométrico a realizar ante la imposibilidad de muchos alumnos al hacerlo.

La intervención de la facilitadora de la Tarea 1, también influyó en el desarrollo de argumentos por parte de los alumnos. De nuevo, la regulación del proceso de aprendizaje de los alumnos por parte de la figura docente generó argumentos dados a la configuración epistémica de la implementación de la tarea que son distintos a los esperados identificados en la configuración epistémica hipotética. De forma similar a lo que se ha presentado en el apartado previo, los objetos matemáticos primarios que intervienen en una actividad de cariz matemático son utilizados en su faceta hipotética y de implementación para la Tarea 2.

5. Conclusiones

Las herramientas de trabajo construidas en el marco del EOS, el constructo *configuración epistémica*) nos ha permitido alcanzar el objetivo de contrastar los estados hipotético e implementado de una tarea de dibujo geométrico para alumnos de ESO. Las configuraciones epistémicas han permitido determinar con alto grado de detalle tanto el conocimiento del contenido de geometría, como el conocimiento ampliado de este contenido, centrándonos en los contenidos clave (Sentido espacial y representación de figuras tridimensionales y Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción) del currículo de geometría del primer curso de ESO. Al contrastar los objetos primarios de las configuraciones epistémicas de las dos tareas del estudio de investigación, se ha visto que existe una diferencia notable entre la mayoría de ellos.

En el caso de la primera de las dos tareas, a pesar de las diferencias entre el lenguaje matemático, las definiciones/conceptos, las propiedades/proposiciones, los procedimientos y los argumentos, los alumnos lograron desarrollar con éxito el dibujo de las caras del octaedro y su construcción. Por tanto, se puede decir que estas modificaciones de los objetos matemáticos primarios fueron necesarias para llegar a conseguir el reto propuesto. Por lo que respecta a la segunda tarea, más que hacer referencia a las figuras geométricas y sus propiedades, los alumnos realizaron descripciones relacionadas con el espacio, como se muestra en la comparación de las configuraciones epistémicas. La modificación del lenguaje matemático, las definiciones/conceptos, las propiedades/proposiciones, los procedimientos y los argumentos fueron impedimentos en la consecución del reto planteado: la construcción de diferentes poliedros para realizar aproximaciones de una representación tridimensional de un mapamundi.

Puede afirmarse que las modificaciones de los objetos primarios de la configuración epistémica hipotética de una tarea han tenido un efecto positivo en la implementación de la Tarea 1, pero al llevar al aula la Tarea 2 el efecto fue lo contrario. Los cambios de los objetos primarios de la configuración epistémica hipotética de la Tarea 2 interfirieron en la capacidad de los alumnos para llegar a construir la mayoría de los poliedros asignados: pirámide, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Estas comparaciones entre la configuración epistémica hipotética de cada una de las tareas y la configuración epistémica producto de la implementación de la misma tarea muestran más allá de lo que indica el Modelo de la Competencia y Conocimiento Didáctico y Matemático de Font, Planas y Godino (2010) para desarrollar la Competencia Matemática del profesor a la vez que se adquiere la Competencia de Análisis e Intervención Didáctica (PINO-FAN; CASTRO; FONT, 2022): el impacto del docente con la realidad de su grupo y que, en el papel, las propuestas didácticas son algo que no siempre coincide con su implementación. Las diferencias se observan una vez iniciada la sesión.

Como perspectiva futura se pretende hacer uso de esta herramienta de análisis didáctico de la EOS para orientar la reflexión del profesor sobre su propia práctica (FONT; PLANAS; GODINO, 2010).

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos: PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa"; PID2019-104964GB-I00 (MICINN, FEDER, EU); PGC2018-098603-B-I00 (MINECO).

Referencias

ÁVILA, Rafael. La observación, una palabra para desbaratar y re-significar. Hacia una epistemología de la observación. **Revista Científica Guillermo de Ockham**, Cali, v. 6, n. 1, p. 15-6, ene. 2008. DOI: https://doi.org/10.17227/01212494.20pys97.106

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; PINO-FAN, Luis Roberto. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-78, abr., 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BREDA, Adriana; PINO-FAN, Luis Roberto; FONT, Vicenç. Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. **EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education**, London, v. 13, n. 6, p. 1893-1918, may., 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207ª

CAMARGO, Leonor. **Perspectivas para leer la práctica del profesor de matemáticas**. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 2019.

FONT, Vicenç. Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s.l], v. 26, p. 9-5, ene., 2011.

FONT, Vicenç; PLANAS, Núria; GODINO, Juan Díaz. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, Bellaterra, v. 33, n. 1, p. 89-105, jun., 2010. DOI: https://doi.org/10.1174/021037010790317243

FUERTES, M. Teresa. La observación de las prácticas educativas como elemento de evaluación y de mejora de la calidad en la formación inicial y continua del profesorado. **Revista de Docencia Universitaria**, Valencia, v. 9, n. 3, p. 237-258, dic., 2011. DOI: https://doi.org/10.4995/redu.2011.11228

GODINO, Juna Díaz. Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. **Quadrante**, Lisboa, v. 2, n. 1, p. 9-22, ene., 1993.

GODINO, Juan Díaz. **Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática**. Granada: Universidad de Granada, 2018. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM Mathematics Education**, Hamburgo, v. 39, p. 127-135, ene., 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. **Acta Scientiae**. Canoas, v. 10, p. 7-37, mar., 2009.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. **Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaíso, v. 12, n. 2, p. 3-5, ago., 2020. DOI: https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

GODINO, Juan Díaz; GIACOMONE, Belén; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 1, n. 57, p. 90-113, ene., 2017. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

GROSSMAN, Pam; HAMMERNESS, Karen; McDONALD, Morva. Redefining teaching, re-imagining teacher education. **Teachers and Teaching**, [s.l], v. 15, n. 2, p. 273-89, may., 2009. DOI: https://doi-org.sire.ub.edu/10.1080/13540600902875340

LOE FRANKE, Megan; KAZEMI, Elham; BATTEY, Daniel de.; LESTER, Frank (Ed.). **Mathematics teaching and classroom practice**. (Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning), p. 225-256. Charlotte: Information Age Publishing, 2007.

MASSOT, Inés; DORIO, Inma; SABARIEGO, Marta; de. BISQUERRA, Rafael. (Coord.). **Estrategias de recogida y análisis de la información**. (Metodología de la investigación educativa). p. 329-368. España: La Muralla, 2009.

PATTON, Michael Quinn. **Qualitative Research & Evaluation Methods**. Saint Paul: SAGE, 2002.

PINO-FAN, Luis Roberto; Castro, Walter; FONT, Vicenç. A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher's Practice. **International**

Journal of Science and Mathematics Education, London, sep., 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

PINO-FAN, Luis Roberto; FONT, Vicenç; BREDA, Adriana; de. KAUR, B.; HO, W.K.; TOH, T.L.; CHOY; B.H. (Eds.). **Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach**. (Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 4, p. 33-40). Singapur: PME, 2017.

POCHULU, Marcel; Font, Vicenç. Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, Ciudad de México, v. 14, n. 3, p. 361-94, nov., 2011.

RAUNER, Felix. Practical knowledge and occupational competence. **European journal of vocational training**, [s.l], v. 40, n. 1, p. 52-66, 2007.

STAKE, Robert. **Investigación con estudio de casos**. Madrid: Ediciones Morata, 1998.

STAKE, Robert., de. DENZIN, Norman; LINCOLN, Yvonna S. (Eds.). **Case Study**. (Strategies of Qualitative Inquiry, p. 134-164). Thousand Oaks: Sage, 2003.

STAKE Robert. **Qualitative Research**. Studying How Things Work. New York: The Guilford Press, 2010.

SYKES, Gary; BIRD, Tom; KENNEDY, Mary. Teacher Education: Its Problems and Some Prospects. **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 6, n. 5, p. 464-476, nov., 2010. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487110375804

TRIPP David. Teacher's lives, critical incidents, and professional practice. **Qualitative studies in education**, London, v. 7, n. 1, p. 65-76, ene., 1994. DOI: https://doi.org/10.1080/0951839940070105

VEENMAN, Simon. Perceived Problems of Beginning Teachers. **Review of Educational Research**, [s.l], v. 54, n. 2, p. 143-78, verano, 1984. DOI: https://doi.org/10.2307/1170301

Autores

Elvira Garcia Mora

Profesora Asociada del Departamento de Educación Lingüística y Literaria y de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Barcelona. Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Barcelona (España). Posgraduada en Metalurgia y Ciencias de los Materiales por el Instituto de Investigaciones Metalúrgicas y de los Materiales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (México). Graduada en Ingeniería Mecánica por la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (México). Autora y editora de contenidos matemáticos para la educación infantil, primaria y secundaria para Latinoamérica y España. Investigación en análisis didáctico y formación de profesorado para la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva del Enfoque Onto-semiótico.

elviragarciamora@ub.edu

https://orcid.org/0000-0003-4125-0295

Francisco Javier Díez Palomar
Profesor Agregado del Departamento de Educación Lingüística y Literaria y de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Barcelona. Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Barcelona. Miembro de CREA (Community of Research for Excellence for All), de GRESUD (Research Group in Education to Overcome Inequalities). Presidente de la AMIE (Asociación Multidisciplinar de Investigación Educativa), asociación miembro de la WERA (World Educational Research Association). Miembro permanente en representación de España en la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Ètude et l'Amélioratition de l'Enseignement des Mathématiques) desde 2012. Editor en jefe de REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education. Investigador principal de diversos proyectos de investigación relacionados con la educación en personas adultas, desarrollo de la competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria y secundaria, uso de la *lesson study* y la idoneidad didáctica en el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica en el marco de la formación de profesores de matemáticas.
jdiezpalomar@ub.edu
https://orcid.org/0000-003-4447-1595

Como citar o artigo:

GARCÍA-MORA, E.; DÍEZ-PALOMAR, J. De las configuraciones semióticas a las configuraciones epistémicas de una tarea de dibujo geométrico: lo que se espera y lo que se implementa. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 351 - 373 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p351-373.id1388

Uso de argumentos históricos para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con recursos tecnológicos

Weimar Muñoz Villate
wmunoz@unisalle.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-4947-5600
Universidad de La Salle (ULS)
Bogotá, Colombia.

Olga Lucía León Corredor
olleon@udistrital.edu.co
https://orcid.org/0000-0003-4373-8630
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC)
Bogotá, Colombia.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

La literatura sobre la enseñanza y aprendizaje del Teorema Fundamental del cálculo (TFC) ha evidenciado las dificultades que tienen los alumnos para su comprensión y se ha concentrado en secuencias de tareas que no tienen en cuenta la complejidad de su evolución histórica. En este escrito se realiza un estudio que permite el esbozo de una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del TFC en la que se incorporan, gracias al uso de herramientas tecnológicas, argumentos históricos obtenidos de los estudios de Newton y de Leibniz. La metodología ha sido, básicamente, una revisión historiográfica de los escritos de Newton y de Leibniz sobre este teorema. El proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC aquí esbozado, además de facilitar la visualización de este objeto matemático, permite presentar a los alumnos una perspectiva más compleja de este teorema, con lo que, a priori, se mejora la idoneidad epistémica y de medios con relación a las propuestas habituales para la enseñanza de dicho objeto matemático.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, Newton, Leibniz, software educativo, Enfoque Ontosemiótico.

Use of historical arguments for teaching the Fundamental Theorem of Calculus (FCT) with technological resources

Abstract

The papers about the teaching and learning process of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) has shown the student's problems on its comprehension, and some of these articles are focused on didactic sequences avoiding the historical evolution of the FTC. In this paper we report a proposal for teaching and learning the FTC using technological tools and historical arguments from the study of some manuscripts of Newton and Leibniz. The methodology has been, basically, a historiographical review of the writings of Newton and Leibniz on this theorem. The teaching and learning process of this theorem outlined here allows to introduce the FTC with a more complex perspective and to facilitate the visualization of this mathematical

object to the students. Like a consequence, a priori we hope, to improve the epistemic and media suitability, in contrast to the usual proposals for the teaching of this mathematical object.
Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, Newton, Leibniz, Educational software, Ontosemiotic Approach.

Uso de argumentos históricos para o ensino do teorema fundamental do cálculo (TFC) com recursos tecnológicos

Resumo

A literatura sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) tem destacado as dificuldades que os alunos apresentam em compreendê-lo e tem focado em sequências de tarefas que não levam em conta a complexidade de sua evolução histórica. Neste artigo é realizado um estudo que permite delinear uma proposta de ensino e aprendizagem do TFC em que são incorporados, graças ao uso de ferramentas tecnológicas, argumentos históricos obtidos a partir dos estudos de Newton e Leibniz. A metodologia foi, basicamente, uma revisão historiográfica dos escritos de Newton e Leibniz sobre esse teorema. O processo de ensino-aprendizagem do TFC aqui delineado, além de facilitar a visualização desse objeto matemático, permite apresentar aos alunos uma perspectiva mais complexa desse teorema, melhorando assim, a adequação epistêmica e de meios em relação às propostas usuais para o ensino do referido objeto matemático.
Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Newton, Leibniz, software educacional, Abordagem Ontosemiótica.

Introducción

Este trabajo se enmarca en una de las preguntas de investigación que guían al Enfoque Ontosemiótico (EOS): ¿Qué tipo de acciones y recursos se deben implementar en un proceso de instrucción llevado a cabo en un contexto dado para que se pueda optimizar el aprendizaje de las matemáticas? (GODINO; BATANERO, 2020). En el EOS, para responder a esta pregunta se ha generado la noción de *Idoneidad Didáctica* (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018) que se desglosa en seis criterios de idoneidad (epistémico, cognitivo, ecológico, afectivo, mediacional e interaccional). En particular en esta investigación estamos interesados en la mejora a priori de la idoneidad epistémica y mediacional de los procesos de instrucción del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

El objetivo de este escrito es, por tanto, utilizar la notación moderna y herramientas tecnológicas con software matemático para hallar y hacer visibles argumentos históricos del TFC, que son heurísticamente pertinentes para la enseñanza universitaria y para mejorar la idoneidad epistémica de su enseñanza. Los argumentos que se han rescatado emergieron a partir de una revisión historiográfica de los escritos de Newton y de Leibniz sobre el TFC que pueden alimentar y profundizar trabajos para una reconstrucción holística de la antiderivada (GORDILLO; PINO-FAN, 2015), o aquellos que buscan una presentación alternativa de este teorema usando TIC (ROBLES; TELLECHEA; FONT, 2014; MUÑOZ VILLATE, 2021; MUÑOZ-VILLATE, 2021; MUÑOZ, 2022) .

En cuanto al uso de software, se utilizarán aquellos que permitan la visualización de los argumentos geométricos utilizados por Newton y por Leibniz, esto es, aquellos que permitan comparar gráficas de manera simultánea y dinámica. Desde el EOS se afirma que dentro de las ventajas que ofrece el uso de computadores y de software matemático al proceso de enseñanza y aprendizaje, se encuentran que éstos “proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa" (GODINO, 2004, p. 143). Agregando a lo anterior, estas herramientas tecnológicas aumentan la velocidad en los cálculos, permitiendo así que los estudiantes se centren en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. Las TIC también otorgan dinamismo a las gráficas o esquemas que se puedan realizar.

Se mostrarán entonces, primero, dos argumentos históricos del TFC mediados por estas TIC. Uno de Newton y otro de Leibniz. La implementación de estos argumentos mediante un software educativo será el foco central de este escrito, Como la elección de un software que permita mejorar la visualización del TFC no es una tarea sencilla, se realizó una revisión de la literatura de las investigaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza del Cálculo. Además, para la elección del software se tuvieron en cuenta criterios de robustez, velocidad, gratuidad, y otros aspectos que serán mencionados a continuación.

1. Referencial Teórico

Herramientas tecnológicas. La tecnología puede ser vista no sólo como una ayuda para realizar cálculos de manera más sencilla, ni como la última poderosa infraestructura representacional introducida por la humanidad para reproducir los pensamientos e ideas de manera digital, sino que además, también puede verse como una infraestructura que admite al menos dos desarrollos: primero, que ya no se requiere la participación humana para la ejecución de un proceso, y segundo, el acceso al simbolismo no se restringe ahora a un privilegiado minoría de personas, como lo fue en el pasado (FERRARA; PRATT; ROBUTTI, 2019). Luego el uso de tecnologías sirve como medio de democratización del conocimiento.

En esta investigación, dichas herramientas tecnológicas han servido para recuperar argumentos históricos del TFC que sólo son conocidos por expertos o por una pequeña parte de la población académica, así como herramienta de ayuda para mejorar la visualización de dichos argumentos.

Es oportuno decir entonces que, dentro de las ventajas que ofrece el uso de computadores y software matemático al proceso de enseñanza y aprendizaje, se encuentran que éstos proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, y que, además, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa (GODINO et al., 2014), además de tener la posibilidad de otorgar dinamismo a las gráficas o esquemas que se puedan realizar. Adicionalmente, permiten desarrollar de manera más intuitiva argumentos históricos como los de Leibniz: "vemos la intuición de Leibniz, que se exhibió en los primeros artículos publicados sobre el cálculo, aunque vilipendiado durante trescientos años en la prensa inglesa, apareciendo como una concepción natural en un enfoque informático moderno[10]" (TALL, 1991[a], p. 9).

Las TIC también sirven para mejorar la visualización, y ésta juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que las representaciones gráficas de estructuras pueden permitir formas de razonamiento distintas a las inferencias deductivas, y puede ayudar a la comprensión (MCDOUGALL et al., 2010).

Teniendo claras estas ventajas que ofrece el uso de un software para el proceso educativo, y en particular para esta investigación, se pueden abordar algunas categorizaciones de estas herramientas tecnológicas. Es pertinente para este investigación seguir la clasificación que hacen Godino et al. (2004) de los tipos de software para la enseñanza: Lenguajes de programación (e.g. C++ y Java), Paquetes profesionales (e.g. SPSS, RStudio, Mathematica), Software didáctico (Sebran y GCompris sirven para ayudar a los niños a identificar letras, colores, números), Micromundos (e.g., Karel el Robot, promueve la creatividad y la lógica para el aprendizaje básico de la programación), Software de uso general (e.g. Excel), y los Tutoriales

[10] Traducción propia de Tall (1991), p. 9: 'we see the intuition of Leibniz, which was exhibited in the very first published articles on the calculus, yet vilified for three hundred years in the English press, appearing as a natural conception in a modern computer approach'.

(e.g. iSpring Suite que permite crear cursos en base a diapositivas). De manera particular, en este escrito, los argumentos de Newton y de Leibniz elegidos sobre el TFC serán mediados por herramientas tecnológicas de tipo *Lenguajes de Programación o Software de uso general*.

Argumentos históricos.

Se verá a continuación el referente teórico para los argumentos históricos heurísticamente pertinentes del TFC, no sin antes enunciar la versión de este teorema que será considerada a lo largo de este escrito.

Teorema Fundamental del Cálculo:

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$,

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es una antiderivada de f, i.e., $F'(x) = f(x)$.

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es una piedra angular dentro de la estructura que se reconoce hoy en día como análisis matemático (DUNHAM, 2005). Por tanto, hacer alguna modificación en su forma de presentación tendrá repercusiones en otros objetos matemáticos que se enseñan posteriormente, tales como el teorema de Green, el cálculo de la longitud de arco, etc. Sin embargo, el proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC tiene dificultades para muchos docentes, porque no saben cómo mejorar su enseñanza creando secuencias didácticas que busquen la mejora de la comprensión del teorema (ROBLES; TELLECHEA; FONT, 2014). Para los estudiantes, los obstáculos al entender el TFC, radican en la dificultad de comprender objetos matemáticos estudiados previamente al estudio de este teorema, tales como función, continuidad y antiderivada (THOMPSON; DREYFUS, 2016).

Una posible solución para afrontar la enseñanza de objetos matemáticos complejos, como es el caso del TFC, que propone la didáctica de la matemática es buscar en la génesis de estos objetos: “La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia” (GODINO; BATANERO, 1994, p. 4).

Las razones para esta reflexión histórica sobre los objetos matemáticos a enseñar son varias La búsqueda de los aspectos históricos permite analizar la construcción de un saber a partir del encuentro con otros saberes, de comprender las uniones con las otras actividades científicas y de reunir diferentes campos de las matemáticas. Negarse a abordar la perspectiva histórica de procesos, conceptos, objetos matemáticos, algoritmos, etc. que se piensan enseñar, es negarle al estudiante comprender que las matemáticas tienen un estatus de actividad cultural inseparable de las otras actividades y prácticas humanas (BARBIN, 2006). Fauvel (1991) también coincide en que no hay que encubrir el lado humano de las matemáticas, ya que implica ocultarles a los estudiantes que ellos no son los únicos con dificultades procedimentales.

Ahora bien, explorar el TFC desde la perspectiva histórica podría realizarse desde el estudio de las matemáticas a partir de la misma Grecia si se quiere. Si se piensa en la génesis del análisis matemático, habría que estudiar entonces a Newton, Leibniz, Barrow, Cavalieri, Descartes, Sluse, Hudde, Fermat, van Heuraet, Gregory, entre otros, porque todos ellos trabajaron con objetos matemáticos propios del TFC (KATZ, 1993; BRESSOUD, 2011; MENA, 2014; BLÅSJÖ, 2015; MUÑOZ VILLATE, 2022). También podría realizarse un estudio del TFC desde los escritos de Cauchy, Riemann, Euler, etc. quienes formalizaron y potenciaron el análisis matemático. Sin embargo, en esta investigación, se hace la elección de indagar en los trabajos de Newton y de Leibniz, porque ellos no sólo vieron la relación que había entre el problema inverso de las tangentes y de las áreas, sino que además suministraron algoritmos para resolver más problemas (MUÑOZ VILLATE, 2022; CHEMLA et al., 2016; BRESSOUD, 2011; GUICCIARDINI, 2011; PANZA, 2005). Es decir, no solo reconocieron una relación geométrica o algebraica del TFC, sino que además supieron dónde poder utilizarla.

2. Metodologías

2.1 Metodología para elegir un software educativo

Una forma de abordar el problema de elegir un software educativo es tener en cuenta aspectos, cuestionamientos y criterios sugeridos desde la investigación educativa sobre los beneficios y atributos que tiene cada programa tecnológico que se derivan de las respuestas a preguntas como las siguientes: ¿Es un software atractivo? ¿Permite este software desplazarse sobre las gráficas o videos realizados? ¿Son válidos los resultados del software? ¿El software es versátil, fácil de operar y robusto? (SQUIRES; MCDOUGALL, 1994; MUÑOZ VILLATE, 2021).

Adicionalmente, se debe considerar que por la naturaleza del argumento de Newton sobre el TFC que se mostrará a continuación, es necesario un software que permita graficar de manera simultánea el área bajo una curva y su cuadratura. Para el argumento de Leibniz sobre el TFC, se busca un software que sea amable de manejar y que le permita al usuario recrear él mismo el triángulo diferencial.

Estos aspectos deben ser considerados, porque el hecho de que un software funcione no es un criterio para elegirlo como la herramienta tecnológica a emplear. También hay que considerar el grado de disponibilidad y adecuación de esos recursos tecnológicos y temporales para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC. La elección de un software y su incorporación al proceso de enseñanza y aprendizaje se relaciona con lo que se denomina en el Enfoque Ontosemiótico como idoneidad mediacional (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Dentro de la inmensa gama de herramientas tecnológicas que se podrían utilizar, emergen dos softwares con regularidad: GeoGebra y Microsoft Excel. Ambos tienen una alta disponibilidad: el primero es un software gratuito y tiene incluso una versión on-line, y Excel viene preinstalado en la mayoría de laptops o sistemas Android, teniendo una versión inclusive en Mac OS. Son TIC amigables, producen resultados válidos, son versátiles y tienen un sistema robusto. En ambos softwares se han desarrollado investigaciones sobre el TFC u objetos matemáticos que lo componen (PEÑALOZA; SUAREZ; ROA, 2013; HOHENWARTER et al., 2008; MIKE; ANNEKE, 2017). Tomando todo lo anterior en cuenta, se eligen los softwares GeoGebra, que permite realizar y comparar gráficas de manera simultánea y dinámica (siendo óptimo para el argumento de Newton que se mostrará) y, Microsoft Excel por la versatilidad y sencillez para describir el argumento que se trabajará de Leibniz.

2.2 Metodología de búsqueda de los argumentos históricos del TFC

Se utiliza en esta parte la metodología de la historiografía en matemáticas. Esto es, un estudio de argumentos u objetos matemáticos en un periodo de la historia en textos o escritos que traten del tema en cuestión. En una instancia inicial, se analizan las fuentes primarias disponibles, y luego se estudian aquellos trabajos realizados por expertos en esa materia. Para el estudio de la obra de Newton, es posible hacer un análisis cronológico de distintas *versiones* del TFC a partir de 1665 hasta 1704 (MUÑOZ VILLATE, 2022), porque se tiene acceso a manuscritos que hacen parte de su fuente primaria (NEWTON, 1704; ILIFFE, 2011, 2012). Como fuentes secundarias se tienen trabajos reconocidos por la comunidad internacional (WHITESIDE, 1961; GUICCIARDINI, 1990; PANZA, 2005; SCRIBA, 2014). Para el estudio de Leibniz este trabajo requiere más cuidado, porque no hay un escrito suyo en este momento donde se encuentre un teorema análogo exacto del TFC. No obstante, es posible aproximarse desde tres puntos de vista: como la relación inversa entre los operadores diferencial e integral (el que se desarrollará en este escrito), desde un argumento geométrico (MUÑOZ; LEON, 2023), y desde el trabajo de 1693 como el movimiento de tracción, a partir de un artículo del *Acta Eruditorum* (BLÅSJÖ, 2015; SWETZ, 2015). Para realizar investigaciones sobre los estudios de Leibniz puede consultarse la Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek[11] de Alemania, o lo realizado por el grupo Mathesis Project[12] en Francia.

Esta metodología de la historiografía se usó en este artículo para indagar escritos que contengan argumentos de lo que se reconoce actualmente como TFC. Para Newton se analizaron las Proposiciones 7[13] y 8 donde ya está la estructura del TFC (PANZA, 2005; MUÑOZ VILLATE, 2022). En el caso de Leibniz se mostrará el triángulo diferencial (LEIBNIZ, 1846) que puede consultarse también en algunas fuentes secundarias (KATZ, 1993; REMAKI, 2021).

3. Análisis de Resultados

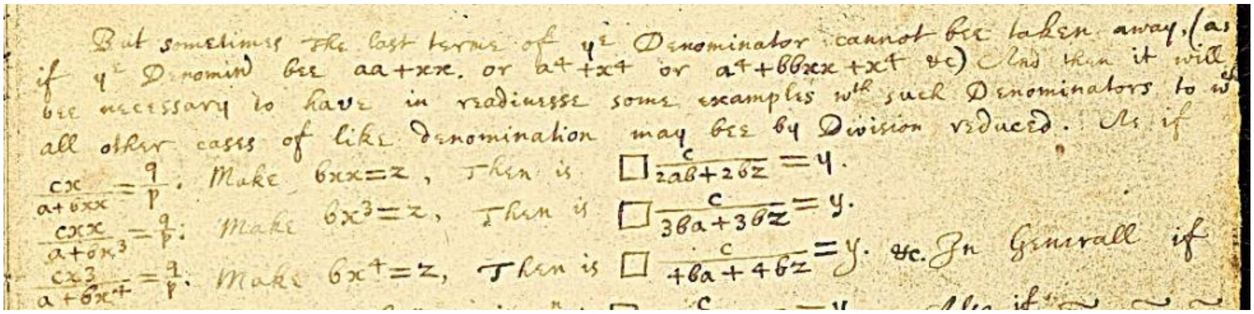
3.1 Disposición del argumento históricos de Newton en GeoGebra.

La Figura 1, muestra ejemplos que planteó Newton tras haber demostrado las proposiciones 7 y 8 en su manuscrito The Tract of Fluxions de 1666. En este año, Newton representaba la integral con el símbolo de un cuadro $\square$ pero también era la notación utilizada para representar el logaritmo.

En el ejemplo 2 está escrito $\frac{cxx}{a+bx^3} = \frac{q}{p}$ Luego Newton sugiere una sustitución $bx^3 = z$ para determinar al final que la solución es $\square \frac{c}{3ba+3bz} = y$, ver Figura 1.

[11] https://www.gwlb.de/home
[12] http://mathesis.altervista.org/
[13] Puede verse el texto original en https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/93

Figura 1 – Ejemplos de la Proposición 7 y 8 de Newton, 1666.


But sometimes the last terms of ye Denominator cannot bee taken away, (as if ye Denomin bee $aa+xx$, or a^4+x^4 or $a^4+bbxx+x^4$ &c) And then it will bee necessary to have in readinesse some examples wth such Denominators to w all other cases of like denomination may bee by Division reduced. As if
$\frac{cx}{a+bxx}=\frac{q}{p}$. Make $bxx=z$, Then is $\square\frac{c}{2ab+2bz}=y$.
$\frac{cxx}{a+bx^3}=\frac{q}{p}$: Make $bx^3=z$, Then is $\square\frac{c}{3ba+3bz}=y$.
$\frac{cx^3}{a+bx^4}=\frac{q}{p}$. Make $bx^4=z$, Then is $\square\frac{c}{4ba+4bz}=y$. &c. In Generall if

Fuente: Imagen original tomada de *The Tract of Fluxions* (ILIFFE, 2011)[14]

El cociente $\frac{q}{p}$ fue el que utilizó Newton para referirse a la relación entre las velocidades generadas por dos objetos que se mueven A y B, en la Proposición 7. La igualdad $\square\frac{c}{3ba+3bz}=y$, se explica a continuación:

Se debe tener en cuenta que para Newton $\square\frac{1}{m}$ representa para lo que en tiempos modernos es $\ln m$. Luego si se hace la sustitución que él propone, $z=bx^3$ se obtiene que $dz=3bx^2dx$, la integral a resolver queda como:

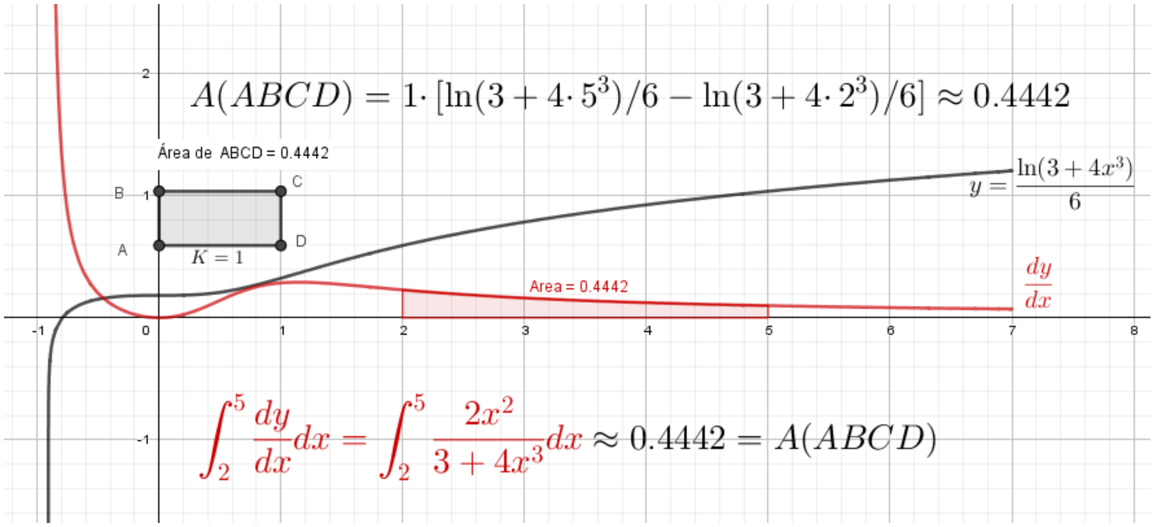
$$\int\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{cx^2}{a+bx^3}dx=\frac{c}{3b}\int\frac{dz}{a+z}=\frac{c}{3b}\ln\,(a+z)$$

Para Newton $\frac{c}{3b}\ln(a+z)=\frac{c}{3b}\square\frac{1}{a+z}=\square\frac{c}{3ba+3bz}$ es la solución que él plantea correctamente.

Para visualizar lo anteriormente escrito, se realizará un ejemplo puntual en el software GeoGebra. Es decir, si se eligen las constantes como $a=3, b=4, c=2$ y se usa la notación moderna, se tendría entonces la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{3+4x^3}$. Si se toma la condición inicial $y(4)=\frac{\ln 259}{6}$ y se grafica la solución a esta ecuación diferencial sobre el intervalo $[2,5]$ se genera el resultado que muestra la Figura 2.

[14] https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/95

Figura 2 – GeoGebra y un ejemplo de Newton de 1666



Fuente: Imagen propia

¿Qué resultados se obtuvieron?

Primero, se recupera la forma algorítmica en la cual Newton trabaja con los logaritmos. Claramente, la solución de $\int \frac{2x^2}{3+4x^3}dx = \frac{\ln(3+4x^3)}{6} + C$, es igual a la respuesta de Newton. Esto es uno de los puntos claves al estudiar documentos históricos, representar en los términos actuales una idea de siglos atrás sin que ésta se modifique o altere.

Segundo, el argumento que está de fondo, y que se pretende recuperar, es que la idea de Newton era calcular el área bajo una curva al relacionarla con el área de un rectángulo con uno de sus lados es una constante K, esto es, $\int_a^b f'(x)dx = K.[f(b) - f(a)]$. Se evidencia que en la Figura 2 se tomó $K = 1$. Este es el argumento que emergió en los trabajos de Newton al basarse en los estudios de Hendrick van Heuraet (PANZA, 2005; SCRIBA, 2014; MUÑOZ VILLATE, 2022).

Tercero, el software GeoGebra resulta idóneo para la visualización de este argumento, porque permite ver tanto la gráfica de dy/dx como la gráfica de y en el mismo plano cartesiano. También, permite construir la cuadratura de la curva que se muestra en rojo como un rectángulo en gris, y verificar que ambas áreas obtenida son iguales. Este trabajo se puede hacer dinámico en la medida en que se declare, por ejemplo, el límite superior como un n y se cree un deslizador que generará áreas más grandes o más pequeñas según quiera el usuario.

Cuarto, se está optimizando la forma de enseñar la parte evaluativa del TFC por cuanto se ofrece una nueva herramienta a la comunidad académica para abordar el problema de visualizar el área bajo una curva como aquella que se relaciona con el área de un rectángulo.

3.2 Disposición del argumento históricos de Leibniz en Microsoft Excel

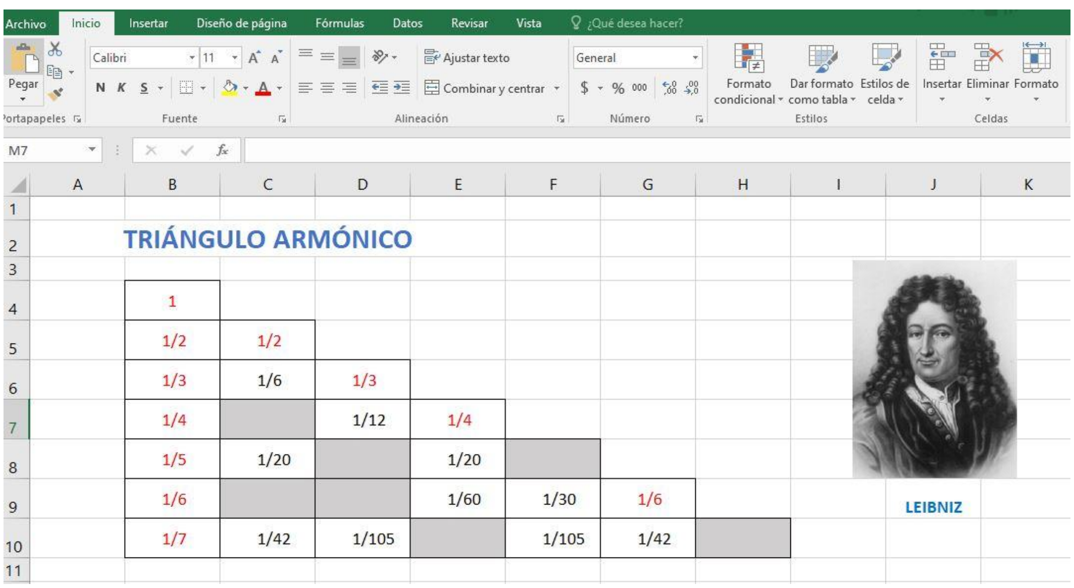
Leibniz desde el comienzo de sus estudios en matemáticas había abordado el problema de las sumas y las diferencias como relaciones inversas (KATZ, 1993). Desde una ecuación sencilla como:

$$A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0$$

$$E - A = -A + B - B + C - C + D - D + E$$

Para *A, B, C, D* y *E* constantes cualesquiera. En términos usados por el profesor Carlos E. Vasco, la diferencia entre los valores extremos sería equivalente a la suma de los detrimentos de los números intermedios. La Figura 3 muestra el ejercicio que se puede plantear para que los usuarios de una plantilla sencilla en Excel, completen los números faltantes en el triángulo.

Figura 3 – Adaptación del triángulo armónico de Leibniz



Fuente: Figura propia.

La solución de este ejercicio muestra entonces que, por ejemplo, los extremos de los números de la primera columna de la Figura 3 satisfacen que $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ que es exactamente igual a tener la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{6}{7}$. Estos resultados no eran exactamente nuevos, pero hicieron que Leibniz se diera cuenta de que la forma de las sucesiones hechas por diferencias y las sucesiones de sumas, son operaciones mutuamente inversas (GRATTAN-GUINNESS, 1980). Este argumento fue la semilla de lo que en 1680 resultó notándose como $\int dy = y$ (CHILD, 2005), esto es la primera parte del TFC.

¿Qué resultados se obtuvieron?

Primero, si una institución o un profesor quieren enseñar el TFC como la relación inversa entre la derivada y la integral, puede enriquecer esa presentación con un software que es de uso común, Microsoft Excel.

Segundo, Leibniz trabajó la relación inversa entre la suma y la resta desde el comienzo de sus estudios matemáticos (KATZ, 1993; REMAKI, 2021), así que visto desde esta perspectiva, la primer parte del TFC resulta ser evidente.

Tercero, se puede abordar un objeto matemático difícil como es el TFC a partir de ejercicios aritméticos sencillos siguiendo la génesis de este teorema en los trabajos leibnizianos.

Cuarto, la relación entre el área bajo una curva y el área de un rectángulo, también pueden verse en los trabajos de Leibniz (LOPEZ, 2011; MENA, 2014; BLÅSJÖ, 2015; MUÑOZ VILLATE, 2021).

4. Conclusiones

La historia de las matemáticas sigue siendo una fuente rica en recursos que pueden ser aprovechados para la enseñanza, en particular para mejorar la idoneidad epistémica de ciertos procesos de instrucción. El TFC no es ajeno a dicha condición, y al indagar por la génesis de ciertos argumentos históricos que integran este gran y complejo objeto matemático, se obtienen argumentos históricos que permiten abarcar mejor la complejidad de este teorema.

Por otra parte, la incorporación de estos argumentos es posible gracias a su visualización en la medida en que se utilicen las herramientas tecnológicas adecuadas. En esta investigación se muestra que esto es posible gracias a la implementación de un software de graficación y otro que permite crear una tabla donde sus entradas sean dinámicas. Ambos softwares están al acceso de cualquier persona.

La propuesta que se hace aquí de la recuperación de argumentos históricos gracias a los recursos tecnológicos permite, a priori, diseñar secuencias didácticas para la enseñanza del TFC que mejoran la idoneidad epistémica y mediacional de las que se implementan habitualmente en las universidades de Colombia. Esta suposición a priori se debe de confirmar en las implementaciones que incorporan esta propuesta, más allá de los primeros pilotajes que hasta el momento están empezando a realizar los autores de este escrito.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Escuela de Ciencias Básicas de la Universidad de La Salle; al proyecto ACACIA: Centros de Cooperación para el Fomento, Fortalecimiento y Transferencia de Buenas Prácticas que Apoyan, Cultivan, Adaptan, Comunican, Innovan y Acogen a la comunidad universitaria con el Centro Acacia UDFJC; y al Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el que se desarrolló el proyecto de investigación titulado "Articulación de aspectos del Teorema Fundamental del Cálculo de Newton y de Leibniz en la formación de ingenieros" del cual hacen parte los resultados aquí presentados.

Referencias

BARBIN, E. Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement. **Trema**, [s.l], v. 26, p. 20-28, 2006. Disponível em: https://journals.openedition.org/trema/64

BLÅSJÖ, V. **The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus.** The Best Writing on Mathematics 2016, p. 249-260. Princeton: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400885602-023

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BRESSOUD, D. M. Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. **American Mathematical Monthly**, v. 118, n. 2, p. 99–115, 2011. DOI: https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

CHEMLA, K.; CHORLAY, R.; RABOUIN, D. **The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences.** Paris: Oxford University Press, 2016.

CHILD, J. M. **The early mathematical manuscripts of Leibniz**. [s.l.] Dover Publications, 2005. v. 4

DUNHAM, W. **The Calculus Gallery: Masterpieces. From Newton to Lebesgue.** New Jersey: Princeton University Press, 2005.

FERRARA, F.; PRATT, D.; ROBUTTI, O. The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**, p. 237–273, 2019.

GODINO, J. **Didáctica de la matemática para maestros**. Granada: Edumat-maestros, 2004. v. 62

GODINO, J. et al. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 34, n. 2, p. 167–200, 2014.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D.; BATANERO, C. El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. **Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaíso, v. 12, n. 2, p. 47–59, 2020. DOI: https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

GORDILLO, W.; PINO-FAN, L. R. Una Propuesta de Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada. In: XIV CIAEM Mexico, Tuxtla. **Anais**... Tuxtla: 2015.

GRATTAN-GUINNESS, I. **From the Calculus to Set Theory 1630-1910.** [s.l: s.n.]

GUICCIARDINI, N. **The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800**. [s.l: s.n.]

GUICCIARDINI, N. **Newton**. Roma: Carocci Editore, 2011.

HOHENWARTER, M. et al. Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. **11th International Congress on Mathematical Education**, p. 1–9, 2008.

ILIFFE, R. **The October of 1666 Tract on Fluxions.** Disponível em: <http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00100>.

ILIFFE, R. **De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas**. Disponível em: <http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204>.

KATZ, V. **Using the History of Calculus to Teach Calculus**. p. 243–249, 1993.

LEIBNIZ, G. W. **Historia et origo calculi differentialis**. [s.l.] Im Verlage der Hahn'schen Hofbuchhandlung, 1846.

LOPEZ, J. Reflexions On Leibniz' Proof Of The Fundamental Theorem Of Calculus. **Research Gate**, 2011. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/275768886>.

MCDOUGALL, A. et al. **Researching I.T. in education: Theory, practice and future directions.** 1. ed. New York: Routledge, 2010.

MENA, R. **The Fundamental Theorem of Calculus**, 2014. . Disponível em: <http://web.csulb.edu/~rmena/410/Section8.pdf>.

MIKE, M.; ANNEKE, B. **Business Calculus with Excel.** Disponível em: <https://mathstat.slu.edu/~may/ExcelCalculus/sec-7-8-BusinessApplicationsIntegral.html>.

MUÑOZ-VILLATE, W. Relations between history of mathematics and training of engineers. **Revista Vision Electrónica**, Bogotá, v. 15, n. 1, 2021. Disponível em: https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/visele/article/view/17471.

MUÑOZ VILLATE, W. Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas**. Ciencia y Educación**, Holguín, v. 5, n. 1, p. 189–204, 2021.

MUÑOZ VILLATE, W. Elementos para un argumento didáctico desde el estudio histórico del Teorema Fundamental del Cálculo en Newton**. Ciencia e Interculturalidad,** Managua, v. 30, n. 1, p. 26–39, 2022. Disponível em: https://www.camjol.info/index.php/RCI/article/view/14241/16787.

MUÑOZ, W. Argumentos de Newton y Leibniz relativos al Teorema Fundamental del Cálculo mediados por software (P. Perry, Ed.) In: Memorias 25 encuentro de geometría y sus aplicaciones**.**, **Anais**...Universidad Pedagógica Nacional., 2022. Disponível em: <http://encuentrodegeometria.upn.edu.co/memorias.html>.

MUÑOZ, W.; LEON, O. L. Significados Parciales de la Integral Definida desde un estudio histórico en Newton y en Leibniz**.** In: XVI CIEAM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), Lima**. Anais**... Lima: 2023. Disponível em: <https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1481/1288>.

NEWTON, I. **Tractatus De Quadratura Curvarum.** [s.l: s.n.]

PANZA, M. **Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666.** Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 2005.

PEÑALOZA, W.; SUAREZ, S.; ROA, S. El Teorema Fundamental del Calculo: Escenarios para su comprension. **Revista Científica**, Bogotá, , p. 660–664, 2013.

REMAKI, A. **L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz 1672-1680**. 2021. Université de Paris, 2021.

ROBLES, M.; TELLECHEA, E.; FONT, V. Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. **Educación matemática**, Guadalajara, v. 26, n. 2, p. 69-109, 2014.

SCRIBA, C. Method The Inverse of Tangents : A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). In: **Archive for History of Exact Sciences**. [s.l: s.n.]2p. 113–137.

SQUIRES, D.; MCDOUGALL, A. **Choosing and using educational software: A teachers' guide**. 1. ed. [s.l: s.n.]

SWETZ, F. **Mathematical Treasure: Leibniz's Papers on Calculus**. Disponível em: <https://www.maa.org/book/export/html/641727>.

TALL, D. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus**. Visualization in Mathematics,** n. 19, p. 105–119, 1991.

THOMPSON, P.; DREYFUS, T. A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials**. Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline**, p. 355–359, 2016. Disponível em: <http://pat-thompson.net/PDFversions/2016Thompson-Dreyfus.pdf>.

WHITESIDE, D. T. Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century. **Archive for History of Exact Sciences**, [s.l], v. 1, n. 3, p. 179–388, 1961. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00327940

Autores

Weimar Muñoz Villate

Candidato a doctor en Educación con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Matemático, Universidad Nacional de Colombia. Especialista en Matemáticas Aplicadas y Magister en Docencia e Investigación Universitaria. Es profesor de la Universidad de la Salle y actualmente es coordinador del área de matemáticas de la Escuela de Ciencias Básicas de dicha universidad. Posee experiencia en investigaciones en las líneas de: ecuaciones en diferencia y teoría de Galois; sistemas dinámicos; e historia del teorema fundamental del cálculo.
https://orcid.org/0000-0002-4947-5600.

Olga Lucía León Corredor

Doctora en Educación, Universidad del Valle. Matemática, Universidad Nacional de Colombia. Es profesora de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el Doctorado Interinstitucional de Educación y en la Maestría en Educación. Posee amplia experiencia en la coordinación y el desarrollo de investigaciones en las líneas de: lenguaje y construcción de conocimiento matemático; formación de educadores matemáticos; didáctica del lenguaje y la matemática; argumentación y semiosis en didáctica de las matemáticas. Coordinador general de los proyectos ALTER-NATIVA de la convocatoria ALFA III 2009 y Acacia en Erasmus + 2015-2018. Actual directora del Centro Acacia y coordinadora de la Red de instituciones de Educación Superior con Centro Acacia.
https://orcid.org/0000-0003-4373-8630

Cómo citar el artículo:

MUÑOZ, W. V.; LEÓN, O. L. C. Uso de argumentos históricos para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con recursos tecnológicos. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 374 - 389 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p374-389.id1389

O Programa Residência Pedagógica e a mobilização do conhecimento metadidático: uma análise focalizando a adequação de meios

Iara Maria Soares de Assis Frade
iara.maria.frade@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9845-6003
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Ouro Preto, Brasil.

Douglas da Silva Tinti
tinti@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-8332-5414
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Ouro Preto, Brasil.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumo

O presente artigo tem por objetivo analisar o critério de adequação de meios mobilizados por residentes de Matemática na elaboração de um plano de aula envolvendo o trabalho em grupo. Para atingir o objetivo proposto, realizou-se em um curso de curta duração sobre Metodologias Ativas, focalizando a perspectiva do trabalho em grupo, no qual participaram licenciandos de matemática que atuavam como residentes no Programa Residência Pedagógica. O curso foi ministrado em três encontros, cada um deles gravado por meio da ferramenta *Google Meet*. Ao longo dos encontros, os residentes foram convidados a elaborar e compartilhar um plano aula. Dessa forma, as gravações serão tomadas como fontes de dados assim como os questionários e grupo de discussão. Após transcrição dos dados, os mesmos foram analisados à luz dos componentes e indicadores do critério de meios, assumidos enquanto subcategorias analíticas, a saber: materiais, número de aulas, horário, condições de aula e tempo. A análise revelou que foi contemplado o nível alto para dois componentes da adequação de meios (recursos materiais e tempo) e o nível médio para o componente número de alunos horário e condições de aula. Tal cenário possibilitou inferir que a adequação de meios presente no plano de aula elaborado pelos residentes se aproximou do nível alto.

Palavras chave: CDM. Adequação Didática. Adequação de meios. Programa Residência Pedagógica.

El programa de residencia pedagógica y la movilización del conocimiento metadidático: un análisis con foco en la cualificación mediacional

Resumen

Este artículo tiene como objetivo analizar los criterios de idoneidad mediacional movilizados por los residentes de Matemáticas en la elaboración de un plan de clase que involucre el trabajo en grupo. Para lograr el objetivo propuesto, se llevó a cabo un curso breve sobre metodologías activas, con enfoque en la perspectiva del trabajo en grupo, en el que participaron estudiantes

de Licenciatura en Matemáticas que se desempeñaban como residentes en el Programa de Residencia Pedagógica. El curso se impartió en tres encuentros, cada uno grabado con la herramienta *Google Meet*. A lo largo de las reuniones, se invitó a los residentes a desarrollar y compartir un plan de clase. De esta forma, se tomarán como fuentes de datos las grabaciones, los cuestionarios y el grupo de discusión. Después de la transcripción, los datos fueron analizados a la luz de los componentes e indicadores del criterio de idoneidad mediacional, asumidos como subcategorías analíticas, a saber: materiales, número de clases, horario, condiciones de clase y tiempo. El análisis reveló que se contemplaba el nivel alto para dos de los componentes de idoneidad mediacional (recursos materiales y tiempo) y el nivel medio para el componente número de alumnos horario y condiciones de clase. Este escenario permitió inferir que la idoneidad mediacional presente en el plan de clase elaborado por los residentes se acercaba al nivel alto.
Palavras chave: CDM. Idoneidad Didáctica. Idoneidad mediacional. Programa de Residencia Pedagógica.

The pedagogical residence program and the mobilization of metadidatic knowledge: an analysis focusing on mediational qualification

Abstract

This article aims to analyze the criteria of mediational suitability mobilized by Mathematics residents in the preparation of a lesson plan involving group work. To achieve the proposed objective, a short course on active methodologies was carried out, focusing on the perspective of group work, in which mathematics undergraduates who worked as residents in the Pedagogical Residency Program participated. The course was given in three meetings, each one recorded using the Google Meet tool. Throughout the meetings, residents were invited to develop and share a lesson plan. In this way, the recordings will be taken as data sources, questionnaires, and discussion group. After transcribing the data, they were analyzed in light of components and mediational indicators, assumed as analytical subcategories: materials, number of classes, schedule, class conditions and time. The analysis revealed that the high level was contemplated for two components of mediational suitability (material resources and time) and the medium level for the component number of students timetable and class conditions. This scenario made it possible to infer that the mediational suitability present in the lesson plan prepared by the residents approached the high level.
Keywords: CDM. Didactic Suitability. Mediational suitability. Pedagogical Residency Program.

Introdução

O campo de formação de professores está constante em transformação. O mundo muda, a tecnologia avança, os alunos mudam e os professores buscam novas metodologias e ferramentas para sala de aula. Para que isso ocorra, proporcionar ambientes de formação, no qual os professores possam compartilhar suas experiencias e aprender, é importante.

Ao longo da formação inicial de professores Programas, como o Residência Pedagógica (PRP), podem trazer grandes benefícios. O futuro professor, denominado de residente, tem contato com uma realidade diferente da teoria vista na graduação, mostrando a necessidade de se trabalhar com vários métodos diferentes em sala de aula.

O presente artigo tem por objetivo analisar o critério de adequação de meios mobilizados por residentes de Matemática na elaboração de um plano de aula envolvendo o trabalho em grupo. A análise foi feita com base do referencial teórico Juan Godino e seus colaboradores, a partir dos componentes e indicadores dos critérios de adequação didática.

Durante a pesquisa de Frade (2022), os referidos residentes participaram de um minicurso sobre metodologia ativa, ministrado pela primeira autora, no qual discutiu-se as abordagens Gamificação e Trabalho em Grupo. Posteriormente, os participantes produziram um plano de aula a partir da metodologia Trabalho em Grupo. Por último, ocorreu um grupo de discussão com perguntas pré-definidas pelos pesquisadores baseado nos componentes e indicadores dos critérios de adequação didática.

1. O Programa Residência Pedagógica

O Residência Pedagógica é um Programa do Ministério da Educação (MEC) do Brasil que visa aprimorar a formação dos futuros professores por meio da aproximação entre teoria e prática. O Programa é voltado para estudantes de licenciatura e tem como objetivo aprimorar a qualidade da formação inicial dos professores, bem como sua inserção no ambiente escolar.

O Programa é realizado em parceria com as instituições de ensino superior e as escolas públicas. Os estudantes selecionados são inseridos em escolas públicas para desenvolver atividades de observação e regência de aulas, sob a orientação de um professor da escola e de um professor supervisor da universidade.

Durante o PRP, os estudantes têm a oportunidade de vivenciar a realidade da sala de aula, conhecer as demandas e desafios da profissão e desenvolver habilidades práticas de ensino. Além disso, o programa busca contribuir para a melhoria da qualidade do ensino nas escolas públicas, por meio da formação de professores mais qualificados e preparados.

O PRP tem duração de um ano, com carga horária mínima de 360 horas e é dividido em duas etapas: a primeira é a observação das atividades escolares e a segunda é a regência de aulas. Os estudantes também participam de encontros de formação com supervisores e professores da universidade, nos quais são discutidos temas relacionados à prática docente.

O PRP é uma oportunidade valiosa para os estudantes de licenciatura, que podem colocar em prática os conhecimentos mobilizados ao longo do curso de Licenciatura e desenvolver habilidades importantes para a carreira. Além disso, o programa contribui para a melhoria da qualidade do ensino nas escolas públicas, o que impacta diretamente na formação dos estudantes e no desenvolvimento do país.

Em resumo, o PRP é uma iniciativa importante do MEC para aprimorar a formação de professores no Brasil, por meio da aproximação entre teoria e prática. O programa oferece aos estudantes de licenciatura a oportunidade de vivenciar a realidade da sala de aula, desenvolver habilidades práticas de ensino e contribuir para a melhoria da qualidade do ensino nas escolas públicas.

Tinti e Silva (2021) enfatizam que, pelo fato de o PRP ser um programa em consolidação, poucos estudos o focalizaram enquanto objeto ou contexto investigativo, indicando que ainda há muitas questões a serem exploradas. Nessa perspectiva, concordamos com Silva e Tinti (2021, p. 6) quando afirmam que:

> novas investigações sobre o PRP são necessárias, pois evidências mostram que esta política de consolidação das práticas de iniciação à docência pode ser um espaço profícuo para o desenvolvimento das diferentes faces do conhecimento do professor de Matemática.

Nessa perspectiva, Silva e Tinti (2021) sinalizam que a perspectiva do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) pode ser um pilar importante na elaboração e no desenvolvimento de subprojetos de Matemática vinculados ao Projeto Institucional do PRP, visto que o Programa pode ser entendido como um espaço de mobilização de conhecimentos profissionais na relação universidade-escola.

Se observarmos as características gerais do PRP, sinalizadas no Artigo 13 da Portaria Nº 82, perceberemos a ênfase na formação centrada na realidade escolar, como destacam, por exemplo, os incisos III, IV, VI e VIII:

> III - imersão do licenciando no cotidiano da escola, visando a compreensão da cultura escolar em toda a sua complexidade;
> IV - imersão do docente da educação básica na universidade, objetivando uma (re)construção dos seus conhecimentos a partir da sua inserção em pesquisas, estudos e extensão promovidos pelas IES;
> VI - valorização da escola como espaço privilegiado de produção de conhecimentos específicos, tendo como princípio a indissociabilidade entre teoria e prática na formação docente;

> VIII - atuação dos residentes em atividades de regência de classe e de intervenção pedagógica, bem como participação desses estudantes em projetos educacionais e na elaboração de materiais didáticos inovadores. (CAPES, 2022, p. 4)

Tais circunstâncias levam à mobilização do que Juan Godino e colaboradores chamam de conhecimento *mediacional*, aqui denominado de conhecimento *de meios*. Além disso, os residentes têm a chance de vivenciar propostas educativas alicerçadas em diversas metodologias, como, por exemplo, a perspectiva do trabalho em grupo, que é considerada uma metodologia ativa de educação e aprendizagem. Desse modo, o presente artigo tem por objetivo *analisar os critérios de adequação de meios mobilizados por residentes de Matemática na elaboração de um plano de aula envolvendo o trabalho em grupo.*

2. Referencial Teórico

2.1 Trabalho em grupo

Trabalhar em equipe sempre é estratégia bem salutar em qualquer esfera, como no mundo do trabalho, por exemplo. Na escola, o trabalho em grupo tem o potencial de ajudar os alunos a desenvolverem habilidades básicas para aprender a trabalhar em equipe. Trabalhar *em grupo* e trabalhar *em equipe* não é a mesma coisa, com muito bem explica Kalleder (2012, p. 4):

> Em um trabalho em equipe, existe mais de um objetivo em comum, todos os membros desejam aprender ou melhorar os processos de todos os trabalhos do grupo, independentemente de sua função individual. Todos sabem fazer e conhecem a fundo todos os trabalhos da equipe. Basicamente, sempre que houver um objetivo comum que dependa de todos para ser alcançado, esse grupo constituir-se-á em uma equipe. Assim, nem todo grupo poderá se constituir em uma equipe, mas toda equipe se constitui em um grupo.

No trabalho em grupo, busca-se um objetivo em comum e cada participante desenvolve uma função; já no trabalho em equipe sempre que houver um objetivo em comum que dependa de todos, o grupo se constituirá em uma equipe, e todos devem ter domínio da sua função específica, mas procurar aprender um pouco todas as funções dos seus pares.

Em vista disso, é essencial que os alunos aprendam que o trabalho em grupo é de suma importância não só na sala de aula, mas também na vida. Portanto, cabe ao professor conduzir de forma eficaz a aplicação dessa metodologia, pontuando a importância dela, aplicando tarefas que reforcem sua eficácia, dando espaço para o protagonismo do aluno, incentivando a colaboração e o respeito mútuos. Dessa maneira, ele estará preparando seu aluno para lidar com a cooperação, a divisão de tarefas, a eficiência em cada atividade desenvolvida e, até mesmo, como agir quando houver divergências entre os membros

Por conta disso, é possível configurar o trabalho em grupo como uma relevante metodologia ativa, pois suas características se coadunam com a explicação dada por Diesel, Baldez e Martins (2017, p. 271), isto é:

> [...] em contraposição ao método tradicional, em que os estudantes possuem postura passiva de recepção de teorias, o método ativo propõe o movimento inverso, ou seja, passam a ser compreendidos como sujeitos históricos e, portanto, a assumir um papel ativo na aprendizagem, posto que têm suas experiências, saberes e opiniões valorizadas como ponto de partida para construção do conhecimento.

O professor como mediador do conhecimento, pode diversificar suas aulas entre vários métodos, para atrair mais os alunos. Segundo Krasilchik (2004, p. 203):

> [...] a maneira unidirecional que é lecionada uma aula tradicional, gera o desinteresse dos alunos e consequentemente um baixo rendimento escolar, o que gera uma ineficiência no ensino.

Cohen e Lotan (2017), com seu livro, intitulado *Planejando o Trabalho em Grupo,* contribuíram bastante para o desenvolvimento desta pesquisa. Afirmam os autores que trabalhar em grupo significa "alunos trabalhando juntos em grupos pequenos de modo que todos possam participar de uma atividade com tarefas claramente atribuídas" (COHEN; LOTAN, 2017, p. 1). Por meio dessa metodologia, almeja-se que os alunos se tornem ativos no processo de ensino e aprendizagem e se tornem indivíduos independentes, capazes de viver em sociedade.

Em vista disso, é essencial que os alunos aprendam que o trabalho em grupo é de suma importância não só na sala de aula, mas também na vida. Portanto, cabe ao professor mediar a implementação dessa metodologia, pontuando a importância dela, aplicando tarefas que reforcem sua eficácia, dando espaço para o protagonismo do aluno, incentivando a colaboração e o respeito mútuos. Dessa maneira, ele estará preparando seu aluno para lidar com a cooperação, a divisão de tarefas, a eficiência em cada atividade desenvolvida e, até mesmo, como agir quando houver divergências entre os membros.

Por fim, é importante sinalizar que as autoras defendem que o trabalho em grupo pode ser útil em sala de aula porque coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem, dá-lhe mais voz e torna o mais ativo em oposição à passividade. Espera -se que os alunos se envolvam mais com as aulas, com os conteúdos produzidos e que a matemática se torne mais interessante.

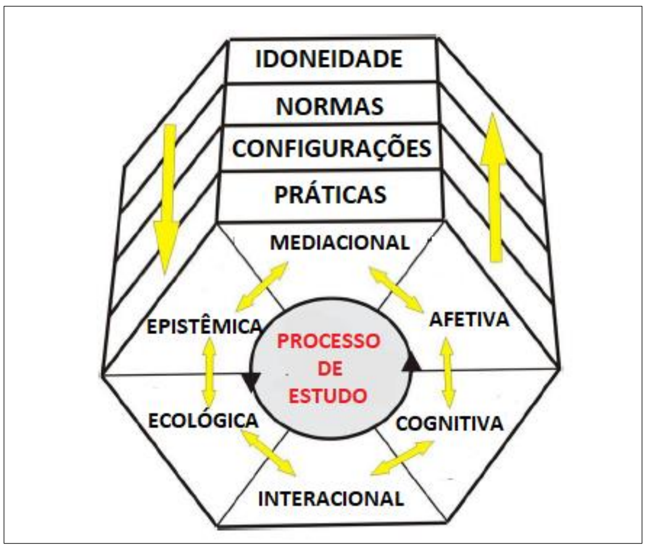
2.2 Adequação Didática

Godino, Batanero e Font (2007) propõem um sistema de categorias de análise dos conhecimentos matemáticos e didáticos do professor que são complementadas e desenvolvidas com elementos do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS).

O EOS tem se mostrado como um constructo teórico em evolução e se origina dos estudos do grupo de pesquisa *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática* da Universidade de Granada, na Espanha. Assim, a partir de diferentes pontos de vista e fundamentações teóricas sobre o conhecimento matemático, seu ensino e aprendizagem, Juan Godino e colaboradores apresentam uma ferramenta teórica denominada de Conhecimento Didático-Matemático.

A figura seguinte apresenta as facetas e os níveis do conhecimento do professor que, segundo Godino (2009, p. 21, tradução nossa), “se trata de um modelo ‘poliédrico’ cuja representação em planta indica as várias facetas a levar em conta em um processo de estudo e a elevação indica quatro níveis de análise sobre os quais se pode fixar a atenção”.

Figura 1- níveis de conhecimento do professor



Fonte: Godino (2009, p. 21)

Nesse sentido, Godino (2009, p. 21) propõe analisar os Conhecimentos Didático-Matemáticos em seis facetas.

Quanto às facetas, Godino (2009, p. 21–22) sugere os seguintes níveis de análise didática, para os quais podemos voltar nossa atenção:

Quadro 1- Níveis de análise didática

Nível	Descrição
Práticas matemáticas e didáticas	Descrição das ações realizadas para resolver as tarefas matemáticas propostas para contextualizar os conteúdos e promover a aprendizagem. As linhas gerais de atuação do professor e dos alunos também são descritas.
Configurações de objetos e processos (matemáticos e didáticos)	Descrição dos objetos e processos matemáticos envolvidos na realização das práticas, bem como daqueles que delas emergem. O objetivo deste nível é descrever a complexidade dos objetos e significados das práticas matemáticas e didáticas como fator explicativo dos conflitos na sua realização e da progressão da aprendizagem.
Configurações didáticas	Contempla as interações entre docente e aluno, objetivando a identificação e a descrição dessas interações e relacionando-as com a aprendizagem do aluno (trajetória cognitiva).
Normas e meta normas	Identificação da teia de regras, hábitos, normas que condicionam e possibilitam o processo de estudo e que afetam cada faceta e suas interações.
Adequação didática	Identificação de possíveis melhorias no processo de estudo que aumentem a adequação didática.

Fonte: Adaptado de Godino (2011; 2012; 2017) e de Andrade (2014).

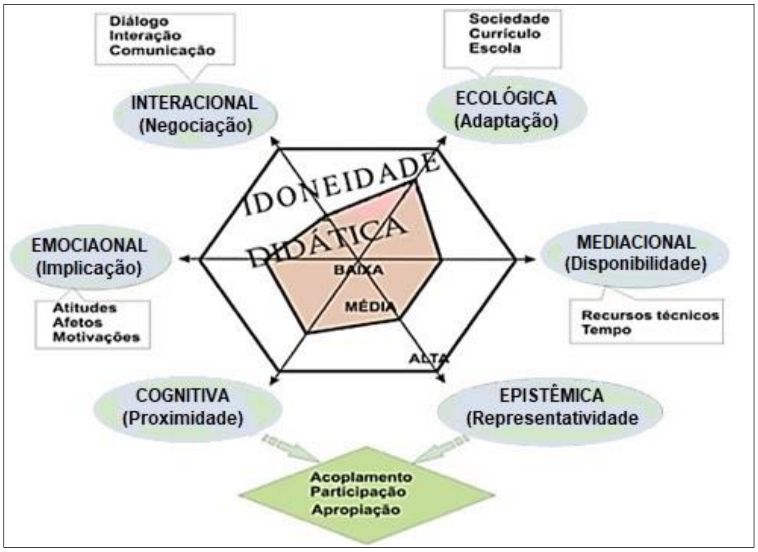
Assim, partindo dos cinco níveis de análise didática apresentados acima, voltaremos nossa atenção para o nível da adequação didática que, segundo Godino (2009, p. 23), "foi pensado dentro da EOS, proposto por Godino et al. (2006), como uma ferramenta que permitiu uma intervenção eficaz em sala de aula."

De acordo com Breda, Font e Pino-Fan (2018), no EOS, a Adequação Didática pode ser entendida como:

> O grau em que um processo de ensino-aprendizagem (ou parte dele) reúne certas características que permitem qualificá-lo como ótimo ou adequado para conseguir a adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos estudantes (aprendizagem) e os significados institucionais pretendidos ou implementados (ensino), tendo em vista as circunstâncias e os recursos disponíveis (ambiente). (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018, p. 268, tradução nossa).

A Figura 2 evidencia como a Adequação Didática é representada e quais são suas dimensões.

Figura 2 - Gráfico de radar Adequação Didática



Fonte: Adaptado de Godino (2009, p. 24).

A esse respeito, Godino (2009, p. 24) destaca que "uma identidade didática ocorre quando há uma articulação coerente e sistemática coerente e sistemática dessas seis dimensões", que pode ser visto como no Quadro 2.

Quadro 2 - Adequação Didática

Dimensão	**Descrição**
Epistêmica	Refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (pretendido) a respeito de um significado de referência.
Cognitiva	Expressa o grau em que os significados pretendidos/implementados estão na zona de potencial desenvolvimento dos alunos, bem como a proximidade dos significados pessoais alcançados aos significados pretendidos/implementados.
Interacional	Um processo de ensino-aprendizagem terá maior adequação de um ponto de vista interacional se as configurações e trajetórias didáticas permitem, por um lado, identificar conflitos semióticos potenciais (que podem ser detectados a priori), e, por outro, resolver conflitos que ocorrem durante o processo de instrução.
De meios	Grau de disponibilidade e adequação de recursos materiais e tempo necessários ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.
Afetiva	Grau de envolvimento (interesse, motivação, entre outros) dos alunos em um processo de estudo. A adequação afetiva está relacionada a ambos com alguns fatores que dependem da instituição e outros que dependem basicamente do aluno e sua história escolar anterior.
Ecológica	Grau em que o processo de estudo se encaixa no projeto do centro educacional, escola e sociedade e o condicionamento do ambiente em que se desenvolve.

Fonte: Adaptado de Godino (2009, p. 24, tradução nossa)

Segundo Breda, Font e Lima (2015), as seis dimensões da Adequação Didática na Educação podem ocorrer em níveis alto, médio ou baixo. O hexágono regular que representa o idealismo na educação e suas dimensões mostra o ajuste máximo de um processo ou estudo tentado, enquanto o hexágono irregular interno mostra o que foi realmente alcançado.

Alcançar um alto grau de excelência didática ou um nível ideal de excelência é difícil, segundo Gusmão e Font (2020, p. 677) devido à complexidade do processo de ensino-aprendizagem e aos inúmeros fatores variáveis que estão envolvidos. Ainda que haja diferenciação entre as seis dimensões, estas não são mobilizadas de forma discreta, pois, ao realizar uma tarefa matemática, o professor utiliza os diversos significados (dimensão epistêmica), adequando os diversos procedimentos aos conhecimentos, habilidades e contextos dos alunos.

Como resultado, de acordo com as dimensões epistêmica, cognitiva, afetiva, de meios, interacional e ecológica, percebe-se que a adequação didática se configura como uma ferramenta que subsidia a reflexão sobre a prática didática, possibilitando avaliar a adequação didática do ensino e processo de aprendizagem.

O Quadro 3 apresenta, segundo Godino (2011), os componentes e indicadores da adequação de meios.

Quadro 3 - Componentes e indicadores de adequação de meios

Componentes	Nível aferido
Recursos materiais (manipulativos, calculadoras, computadores)	alto
Número de alunos, horário e condições de aula	médio
Tempo (de ensino coletivo/ tutoria/ tempo de aprendizado)	alto

Fonte: Adaptado de Godino (2009, p. 24, tradução nossa)

Assim, a análise dos componentes e indicadores de adequação de meios evidencia se os recursos materiais utilizados na sala de aula são adequados para clientela e se existe o acesso a esses recursos de acordo com a realidade dos mesmos. O professor leva em consideração o número de alunos, horário, condições da aula, tempo e o aprendizado coletivo para execução da atividade.

3. Metodologia

Como dito anteriormente, o objetivo deste artigo é analisar os critérios de adequação de meios mobilizados por residentes de Matemática na elaboração de um plano de aula envolvendo o trabalho em grupo. Para atingir esse objetivo, buscamos apoio na abordagem qualitativa

(BOGDAN; BIKLEN, 1994) para projetar um ambiente investigativo que estivesse igualmente preocupado com a formação dos participantes e com a pesquisa. Este cenário foi realizado em um curso de curta duração sobre Metodologias Ativas que focou no trabalho em grupo.

Os participantes foram os residentes associados subprojeto de Matemática do PRP-Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais/Brasil, foram convidados a participar. Apenas seis dos 16 residentes participantes do Projeto aceitaram nosso convite. Nomes fictícios serão utilizados para manter o anonimato dos sujeitos, conforme autorizado pelo Comitê de Ética em Pesquisa.

O curso foi ministrado em três encontros, cada um deles gravado por meio da ferramenta *Google Meet*. Ao longo dos encontros, os residentes foram convidados a elaborar e compartilhar um plano aula. Dessa forma, as gravações foram tomadas como fontes de dados assim como os questionários e o grupo de discussão.

Decidimos dividir a análise em duas partes porque compreendemos que é crucial compreender o ambiente educacional antes de refletir sobre os critérios de Adequação Didática. Primeiramente, apresentamos uma análise descritiva dos encontros. Em seguida, analisamos o plano de aula utilizando os componentes e indicadores de meios como categorias analíticas. São eles: materiais, número de aulas, horário, condições de aula e tempo.

4. Análise

4.1 Análise descritiva dos encontros de formação

Os residentes foram convidados a participar de um minicurso de Metodologias Ativas que incidiu sobretudo na gamificação e no trabalho de grupo. O minicurso foi realizado na plataforma *Hangouts* do *Google Meet*, sendo gravado com a aprovação dos participantes. Escolhemos esta ferramenta por ser gratuita e acessível via *e-mail* institucional que a instituição disponibiliza aos seus alunos e docentes.

O minicurso de Metodologias Ativas ocorreu nos dias 25/11, 02/12 e 09/12/2021, constando de três encontros com duração entre 2h30 e 3h cada, que seguiu a estrutura apresentada no Quadro 4.

Quadro 4 - Estrutura do minicurso

Primeiro encontro:	Apresentação das Metodologias Ativas, Trabalho em Grupo e Gamificação.
Segundo encontro	Prática e discussão em grupo
Terceiro encontro	Elaboração do plano de aula.

Fonte: elaborado pelos autores (2022).

O nosso primeiro encontro realizou-se no dia 25 de novembro de 2021 de 9h às 11h. A pesquisadora, apresentou aos cinco participantes presentes a perspectiva das Metodologias Ativas (Figura 3).

Figura 3 - Primeiro encontro: apresentação das Metodologias Ativas

Fonte: Acervo dos pesquisadores (2022).

Na sequência, a pesquisadora falou sobre a metodologia gamificação, especificando suas aplicações práticas e apontando as plataformas gratuitas, que poderiam ser úteis para sua utilização.

Em seguida, discorreu sobre a Metodologia Ativa Trabalho em Grupo, comparando a sua aplicabilidade em sala de aula e a apresentada por Cohen e Lotan (2017). Abordou-se os cuidados que devem ser tomados na sua utilização, as etapas que precisam ser seguidas, tais como, preparar os alunos para compartilhar o saber; escolher criteriosamente uma atividade; distribuir algumas funções que podem ser usadas nos trabalhos em grupo nas aulas de Matemática. Apresentou-se ainda, alguns exemplos de utilização, dinâmicas, práticas e o papel do professor na execução do trabalho. O encontro, no geral, foi bem proveitoso, havendo contribuições e interação entre participantes e pesquisadoras

O encontro seguinte aconteceu no dia 02 de dezembro de 2021 de 9h às 11h. Indicamos, então, a nossa proposta inicial que seria a elaboração do plano de aula, em grupos. Para tanto, usamos a sugestão de Cohen e Lotan (2017, p. 113):

> Divida a tarefa de modo que cada pessoa desempenhe um papel diferente e complementar. Um grupo técnico, como a tripulação de uma aeronave ou a equipe de um centro cirúrgico, funciona dessa maneira. As pessoas trabalham juntas, de maneira muito próxima, mas cada uma delas tem um trabalho diferente a fazer.

Nós indicamos que eles se dividissem e se organizassem da forma que julgassem melhor, desde que cada um desempenhasse um papel dentro do trabalho, em busca de um produto em comum que seria a construção do plano de aula. Inicialmente todos ficaram envergonhados, então fizemos sugestões de grupos e todos aceitaram. Um grupo ficou com duas pessoas e outro grupo ficou com três integrantes.

Já no terceiro encontro, os participantes se reuniram e colocaram em prática o plano de aula elaborado. A seguir realizamos um grupo de discussão com perguntas intencionais previamente elaborados de acordo com os critérios de Adequação Didática proposto por Juan Godino e colaboradores.

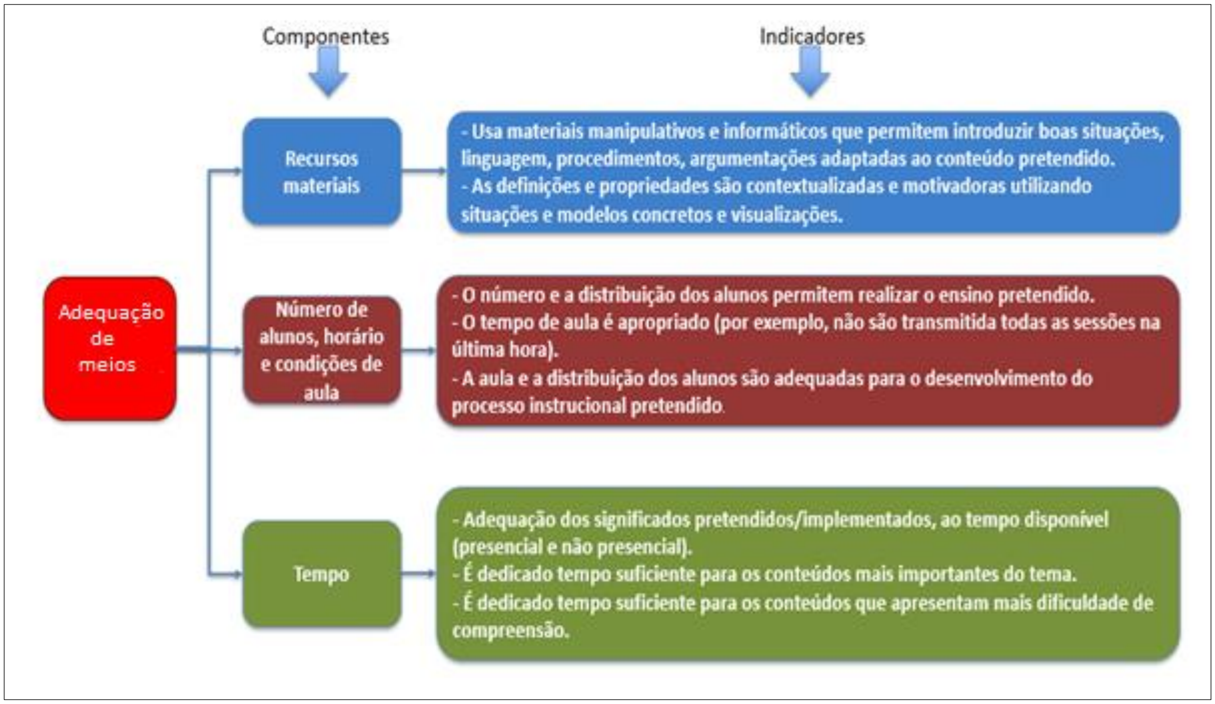
Esse grupo discussão foi feito a fim de revelar as mobilizações do CDM em torno do desenvolvimento de planos de aula na perspectiva do trabalho em grupo, julgou-se importante fomentar neste momento um espaço de discussão sobre uma autoavaliação.

4.2 Análise do Plano de aula a partir da adequação de meios

O critério de adequação de meios está relacionado com os conhecimentos que necessitam ser mobilizados para avaliar a adequabilidade e a disponibilidade dos recursos materiais e temporais, de forma a contribuir com a aprendizagem dos alunos em relação a um objeto matemático específico. Segundo Godino (2011), nesse critério de Adequação Didática, é importante atentar-se a elementos que envolvem as condições ambientais da sala de aula, recursos materiais utilizados, bem como o tempo destinado ao processo pretendido.

Assumimos na presente análise a adequação de meios como categoria, e seus componentes e indicadores como subcategorias, tal como ilustrado na Figura 4:

Figura 4 - adequação de meios: componentes e indicadores



Fonte: Adaptado a partir das ideias de Godino (2011) e Breda *et al*. (2018)

Analisando o plano de aula, é possível verificar que os residentes utilizaram materiais que permitem introduzir situações, linguagens e procedimentos adequados ao conteúdo pretendido, apresentando definições e propriedades contextualizadas e motivadoras, o que nos remete ao componente de adequação de meios: *recursos materiais*. De acordo com Pino-Fan *et al*. (2014, p. 1436, tradução nossa), essa dimensão "trata do conhecimento que um professor deve ter para avaliar a pertinência do uso de materiais e recursos tecnológicos para fomentar a aprendizagem de um objeto matemático específico."

No processo de elaboração do plano de aula, podemos perceber que a utilização de material concreto, como o palito, poderia estimular a curiosidade do aluno, o que pode favorecer a visualização de algumas propriedades. Posteriormente, os alunos fariam uma pesquisa na *internet* para relacionar as construções a os teoremas como o de Pitágoras. Assim, o plano de aula contempla diferentes formas de abordar o conteúdo, diversificando os recursos materiais com o objetivo de alcançar a aprendizagem dos alunos.

> *Após reunidos em grupo, faça o que se pede: dado um palito de tamanho qualquer. O palito terá função de um segmento de reta. de tamanho qualquer, é possível construir um polígono com apenas um palito? A ideia é mostrar que eu não consigo construir um polígono com menos de três lados. Eles vão compreender qual a menor quantidades de lados que possível para um polígono. A partir daí podemos perguntar e com quatros lados, com cinco?*
> *- Ai pensei assim, para não ficar interrompendo a aula e perguntando, ah esse é teorema de Pitágoras? Como eles terão acesso à internet. A ideia é que posteriormente, ao identificar esse padrão, peça aos alunos para pesquisar sobre o teorema de Pitágoras e discuta os seus significados. Você se recorda disso? E isso que estou conseguindo pensar agora*. (registro da fala do participante Gael no encontro realizado em 09 de dezembro de 2021).

A partir do que foi observado, podemos inferir que a adequação ao componente de adequação de meios *recursos materiais* se aproximou do nível *alto*.

Com relação ao número de alunos, observamos que isso ocorreu de uma forma indireta, quando pensaram na necessidade de dividir os alunos em grupos e no número ideal para compor cada um deles, como mostra a fala de Joana:

> *O grupo será de quatro pessoas.* (registro da fala do participante Joana, durante a criação do plano de aula, no encontro realizado em 02 de dezembro de 2021)

Considerando o processo de elaboração do plano de aula na perspectiva do componente de adequação de meios *número de alunos condições de aula*, não foi possível identificar por parte dos residentes uma preocupação com relação às condições da aula se aproximando do *médio* para esse componente.

Ao analisarmos o processo de elaboração do plano de aula, também foi possível evidenciar que o tempo de ensino e de aprendizado foi distribuído de forma adequada, o que nos remete ao componente de adequação de meios: *tempo*. Font (2011, p. 15, tradução nossa) destaca que a "gestão do tempo é basicamente de responsabilidade do professor, embora uma parte do tempo de estudo fique sob a responsabilidade dos alunos".

Foi possível identificar por parte dos residentes uma preocupação com relação ao tempo de aula, se seria suficiente para trabalhar todo conteúdo pretendido, como ilustra o diálogo de Gael e Joana

> *Gael: Basicamente, a gente acabou vendo bastante coisa, né! Ai para evitar de ir para a parte de trigonometria deixa por aí.*
>
> *Joana: Eu acho. Se o nosso plano for para uma aula de 50 minutos, por exemplo, isso dá. (registro da fala da participante Joana no encontro realizado em 02 de dezembro de 2021)*

Diante do exposto, percebemos uma preocupação por parte dos residentes em adequar o plano de aula ao *tempo* necessário para implementá-lo. Assim sendo, inferimos que o nível de adequação para o componente de adequação de meios *tempo*, se aproximou do *alto*.

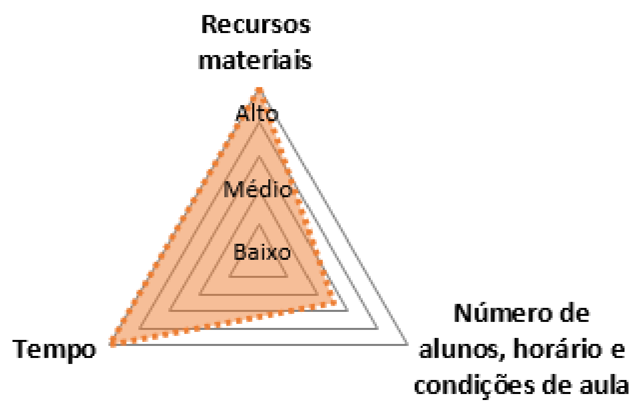
Diante do exposto, a análise do plano de aula elaborado pelos residentes revelou os seguintes níveis para cada componente da adequação de meios:

Quadro 5 - Síntese da análise dos níveis de adequação de meios evidenciados na análise do plano de aula elaborado pelos residentes

Componentes	Nível aferido
Recursos materiais (manipulativos, calculadoras, computadores)	alto
Número de alunos, horário e condições de aula	médio
Tempo (de ensino coletivo/ tutoria/ tempo de aprendizado)	alto

Fonte: Produzido pelos autores (2022)

Figura 5 - Síntese da análise dos níveis de adequação de meios evidenciados na análise do plano de aula elaborado pelos residentes



Fonte: Produzido pelos autores (2022)

Ao realizarmos a análise, de acordo com componentes e indicadores do Critério de Adequação de meios, inferimos que ele se aproxima do *alto*, como evidenciado na a Figura 5.

5. Considerações finais

A análise revelou que foi contemplado o nível alto para dois componentes da adequação de meios (recursos materiais e tempo) e o nível médio para o componente número de alunos horário e condições de aula. Tal cenário possibilitou inferir que a adequação de meios presente no plano de aula elaborado pelos residentes se aproximou do nível alto.

Reconhecemos que os resultados aqui ilustrados são consistentes com o cenário sinalizado por Silva e Tinti (2021), enfatizando o potencial de projetos matemáticos relacionados ao PRP serem estruturados com vistas à mobilização do MDL. Concordamos com os autores quando afirmam que o CDM pode ser uma ferramenta para auxiliar instrutores e preceptores a (re)planejar ações para maximizar a mobilização do conhecimento.

Vale ressaltar que, devido à amplitude da perspectiva teórica do CDM e às limitações impostas pelos periódicos, optamos por focar apenas um dos critérios de adequação. No entanto, a experiência do minicurso aqui descrita e examinada permite avançar na compreensão dos níveis dos demais critérios e, por sua vez, compreender melhor as potencialidades e fragilidades que ainda existem. Com essas informações, inferimos que os formadores terão mais condições de planejar ações e tomar decisões que melhorem o aprendizado promovido pelo PRP.

Referências

ANDRADE, L. S. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática.** 2014. 257 f. Tese. (Doutorado). Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2014. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_Andrade.pdf. Acesso em 10 abr. 2023.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. A. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 jul. 2022.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8. n. 2, p. 1-41, 2015. https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/2364

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R**.** Criterios valorativos y normativos em la didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, 2018. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**. 3. ed. São Paulo: Penso, 2017.

DIESEL, A.; BALDEZ, A.L.S; MARTINS, S.N. Os Princípios das Metodologias Ativas de Ensino: uma abordagem teórica. **THEMA**, Lajeado, v. 14, n. 1, p. 268-288, fevereiro, 2017. DOI: https://doi.org/10.15536/thema.14.2017.268-288.404

FRADE, I. M. S. A. **Critérios de Idoneidade Didática mobilizados por futuros professores de Matemática, pautado na elaboração de um plano de aula na perspectiva do Trabalho em Grupo**. 2022. 145 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Minas Gerais, 2022. Disponível em http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/16210. Acesso em 10 abr. 2023.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s.l], v. 20, p. 13 – 31, 2009. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: **XIII CIAEM – IACME.** Anais. Recife, 2011. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf. Acesso em 10 abr. 2023.

GODINO, J. D. Construindo um sistema modular e inclusivo das ferramentas teóricas da Educação Matemática. In: **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos** Anais. do II CIVEOS, Granada, 2017.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM–The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidade didáctica de procesos de estudio de las matemáticas**. Paradigma**, Maracay, XXVII, n. 2, p. 221-252, 2006. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/369/367

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n.2, jul./dez., 2008. p. 07-37. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/62.

GODINO, J.; BATANERO, C. Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. In: **VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**. Anais do VI CIBEM**,** Puerto Montt, 2009.

KALLEDER, H. A importância do trabalho em equipe no ambiente cooperativo. **Fabe em Revista**, Bertioga, v. 3, n. 3, ago./ out., 2012. http://www.fabeemrevista.com.br/3/02.pdf

KRASILCHIK, M. **Prática de ensino de biologia**. 4. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004.

SILVA, J. F.; TINTI, D. S. Planejamento de espaços formativos e a mobilização do Conhecimento Didático-Matemático: um olhar para o Programa Residência Pedagógica**. Revemop**, Ouro Preto, v. 3, e202136, 2021. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202136

TINTI, D. S.; SILVA, J. F. Estudo das repercussões do Programa Residência Pedagógica na formação de Professores de Matemática. **Formação Docente – Revista Brasileira De Pesquisa sobre Formação de Professores**, [s.l], v. 12, n. 25, p. 151-172, 2020. DOI: https://doi.org/10.31639/rbpfp.v13i25.404

Autores

Iara Maria Soares de Assis Frade
Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto. É membro do Núcleo de Estudos, Pesquisas e Práticas de Formação de Professores que ensinam matemática (NEPEFEM). iara.maria.frade@gmail.com; https://orcid.org/0000-0001-9845-6003

Douglas da Silva Tinti
Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Estágio de Pós-doutoramento em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul. Atuou como Diretor Regional São Paulo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM-SP) no triênio 2014-2017. É professor do Departamento de Educação Matemática (DEEMA) da UFOP, onde atua como Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEDMAT), e como Editor Chefe da REVEMOP (eISSN: 2596-0245). Lidera o Núcleo de Estudos, Pesquisas e Práticas de Formação de Professores que ensinam Matemática (NEPEFEM). Tem experiência nas áreas de Educação e Ensino, com ênfase em Educação Matemática. tinti@ufop.edu.br; https://orcid.org/0000-0001-8332-5414

Como citar o artigo:

FRADE, I. M. S. A.; TINTI, D. S. O Programa Residência Pedagógica e a mobilização do conhecimento metadidático: uma análise focalizando a adequação de meios. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 390 - 408 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p390-408.id1390

Componentes e indicadores para el diseño y reflexión de procesos de instrucción sobre límites de funciones en una variable

Daniela Andrea Araya Bastias
daniela.araya@ucentral.cl
https://orcid.org/0000-0002-3395-3348
Universidad Central de Chile (UCEN)
Santiago, Chile.

Luis Roberto Pino-Fan
luis.pino@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408
Universidad de Los Lagos, (ULAGOS)
Osorno, Chile.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

El presente estudio tiene como fin proponer criterios y descriptores que permitan al profesorado tener un referente para diseñar sus implementaciones pedagógicas o para reflexionar sobre sus clases implementadas sobre el objeto límite de funciones en una variable. Para el desarrollo de los criterios y descriptores se utilizan los descriptores empíricos de cada uno de los componentes de la Idoneidad Didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico y los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable. El trabajo se realiza por medio de la metodología cualitativa cuyo diseño metodológico es descriptivo, puesto que a partir de la revisión de la literatura (propuestas didácticas, problemáticas para su enseñanza, significados parciales, etc.) se proponen criterios e indicadores propios del objeto matemático. Los componentes e indicadores propuestos permiten organizar y valorar las prácticas pedagógicas en los diversos momentos del proceso instrucción (planificación, implementación, evaluación y reflexión) del objeto límite de funciones en una variable.

Palabras clave: límite de funciones en una variable, Idoneidad Didáctica, Configuraciones Epistémicas, EOS.

Componentes e indicadores para o desenho e reflexão de processos de instrução sobre limites de funções em variável

Resumo

O objetivo deste estudo é propor critérios e descritores que permitam aos professores terem uma referência para projetar suas implementações pedagógicas ou refletirem sobre suas aulas implementadas sobre objeto matemático limite de funções de uma variável. Para o desenvolvimento dos critérios e descritores, são utilizados os descritores empíricos de cada um dos componentes da Adequação Didática propostos pela Abordagem Ontossemiótica e os significados parciais do objeto limite das funções de uma variável. O trabalho é realizado por meio da metodologia qualitativa cujo desenho metodológico é descritivo, pois, a partir da revisão da literatura (propostas didáticas, problemas para seu ensino, significados parciais, etc.) são propostos critérios e indicadores do objeto matemático. Os componentes e indicadores propostos permitem organizar e avaliar as práticas pedagógicas em vários momentos do

processo de instrução (planejamento, execução, avaliação e reflexão) do objeto matemático limite de funções numa variável.
Palavras-chave: Limite de funções numa variável, Adequação Didática, Configurações Epistêmicas, AOS.

Components and indicators for the design and reflection of instruction processes on limits of functions in a variable

Abstract

The purpose of this study is to propose criteria and descriptors that allow teachers to have a reference to design their pedagogical implementations or to reflect on their implemented classes on the limit object of functions in a variable. For the development of the criteria and descriptors, the empirical descriptors of each of the components of Didactic Suitability proposed by the Ontosemiotic Approach and the partial meanings of the limit object of functions in a variable are used. The work is supported by the qualitative methodology whose methodological design is descriptive, since from the review of the literature (didactic proposals, problems for its teaching, partial meanings, etc.) criteria and indicators of the mathematical object are proposed. The proposed components and indicators make it possible to organize and assess pedagogical practices at various moments of the instruction process (planning, implementation, evaluation and reflection) of the limit object of functions in a variable.
Keywords: limit of functions in a variable, Didactic Suitability, Epistemics Configurations, OSA.

Introducción

Diversos han sido los estudios respecto de los procesos de enseñanza-aprendizaje del objeto límite de funciones en una variable. Dicho objeto se ha caracterizado por tener una serie de dificultades tanto para estudiantes (e.g., ARTIGUE, 1995; MAMONA-DOWNS, 2001; BARAHMAND, 2017) como para el profesorado de cara al diseño de propuestas didácticas (ROBINET, 1983; FERNÁNDEZ, 2000; BLÁZQUEZ, et al., 2006; CAGLAYAN, 2015).

En esta misma línea, Salinas; Alanís (2009) señalan que los procesos de instrucción tradicional centrada en procedimientos mecánicos y algorítmicos que se alternan con conceptos y definiciones dificultan el aprendizaje de nociones vinculadas al cálculo, lo que trae consigo "…elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas. Estos han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a cursos de cálculo en el nivel medio y superior de educación…" (p. 359).

Esta problemática no está ajena a la enseñanza del objeto límite a programas de formación de profesores, de hecho, en Chile se promulgaron los nuevos "Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media" (MINEDUC, 2021), los cuales establecen los conocimientos y habilidades que los profesores en formación deben desarrollar para diseñar situaciones de aprendizaje.

En particular, en el ámbito disciplinario se encuentra el "Estándar D: Límites, Derivadas e Integrales", el cual tiene por objetivo:

> Comprende las nociones de límite, continuidad, derivadas, integrales y series, y conoce el Teorema Fundamental del Cálculo, lo que le permite planificar y gestionar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes incorporen estos conocimientos del cálculo y los apliquen para resolver problemas y modelar fenómenos naturales y sociales. (MINEDUC, 2021, p.91)

Dichos estándares establecen indicadores distribuidos en dos ámbitos pedagógicos y didácticos, en particular, los indicadores respecto al objeto límite son:

> Conocimiento Disciplinar
>
> 1. Explica las nociones de límite de sucesiones y de funciones y la relación entre ellas, y las utiliza en la resolución de problemas que involucran el cálculo de límites utilizando casos conocidos y sus propiedades.
>
> 3. Utiliza las nociones de límite, continuidad y derivabilidad para analizar funciones, en particular sus puntos críticos, de inflexión y su comportamiento asintótico, conectando sus representaciones gráficas y algebraicas.
>
> 7. Estudia la convergencia de series numéricas y series de potencias utilizando métodos del cociente, raíz y de comparación, y modela diversos fenómenos con ellas, en particular, el cálculo de interés.
>
> 8. Modela fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de los otros estándares como, por ejemplo, fenómenos que requieran del uso de probabilidades, cálculo de integrales y tecnología.
>
> Didáctica Disciplinar
>
> 10. Utiliza diversas representaciones para que todos/as sus estudiantes logren superar las dificultades más frecuentes que tienen con las nociones de convergencia de sucesiones y límite de funciones.
>
> 11. Anticipa preguntas para estimular el aprendizaje y para guiar a sus estudiantes en una actividad de modelación colaborativa de fenómenos naturales o sociales que involucren elementos del cálculo diferencial y el uso de herramientas digitales. (MINEDUC, 2021, p. 91)

Es importante mencionar que dichos indicadores si bien representan un avance en brindar orientación sobre las habilidades y conocimientos que un profesor en formación y en ejercicio debe desarrollar en sus implementaciones pedagógicas sobre límites, éstos no relevan la riqueza matemática de cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable. Además, deja de lado la necesidad de que los profesores incorporen en sus prácticas conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza de límites de funciones en una variable, como por ejemplo: la comprensión o habilidades que poseen sus estudiantes; los conocimientos previos necesarios para el estudio de la noción de límites; el uso de diversas representaciones y recursos; así como también conocimientos y competencias para la identificación de errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando estudian esta noción. Además, otros aspectos relevantes que hay que considerar son las estrategias motivacionales o interaccionales que permiten motivar y estimular a los estudiantes con el fin de potenciar sus aprendizajes. Lo anterior nos hace plantear la siguiente interrogante: ¿qué aspectos debemos considerar cuando planificamos una clase sobre límites de funciones en una variable o reflexionamos sobre nuestra práctica en torno a la enseñanza de este objeto matemático?

El presente trabajo tiene como fin responder a la interrogante por medio de una propuesta de criterios y descriptores que permitan al profesorado tener como referente para diseñar sus implementaciones pedagógicas sobre el objeto límite o para reflexionar sobre sus clases implementadas.

1. Marco teórico.

Para desarrollar los criterios y descriptores epistémicos de cada significado parcial del objeto límite de funciones en una variable (en adelante, objeto límite), utilizaremos las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (GODINO, et al., 2007); en específico, utilizamos la noción de configuración ontosemiótica (PINO-FAN, et al., 2015). Esta configuración puede ser de carácter epistémica (en adelante, CE) o cognitiva (en adelante, CG), según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. Se utilizan estas herramientas porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas que están asociados al objeto límite. Para el desarrollo de esta investigación se han considerado las seis configuraciones epistémicas propuestos por Araya, et al., (2021), las cuales son:

Configuración Epistémica N°1: Límite como aproximación en la Matemática Griega.

Configuración Epistémica N°2: Límite en la concepción de los Indivisibles.

Configuración Epistémica N°3: La Noción Intuitiva de Límite de Newton.

Configuración Epistémica N°4: La idea de los Infinitesimales de Leibniz.

Configuración Epistémica N°5: Concepciones preformales de Límite.

Configuración Epistémica N°6: Noción de límite de Weierstrass.

Dichas configuraciones epistémicas están basadas en estudios históricos-epistemológicos del objeto y nos brindan información sobre la riqueza matemática para proponer cada uno de los criterios y descriptores que los docentes pueden utilizar en sus implementaciones pedagógicas.

Adicionalmente, utilizamos la noción de idoneidad didáctica propuesto por Godino y colaboradores (GODINO, et al., 2006; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; BREDA; FONT; PINO, 2018), estas herramientas teóricas nos brindan orientación y guía para el diseño de los criterios y descriptores asociado al objeto límite. En este sentido, la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las siguientes seis componentes:

> Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (previstos), respecto a un significado de referencia.
>
> Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
>
> Idoneidad interaccional, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan
>
> a detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.
>
> Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
>
> Idoneidad emocional, grado de implicación (interés, motivación, del alumnado en el proceso de estudio.
>
> Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. (GODINO, et al., 2007, p.133)

Para llevar a cabo nuestro trabajo, utilizamos de manera específica los indicadores de cada una de las idoneidades parciales (idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) propuestos por Godino (2013). Estos indicadores permiten evaluar y reflexionar con lineamientos claros, precisos y explícitos sobre cada una de las idoneidades que el docente establece en el diseño de sus intervenciones pedagógicas.

2. Metodología

El presente estudio se enmarca en un enfoque cualitativo cuyo diseño metodológico es descriptivo (COHEN; MANION; MORRISON, 2011; HERNÁNDEZ; FERNANDEZ; BAPTISTA, 2016), puesto que el objetivo de este trabajo es elaborar una propuesta de componentes y descriptores sobre los criterios de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de límites de funciones en una variable.

Los componentes e indicadores se presentan como un recurso orientador para procesos de instrucción efectiva sobre límite de funciones en una variable. Además, permiten la valoración de acciones formativas planificadas o implementadas sobre dicho objeto matemático. El diseño de esta herramienta teórico-metodológica se ha basado en una exhaustiva revisión bibliográfica (MEDRANO; PINO-FAN, 2016; ARAYA, 2022), las seis configuraciones epistémicas del objeto límite (ARAYA, et al., 2021), en la experiencia didáctica de la implementación de tareas de cada significado parcial del objeto (ARAYA, 2022) y los indicadores de la Idoneidad Didáctica propuestos por Godino (2013).

3. Componentes e indicadores para el diseño y reflexión de la enseñanza de límites de funciones en una variable

3.1 Idoneidad epistémica para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Desarrollar una alta idoneidad epistémica en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre límites requiere del diseño y selección apropiada de situaciones-problemas que involucren el objeto matemático y sus diversos significados parciales (GODINO, et al., 2006). Es importante movilizar las distintas representaciones del objeto (BLÁZQUEZ, et al., 2006; FUENTE; ARMENTEROS; FONT, 2012) y promover definiciones que consideren las características fundamentales de la noción. Las tareas propuestas deben tener un grado de apertura que permitan evocar diferentes estrategias para desarrollar una o varias soluciones, procurando que las estrategias deben estar debidamente argumentadas por los estudiantes. Es necesario que en el proceso de instrucción el docente tenga especial cuidado en evocar ambigüedades o creencias que conlleven a conceptualizaciones erróneas sobre la noción (confusión entre el límite de una función y la función en el punto si es que está definida; confusión entre el infinito actual y potencial; etc.). Por último, es importante que el docente propicie tareas donde la noción se pueda vincular con otros objetos matemáticos (derivada, continuidad, series, integral definida, etc.) y aplique dicho objeto en situaciones contextualizadas o en otras disciplinas.

A continuación, describiremos según cada componente de la Idoneidad Epistémica los indicadores que un docente podría propiciar en la implementación de sus clases con respecto al objeto límite.

Componente: Situaciones problemas

Se presentan problemas que movilizan, de manera representativa, los seis significados de referencia del objeto límite.

Indicadores:

- Situaciones problemas que involucren regularidades con figuras geométricas propias de la geometría sintética (euclidiana).
- Situaciones problemas que involucren el uso de secciones transversales de figuras geométricas en el plano y/o cuerpos geométricos en el espacio euclidiano.
- Situaciones problemas que consideren actividades intuitivas de aproximación de áreas bajo la curva de funciones.
- Situaciones problemas que involucren la noción de infinitesimal donde puedan relacionar el límite de la pendiente de una recta secante con respecto a la pendiente de una recta tangente.
- Situaciones problemas donde se estudien sucesiones de manera gráfica, tabular y algebraica.
- Situaciones problemas donde se estudie límite de funciones por medio del estudio su gráfica, intervalos del dominio y recorrido y su representación algebraica.
- Promover situaciones problemas propios de la matemática para reforzar el aprendizaje de límites.
- Promover situaciones problemas contextualizadas a la vida cotidiana o de otras disciplinas.

Componente: Lenguajes

Indicadores:

- Representación y uso de los símbolos $\lim_{x \to x\_0} f(x)$ y $\lim_{n \to \infty} f(n)$.

- Movilizar las diversas representaciones de límite (verbal, tabular, algebraica, gráfica, geométrico euclidiano)
- Promover tratamientos en diversos registros de representación (verbal, tabular, algebraica, gráfica, geométrico euclidiano), por ejemplo, utilizar sucesiones por medio su representación geométrica sintética, algebraica, tabular y gráfica.

Componente: Definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos

Indicadores:

- Identificar y articular los diversos significados de la noción de límite de funciones en una variable.
- Promover situaciones en que los estudiantes deban justificar sus conjeturas y procedimientos.
- Realizar diversas tareas que permitan al estudiante diferenciar los conceptos de infinito potencial y actual.
- Utilizar definiciones de límite de manera intuitiva y formal (noción de Weierstrass).
- Utilización de funciones discretas (dominio en $\mathbb{N}$) y continuas (dominio en $\mathbb{R}$) tanto en su representación analítica como en su representación gráfica para el estudio de límite.
- Promover procedimientos que consideren aspectos intuitivos y formales, promoviendo el uso de la noción por medio de procedimientos verbales, tabulares, geométricos sintéticos, algebraico, gráficos.
- Los procedimientos deben evocar proposiciones que permitan discernir y argumentar la existencia o no de límite en diversas situaciones.
- Promover argumentos deductivos basados en iteraciones de figuras geométricas, estudio de obtención de volúmenes de cuerpos geométricos, gráficas de funciones discretas (dominio en $\mathbb{N}$) y continuas (dominio en $\mathbb{R}$).

Componente: Errores, ambigüedades y creencias

Indicadores:

- Promover situaciones donde en algunos casos el límite de la función (discreta o continua) sea y no sea alcanzado por la función.
- Promover situaciones donde se involucran funciones discretas (dominio en $\mathbb{N}$) y continuas (dominio en $\mathbb{R}$) con el fin de que el estudiante no confunda el infinito potencial y actual.

- Promover situaciones donde se distinga la existencia o no del límite de una función en un punto.
- Implementar situaciones donde el estudiante pueda diferenciar el rol de ε y de δ.
- Promover situaciones donde el límite emerja en estudios tabulares y algebraicos para evitar la creencia de que el límite sólo se puede estudiar por medio de la gráfica de una función.
- Promover uso de los símbolos $\lim_{x \to x\_0} f(x)$ y $\lim_{n \to \infty} f(n)$ para estudiar límites de funciones (discretas o continuas) expresadas en su forma analítica, tabular y/o gráfica.

3.2 Idoneidad cognitiva para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Desarrollar una alta idoneidad cognitiva implica que el estudiante, mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje logra la comprensión del significado institucional pretendido sobre la noción de límite. Tal como señalamos anteriormente, es primordial promover el estudio de los diversos significados parciales de la noción de límite que constituyen el significado holístico de referencia (GODINO; WILHELMI; BENCOMO, 2006). En este sentido, es fundamental realizar adaptaciones curriculares apropiadas que incluyan actividades de ampliación, refuerzo, etc.

Componente: Conocimientos Previos

Indicadores:

- Se verifica que los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para introducir la noción de límite, por ejemplo: funciones discretas, funciones continuas, gráficos de funciones, valor absoluto, propiedades del valor absoluto, cuantificadores, propiedades de lógica, tabulación de funciones, propiedades de figuras y cuerpos geométricos, etc.
- Se relacionan los conocimientos previos con la noción de límite.
- A medida que se introduce la noción de límite, se presentan tareas que permiten transitar por las diversas representaciones asociadas al objeto matemático.

Componente: Adaptaciones Curriculares a las diferencias individuales

Indicadores:

- Desarrollar actividades de ampliación, refuerzo, contraejemplos, aplicación. Es fundamental promover actividades donde el estudiante transite en los diferentes registros (verbal, tabular, algebraica, gráfica, geométrico euclidiano) y realizar tareas intuitivas para transitar de manera progresiva a tareas más formales.

Componente: Aprendizaje

Indicadores:

- Se emplean diversos instrumentos y estrategias de evaluación que permitan evidenciar la representatividad del significado personal del estudiante respecto del significado pretendido o implementado (RAMÍREZ, IBARRA, PINO-FAN, 2020) sobre la noción de límite.

Componente: Alta demanda cognitiva

Indicadores:

- Se promueve el estudio y análisis de problemas propios de la matemática y contextualizados a otras disciplinas y/o situaciones de la vida diaria.
- Se realizan actividades donde el estudiante debe deducir las condiciones de existencia de límites de funciones.
- Se realizan actividades donde el estudiante debe deducir el comportamiento de funciones discretas y continuas de manera algebraica, tabular y gráfica.
- Se diferencia y relaciona situaciones donde el límite de una función se alcanza o no en un punto.
- Se promueven situaciones donde el estudiante tenga que diferenciar los roles de ε y de δ en la noción de límite de Weierstrass.

3.3. Idoneidad afectiva para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Para lograr una alta idoneidad afectiva es primordial promover el estudio de situaciones-problemas que sean del interés del estudiante y, a su vez, que muestren la aplicación que tiene la noción de límite en diversos problemas, ya sean propios de la vida cotidiana o de otras disciplinas. Además, es esencial establecer y fomentar normas institucionales de índole afectivo, es decir, promover la participación, la autoestima, el interés por el estudio de límites, la perseverancia, etc. Lo anterior permitirá evitar una actitud negativa frente al estudio de este objeto matemático (SALINAS; ALANÍS, 2009).

Componente: Intereses y necesidades

Indicadores:

- Se estudia la aplicación de la noción de límite en problemas propios de la vida cotidiana o de otras disciplinas, con el fin de mostrar su utilidad.

- Se estudia a la noción de límite por medio de problemas geométricos clásicos, por ejemplo, la aproximación del área de un círculo por medio de sus polígonos regulares inscritos y circunscritos a éste.

Componente: Actitudes

Indicadores:

- Se promueve la participación en las actividades propuestas, la perseverancia, responsabilidad, etc.
- Se favorece el razonamiento lógico deductivo, la argumentación, el pensamiento analítico, el pensamiento geométrico y las destrezas para la resolución de problemas.

Componente: Emociones

Indicadores:

- Se promueve la autoestima, evitando una predisposición negativa al estudio de la noción de límite.
- Se resaltan las cualidades de precisión y rigurosidad de la matemática.

3.4. Idoneidad interaccional para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Para desarrollar una alta idoneidad interaccional es importante promover instancias en donde el alumno sea el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, que mediante tareas bien planificadas, el estudiante pueda construir su conocimiento y así acercarse a aquello que se pretende institucionalizar, en este caso la noción de límite de funciones en una variable. En este sentido, Godino (2013) declara que las diversas interacciones (estudiante-estudiante, profesor-estudiante, etc.) permite que cada uno de los actores reflexione a partir de lo que aportan los demás, y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión matemática. Por otra parte, la evaluación formativa de los aprendizajes que se realiza de manera progresiva y sistemática permite que el docente tome decisiones sobre el trayecto formativo que están llevando a cabo sus estudiantes, además le otorga al estudiante espacios de reflexión sobre sus aprendizajes y errores.

Componente: Interacción docente-discente

Indicadores:

- El profesor realiza una presentación adecuada del objeto límite (presentación clara, precisa y bien estructurada, da las pausas necesarias (no habla rápido), enfatiza los conocimientos previos y conceptos claves de la noción de límite.

- El profesor posee conocimiento y experiencia en las posibles concepciones erróneas que pueden desarrollar sus estudiantes para ello anticipa y precisa tareas claves en los cuales pueda corregir o erradicar dichos errores.
- El profesor identifica las concepciones de límite que emergen de los estudiantes y luego las utiliza para profundizar o reformular la enseñanza de límites.
- Se promueve la inclusión de los estudiantes en la implementación de sus clases.

Componente: Interacción entre alumnos

Indicadores:

- Se promueve el diálogo y la comunicación entre los estudiantes.
- Se pretende fomentar consensos a partir de instancias de discusión, análisis y argumentación matemática.
- Se fomenta la inclusión, la colaboración cooperativa en grupos de trabajo con el fin de evitar la inclusión.

Componente: Autonomía

Indicadores:

- Se promueven instancias donde los estudiantes asumen la responsabilidad de sus estudios (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan cierta variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y los comunican de manera oral u escrita).

Componente: Evaluación formativa

Indicadores:

- Observación sistemática y aplicación de instrumentos evaluativos durante todo el proceso de enseñanza para analizar el progreso cognitivo de los estudiantes.

3.5 Idoneidad mediacional para la enseñanza de límites de funciones en una variable

Para alcanzar una alta idoneidad mediacional es necesario utilizar medios (representaciones, calculadoras, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo, etc.) para implementar los procesos de enseñanza-aprendizaje de límites (FERNÁNDEZ, 2000; SOLER DE DIOS, 2014; CAGLAYAN, 2015). No cabe duda de que el uso apropiado de los diversos recursos tecnológicos facilita e incrementa el aprendizaje de los estudiantes, por tal razón es fundamental que las instituciones de educación aseguren que todos sus estudiantes puedan tener acceso a estos recursos (SFARD, 2002).

Componente: Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)

Indicadores:

- Se fomenta el uso softwares geométricos (por ejemplo, applets de GeoGebra) para promover la noción de límite en patrones geométricos de manera intuitiva.
- Se promueve el uso de softwares geométricos para estudiar la noción de límite en la deducción de volúmenes de cuerpos geométricos.
- Se utiliza graficadores informáticos que promuevan el estudio de la noción de límite por medio del área bajo la gráfica de funciones particulares.
- Se utiliza graficadores informáticos que permitan estudiar la noción de límite por medio de gráficas de funciones discretas y continuas.
- Se fomenta el uso de calculadoras u hojas de cálculo para estudiar la noción de límite por medio de la tabulación y/o expresiones algebraicas.

Componente: Número de estudiantes, horario y condiciones del aula

Indicadores:

- El número y la distribución de los estudiantes en la sala de clases permite llevar a cabo la enseñanza pretendida de la noción de límite.
- Se realiza una adecuación del proceso de instrucción matemática apropiado al horario de las clases.
- El espacio educativo es adecuado para el desarrollo del proceso instruccional pretendido sobre límites (el espacio cuenta con softwares geométricos, graficadores, calculadora, etc.)

Componente: Tiempo (de enseñanza colectiva, tutorización; tiempo de aprendizaje)

Indicadores:

- El profesor conoce los errores frecuentes, tales como: la confusión entre el rol de ε y δ; si el límite se alcanza o no, confusión en los límites laterales con la existencia de límite, etc. El docente es capaz de anticipar las respuestas que pueden emerger ante situaciones de enseñanza sobre límites. Esto le permite clasificar las actividades según el nivel de dificultad, diseñar instrumentos de evaluación, estimar el tiempo de desarrollo de una tarea concreta para estudiantes y grupos de aprendizaje específicos.

3.6 Idoneidad Ecológica para la Enseñanza de Límites de Funciones en una Variable

Para desarrollar una alta idoneidad ecológica es necesario implementar procesos de enseñanza de la noción de límites de manera pertinente al nivel y contexto educativo. En este sentido, el profesor desde su profesionalidad y expertiz debe realizar adaptaciones curriculares, conexiones intra e interdisciplinares, utilizar herramientas innovadoras que favorezcan los aprendizajes y promuevan tareas que permitan desarrollar el pensamiento reflexivo y crítico en sus alumnos.

Componente: Adaptación al currículo

Indicadores:

- La noción de límite se enseña por medio de sus diferentes registros según el currículo escolar secundario y/o el curriculum universitario.
- La enseñanza de la noción de límites es utilizada para resolver problemas contextualizados (fractales, tasa de interés, paradoja de Zenón, etc.) y/o de otras disciplinas según el curriculum que debe promover en la institución educativa, ya sea a nivel escolar o universitaria.

Componente: Conexiones intra e interdisciplinares

Indicadores:

- Se vincula la noción de límite con otros objetos matemáticos, tales como: derivada, continuidad, series, integral definida, etc.
- Se utiliza la noción de límite para dar respuestas a problemas contextualizados a la vida cotidiana u otras disciplinas.

Componente: Utilidad socio laboral

Indicadores:

- Se fomenta la noción de límites como una herramienta adecuada que sirve para dar respuesta a problema propios de la matemática, de la vida cotidiana o de otras disciplinas.

Componente: Apertura hacia la innovación didáctica

Indicadores:

- Se promueve el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) con el fin de desarrollar la comprensión de la noción de límite, así como también para manipular distintos medios que permitan desarrollar las diversas representaciones vinculadas a dicho objeto matemático.

4. Conclusiones

El presente estudio propone una serie de componentes e indicadores empíricos basados en la Idoneidad Didáctica (GODINO, 2013), en los significados parciales del objeto límite propuestos por Araya, et al. (2021) y en la experiencia de la implementación de tareas de cada significado parcial desarrollado por Araya (2022). Las configuraciones epistémicas relacionadas con los significados parciales nos brindaron criterios y orientaciones epistémicas que permitieron diseñar los indicadores propuestos. Adicionalmente, la experiencia didáctica desarrollada por Araya (2022) permitió dar orientaciones de manera específica para los indicadores de la idoneidad cognitiva, interaccional y emocional.

El proceso de reflexión sobre la práctica es una estrategia que permite analizar, comprender y resignificar situaciones propias de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Dicha estrategia permite al docente mejorar sus procesos de instrucción, pues puede prever e intervenir situaciones problemáticas que podrían interrumpir y afectar el desarrollo de las competencias y habilidades matemáticas de los estudiantes con respecto al objeto límite. Debido a lo anteriormente expuesto, es importante disponer de herramientas teórico-metodológicas específicas para la noción de límite de funciones en una variable que permitan organizar y valorar las prácticas pedagógicas en los diversos momentos del proceso instrucción (planificación, implementación, evaluación y reflexión).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005 financiado por la ANID de Chile.

Referencias

ARAYA, D. A.; PINO-FAN, L. R.; MEDRANO, I. y CASTRO, W. Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. **Bolema**, Río Claro, v. 35, n. 69, p. 179-205, 2021. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a09

ARAYA, D. A. **Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable.** Tesis (Doctorado) - Universidad de Los Lagos, Departamento de Ciencias Exactas, Programa de Doctorado en Educación Matemática, Osorno, 2022. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html. Acceso en: 15 de marzo. 2023.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), **Ingeniería didáctica en educación matemática**. México: Grupo editorial Iberoamérica. 1995. p.97-140.

BARAHMAND, A. The Boundary Between Finite and Infinite States Through the Concept of Limits of Sequences. **Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan. v.15. n. 3, p. 569-585. 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-015-9697-3

BLÁZQUEZ, S.; ORTEGA, T.; GATICA, S.; BENEGAS, J. Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 2, p. 189-209, 2006.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v.32, n.60, p. 255-278, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

CAGLAYAN, G. Math majors' visual proofs in a Dynamic environment: the case of limit of a function and the ε-δ approach. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 46, n. 6, p.797-823, 2015. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education (6th Ed.)**. New York, NY: Routledge, 2011.

FERNÁNDEZ, M. Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. **RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 3, n. 2, p.171-187, 2000.

FUENTE, A.; ARMENTEROS, M.; FONT, V. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del límite de una. **Bolema**, Río Claro, v.26, n.42B, p. 667-690, 2012. DOI: https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200013

GODINO, J.D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. **Paradigma**, Maracay, v. XXVII, n.2, p. 221-252, 2006.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Hamburgo, v.39, n.1, p.127-135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 8, n.11, p. 111-132, 2013.

HERNÁNDEZ SAMPIERI, R.; FERNÁNDEZ COLLADO, C.; BAPTISTA LUCIO, P. **Metodología de la investigación.** 6ta ed. México: McGraw-Hill, 2016.

MAMONA-DOWNS, J. Letting the intuitive bear on the formal: A didactic approach for the understanding of the limits of a sequence. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.48, p. 259–288, 2001. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1016004822476

MEDRANO I.; PINO-FAN L. Estudios de Comprensión de la Noción Matemática de Límite Finito desde el Punto de Vista Histórico. **REDIMAT**, Barcelona, v. 5, n. 1, p. 287-323, 2016. DOI: https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1854

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. **Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media**. Santiago, Chile: CPEIP, 2021. Disponible en https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17598. Acceso 15 de marzo 2023.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Río Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, 2015. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

RAMÍREZ, R.; IBARRA, S.; PINO-FAN, L. Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 32, n.2, p.69-98, 2020. DOI: https://doi.org/10.24844/EM3202.03

ROBINET, J. Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 4, n. 3, p. 223-292, 1983.

SALINAS, P.; ALANÍS, J. A. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. **RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v.12, n. 3, p. 355-382, 2009.

SFARD, A. Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, Martin, G., y Schifter, D. (Eds.), **A Research Companion for NCTM Standards**. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics, 2002, p. 353-392.

SOLER DE DIOS, B. **Fractales para la construcción del concepto de límite en 4° de ESO**. Memoria (Máster) - Universidad de Valencia, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Máster en Profesor de Educación Secundaria, Valencia, 2014.

Autores

Daniela Andrea Araya Bastias

Doctora en Educación Matemática por la Universidad de los Lagos (ULAGOS). Académica de la Universidad Central de Chile (UCEN), Santiago, Chile. Línea de investigación didáctica del cálculo y álgebra.

E-mail: daniela.araya@ucentral.cl

ORCID iD 0000-0002-3395-3348.

Luis Roberto Pino-Fan

Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Académico del Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de los Lagos (ULAGOS), Osorno, Chile.
Línea de investigación didáctica del cálculo y álgebra.
E-mail: luis.pino@ulagos.cl,
ORCID iD 0000-0003-4060-7408.

Como citar o artigo:

ARAYA, D. A.; PINO-FAN, L. R. Componentes e Indicadores para el Diseño y Reflexión de Procesos de Instrucción de Límites de Funciones en una Variable. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 409 - 426 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p409-426.id1392

Criterios de idoneidad epistémica para la enseñanza de las funciones: el caso de la función inversa en contexto de microenseñanza

Yocelyn Parra Urrea
yocelyn.parra@uss.cl
https://orcid.org/0000-0002-1880-5945
Universidad San Sebastián (USS)
Santiago, Chile.

Luis Pino-Fan
luis.pino@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408
Universidad de Los Lagos (ULAGOS)
Osorno, Chile.

Carlos Gallegos Lastra
carlos.gallegos@usach.cl
https://orcid.org/0009-0001-7230-2513
Universidad de Santiago de Chile (USACH)
Santiago, Chile.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

En esta investigación se presenta una herramienta teórico-metodológica que permite caracterizar el conocimiento matemático requerido por el profesorado de matemática para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre funciones. Se ejemplifica el uso de nuestra propuesta mediante el análisis de un proceso de instrucción desarrollado por un futuro profesor de matemática chileno sobre la noción de función inversa, en contexto de microenseñanza. La microenseñanza constituye un espacio de análisis y retroalimentación controlado y seguro que ofrece al profesor en formación una oportunidad de autobservarse y reflexionar sobre su práctica. Para el diseño de nuestra propuesta y los análisis del estudio, nos apoyamos en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) y en las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Como resultado del estudio se presentan criterios de idoneidad epistémica específicos para la enseñanza de funciones que constituyen una primera aproximación al conocimiento referencial de la dimensión matemática. Estos criterios nos permitieron analizar la riqueza matemática, valorar la práctica docente y reflexionar sobre ella para determinar acciones que mejoren los procesos de instrucción sobre la noción de función inversa.

Palabras clave: Función inversa. Conocimiento Didáctico-Matemático. Criterios de idoneidad. Faceta epistémica. Microenseñanza.

Critérios de adequação epistêmica para o ensino de funções: o caso da função inversa no contexto do microensino

Resumo

Esta pesquisa apresenta uma ferramenta teórico-metodológica que permite caracterizar os conhecimentos matemáticos requeridos pelos professores de matemática para administrar adequadamente o aprendizado sobre funções. O uso de nossa proposta é exemplificado através da análise de um processo de instrução desenvolvido por um futuro professor de matemática chileno sobre a noção de função inversa, no contexto do microensino. O microensino constitui um espaço de análise e *feedback* controlado e seguro que oferece ao professor em formação a oportunidade de auto observar-se e refletir sobre a sua prática. Para a concepção da nossa proposta e análise do estudo, contamos com o Modelo de Conhecimento Didático-Matemático (CDM) e com os instrumentos teóricos e metodológicos da Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (AOS). Como resultado do estudo, são apresentados critérios específicos da adequação epistêmica para o ensino de funções que constituem uma primeira aproximação ao conhecimento referencial da dimensão matemática. Esses critérios nos permitiram analisar a riqueza matemática, avaliar a prática docente e refletir sobre ela para determinar ações que melhorem os processos instrucionais sobre a noção de função inversa.

Palavras-chave: Função inversa. Conhecimento Didático-Matemático. Critérios de adequação. Faceta epistêmica. Microensino.

Epistemic suitability criteria for the teaching of functions: the case of the inverse function in the context of micro-teaching

Abstract

This research presents a theoretical-methodological tool that allows characterizing the mathematical knowledge required by mathematics teachers to properly manage learning about functions. The use of our proposal is exemplified through the analysis of an instruction process developed by a future Chilean mathematics teacher on the notion of inverse function, in the context of microteaching. Microteaching constitutes a controlled and safe space for analysis and feedback that offers the teacher in training an opportunity to self-observe and reflect on its practice. For the design of our proposal and the analysis of the study, we rely on the Didactic-Mathematical Knowledge Model (CDM) and on the theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematics Instruction (EOS). As a result of the study, specific epistemic suitability criteria are presented for the teaching of functions that constitute a first approximation to the referential knowledge of the mathematical dimension. These criteria allowed us to analyze the mathematical richness, assess the teaching practice and reflect on it to determine actions that improve the instructional processes on the notion of inverse function.

Keywords: Inverse function. Didactic-Mathematical Knowledge. Suitability criteria. Epistemic facet. Microteaching.

Introducción

Determinar el conocimiento requerido por los profesores para lograr, en sus estudiantes, una apropiación significativa de nociones matemáticas es una de las problemáticas más apremiantes de la comunidad investigadora en educación matemática (BALL, 2000; HILL; BALL; SCHILLING, 2008; SCHOENFELD; KILPATRIK, 2008; PINO-FAN, GODINO; FONT, 2018). La formación inicial y continua de profesores representa un campo de investigación fundamental dado que “el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes dependen de manera esencial de la formación de sus profesores” (PINO-FAN, 2014, p.5). Grossman y McDonald (2008) argumentan que los programas de formación inicial docente deben aproximarse a la práctica de manera que los futuros profesores puedan participar de situaciones intensivas centradas en la experimentación.

La microenseñanza es un método de enseñanza simulado cuyo propósito es proporcionar a los profesores la oportunidad de desarrollar la práctica docente en un contexto controlado y de complejidad reducida. Este tipo de metodologías no sustituye la práctica en contextos reales, pero ofrece ventajas como la retroalimentación, la oportunidad de autoevaluarse, explorar fortalezas, debilidades y proporciona una mayor comprensión de las interacciones en el aula (DONNELLY; FITZMAURICE, 2011). Se ha demostrado que el desempeño de los futuros profesores en entornos estandarizados de microenseñanza es transferible a situaciones reales de aula (SEIDEL et al., 2015). Además, los profesores que han sido formados mediante microenseñanza muestran un mejor desempeño que aquellos que no han participado de estas metodologías (SEIDEL et al., 2015).

Los profesores en formación deberían tener la oportunidad de experimentar la auténtica naturaleza de la enseñanza como un proceso dinámico e interactivo, sin estar expuestos a la exigencia que provoca un campo de acción real, la falta de consecuencias negativas otorga mayor seguridad en la aplicación de métodos o enfoques de enseñanza que le permiten integrar los conocimientos teóricos provenientes de las ciencias de la educación, la matemática y la didáctica de la matemática. Los futuros profesores deben tener la oportunidad de reflexionar intensamente sobre sus propias prácticas docentes y las de los demás. En la actualidad, son escasos los estudios que han aplicado entornos de microenseñanza para analizar sistemáticamente las prácticas de retroalimentación de los profesores en formación (HÖPPNER et al., 2019).

El proceso de instrucción sobre la noción de función ha sido objeto de múltiples investigaciones motivadas fundamentalmente por las dificultades que poseen los estudiantes para comprender y dar significado a dicho objeto matemático. Norman (1992), afirma que los profesores tienen dificultades en la conceptualización de las funciones, es decir, aprueban definiciones imprecisas consideradas útiles para la comprensión del objeto matemático. Asimismo, afirma que la familiaridad con las funciones interfiere en el desarrollo y aprehensión significativa de otras nociones matemáticas. La conceptualización que los profesores poseen en torno a las funciones debería contemplar: 1) la ejemplificación y caracterización de la noción de función desde una definición/significación personal y formal; 2) habilidad para relacionar la noción de función en diversos contextos (cotidianos, provenientes de otras ciencias, etc.); y 3) habilidad para interpretar, generalizar, y deducir relaciones funcionales en representaciones gráficas, algebraicas, tabulares y verbales (NORMAN, 1992; MAKONYE, 2014). En este mismo sentido, Even (1993) se refiere a dos rasgos esenciales de la noción de función: arbitrariedad y univalencia. En su estudio constata que la idea de función como correspondencia arbitraria está ausente. Además, los profesores tienen dificultades para explicar la condición de univalencia.

Las funciones admiten una variedad de representaciones (algebraicas, gráficas, tabulares, verbales) que otorgan información esencial del objeto matemático. Es decir, cada representación ilustra aspectos relevantes de una función, por ejemplo, las representaciones gráficas permiten visualizar la covariación. En contraste, las expresiones algebraicas y tabulares acentúan la idea de correspondencia (THOMPSON, 1994; CONFREY; SMITH, 1995 apud NITSCH et al., 2015). Según Panaoura et al., (2017) la falta de comprensión por parte de los profesores para transitar por las múltiples representaciones asociadas a las funciones podría obstaculizar la aprehensión de los estudiantes quienes podrían concebir las representaciones como entidades estáticas e independientes (WANG; BARMBY; BOLDEN, 2017).

Si bien diversos estudios se han referido a los procesos de instrucción sobre funciones, son escasas las investigaciones con ejemplos empíricos que orienten el desarrollo de una práctica docente eficiente que facilite el aprendizaje de los estudiantes sobre funciones inversas (PAOLETTI, 2020). De acuerdo con Even (1993) y Sintema y Marban (2021) los profesores en formación y profesores en ejercicio tienen dificultades para construir significados de funciones inversas, por ejemplo, confunden la composición de funciones con la multiplicación ordinaria y presentan inconvenientes para identificar situaciones de la vida real que podrían ser modeladas mediante funciones inversas. En este mismo sentido, Kontorovich (2017) afirma que la comprensión del símbolo polisémico del superíndice (-1), que se usa para indicar la inversa de una función y el recíproco de un número real, representa un gran problema para los profesores de matemáticas en formación. Esto ocurre particularmente porque la mayoría de ellos tratan el símbolo (-1) como un homónimo, es decir, al símbolo le asignan significados diferentes sin considerar el contexto, lo que se enfatiza en los errores de procedimiento en la determinación de funciones recíprocas (en términos multiplicativos) y funciones inversas.

La complejidad que subyace en los procesos de enseñanza y aprendizaje de funciones nos ha llevado a plantearnos las siguientes preguntas:

- ¿Qué componentes e indicadores representan un recurso orientador para alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones?
- ¿Cómo sistematizar y orientar la reflexión de la práctica docente que ejercen los futuros profesores cuando afrontan la enseñanza de funciones?

Para responder a estas preguntas, se propone una herramienta teórico-metodológica con criterios específicos para la enseñanza de las funciones, particularmente detallaremos aquellos que permiten alcanzar una alta idoneidad epistémica y forman parte esencial del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Se ejemplifica el uso de nuestra herramienta mediante el análisis de un proceso de instrucción sobre función inversa, desarrollado por un profesor chileno en formación, en contexto de microenseñanza. De este modo, nuestro estudio se sustenta en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), en las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y en los espacios de reflexión que ofrece la microenseñanza.

1. Marco Teórico

En esta investigación hemos adoptado el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que plantea tres dimensiones (Matemática; Didáctica; y Meta didáctico-matemática) para interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018). Cada dimensión considera subcategorías, que incluyen elementos teóricos para el análisis del conocimiento relativo a cada subcategoría. La *dimensión matemática* del CDM, constituye el conocimiento que le permite al profesor resolver una actividad matemática y vincularla con otros objetos matemáticos que se explicitan en el currículo escolar. Incluye dos subcategorías: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015). La dimensión matemática no es suficiente para alcanzar procesos de enseñanza y aprendizaje eficaces, es decir, se requiere conocimiento de otros aspectos que afectan la planificación, la gestión del aula y del contenido matemático. De este modo, la *dimensión didáctica* del CDM se refiere a conocimientos esenciales que el profesor debe movilizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, esto es, el conocimiento en profundidad de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos, afectivos, mediacionales, interaccionales y ecológicos. Por consiguiente, esta segunda dimensión incluye seis subcategorías: 1) faceta epistémica (conocimiento sobre las características esenciales de los objetos matemáticos; 2) faceta cognitiva (conocimiento sobre los aspectos cognitivos, conocimientos previos de los estudiantes, y sobre los errores y dificultades asociadas a una noción matemática); 3) faceta afectiva (conocimiento sobre los intereses, necesidades, actitudes y emociones de los estudiantes); 4) faceta interaccional (conocimiento sobre la capacidad de autonomía de los estudiantes y las interacciones que surgen en los procesos de instrucción); 5) faceta mediacional (conocimiento sobre los recursos materiales, las condiciones del aula y la temporalidad para promover el aprendizaje); y 6) faceta ecológica (conocimiento sobre el currículo escolar, la innovación didáctica y los aspectos socioculturales -contextuales, sociales, económicos- que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje) (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015). Las seis facetas de la dimensión didáctica del CDM pueden emplearse para examinar, describir y caracterizar el conocimiento de los profesores en cualquier fase del proceso de enseñanza: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación (PINO-FAN; GODINO, 2015).

La dimensión meta didáctico-matemática (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017) se refiere al conocimiento sobre las condiciones institucionales, normas y metanormas que regulan la gestión del aula y de los contenidos. Además, involucra criterios que permiten evaluar la idoneidad didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje para reflexionar sobre la práctica docente ejercida y determinar acciones que promuevan procesos adecuados de instrucción matemática (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018).

El CDM permite utilizar las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Onto-Semiótico (GODINO; BATANERO; FONT, 2019) para operacionalizar las dimensiones y subcategorías del conocimiento didáctico-matemático propuestas por el modelo. En este sentido, la noción de idoneidad didáctica propone criterios que representan un recurso orientador para la gestión efectiva en el aula y se define como la articulación coherente y sistémica de los siguientes seis componentes (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2018):

- *Idoneidad epistémica* es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad ecológica* es el grado de adecuación del proceso de instrucción matemática a los lineamientos institucionales, curriculares y a las condiciones socioculturales de los estudiantes.
- *Idoneidad cognitiva* permite valorar tanto la relación entre los conocimientos previos de los estudiantes y el aprendizaje pretendido/implementado como la similitud de este último con el aprendizaje adquirido por parte del estudiante.
- *Idoneidad afectiva* permite valorar qué tan involucrado está el estudiante en el proceso de instrucción matemática.
- *La idoneidad interaccional* es el grado en que las interacciones (entre el docente y los estudiantes y entre estudiantes) favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje y permiten resolver las inquietudes y dificultades de los estudiantes.
- *La idoneidad mediacional* permite valorar la pertinencia de los recursos materiales y temporales en los procesos de instrucción matemática.

La formación de profesores (inicial y continua), debe promover espacios de reflexión de la práctica docente como una estrategia esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. El constructo de criterios de idoneidad (componentes y descriptores) puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión, guiar los procesos de instrucción matemática y valorar su implementación. En el siguiente apartado, se presentan criterios específicos de idoneidad epistémica para orientar y valorar clases sobre la noción de función.

1.1 Criterios de Idoneidad epistémica para la enseñanza de funciones

En este artículo se presentan criterios de idoneidad epistémica específicos para la enseñanza de funciones que constituyen una primera aproximación al conocimiento referencial de la dimensión matemática. Esta herramienta es resultado de una investigación más amplia que presenta criterios de idoneidad didáctica para cada una de las seis facetas de la dimensión didáctica del CDM (PARRA-URREA; PINO-FAN, 2022). En el apartado de resultados y análisis ejemplificaremos su uso, mediante un proceso de instrucción sobre función inversa, desarrollada por un profesor chileno en formación, en contexto de microenseñanza.

El diseño de nuestra herramienta teórico-metodológica se sustenta en la exhaustiva revisión de literatura científica, en el marco teórico propuesto por Nyikahadzoyi (2015) sobre el conocimiento de los profesores respecto a la noción de función, y en los resultados de un estudio histórico-epistemológico y curricular (PARRA-URREA, 2015) que permitió identificar los diversos significados que la noción de función ha adquirido a lo largo de su origen, evolución y formalización: (1) como correspondencia; (2) relación entre magnitudes variables; (3) como representación gráfica; (4) como expresión analítica; (5) como correspondencia arbitraria; y (6) función a partir de la teoría de conjuntos.

Los criterios de idoneidad epistémica que se presentan en este artículo buscan analizar la riqueza matemática, valorar la práctica docente y reflexionar sobre ella para determinar acciones que mejoren los procesos de instrucción sobre la noción de función.

Alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones requiere del diseño y selección apropiada de situaciones-problemas que involucren dicho objeto matemático y de la articulación de los diversos significados parciales asociados a la noción matemática (GODINO; WILHELMI; BENCOMO, 2006; NORMAN, 1992). Además, es fundamental movilizar las distintas representaciones del objeto función (algebraica, gráfica, tabular, verbal) (EVEN, 1993; NITSCH et al., 2015), esto dado que “la capacidad de coordinar dos o más representaciones es vista como un sello distintivo para el desarrollo de competencias matemáticas” (WILLS et al., 2014, apud AMAYA; CASTELLANOS; PINO-FAN, 2021, p.2). En este mismo sentido, se debe promover definiciones que consideren las características fundamentales de la noción de función (arbitrariedad, existencia, univalencia) (EVEN, 1993). Las tareas propuestas deben admitir diversas formas de resolución, por tanto, variados procedimientos que deben ser debidamente justificados. Es esencial evitar en el proceso de enseñanza-aprendizaje ambigüedades o creencias que conlleven a conceptualizaciones erróneas sobre funciones. Finalmente, es importante que la noción de función se vincule con otros objetos matemáticos de distintos niveles educativos para mostrar su carácter unificante y modelizador

(DEULOFEU, 2001). En la siguiente tabla (tabla 1) se describen aspectos esenciales para lograr una alta idoneidad epistémica.

Cuadro 1 – Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

Componentes	**Indicadores**
Situaciones Problemas	- Se presenta una muestra de problemas que movilizan todos los significados parciales de referencia de la noción de función. - Se presentan problemas para reforzar conocimientos previos relacionados con la noción de función. - Se presentan problemas para ejemplificar la definición de la noción de función. - Se presentan problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje sobre funciones. - Se presentan problemas contextualizados provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias para reforzar el aprendizaje sobre funciones.
Lenguajes	- Se movilizan todas las representaciones vinculadas a la noción de función (verbal, simbólica/algebraico, tabular, gráfica e icónica). - Se promueven tratamientos en los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ej. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$ se aplica un tratamiento de factorización para obtener la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)^2$ el tratamiento de la función original no debe alterar el dominio ni el rango de la función resultante, en caso contrario la función no es la misma. - Se promueven conversiones entre los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ej. Para acceder a la idea de continuidad es conveniente utilizar un registro gráfico; Para potenciar la idea de correspondencia es pertinente utilizar un registro algebraico.
Definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos	- Las definiciones y procedimientos consideran la arbitrariedad y univalencia como características claves de la noción de función. - Se presenta la noción de dominio y codominio como elementos inherentes a la definición de función. - Se promueve el significado de la noción de función pretendido por el currículo escolar para identificar y argumentar relaciones funcionales en sus diversas representaciones. - Se presentan enunciados y procedimientos fundamentales relativos a la noción de función adecuados al nivel educativo. - Se promueven situaciones en que los estudiantes deben justificar sus conjeturas y procedimientos. - Se identifican y articulan los diversos significados parciales de la noción de función, Es decir, la función como: correspondencia, relación entre magnitudes variables, representación gráfica, representación analítica, correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos.
Errores, ambigüedades y creencias	- El trabajo con funciones no se limita al uso de representaciones algebraicas para evitar que se perciban solo como fórmulas y regularidades. - Se evita la creencia que un cambio en la variable independiente implica necesariamente un cambio en la variable dependiente pues de lo contrario una función constante podría no ser considerada una relación funcional. - Se presentan relaciones funcionales que no son graficables para evitar la creencia que toda función admite una representación gráfica. - Se evita el error de utilizar curvas continuas para funciones discretas. - Se presentan relaciones funcionales que no tienen asociada una expresión algebraica, una fórmula o ecuación para evitar la creencia que toda función admite una representación algebraica.

	- Las funciones se presentan con dominios y codominios explícitos para evitar la creencia de que toda función tiene un dominio y codominio natural o real. - Se presentan gráficas 'irregulares' para evitar la creencia que toda función representada gráficamente tiene buen comportamiento (simétrica, regular, suave y continua)

Fuente: Parra-Urrea (2021, p.127-130)

2. Metodología

La siguiente investigación trata de un estudio cualitativo (CRESWELL, 2009) dado que estamos interesados en sistematizar estrategias y herramientas metodológicas para orientar el diseño y reflexión de los procesos de enseñanza sobre la noción de función. Inicialmente, en un estudio más amplio, se definen criterios de idoneidad didáctica, para cada una de las facetas de la dimensión didáctica, específicos para la enseñanza de funciones (PARRA-URREA; PINO-FAN, 2022). Sin embargo, dado que en este artículo no podemos ser exhaustivos por razones de espacio, nos centraremos en presentar componentes e indicadores para alcanzar una alta idoneidad epistémica cuando se afronta la enseñanza de funciones (ver tabla 1). Posteriormente ejemplificamos el uso de nuestra herramienta mediante el análisis y valoración de la faceta epistémica de un proceso de instrucción matemática sobre función inversa, desarrollado por un profesor chileno, en contexto de microenseñanza. Esto representa una contribución a la exigua investigación sobre experiencias prácticas en la formación profesional de los profesores (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

A nivel internacional, la microenseñanza es una metodología utilizada en la formación inicial de profesores dado que enfatiza la relación teórico-práctica y proporciona habilidades para desarrollar el conocimiento pedagógico del contenido (KARTAL; OZTURK; EKICI, 2012). Asimismo, otorga la posibilidad de realizar grabaciones audiovisuales sobre experiencias de enseñanza permitiendo la revisión, análisis y discusión de la práctica docente (ERÖKTEN; DURKAN, 2009). En este sentido, el objetivo principal de la microenseñanza es proporcionar a los profesores en formación la oportunidad de explorar el campo de la enseñanza, reflexionar sobre la práctica docente y adquirir conocimientos y habilidades que aumenten su eficacia como futuros profesores, (BENTON-KUPPER, 2001; HÖPPNER et al., 2019).

2.1 Sujetos y Contexto

Al momento de la experimentación, el profesor chileno en formación, que para efectos de este estudio llamaremos *Profesor B,* estaba cursando el sexto semestre de la carrera de Pedagogía de Educación Media en Matemática de una Universidad Chilena. La duración total de este programa de estudios es de ocho semestres. Algunas de las asignaturas que el Profesor B había cursado a lo largo de su formación profesional fueron: álgebra básica, álgebra de funciones, cálculo diferencial, cálculo integral, informática educativa, software matemático, entre otras. Cabe destacar, que el estudio de la noción de función inversa se realiza en Chile en segundo año medio (enseñanza escolar secundaria), es decir, con estudiantes de 15-16 años.

La clase sobre función inversa se desarrolló, en un contexto de microenseñanza, como una de las actividades exigidas en la asignatura de práctica progresiva III. Para ello, se filmó una clase simulada de 40 minutos, en que cinco profesores en formación de sexto semestre, a quienes llamaremos Estudiantes 1, 2, 3, 4 y 5, cumplieron el rol de estudiantes de segundo año medio. Luego de finalizar la clase sobre función inversa, desarrollada por el Profesor B, se efectuó una instancia de retroalimentación entre el formador de profesores y los profesores en formación, con el propósito de precisar ciertas nociones y elementos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre funciones. Además, se identificaron fortalezas, se exploraron debilidades y se proporcionó una mayor comprensión de las interacciones en el aula mediante la revisión de la videograbación. El formador de profesores facilitó el diálogo para el intercambio de ideas y comentarios sobre el desempeño docente. Todo lo anterior conllevó a que los futuros docentes lograrán reflexionar sobre la experiencia y determinarán acciones que mejoren el proceso de instrucción.

3. Análisis y Resultados

A continuación, se presenta el análisis de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función de inversa, desarrollado en el contexto de microenseñanza por un futuro profesor chileno (Profesor B).

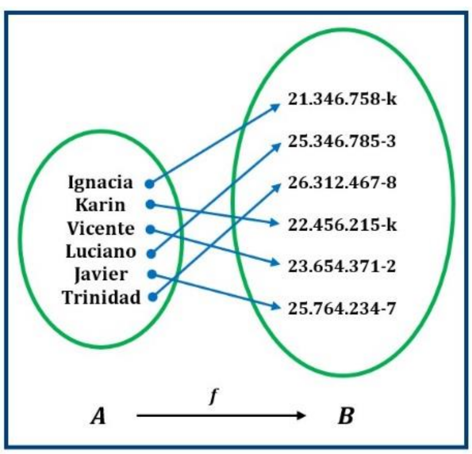
3.1 Descripción de la clase desarrollada por el Profesor B

El Profesor B inicia el proceso de enseñanza explicitando el objetivo de la clase: *"Reconocer y comprender la función inversa"*. Durante el inicio de la instrucción, intenta reforzar la noción de función y señala: *"Se definen todas las funciones a partir de dos conjuntos uno de inicio y otro de llegada"*. Inmediatamente, el Profesor B plantea la siguiente interrogante:

"¿Qué tipo de funciones conocemos?" Los estudiantes responden: "función exponencial, función lineal, función cuadrática". Ante las respuestas dadas, el Profesor B señala: *"la clasificación de las funciones es inyectiva y sobreyectiva"* luego define dichas nociones: *"Definiremos las funciones inyectivas con dos conjuntos, a uno le llamaremos* Q *y llamaremos* R *al conjunto de llegada. Una función es inyectiva si tenemos un conjunto* Q *con los elementos* $\{a; b; c\}$ *y cada elemento del conjunto de partida va a tener una imagen en el conjunto de llegada y solamente una. El conjunto* R *lo vamos a conformar con los elementos* $\{1; 2; 3; 4\}$. *Es decir, esta función será inyectiva cuando a se relaciona con un elemento del conjunto de llegada y así cada elemento se relaciona con un solo elemento del conjunto de llegada. Es posible que sobren elementos en el conjunto de llegada, pero todos los elementos del conjunto de partida deben tener una imagen y solo una. Además, dos elementos del conjunto de partida no pueden tener la misma imagen en el conjunto de llegada".*

Posteriormente, el Profesor B ejemplifica la definición dada señalando: *"Si definimos un primer conjunto, personas chilenas y el conjunto de llegada los RUN (Rol Único Nacional). Esto quiere decir, que cada persona tiene designado un número de RUN que es único para dicha persona, lo que no quita que existan más RUN que aún no son utilizados, pero toda persona tiene un RUN y dos personas chilenas no pueden tener el mismo RUN"* (ver figura 1).

Figura 1 – Diagrama referencial basado en lo propuesto por el Profesor B para la definición de función inyectiva



Fuente: Parra-Urrea (2021, p. 156)

Seguidamente, el Profesor B se refiere y define función sobreyectiva como: *"Dado dos conjuntos que llamaremos P y B, cada elemento del conjunto de partida P debe tener un elemento en el conjunto de llegada B al menos uno y todos los elementos del conjunto de llegada deben tener una preimagen en el conjunto de partida. En este caso es posible tener elementos del conjunto de partida con dos imágenes en el conjunto de llegada".*

Inmediatamente, el Profesor B plantea una situación para ejemplificar una función sobreyectiva y señala: *"Un ejemplo cotidiano serían los celulares y los números hay celulares a los que les corresponde un número telefónico. Sin embargo, existen celulares que pueden tener doble chip, por lo tanto, pueden tener asociado dos números; así un mismo celular puede tener asociado dos números telefónicos".*

Luego el Profesor B plantea a sus estudiantes: *"¿Recuerdan las funciones biyectivas?"* Un estudiante interviene: *"Profesor ¿Qué es una función?"* Ante la inquietud del estudiante, el Profesor B responde: *"Una función se define por ejemplo como $f(x) = x + 5$".* Luego señala: *"es un mecanismo que cuando un x entra en una función sale convertida dependiendo de la función que esté definida. Por ejemplo, si tenemos $f(x) = x^2$ entonces cuando entra un elemento a aplicado en la función queda $\mathrm{f}(a) = a^2$".*

Posteriormente, el Profesor B continúa con la idea de función biyectiva y explicita: *"se cumple cuando la función es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, ¿Cómo vamos a relacionar los elementos de dos conjuntos en una función biyectiva?"* (les consulta a los estudiantes). Dado que no hay respuestas por parte de los estudiantes, el Profesor B refuerza la noción de función inyectiva señalando: *"La función inyectiva es conocida como la función uno a uno, es decir, a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada y cada elemento del conjunto de llegada debe tener un solo elemento del conjunto de partida".*

Enseguida propone analizar una función y determinar cómo calcular la función inversa (objetivo de la clase). Para ello, señala: *"Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, para encontrar la función inversa de esta función f, realizaremos un proceso sencillo, recuerden que $f(x) = y$, entonces representaremos nuestra función como $y = \sqrt[3]{x-1}$, ahora cambiaremos los x por los y y los y por los x, es decir, obtendremos la siguiente expresión: $x = \sqrt[3]{y-1}$. Finalmente despejaremos y y obtendremos la función inversa".* Ante la interrogante de un estudiante: ¿Por qué se cambian las variables? El Profesor B responde: *"se cambian para encontrar la función* *inversa, como se trata de la función inversa y como su nombre lo indica vamos a asociar el conjunto de llegada como el conjunto de inicio y el de inicio como el conjunto de llegada, por eso cambiamos las variables para tener la función al revés".* Ante la actividad sugerida por el Profesor B, encontrar la función inversa $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, una estudiante obtiene como resultado $y = x^3 + 1$. Ante la respuesta de la estudiante el Profesor B afirma que la expresión $y = x^3 + 1$ representa la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Luego sugiere una estrategia para verificar si la función inversa encontrada es correcta. Antes de ello, plantea a sus estudiantes: *"¿Recuerdan composición de funciones?"* y señala: *"En la composición de funciones, f compuesta con g se representa como$f\big(g(x)\big)$, esto quiere decir, que una función está en relación de otra".* A modo de ejemplo plantea: Sea la función $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ y la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, luego $(f \circ g)(x)$ se calcula como:

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{\left(\frac{x+3}{x-2} - 1\right)}$$

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{x-2}\right)}$$

A partir de lo anterior, el Profesor B explicita: *"la función compuesta nos permite comprobar si la función inversa encontrada es correcta. Es decir, si calculamos $(f \circ f^{-1})(x)$ nos tiene que dar x, esto se conoce como la función identidad"*. Un estudiante pregunta: ¿Para qué nos sirve todo esto? El Profesor B, responde: *"Es útil para contenidos que estudiaremos más adelante, quizás en la vida cotidiana no nos sirva de mucho, pero nos va a ayudar a comprender como funcionan algunas cosas".* Entonces, el Profesor B comprueba que la expresión $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, mediante el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$. Antes de continuar con el cálculo, el Profesor B hace una pausa para señalar que cometió un error en la actividad anterior (donde solicita calcular la función compuesta $(f \circ g)(x)$ entre f y g), y menciona que el procedimiento adecuado es reemplazar en la función g el $f(x)$: "*en donde aparezca las x de la función $g(x)$ reemplazamos la función $f(x)$*". Los estudiantes, dudosos, le comentan: Profesor, en otras oportunidades la estrategia que hemos usado para calcular una función compuesta es la que explicó en el primer ejercicio. El Profesor B, ante los comentarios de los estudiantes, persiste en que la segunda estrategia para el cálculo de la función compuesta es la apropiada, y continúa con el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$ utilizando la siguiente estrategia: "Si $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ y $f^{-1}(x) = x^3 + 1$, entonces:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right)$$

Luego

$$f(x^3 + 1) = \left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^3 + 1$$

$$f(x^3 + 1) = (x-1) + 1$$

$$f(x^3 + 1) = x$$

Por lo tanto,

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Con lo anterior, el Profesor B concluye que la función $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$". Antes de finalizar la clase, el Profesor B propone algunos ejercicios en los que solicita calcular la función inversa y comprobar que la solución es correcta, y da por terminada la clase.

3.2 Análisis y reflexión de la faceta epistémica: Práctica desarrollada por el Profesor B

A continuación, se analiza y valora la implementación de una clase sobre función inversa realizada por el Profesor B, en contexto de microenseñanza. Para ello, utilizamos nuestra propuesta de componentes y descriptores de idoneidad epistémica descritos en la tabla 1.

De acuerdo con Godino et al., (2013), los procesos instruccionales tienen mayor idoneidad epistémica en la medida que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan adecuadamente al significado holístico de referencia. El Profesor B en el desarrollo de su clase sobre función inversa, solo promueve la resolución de situaciones-problemas para reforzar conocimientos previos (e.g. función inyectiva, función sobreyectiva) y problemas en contextos puramente matemáticos, para explicar función inversa y composición de funciones. Durante la instrucción matemática, no se perciben *situaciones/problemas* que permitan movilizar los distintos significados asociados a la noción de función (PARRA-URREA, 2015), tampoco tareas matemáticas contextualizadas a la vida cotidiana o a otras ciencias para potenciar el aprendizaje de dicho objeto matemático y el interés de los estudiantes por el estudio de las funciones.

En cuanto a los *procedimientos* que utiliza el Profesor B para resolver las actividades o problemas matemáticos que propone, solo se identifican tareas ‘clásicas’ que requieren procedimientos algorítmicos y mecánicos. Esto se verifica cuando el Profesor B explica cómo determinar la inversa de una función dada y cómo calcular la composición de funciones. Cabe destacar que algunas de las técnicas y notaciones de resolución son erróneas, lo que se constata cuando el Profesor B desarrolla la composición de funciones $(f \circ f^{-1})(x)$ pero en realidad calcula $(f^{-1} \circ f)(x)$. Como obtiene la respuesta esperada (función identidad), el profesor no reflexiona in situ sobre su estrategia de resolución, aun cuando los estudiantes manifiestan inquietud y duda respecto del procedimiento sugerido.

En relación con el uso de *lenguajes*, el Profesor B no recurre a las diversas representaciones (tabular, gráfica, verbal) asociadas a la noción de función inversa. De manera muy sucinta utiliza representaciones algebraicas y en menor medida icónicas, como cuando el Profesor B emplea diagramas de conjuntos para explicar, por ejemplo, la relación de correspondencia entre personas chilenas y número de RUN. De este modo, se constata que el trabajo con funciones se limita al uso de representaciones algebraicas predominando la asociación función-fórmula. Según Artigue (1995), estos criterios conducen a rechazar relaciones funcionales y a admitir objetos no funcionales. Además, el uso limitado de representaciones no permite realizar conversiones entre registros de representación dejando de lado una de las actividades cognitivas fundamentales para lograr una correcta comprensión de la noción de función. Duval (2006), establece que el dominio de las diversos registros y las respectivas conversiones asociadas son el factor decisivo para el aprendizaje.

En el desarrollo de la clase no se perciben *justificaciones o argumentaciones* matemáticamente formales que respalden las heurísticas empleadas. Sin embargo, se valora la intención del Profesor B para dar respuesta a la pregunta ¿Por qué se cambian las variables? (intercambio de variables en el procedimiento para determinar la inversa de una función) ya que declara que los conjuntos de partida y llegada se intercambian, pero no explica el motivo de intercambio de variables. Se infiere que el Profesor B busca una relación (función inversa) donde x cumpla el rol de variable independiente e y de variable dependiente siendo esto una práctica usual en el estudio de funciones.

Por otro lado, el Profesor B no vincula la función inversa con objetos matemáticos de niveles anteriores o superiores y mayoritariamente propone tareas matemáticas usuales, en contextos intra-matemáticos, que requieren para su resolución procedimientos estándar (mecánicos y algorítmicos). Es fundamental que los profesores conozcan las características de las unidades didácticas formalistas (configuraciones epistémicas conjuntistas) específicas para funciones y no se restrinjan a hallar y conocer unidades didácticas inspiradas en instrumentalismo y procesos mecánicos. Estas unidades didácticas, refieren a una presentación descontextualizada de los conceptos y reglas matemáticas en tanto que los objetos matemáticos se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo (FONT et al., 2017).

En el desarrollo de la clase, se verifica que la *definición* sobre función inyectiva proporcionada por el Profesor B se aproxima a la definición formal del objeto matemático. Sin embargo, carece de rigurosidad, precisión y formalidad matemática (GONZÁLEZ, 2004). En cuanto a la noción de función sobreyectiva, se perciben inconsistencias y errores en la definición que propone el Profesor B. En la enunciación que plantea se observan tres ideas principales:

1) Dado dos conjuntos que llamaremos P y B, cada elemento del conjunto de partida P debe tener un elemento en el conjunto de llegada B al menos uno.
2) Todos los elementos del conjunto de llegada deben tener una preimagen en el conjunto de partida.
3) En este caso es posible tener elementos del conjunto de partida con dos imágenes en el conjunto de llegada.

La definición descrita por el Profesor B difiere significativamente de la definición matemáticamente formal (GONZÁLEZ, 2004). Se observa que la afirmación 2), dada por el Profesor B cuando define función sobreyectiva, corresponde a una adecuada idea de sobreyectividad. Sin embargo, en la afirmación 1) deja abierta la posibilidad de que la relación que se estudie no sea una función, mientras que en la afirmación 3) abiertamente permite una relación no funcional.

Durante el desarrollo de la clase, el Profesor B no define formalmente la noción de función inversa, aun cuando el objetivo de la clase era “reconocer y comprender la función inversa”. Ante la pregunta de un estudiante sobre ¿Qué es una función? el Profesor B no considera la arbitrariedad, existencia y univalencia como características claves de la noción de función. Otro aspecto relevante, es que durante el proceso de instrucción el profesor no se refiere al dominio y codominio de las relaciones que presenta, de este modo se asume que no percibe dichas nociones elementos inherentes a la definición de función.

En síntesis, de acuerdo con las situaciones-problemas, definiciones, representaciones, procedimientos y argumentos propuestos por el Profesor B, podemos señalar que el significado de la noción de función implementado no es representativo del significado holístico de referencia, pues el Profesor B se basa fundamentalmente en la acepción de función como expresión analítica, mientras que a partir de los ejemplos y definiciones que propone se percibe cierto acercamiento, aunque de manera poco consciente, al significado de función como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos.

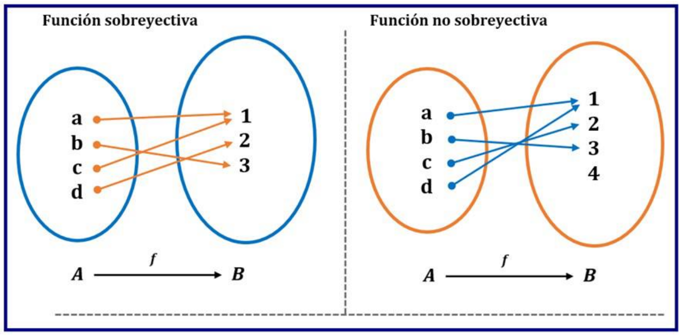
3.3 Dimensión Meta Didáctico-Matemática

En el episodio de microenseñanza sobre función inversa, se llevó a cabo una actividad de retroalimentación entre el formador de profesores y los futuros profesores. Se trató de un espacio reflexivo, posterior al desarrollo de la clase, en que también utilizamos nuestra propuesta de componentes y descriptores de idoneidad epistémica para la enseñanza de funciones. En este espacio se plantearon preguntas, comentarios, orientaciones y sugerencias que llevaron a precisar ciertas nociones y elementos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre función inversa. Asimismo, se analizó la videograbación para generar espacios de autobservación y autorreflexión de la labor ejercida por el Profesor B.

En esta instancia de retroalimentación, el Profesor B identifica aspectos que debe mejorar y corrige algunas de las definiciones que erradamente propone (e.g., la definición de función sobreyectiva). Sin embargo, no sugiere acciones inmediatas para enunciar con precisión procedimientos y definiciones introducidas en clases (e.g., definición de función, procedimiento para calcular composición de funciones, etc.). Al respecto se propició la siguiente discusión entre formador y profesores en formación.

> *Formador:* Si tuviese que volver a definir función sobreyectiva ¿Cuál sería la definición que proporcionaría?
> *Profesor B:* Mmm [...] cuando los elementos del conjunto de partida. Mmm [...] no, cuando los elementos del conjunto de llegada tienen un elemento en el conjunto de partida, es decir, un elemento como mínimo.
> *Estudiante 4:* Yo creo que lo mejor es explicar este tipo de funciones con diagramas, al menos eso haría yo. (El estudiante 4 dibuja en la pizarra dos diagramas como el que se presenta en la figura 2)

Figura 2 – Diagramas propuestos por el estudiante 4 (imagen adaptada)



Fuente: Parra-Urrea (2021, p.173)

Cabe destacar que, los diagramas propuestos por el estudiante 4, son similares a los que presenta González (2004) para ejemplificar funciones que son o no sobreyectivas. De este modo, el formador logra vincular las acepciones de los profesores en formación con la definición formal de función sobreyectiva. Otro de los aspectos sobre los que se reflexionó fue la conceptualización de la noción general de función, donde el Profesor B muestra no conocer con profundidad las matemáticas que debe enseñar (e.g., los diversos significados de la función, los objetos matemáticos primarios y secundarios vinculados a dicho objeto matemático, etc.), menos aún evidencia dominio de alguna herramienta que le permita proponer acciones para favorecer, desarrollar y evaluar la competencia matemática de sus estudiantes sobre la noción de función inversa. A partir de lo anterior, el formador refuerza los significados parciales de la noción de función y ejemplifica situaciones para ilustrar cada una de las acepciones de funciones (SIERPINSKA, 1992; BIEHLER, 2005; PINO-FAN; PARRA-URREA; CASTRO, 2019). El Profesor B aun cuando emplea parcialmente algunos de los significados de función (e.g., función como correspondencia, función como expresión analítica) y utiliza algunos elementos de la teoría de conjuntos, reconoce la importancia de abordar la función como representación gráfica y cree esencial emplear situaciones-problemas que refuercen el significado de función como relación entre magnitudes variables. Además, luego de la discusión, comprende y es consciente del significado de función como correspondencia arbitraria mediante la situación-problema que él mismo propone (relación entre personas chilenas y número de RUN). Luego del proceso de reflexión, el Profesor B considera pertinente enfatizar los conceptos claves de la noción de función (arbitrariedad, existencia y univalencia) y vincular dicho objeto matemático con situaciones de la vida cotidiana para captar la atención de los estudiantes y motivar el aprendizaje.

4. Conclusiones

En este estudio se evidencia cómo las orientaciones teóricas del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) y las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) proporcionan dimensiones/categorías y subcategorías del conocimiento del profesor que nos permiten caracterizar y analizar los conocimientos de profesores de matemática. A partir de lo anterior, nos propusimos responder la pregunta ¿Qué componentes e indicadores representan un recurso orientador para alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones? Para ello, diseñamos una herramienta teórico-metodológica (descrita en la tabla 1) que considera las recomendaciones de la literatura científica en torno a las dificultades que se suscitan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones y las orientaciones relativas al conocimiento requerido por los profesores para la enseñanza de funciones. Asimismo, nos interesamos por responder ¿Cómo sistematizar y orientar la reflexión de la práctica docente que ejercen los futuros profesores cuando afrontan la enseñanza de funciones? En este sentido, ilustramos el uso de los criterios de idoneidad epistémica específicos para la enseñanza y aprendizaje de las funciones en un contexto de microenseñanza sobre función inversa. Como resultado del análisis se evidencia que el profesor en formación (Profesor B) posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido, principalmente porque no logra dar respuestas adecuadas a más de una tarea que él mismo propone. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados, por lo tanto, no se percibe el dominio del conocimiento ampliado. De este modo, se constata que el grado de conocimiento manifestado por el Profesor B carece de aspectos relevantes sobre la matemática que debe enseñar. De acuerdo con Steele, Hillen, y Smith (2013), para fomentar en los estudiantes una comprensión conceptual rica de la noción de función, el profesor debe poseer un conocimiento profundo del contenido que le permita tomar decisiones sobre qué enseñar y cómo hacerlo.

En el desarrollo de la clase, el Profesor B proporciona definiciones poco precisas y ambiguas, además de no referirse a tres rasgos esenciales de la noción de función: arbitrariedad, existencia y univalencia, lo que es coherente con lo planteado por Even (1993). Si bien el Profesor B presenta actividades (e.g., relación entre el número de RUN y personas chilenas) que podrían promover uno de los significados parciales de la noción de función -función como correspondencia arbitraria- no es consciente de los beneficios que tiene para el aprendizaje el uso de dicho significado. Otro aspecto importante del conocimiento de los profesores es la capacidad de utilizar diversas representaciones (COONEY; BECKMANN; LLOYDET, 2011). En el caso de la clase desarrollada por el Profesor B se privilegia las representaciones simbólicas y en menor medida las representaciones icónicas. De acuerdo con Steele, Hillen, y Smith (2013), una clase que explora dominios y rangos de funciones compuestas podría beneficiarse mediante el empleo de diagramas de conjuntos. Para lograr una comprensión sólida de la noción de función en los estudiantes, el profesor debe poseer un amplio conocimiento de sus representaciones y debe promover actividades que permitan moverse con flexibilidad entre ellas (NITSCH et al., 2015). En relación con las situaciones problemas, tal como se ha descrito anteriormente, el Profesor B presenta mayoritariamente problemas para ejemplificar las definiciones que introduce y problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje de las funciones. De acuerdo con Tassara, Detzel y Ruiz (2004) “se debe considerar para la enseñanza de funciones situaciones-problemas en que las funciones sirven de modelo para el estudio del comportamiento de un fenómeno y aquellas en las que las funciones permitan expresar la dependencia entre las variables” (p.40).

Finalmente, respecto al proceso de retroalimentación, posterior al desarrollo de la clase y orientado por los criterios de idoneidad descritos en la tabla 1, se constata que los futuros profesores (Profesor B y quienes actuaron en el rol de estudiantes) logran reflexionar sobre los elementos que constituyen la faceta epistémica (situaciones problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, argumentos, errores, ambigüedades y creencias). Es decir, identifican errores e imprecisiones conceptuales e intentan, a partir de la discusión, precisar dichas definiciones y procedimientos. Además, con ayuda del profesor formador, se abordan los significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia de las funciones. Esto con el propósito de ampliar el conocimiento de los futuros profesores. Otro de los aspectos sobre los que se reflexionó, fue el tipo de situaciones problemas y la importancia de promover actividades que sean del interés para los estudiantes. Asimismo, se analizaron las distintas representaciones asociadas a la noción de función y se trabajó en el planteamiento de situaciones que ejemplificaran cada representación.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

AMAYA, T.; CASTELLANOS, A.; PINO-FAN, L. Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 2, p. 1-15, julio 2021. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

ARTIGUE, M. **La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos**. En: GÓMEZ, P. (ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 97-140.

BALL, D. L. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, [s.l], v. 51, p. 241-247, may 2000. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

BENTON-KUPPER, J. The Microteaching Experience: Student Perspectives. **Education**, [s.l], v. 121, n. 4, p. 830–835, june 2001.

BIEHLER, R. **Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. In Meaning in Mathematics Education.** In**:** KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. (eds.). Meaning in Mathematics Education. New York: Mathematics Education Library Springer, 2005. p. 61-81.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,** London, v. 13, n. 6, p. 1893-1918, june 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

COONEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. **Developing essential understandings of functions for teaching mathematics in grades 9-12**. Reston, VA: NCTM, 2011.

CRESWELL, J.W. **Research design. Qualitative, quantitative, and mixed method approaches**. United Kingdon; Publisher: Sage Publications, 2009.

DEULOFEU, J. Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación**.** En: **X JAEM**. Valencia, 2001.

DONNELLY, R.; FITZMAURICE, M. Towards productive reflective practice in microteaching. **Innovations in Education and Teaching International**, [s.l], v. 48, n. 3, p. 335–346, august 2011. DOI: https://doi.org/10.1080/14703297.2011.593709

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learnig of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, p. 103-131, february 2006.

ERÖKTEN, S.; DURKAN, N. Özel ögretim yöntemleri II dersinde mikro ögretim uygumalamari. In: **The First International Congress of Educational Research**. Canakkale, 2009.

EVEN, R. Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 24, n. 2, p. 94–116, march 1993. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.24.2.0094

FONT, V.; SALA, G.; BREDA, A.; SECKEL, M. Aspectos históricos presentes en las propuestas de innovación de profesores de básica de matemáticas. **Revista Brasileira de Ensino de Ciencia e Tecnologia**, Curitiba, p. 10, n. 3, p. 16-42, diciembre 2017. DOI: https://doi.org/10.3895/rbect.v10n3.7752

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n.1, p. 37–42, march 2019.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 46-74, julio 2013. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

GODINO, J.; WILHELMI, M.; BENCOMO, D. Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. En: **Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería**. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2006.

GONZÁLEZ, J. **Apunte de matemática discreta**. Cádiz España; Departamento de Matemática, Universidad de Cádiz, 2004.

GROSSMAN, P.; MCDONALD, M. Back to the Future: Directions for Research in Teaching and Teacher Education. **American Educational Research Journal**, Washington, v. 45, n. 1, p. 184–205, march 2008. DOI: https://doi.org/10.3102/0002831207312906

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston v. 39, n. 4, p. 372-400, july 2008.

HÖPPNER, C.; DOTZLER, C.; KÖRNDLE, H.; NARCISS, S. **Training mit Microteaching zur Entwicklung und zum Einsatz formativer Feedbackstrategien in Lehr-Lernsituationen**. In: UHDE G.; THIES, B. (eds.). Kompetenzentwicklung im Lehramtsstudium durch professionelles Training. Braunschweig: Technische Universität Braunschweig, 2019. p. 23-35. DOI: https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201901231138-0

KARTAL, T.; OZTURK, N., EKICI, G. Developing pedagogical content knowledge in preservice science teachers through microteaching lesson study. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, [s.l], v. 46, p. 2753 – 2758, december 2012.

KONTOROVICH, I. Students confusions with reciprocal and inverse functions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 48, n. 2, p. 278-284, february 2017.

MAKONYE, J. P. Teaching Functions Using a Realistic Mathematics Education Approach: A Theoretical Perspective. **International Journal of Educational Sciences**, Gurugram, v. 7, n. 3, p. 653–662, november 2014. DOI: https://doi.org/10.1080/09751122.2014.11890228

NITSCH, R.; FREDEBOHM, A.; BRUDER, R.; KELAVA, A.; NACCARELLA, D.; LEUDERS, T.; WIRTZ, M. Students competencies in working with functions in secondary mathematics education—empirical examination of a competence structure model. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 13, n. 3, p. 657–682, june 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-013-9496-7

NORMAN, A. **Teachers mathematical knowledge of the concept of function**. In: HAREL, G., DUBINSKY, E. (eds.). The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Publisher: Mathematical Association of America, 1992. p. 215-232.

NYIKAHADZOYI, M.R. Teachers' knowledge of the concept of a function: a theoretical framework. **International Journal of Science and Mathematics Education,** Taiwan, v. 13, n. S2, p. 261–283, may 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-013-9486-9

PANAOURA, A.; MICHAEL-CHRYSANTHOU, P.; GAGATSIS, A.; ELIA, I.; PHILIPPOU, A. A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 4, p. 723-740, april 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-016-9714-1

PAOLETTI, T. Reasoning about relationships between quantities to reorganize inverse function meanings: The case of Arya. **The Journal of Mathematics Behavior**, [s.l], v. 57, p. 100741, march 2020.

PARRA-URREA, Y.; PINO-FAN, L. Proposal to Systematize the Reflection and Assessment of the Teacher's Practice on the Teaching of Functions. **Mathematics**, Basilea, v. 10, n. 18, p. 3330, august 2022. DOI: https://doi.org/10.3390/math10183330

PARRA-URREA, Y. **Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de enseñanza media sobre la noción de función: una experiencia en contextos de microenseñanza.** Tesis (Doctoral). Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile, 2021.

PARRA-URREA, Y. **Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función**. 2015. Tesis de (Magíster). Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile, 2015.

PINO-FAN, L.; PARRA-URREA, Y.; CASTRO, W.F. Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. **Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación,** Bogotá**,** v. 11, n. 23, p. 201–220, enero 2019. DOI: https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

PINO-FAN, L.; GODINO, J.D.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivate. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam, v. 21, n. 1, p. 63-94, february 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

PINO-FAN, L.; ASSIS, A.; CASTRO, W.F. Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Techonology Education,** London, v. 11, n. 6, p. 1429–1456, september 2015. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, marzo 2015.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, abril 2015. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

PINO-FAN, L. **Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada**. Granada: Universidad de Granada, 2014.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. **Towards a theory of profiency in teaching mathematics**. In: TIROSH, D.; WOOD, T. L. (eds.). Tools and processes in mathematics teacher education. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 321-354.

SEIDEL, T.; STÜRMER, K.; SCHÄFER, S.; JAHN, G. How Preservice Teachers Perform in Teaching Events Regarding Generic Teaching and Learning Components. **Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie**, Göttingen, v. 47, p. 84-96, april 2015. DOI: https://doi.org/10.1026/0049-8637/a000125.

SIERPINSKA, A. **Understanding the Notion of Function. In y**. In: HAREL, A.; DUBINSKY, E. (eds.). **The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagog.** USA: Publisher: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

SINTEMA, E. J.; MARBAN, J. M. Preservice Teachers' Knowledge of Identifying and Clearing Pupils' Misconceptions about Inverse and Composite Functions via Vignettes. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 17, n. 1, january 2021. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/9378

STEELE, M. D.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam, v. 16, n. 6, p. 451–482, june 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-013-9243-6

TASSARA, A.; DETZEL, P.; RUIZ, M. El sentido de las funciones en la enseñanza. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 19, n. 2, p. 30–41, julio 2004.

WANG, Y.; BARMBY, P.; BOLDEN, D. Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 1, p. 131–153, january 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x

Autores

Yocelyn Parra Urrea

Profesora de Educación Media en Matemática, Universidad del Bío-Bío, Chile.

Doctora en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos, Chile.

Académica Facultad de Educación, Universidad San Sebastián, Chile.

E-mail: Yocelyn.parra@uss.cl

https://orcid.org/0000-0002-1880-5945

Luis Roberto Pino-Fan
Doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
Académico e Investigador, Universidad de Los Lagos, Chile.
E-mail: luis.pino@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408

Carlos Gallegos Lastra
Profesor de Educación Media en Matemática, Universidad del Bío-Bío, Chile.
Magíster en Cs. en la especialidad de Matemática, Universidad de Santiago de Chile, Chile.
Académico Universidad de Santiago de Chile, Chile.
E-mail: carlos.gallegos@usach.cl
https://orcid.org/0009-0001-7230-2513

Como citar o artigo:

PARRA-UREA, Y.; PINO-FAN, L.; GALLEGOS, C. L. Criterios de idoneidad epistémica para la enseñanza de las funciones: el caso de la función inversa en contexto de microenseñanza. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 /427 - 452. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p427-452.id1398

A competência do professor em análise de tarefas matemáticas sobre medidas de comprimento

Magna Mendes Nunes
magnamendesn@hotmail.com
https://orCAD.org/0009-0000-1061-2279
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)
Vitória da Conquista, Brasil.

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão
professorataniagusmão@gmail.com
https://orCAD.org/0000-0001-6253-0435
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)
Vitória da Conquista, Brasil.

Teresa Fernández Blanco
teref.blanco@usc.es
https://orCAD.org/0000-0003-4215-8677
Universidade de Santiago de Compostela (USC)
Santiago de Compostela, Espanha.

Liliane dos Santos Gutierre
liliane.gutierre@ufrn.br
https://orcid.org/0000-0001-6124-7769
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Natal, Brasil

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumo

O objetivo deste artigo é analisar a competência do professor da Educação Básica para análise de tarefas matemáticas sobre medidas de comprimento antes e após um ciclo formativo. Por meio de uma abordagem qualitativa, do tipo intervencionista, a pesquisa foi realizada com 18 professores licenciados em Matemática, Letras, Física e Pedagogia, participantes do Grupo de Estudos e Pesquisas Didática das Ciências Experimentais e da Matemática. Tais professores participaram de um processo formativo, orientado pelo Ciclo de Estudo e Desenho de Tarefas fundamentado teoricamente pelos Critérios de Adequação Didática, visando estudar, analisar, (re)desenhar e avaliar tarefas matemáticas. Como resultados, professores manifestaram competências antes da formação que dizem respeito a conhecimentos variados para o ensino de medidas fruto das experiências profissionais e de formações adquiridas ao longo da vida. Já após o ciclo formativo, manifestam competências mais ampliadas e focadas em análise didática, mais especificamente a competência reflexiva, o que aponta o potencial do ciclo formativo para organizar e avaliar tarefas matemáticas a serem implementadas em sala de aula.

Palavras-chaves: Competência em análise de tarefas. Critérios de adequação didática. Desenho de tarefas. Medidas de comprimento.

La competencia del profesor en análisis de tareas matemáticas sobre medidas de longitud

Resumen

El objetivo de este artículo es analizar la competencia del profesor de Educación Básica para el análisis de tareas matemáticas sobre medidas de longitud antes y después de un ciclo formativo. A través de un enfoque cualitativo de tipo intervencionista, la investigación fue realizada con 18 profesores licenciados en matemática, letras, física y pedagogía, participantes del Grupo de Estudios e Investigaciones Didácticas de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Estos profesores participaron en un proceso formativo, orientado por el Ciclo de Estudio y Diseño de Tareas, fundamentado teóricamente en los Criterios de Idoneidad Didáctica, con el objetivo de estudiar, analizar, (re)diseñar y evaluar tareas matemáticas. Como resultado, los profesores manifestaron competencias antes de la formación que se refieren a conocimientos variados para la enseñanza de medidas, derivados de experiencias profesionales y formaciones adquiridas a lo largo de la vida. Después del ciclo formativo, los profesores manifestaron competencias más amplias y enfocadas en el análisis didáctico, específicamente, la competencia reflexiva, lo que indica el potencial del ciclo formativo para organizar y evaluar tareas matemáticas que se implementarán en el aula.

***Palabras clave*:** Competencia en análisis de tareas. Criterios de idoneidad didáctica. Diseño de tareas. Medidas de longitud.

Teacher’s competence for analysing mathematical tasks on length measurements

Abstract

The aim of this article is to analyze the Basic Education teacher’s competence for analyzing mathematical tasks on length measurements before and after a training cycle. This research followed a qualitative methodology from an interventionist approach and was developed with 18 teachers with degrees in mathematics, languages, physics and pedagogy, involved in the Study and Research Group on Didactics of Experimental Sciences and Mathematics. These teachers participated of a training process, guided by the Study and Task-Design Cycle, which is theoretically based on the Didactic Suitability Criteria, aiming to study, analyze, (re)design and evaluate mathematical tasks. As a result, teachers manifested competences before training which were related to varied knowledge for teaching measures derived from professional experiences and training acquired throughout life. After the training cycle, the teachers made more expanded competences evident and focused on didactic analysis, specifically, the reflective competence, which points to the potential of the training cycle to organize and evaluate mathematical tasks to be implemented in the classroom.

***Keywords*:** Competence in task analysis. Didactic suitability criteria. Length measurements.

Introdução

O ensino de matemática tem sido alvo de muitas reflexões teóricas e práticas nos últimos anos, e uma das questões centrais é a importância de o professor possuir conhecimentos específicos para oferecer um ensino de qualidade. O Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS) é um dos marcos teóricos que destaca a relevância do professor de matemática possuir conhecimentos específicos para oferecer um ensino de qualidade e propõe o modelo de Conhecimento e Competências Didático-Matemáticas (CCDM) do professor de matemática. Nesse modelo, o professor além de ter a competência matemática, precisa ter a competência em análise didática, sendo esta última a chave do modelo e para um ensino efetivo (FONT, 2018). Para realizar a análise didática, o professor precisa de ferramentas, como os critérios de adequação didática (CAD) desenvolvidos por Godino e colaboradores (2013), que visa aproximar as pesquisas acadêmicas às práticas de ensino da matemática.

A adequação didática é definida como o grau em que um processo de ensino-aprendizagem é adequado, levando em consideração as circunstâncias e recursos disponíveis. Godino et al. (2013) propõe seis critérios de adequação didática que podem ser utilizados na formação de professores: a adequação epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica. Tais critérios são avaliados por meio de um conjunto de indicadores, permitindo uma abordagem mais completa e precisa na análise de um material didático, proposta curricular, respostas de estudantes e outras situações do contexto educacional.

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática (GDICEM) tem usado os CAD como embasamento teórico e metodológico em suas pesquisas na área de formação de professores. Em específico, participando do GDICEM professores têm estudado e analisado protocolos de respostas de estudantes e de (futuros) professores, dadas a tarefas matemáticas e os resultados dos estudos têm apontado que a análise, o planejamento, a seleção e o desenho de tarefas desenvolvem no professor competências em análise didática (PEREIRA, 2019; RODRIGUES, 2019; SOUSA, 2018; SANTOS, 2022; SANTOS; GUSMÃO; BREDA, 2022; NUNES, 2021) . Outros estudos atestam que a análise de tarefas matemáticas tem recebido destaque em nível internacional por sua importância no ensino eficaz de matemática (POCHULU; FONT; RODRÍGUEZ, 2013).

Por isso, é importante estudos que contribuam para a formação de professores, visando proporcionar a estes um maior conhecimento sobre as tarefas matemáticas e como usá-las de forma eficaz em sala de aula. Nesse contexto, surge a pergunta de interesse deste estudo: como o estudo, a análise e a avaliação de tarefas matemáticas podem contribuir para o desenvolvimento de competências didático-matemáticas no professor da Educação Básica?

Assim, foi realizada uma pesquisa com 18 professores que participaram de uma formação, com o objetivo de analisar o desenvolvimento de competências no professor da Educação Básica para análise de tarefas matemáticas antes e após um ciclo formativo, utilizando o método Ciclo de Estudos e Desenho de Tarefas (CEDT). Ademais desta breve introdução, este artigo está organizado pela literatura sobre competência, critérios de adequação, tarefas matemáticas e medidas de comprimento. Em seguida, é apresentado o percurso metodológico do estudo, seguido pelas análises dos dados e, por fim, a conclusão da pesquisa.

1. Marco teórico

1.1 Conhecimento e competência do professor de matemática

Nos últimos anos, tem sido cada vez mais comum a utilização do termo competência no desenvolvimento curricular e nas práticas de ensino, especialmente no âmbito da Educação Matemática. De acordo com Godino et al. (2012), a competência é entendida como a capacidade de enfrentar problemas complexos ou resolver atividades complexas. Nessa mesma linha de pensamento, Font, Breda e Sala (2015) definem o termo competência como o conjunto de conhecimentos e disposições que permitem o desempenho eficaz nos contextos próprios da profissão.

Essa relação entre conhecimento e competência tem sido explorada de maneira mais detalhada pelo Enfoque Ontossemiótico (EOS), que propõe um modelo teórico chamado de Conhecimento Didático-Matemático (CDM). Segundo Castro, Pino-Fan e Font (2015), o CDM é uma ferramenta para analisar o conhecimento didático-matemático do professor, que é um tipo de conhecimento mais aprofundado da matemática que difere do conhecimento adquirido pelos alunos.

O modelo CDM organiza o conhecimento do professor em três dimensões: matemática, didática e meta-didática. A dimensão matemática está relacionada ao conhecimento necessário para resolver tarefas no mesmo nível cognitivo dos alunos e articular esse conhecimento com níveis posteriores. Já a dimensão didática leva em conta o conhecimento dos fatores que interferem no planejamento e na implementação das tarefas, que é composta por seis facetas.

> 1-epistêmica: é o conhecimento didático-matemático sobre o próprio conteúdo, ou seja, a forma particular como o professor de matemática compreende e sabe matemática.
> 2-cognitiva: envolve o conhecimento de como os alunos aprendem, raciocinam e compreendem matemática e como progridem em seu aprendizado.

> 3-afetiva: inclui conhecimento sobre afetivo, afetiva, atitudes e crenças dos alunos em relação a objetos matemáticos e processo de estudo.
> 4-interacional: refere-se ao conhecimento sobre o ensino da matemática, organização de tarefas, resolvendo as dificuldades dos alunos e interações que se podem estabelecer na aula.
> 5-mediacional: é o conhecimento dos recursos (tecnológicos, materiais e temporais) apropriados para potencializar o aprendizado do aluno.
> 6-ecológica: implica as relações do conteúdo matemático com outras disciplinas e os fatores curriculares, socioprofissionais, políticos, econômicos que condicionam os processos de instrução matemática (GODINO et al., 2017, p. 96-97, *tradução nossa*).

A dimensão meta-didática é fundamental para o professor refletir sobre sua própria prática e buscar melhorias no processo de instrução. O EOS desenvolveu o modelo de Conhecimento e Competências Didático-Matemáticas do professor de matemática (CCDM) para avaliar e desenvolver as competências do professor de matemática, com foco na competência matemática e na competência de análise e intervenção didática (GODINO et al., 2017). Esse modelo é composto por cinco subcompetências ou níveis de análise: a) competência em análises de significados globais; b) competência em análises ontossemióticas de práticas matemáticas; c) competência em análise e gestão de configurações didáticas; d) competência em análises normativas e; e) competência em análise e valoração da adequação didática. Em nosso trabalho vamos nos direcionar para esta última subcompetência.

Dentre essas subcompetências, a competência em análise e valoração da adequação didática é de grande importância, pois permite ao professor avaliar a qualidade de suas próprias atividades e de outras propostas de ensino. A competência de análise e intervenção didática, por sua vez, consiste em desenhar, aplicar e avaliar sequências de aprendizagens, bem como propor melhorias baseadas em técnicas de análise em didática e critérios de qualidade. (BREDA; FONT; LIMA, 2015)

Essa competência se relaciona com outras, como a competência reflexiva, na qual o professor faz uma análise da aprendizagem dos alunos em virtude de sua prática e de outros professores. Os níveis e descritores dessa competência foram expostos por Seckel e Font (2017). Em suma, a relação entre conhecimento e competência é de extrema importância para o desenvolvimento da Educação Matemática e para a formação de professores capacitados e competentes.

Quadro 1— Níveis de desenvolvimento da competência reflexiva

Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
D1. Conhece o sistema educacional nacional, seus objetivos e metas, sua estrutura, os regulamentos que o regem, suas principais conquistas e os desafios e objetivos que possui.	D3. Analisa a prática pedagógica com base em seu impacto na aprendizagem dos alunos.	D5. Analisa criticamente a prática pedagógica com base em seu impacto na aprendizagem dos alunos considerando o contexto institucional
D2. Possui ferramentas implícitas para observação e as têm presentes na análise de uma prática.	D4. Utiliza explicitamente critérios de qualidade para avaliar processos já realizados no ensino e aprendizagem da matemática.	D6. Explica os fenômenos didáticos observados nos processos de aprendizagem. D7. Possui ferramentas de observação e avaliação das aulas que lhe permite propor e fundamentar alterações para melhoria da prática.

Fonte: Seckel e Font (2017, p. 1239, tradução nossa).

Portanto, a formação de professores pode ser enriquecida com a utilização de modelos teóricos que auxiliem no desenvolvimento de competências essenciais e que permitam a análise e a reflexão sobre as práticas docentes.

1.2 Critérios de Adequação Didática (CAD)

A noção de Adequação Didática foi introduzida pelo Enfoque Ontossemiótico, como uma ferramenta que visa aproximar as pesquisas acadêmicas às práticas de ensino da matemática. A Adequação Didática é definida como o grau em que um processo de ensino-aprendizagem é adequado, levando em consideração as circunstâncias e recursos disponíveis. Para avaliar a adequação de um processo ensino, por exemplo, são necessários critérios de adequação, que funcionam como regras de correção para orientar a intervenção em sala de aula e melhorar a prática docente. A Adequação Didática pode ser aplicada em diferentes aspectos do processo de ensino e aprendizagem, como aulas implementadas, propostas curriculares, análise de materiais didáticos e respostas de estudantes em tarefas específicas.

Godino et al. (2013), conforme explicamos anteriormente, propõe seis critérios de adequação didática que surgem do consenso da comunidade científica e que podem ser utilizados na formação de professores, são eles: a adequação epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica. Cada um desses aspectos se concentra, respectivamente, em diferentes áreas do processo, como a qualidade do conteúdo ensinado, as condições de aprendizagem do aluno, a interação entre professor e aluno, a adequação dos recursos materiais e temporais e a adaptação ao ambiente escolar e social. Tais critérios podem ser operacionalizados através de indicadores baseados em pesquisas e documentos oficiais, permitindo que o professor avalie o grau de adequação de cada componente e tome decisões autônomas em função do contexto.

Para este estudo, tomamos com referência os componentes e indicadores dos critérios de adequação didática apresentados em Breda et al. (2018), a saber:

Quadro 2: Critérios de Adequação Didática: componentes e indicadores

Componentes	**Indicadores**
Adequação epistêmica	
Erros	Não há práticas matemáticas incorretas observadas.
Ambiguidades	Avalia se a matemática ensinada é clara e correta, adaptada ao nível educacional e sem ambiguidades que possam confundir os alunos.
Riqueza de processos	A sequência de tarefas matemáticas abrange processos relevantes.
Representatividade	Definições e procedimentos são representativos da complexidade da noção matemática a ser ensinada, com amostra de problemas e uso de diferentes modos de expressão e conversões entre eles.
Adequação cognitiva	
Conhecimentos prévios (componentes similares a adequação epistêmica)	Os alunos possuem conhecimentos prévios necessários e as dificuldades do tema são manejáveis.
Adaptação curricular as diferenças individuais	Se incluem atividades de ampliação e de reforço.
Aprendizagem	Os diversos modos de avaliação mostram a apropriação dos conhecimentos dos conhecimentos/competências pretendidas ou implementadas.
Alta demanda cognitiva	As atividades ativam processos cognitivos relevantes e promovem processos metacognitivos.
Adequação interacional	
Interação docente-discente	O professor esclarece o tema e enfatiza os conceitos-chave, resolve conflitos de significado, busca consenso e usa recursos retóricos e argumentativos. Ele também facilita a inclusão dos alunos na dinâmica da classe.
Interação entre os discentes	Favorece-se o diálogo e a comunicação entre os alunos, promovendo a inclusão e evitando a exclusão.
Autonomia	Os alunos têm momentos de autonomia para explorar, formular e validar conhecimentos.
Avaliação formativa	Observação sistemática do progresso cognitivo dos alunos.
Adequação mediacional	
Recursos materiais (manipulativos, calculadoras, computadores)	Uso de materiais manipulativos e informáticos que permitem introduzir boas situações linguagens, procedimentos, argumentações adaptadas ao significado pretendido. As definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações e modelos concretos e visualizações.
Número de alunos, horário e condições da aula	A quantidade e disposição dos alunos permitem o ensino desejado e o horário das aulas é adequado.
Tempo (de ensino coletivo/tutoria, tempo de aprendizagem)	adequação do tempo disponível aos significados pretendidos/implementados e inversão do tempo nos conteúdos mais importantes ou que apresentam mais dificuldades.
Adequação afetiva	
Interesses e necessidades	Seleção de tarefas de interesse dos alunos.
	Proposição de situações que permitam avaliar a utilidade da matemática na vida cotidiana e profissional.
Atitudes	Promove a implicação e responsabilidade dos alunos, valorizando a argumentação em situações de igualdade.

Componentes	**Indicadores**
Emoções	Promoção da autoestima e ressalta as qualidades de estética e precisão da matemática, evitando a rejeição, fobia ou medo da disciplina.
Adequação ecológica	
Adaptação ao currículo	Os conteúdos, sua implementação e avaliação se correspondem com as diretrizes curriculares.
Conexões intra e interdisciplinares	Conteúdos matemáticos são relacionados entre si e com outras disciplinas, promovendo a conexão e aplicação da matemática em diferentes contextos.
Utilidade sócio-profissional	Os conteúdos são úteis para a inserção sócio-profissional.
Inovação didática	Inovação na prática educativa através de pesquisa e reflexão, introduzindo novos conteúdos, recursos tecnológicos e avaliações.

Fonte: Resumo a partir de Breda et al. (2018).

A adequação epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica são avaliadas por meio de um conjunto de indicadores, permitindo uma abordagem mais completa e precisa na análise de um material didático, proposta curricular, respostas de estudantes e outras situações do contexto educacional. (GODINO, 2013)

1.3 Tarefas matemáticas

O desenho e a análise de tarefas têm recebido destaque em nível internacional por sua importância no ensino eficaz de matemática (POCHULU; FONT; RODRIGUEZ, 2013). Isso ocorre porque a qualidade das tarefas que oferecemos aos alunos está diretamente relacionada ao que eles aprendem (GUSMÃO, 2016, p. 183). Além disso, o desenho de tarefas desafiadoras para os alunos pode promover o desenvolvimento da competência em análise didática dos professores (POCHULU; FONT; RODRIGUEZ, 2013, p. 4999). Por isso, é importante que os professores busquem um maior conhecimento sobre as tarefas (GUSMÃO, 2019, 2021) e planejem adequadamente sua aula com base no currículo e no conhecimento matemático pertinente, sem deixar de lado a exigência do rigor matemático (SERRAZINA, 2012).

Autores como Pochulu, Font e Rodriguez (2013) e Gusmão (2019) apresentam critérios que precisam ser levados em consideração no desenho e redesenho de tarefas, como a escolha de tarefas não rotineiras que permitam mais de uma resposta e não ofereçam sugestões de como resolvê-las, e que estejam em um contexto real e sejam desafiadoras. É importante que os alunos tenham oportunidades para resolver problemas matemáticos e não sejam apenas aplicadores de fórmulas. Os professores devem escolher tarefas que estejam de acordo com o aspecto de aprendizagem que querem destacar e que desenvolvam a compreensão dos conceitos, dos processos e que estimulem a capaCADade de resolução de problemas e de comunicação matemática (CONCEIÇÃO; FERNANDES, 2009, p. 193).

Além disso, autores como Stein et al. (2008) destacam a importância de considerar a complexidade cognitiva das tarefas, devendo estar alinhadas com os objetivos de aprendizagem e permitir aos alunos desenvolver as competências e habilidades previstas no currículo, para isso, é necessário que o professor tenha um bom conhecimento do currículo e dos padrões de aprendizagem esperados para cada série ou nível de ensino.

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) e Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) têm desenvolvido diretrizes e recomendações para o desenho de tarefas e atividades matemáticas que promovam o desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas dos alunos. Essas diretrizes incluem a utilização de contextos reais e significativos, a promoção da comunicação matemática entre os alunos e a utilização de tecnologia e outras ferramentas pedagógicas para a resolução de problemas. (MARTIN, 2016; NCTM, 2000)

Em resumo, saber desenhar tarefas deve ser considerado uma habilidade essencial para os professores de matemática, que deve ser desenvolvida de forma consciente e sistemática, levando em consideração as diretrizes e recomendações da área.

1.4 As medidas e o seu ensino

Apesar da importância do conteúdo medidas para o dia a dia, o seu ensino muitas vezes é deixado em segundo plano, tornando-se um tema difícil de trabalhar em sala de aula. A autora Chamorro (2003) destaca que a escola abandonou certas práticas, como o uso de instrumentos de medição, por considerar que o aluno poderia aprender de forma individual. No entanto, essa abordagem pode deixar os alunos sem a oportunidade de visualizar o impacto do conteúdo no cotidiano.

Além disso, as mudanças sociais e tecnológicas estão impedindo que os alunos tenham experiências de medição com instrumentos, o que pode dificultar o processo de aprendizagem. Por isso, a autora defende a urgência do retorno das práticas de medição em sala de aula, mesmo que isso exija um esforço didático por parte do professor. (CHAMORRO, 2003).

Nesse contexto, é fundamental que os professores de Matemática compreendam os erros sobre o conteúdo de medidas de comprimento e construam novas práticas de ensino que deem significado aos conceitos na sala de aula e permitam aos alunos visualizarem sua relação com outras áreas do conhecimento, como Ciências e Geografia. Assim, será possível melhorar o ensino desse tema e proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais significativa e prática.

2. Metodologia

2.1 Contexto e seus participantes

Utilizamos em nosso trabalho uma dinâmica de análise e reflexão de tarefas matemáticas em um contexto de formação de professores. Para isso, enveredamos pela pesquisa de abordagem qualitativa do tipo intervencionista a qual permite (des)construir práticas na sala de aula (AGUIAR; ROCHA, 1997).

A intervenção foi realizada com alguns dos participantes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didáticas de Ciências Experimentais e Matemática (GDICEM) que se interessaram em estudar o conteúdo de Medidas, sendo realizados cinco encontros presenciais e seis virtuais (via plataforma *on-line Google Meet*). Nos encontros foram analisados, estudados e avaliados protocolos de resposta de um teste de conhecimentos sobre Medidas. Os encontros presenciais foram gravados em áudios e os virtuais em áudios e vídeos.

Participaram 18 professores, cujos nomes são fictícios para resguardar a sua imagem:

Gilberto, Geovana, Vicente, Pedro, Cristina, além de Rosa são Licenciados em Matemática com experiência na docência que varia de 5 a 31 anos. Carmen, Marta, Madalena, Ivete, Ione e Moisés são Licenciados em Ciências com habilitação em Matemática, cujo tempo na docência varia entre 19 e 34 anos.

Roberto e Mariana são licenciados em Pedagogia com 18 e 8 anos, respectivamente, na docência. Joana, Mateus e Andréia são licenciados em Letras com 23, 8 e 26 anos de serviço, respectivamente. Porém, Andréia possui uma segunda graduação que é Licenciatura em Matemática e João é graduado em Física e Pedagogia.

Vale ressaltar que a pesquisa foi aprovada pelo Conselho de Ética em Pesquisa sob o número 26341519.7000.0055.

2.2 Ciclo de Estudo e Desenho de Tarefas

Para a produção dos dados da pesquisa, orientamo-nos pelo método do Ciclo de Estudo e Desenho de Tarefas (CEDT), proposto por Gusmão e Font (2021), que integra ferramentas dos Critérios de Adequação e do Desenho de Tarefas para alcançar melhorias na aprendizagem. Este método é composto por oito fases, as quais consideramos como um processo formativo: 1- diagnóstico; 2- estudo; 3-análise; 4-planejamento e seleção; 5-desenho/concepção; 6-

implementação; 7-avaliação; 8- redesenho, porém, não adentramos nas fases 4, 5 e 6. Podemos, então, resumir estas fases em três etapas: análise, estudo e reanálise.

Na etapa *Análise* tivemos 01 (um) encontro online pelo *Google Meet*, e 05 (cinco) presenciais e os professores analisaram os protocolos de resposta de um teste expondo suas opiniões sobre o conteúdo, se haviam erros, se modificariam algo etc., de acordo com suas vivências e conhecimentos, sem nenhum estudo prévio de teoria para direcionar as análises.

Na etapa de *Estudo* que foram 03 (três) encontros virtuais estudamos e discutimos trechos de textos sobre os critérios de adequação didática, desenho e redesenho de tarefas, documentos curriculares e tipos de conhecimento do professor. Como 05 (cinco) professores já conheciam os critérios de adequação e de desenho de tarefas, as discussões tornaram-se mais dinâmicas porque estes ajudaram os demais na compreensão do conteúdo.

Os conhecimentos adquiridos na etapa de estudo foram importantes para nossa terceira etapa que é a *Reanálise* onde os professores analisaram as tarefas novamente em 03 (três) encontros virtuais, mas baseando suas justificativas nas discussões da etapa de estudo avaliando as tarefas e, se possível, redesenhando, ou seja, nesta etapa os professores avaliaram e, em alguns casos, propuseram melhorias nos enunciados. Embora a avaliação tenha sido constante no processo, ela teve mais destaque na terceira etapa.

Neste artigo estamos levando em consideração a primeira e terceira etapa do ciclo formativo. Assim, nossa análise será feita tanto com os dados antes do estudo como após o estudo (análise e reanálise das tarefas), identificando quais critérios são manifestados quando ainda não se conhece a teoria e quais surgem ou são enfatizados após o conhecimento dos critérios de adequação didática.

2.3 Tarefas

As tarefas foram tomadas de um teste respondido por 09 professores de matemática e 36, em formação, que cursam os três últimos semestres da Licenciatura em Matemática, validado na pesquisa de Pinheiro (2019), depois replicado pela pesquisadora a 25 professores em formação que cursam o terceiro semestre da Licenciatura em Matemática.

Neste artigo trazemos três tarefas analisadas pelos professores (tarefas 02, 11 e 15). Estas foram escolhidas por serem abertas, fugirem do tradicional e impor ao solucionador uma ação interpretativa, investigativa e argumentativa.

As análises dessas tarefas antes da etapa de estudo, foram mais voltadas para descrição e explicação com pouca avaliação, ao contrário das análises ocorridas após o estudo. Por isso, escolhemos estas pelo novo olhar que os professores tiveram sobre elas percebendo o potencial que elas carregam, embora sejam, aparentemente, tarefas simples.

02- Júlia quer medir o diâmetro de uma bola. Que instrumento ela pode usar para determinar essa medida?
Comentário: Para encontrar o instrumento mais adequado para medir o comprimento de um objeto curvilíneo o solucionador precisa ter tido experiências com objetos variados para conseguir identificar o mais apropriado. O mais conveniente seria usar uma fita métrica ou uma régua tendo um barbante ou corda como intermediário neste processo de medição.
11- Marquinhos, morador do Arraial, mediu o comprimento da sua barra de grampos com uma régua quebrada.

Qual a medida do comprimento da barra de grampos?
Comentário: Nesta tarefa o solucionador além de demonstrar conhecimento no uso da régua ele também precisa diferenciar as unidades de medida centímetro e milímetro. Esta tarefa não especifica a unidade de medida que deve ser considerada, logo quem indicar a resposta 6,6 cm ou 66 mm chegou à resposta correta.
15- Dona Gertrudes plantou algumas mudas de flores: rosa, margarida e girassol, para colocar nos canteiros da nova praça. Observou que com o passar dos dias elas tinham, respectivamente, 1,05m; 155 mm; 125 cm de altura. Coloque essas medidas em ordem decrescente.
Comentário. O solucionador precisa conhecer as relações entre as unidades de medida, uma vez que a ordem solicitada não é em relação aos valores numéricos, mas às unidades de medidas. Baseado em seus conhecimentos, ele escolhe uma unidade de medida para ser referência, então, faz a conversão das outras unidades em relação à unidade escolhida. A resposta encontrada deve ser: 125 cm, 1,05 m, 155 mm.

Para analisar os dados, utilizaremos os CAD (componentes e indicadores) tomados tanto como ferramentas teóricas como metodológicas neste estudo.

3. Análises e Resultados

Os protocolos de respostas apresentados aos professores foram identificados por um código para preservar o nome do solucionador. Assim, Pf significa professor em formação e Pv professor veterano.

Para avaliar o nível de competência em análise alcançado pelos participantes durante as tarefas, foram utilizados trechos dos discursos oral e escrito (sinalizados no chat) durante a análise das mesmas. Para tornar as manifestações do desenvolvimento da competência em análise de tarefas mais visíveis, uma tabela foi apresentada para cada questão analisada, contendo fragmentos de falas dos participantes antes e após o ciclo de formação.

Durante o único encontro presencial realizado em 07/03/2020, os participantes analisaram a questão 02 nos 71 testes respondidos pelos professores em formação e pelos veteranos. Foi permitido aos participantes analisar uma quantidade livre de testes.

02- Júlia quer medir o diâmetro de uma bola. Que instrumento ela pode usar para determinar essa medida?

Fita métrica ou barbante

Fig.01-Resp. Pf22 (5ºsem.)

medida? utilizar uma corda, ou uma linha ao redor da bola e em seguida utilizar a Régua para determinar o comprimento dessa corda.

Fig.02- Resp. Pf49 (3ºsem.)

fita métrica, barbante, cipó,

Fig.03- Resp. Pv4

Antes do ciclo	**Depois do ciclo**
Adequação epistêmica	
Moisés: Acho que a pergunta limita. Acho que a pergunta poderia ser ... como você faria pra medir, daria uma margem, ampliariam mais.	Mateus: Pensando estritamente na questão, eu colocaria algum elemento imagético para que a criança tenha uma referência. Talvez o desenho de uma bola com aqueles pontilhados indicando o diâmetro. Algo assim. (*mensagem no chat*)
Adequação cognitiva	
Roberto: Mas aí a gente refaz pensando nas crianças, talvez elas não tenham esse conceito, essa ideia. Rosa: A etimologia da palavra é nova pra eles. Primeiro você tem que esmiuçar prefixo, sufixo e radical pra eles entenderem, até pra gente também.	Ivete: Talvez ainda tenha que fazer uma memória, vamos dizer assim do quê que é uma bola? A bola é uma esfera. O quê que é um círculo? O quê que é uma circunferência? Conceitos básicos pra (que) ele possa chegar àquilo que está sendo perguntado.
Adequação afetiva	
Geovana: Mas o branco não é o que não respondeu nada? [...] Ele tentou? Moisés: Tipo não consigo, não sei, tipo ele admitiu que não sabe. O branco também subtende que não sabe, embora não esteja explícito.	Roberto: Do jeito que ela tá eu entendo que ela permite um grau de desafio mais elevado do que se eu colocar algumas imagens, se eu der pistas demais pra o aluno, tem essa questão quanto mais pista eu dou mais eu acabo diminuindo o grau de desafio da tarefa.
Adequação interacional	
	João: Eu acho que o que vai ter maior alcance na faceta interacional, porque vai ser muito importante como esses meninos vão conversar, ou seja, pra mim particularmente, não é muito interessante resolver individualmente, eu acho que quanto mais for resolvido em grupos, principalmente, porque vai precisar de materiais, né?
Adequação mediacional	
Moisés: A trena é flexível também, não é? [...] agora sobre o compasso, eu não visualizo como o compasso satisfaz isso não. Dar pra medir não, dá? Na minha leiga visão de agorinha. O compasso não dá para medir, não.	Gilberto: Eu acho que o tempo no caso nessa questão ele é assim bem relativo, o tempo necessário pra usar. Que se usar direitinho a definição lá de diâmetro e tiver algo que possa medir a altura da bola, vai lá foi lá mediu a altura da bola pronto resolveu a questão. Ivete: Eu primeiro levaria a bola mesmo sabe, e de preferência até várias bolas de tamanhos diferentes. Carmen: Bola, barbante, uma trena.
Adequação ecológica	
Moisés: É pouco usual, é raríssimo usar decímetro, não conheço ninguém que usa decímetro.	Ivete: A questão do esporte principalmente.

Após uma análise *epistêmica*, percebemos que, antes da formação, os professores interpretaram que a pergunta exigia apenas um instrumento de medição, neste caso, a fita métrica. Depois da formação, houve uma mudança de perspectiva, com os participantes reconhecendo que o termo "qual" não implica singularidade, permitindo a indicação de mais de um instrumento. Alguns participantes sugeriram a inclusão de uma imagem para ajudar a compreensão visual da tarefa, especialmente se fosse destinada a crianças. No entanto, outros argumentaram que mudar o enunciado poderia reduzir a complexidade da tarefa.

No tocante à *adequação cognitiva*, antes do ciclo de formação, os participantes consideraram que os solucionadores da tarefa deveriam possuir conhecimentos prévios necessários para sua resolução, por serem adultos. Porém, caso a tarefa fosse direcionada às crianças, deveriam adaptá-la ao nível cognitivo e idade dos alunos, incluindo a linguagem apropriada. Durante o ciclo, foi sugerido por Rosa antes e por Ivete depois que, se necessário, uma retrospectiva de conceitos poderia ser feita para ampliar os conhecimentos dos alunos. A importância de conhecer o nível cognitivo dos alunos para direcionar o planejamento do professor ficou evidente tanto antes como após o ciclo de formação.

Em relação à *adequação afetiva*, as discussões foram em torno do componente *Interesses e necessidades.* Antes do ciclo, mencionaram que a resposta em branco pode surgir por falta de conhecimento do conteúdo, esquecimento de alguma definição/propriedade, medo de errar e que a desistência de responder é indicativo da emoção surgida no momento em que o solucionador se depara com a tarefa (mencionado por Cristina). Mas também consideraram que as respostas em branco nem sempre significam falta de tentativas de resolução, sugerindo separar a categoria de resposta *em branco* da categoria *Não consegue responder*. Após o ciclo, foi observado que ao inserir uma imagem, conforme mencionado no critério epistêmico, poderia diminuir o gosto para responder a tarefa, ou seja, o acréscimo na linguagem poderá interferir nas emoções.

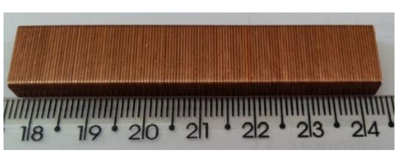
A *adequação interacional* foi evidenciada apenas depois do ciclo, com o componente *interação entre discentes*, a qual foi destacada pela possibilidade de discutir os conceitos envolvidos com ajuda de recursos materiais, que proporcionarão trocas de experiências. Também foi evidenciado o *componente interação entre discente e docente*, por meio do diálogo, mesmo não havendo em sala os recursos materiais.

No tocante à *adequação mediacional*, a dúvida, antes do ciclo, era sobre a possibilidade de se usar determinados instrumentos na medição de objetos curvilíneos. Um questionamento foi acerca da flexibilidade da trena que foi colocada na categoria de instrumento rígido. Colocamos nessa categoria por considerá-la um instrumento não tão flexível como a fita métrica ou um barbante, por exemplo.

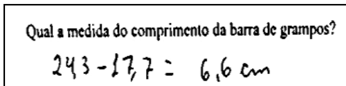
Durante as discussões, surgiu a dúvida sobre o uso de diferentes instrumentos de medição, como a trena e o compasso, para medir o diâmetro. No entanto, essa dúvida foi esclarecida com a compreensão da importância de escolher o instrumento mais apropriado para a medição, conforme preconizado pela BNCC (2018). A falta de familiaridade com os instrumentos pode gerar limitações e escolhas inadequadas (LIMA; BELLEMAIN, 2010, (CHAMORRO; BELMONTE, 2000). Após o ciclo, não foi mencionado o uso dos instrumentos, mas sim a relação entre a tarefa e o tempo de resolução, mostrando que o tempo é um componente essencial para determinar a aprendizagem (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006).

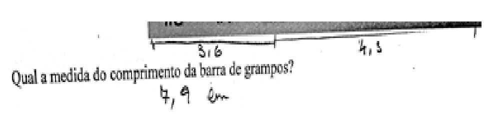
Em relação ao *critério ecológico*, antes do ciclo, as discussões foram em torno das unidades de medida metro e centímetro, contudo, apesar de o decímetro ser uma unidade para ser trabalhada, não foi considerada uma boa unidade para esta tarefa, conforme fala de Moisés. Em conformidade com Ponte e Serrazina (2000), somente trabalhando com unidades que o aluno vai perceber qual unidade é a mais adequada, com isso, vai excluir a ideia de que objetos grandes só poderão ser medidos com unidades grandes ainda que não sejam procedimentos habituais. Após o ciclo foi mencionada a aplicabilidade da medida de comprimento.

11- Marquinhos, morador do Arraial, mediu o comprimento da sua barra de grampos com uma régua quebrada.



Qual a medida do comprimento da barra de grampos?





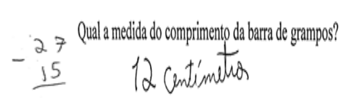


Fig.04-Resp. Pf20 (8ºsem.) Fig.05- Resp. Pf25 (5ºsem.) Fig.06- Resp. Pf24 (5ºsem.)

Antes do ciclo	Depois do ciclo
Adequação epistêmica	

Vicente: Poderia, por exemplo, pegar essa parte aí decimal, contar quantos tem, depois somar com a parte inteira e depois pegar a outra parte decimal do outro lado.	Ivete: [...] a régua tem um pedaçinho antes do zero, e muitas vezes o aluno coloca não do traçinho que começa o zero, é no início da régua [...]. Já começa em 18, já tem alguma coisa diferente aí, ou é antes um pouquinho do 18, então assim já quebra o padrão daí isso aí eu achei legal mesmo sabe, porque aí você tem que observar mais detalhes por que não começa do 0.
Adequação cognitiva	
	Gilberto: Vai precisar fazer operações né? ele precisaria do aspecto cognitivo, pra não se confundir com as unidades de medidas também aí na hora de fazer as contas.
Adequação afetiva	
	Moisés: Creio que esta questão está interessante para o aluno, portanto pode despertar prazer em resolver. Logo, a afetividade está presente (mensagem no chat).
Adequação interacional	
Carmen: Oh Moisés e esse é um comentário que os alunos provavelmente fariam né? Por que ele começou assim já quebrado em vez de colocar o número certinho? O aluno do básico, com certeza faria esse questionamento.	Andréia: Isso aqui é um desafio muito grande pro aluno, porque você pode representar de dois jeitos e pedi-los que eles encontrem a medida do objeto.
Adequação mediacional	
	Andreia: Uso da régua na sala de aula
Adequação ecológica	
	Andreia: Aqui ele fala que a régua tá quebrada, olha que coisa interessante, porque às vezes o único recurso que você tem para medir é um objeto que esteja assim, quê que a gente deve fazer? O que a gente deve observar?

Essa tarefa foi mais simples de discutir, pois não houve termo no enunciado que pudesse gerar dúvida na resolução. Na *adequação epistêmica*, as análises antes do ciclo se restringiram mais à descrição do procedimento matemático para resolvê-la, de modo que se destacou a necessidade de se conhecer as unidades de medidas, pois este conhecimento pode impactar na resolução. Após o ciclo, a observação foi em relação ao processo a ser realizado com atenção necessária para o fato de a medição não se iniciar no ponto 0.

A *adequação cognitiva* apenas foi evidenciada depois do ciclo e no componente *Conhecimentos prévios,* sendo Gilberto o que mais destacou este componente. Ademais, neste tipo de tarefa pode ocorrer confusão na contagem e no manuseio do instrumento. Conforme salienta Chamorro (2003), as pessoas geralmente usam de maneira errada os instrumentos de medida e encontram dificuldades nos cálculos sem que a escola faça algo para mudar a situação. Ainda de acordo com a autora, muitos conhecimentos de medição deixaram de ser ensinados por considerar que eles poderiam ser aprendidos de forma particular, como é o caso dos procedimentos para medir.

A *adequação afetiva* foi evidenciada apenas depois do ciclo, sendo mencionado o impacto que este tipo de tarefa pode trazer como motivação para resolver outras com nível cognitivo mais elevado. Ela não demanda um conhecimento muito avançado e isso pode favorecer o componente *Interesses e necessidades.* Em relação a esta motivação, Godino (2004) afirma que uma característica importante no ato de medir é a satisfação do aluno quando ele consegue realizar uma medição, por isso, o professor deve gerir as interações na aula, valorizar a participação e evitar qualquer aversão diante do conteúdo.

A *adequação interacional* foi evidenciada antes do ciclo, por exemplo, na fala de Carmem quando prevê um conflito na realização da tarefa e a necessidade do diálogo entre professor e aluno sobre qual ponto da régua pode iniciar uma medição. Após o ciclo, a *interação entre discentes* e entre *discente e docente* foram mantidas na fala dos professores.

Embora esta tarefa requeira o uso de instrumentos de medida como *recurso material*, componente da *adequação mediacional,* estes não foram enfatizados, apenas mencionados de maneira breve após o ciclo, pois o destaque na tarefa foi para os procedimentos de como resolvê-la.

Os professores enfatizaram, após o ciclo, a importância da adaptação socio profissional e cultural da *adequação ecológica* na formação dos alunos. Eles mencionaram que o estudo da medida na escola deve ser útil para a vida cotidiana, fornecendo habilidades para lidar com situações imprevistas, incluindo a medição com instrumentos quebrados. No entanto, muitas pessoas não compreendem a importância da medida e delegam essa tarefa para especialistas em áreas como engenharia, ciência e construção (GODINO, 2004). Para ajudar as pessoas a entender a importância da medida no desenvolvimento científico-tecnológico, é necessário relacionar o estudo da matemática com as ciências e a sociedade.

15- Dona Gertrudes plantou algumas mudas de flores: rosa, margarida e girassol, para colocar nos canteiros da nova praça. Observou que com o passar dos dias elas tinham, respectivamente, 1,05m; 155 mm; 125 cm de altura. Coloque essas medidas em ordem decrescente.

Fig.07-Resp. Pf3 (6ºsem.) **Fig.08**- Resp. Pf20 (8ºsem.) **Fig.09**- Resp. Pf35 (3ºsem.)	
125 Cm ; 1,05 m ; 155 mm 155 mm; 1,05 m; 125 cm. 1,05 m ; 125 cm ; 155 mm.	
Antes do ciclo	**Depois do ciclo**
Adequação epistêmica	
Vicente: Acho que eles pensaram aí oh, que esse 155 mm, seria 155 m² né?ou	Andréia: Quando o tamanho tá representado por medidas diferentes igual metro, milímetro e centímetro, então eles têm

então 2m. Observe que ele coloca o centímetro primeiro depois o metro depois o milímetro, então certamente, ele imaginou que milímetro vale mais do que um metro só. [...] Rosa: Não tem confusão, é medida né? Então ele tem realmente que fazer a conversão.	que fazer a transformação, então mexe com muito conhecimento matemático aqui.
Adequação cognitiva	
Vicente: [...] além deles saberem quais são os números maiores eles têm que saber isso em relação à unidade, que vai influenciar não só o valor numérico, mas a representação da unidade.	Gilberto: Ele tem que olhar pra questão e assim de imediato perceber que vai ter que ter mais compreensão do que tá fazendo e deixar em uma unidade só né? que estão em unidades diferentes, então ele tem que tá atento a isso, tem que olhar e perceber essa questão.
Adequação afetiva	
Roberto: A questão em si ela é interessante pra fazer a comparação, pela questão de transformação também dessas medidas.	Cristina: Se ele não compreende bem o conteúdo ele vai sentir dificuldade e isso vai gerar alguma emoção ou positiva ou negativa, uma motivação pra entender a questão e resolver. Ou então, um certo como é que se diz, ele vai tentar desistir ou ele vai falar que não sabe né? ou então ele vai motivar só que ela é bem mais desafiadora do que a outra (tarefa 11).
Adequação interacional	
	Cristina: Teria que ter assim, 'comente com seu colega', eu acho que ficaria mais forte pra puxar um pouquinho o gancho pra o interacional pra ter uma interação não só do professor e do aluno, mas também a interação do aluno com o aluno.
Adequação mediacional	
	Cristina: O mediacional ficaria bem interessante assim em sala de aula, se o professor levasse as plantinhas né, pra fazer isso na prática, então seria bem interessante essa parte do manuseio mesmo do material físico, isso chama muito a atenção, tirar um pouco da abstração matemática né? pra séries iniciais.
Adequação ecológica	
Vicente: Já coloquei esse tipo de questão, já no ensino médio, agora não usava medidas, eu usava vários números misturados, racionais, inteiros, naturais, pra eles tentarem entender qual é o maior número. E é bem interessante essa questão sua por que você já trabalha com a medida	Andréia: Dá pra trabalhar a questão da Interdisciplinaridade, o desenvolvimento das plantas, você vê que cada planta, elas foram mudas plantadas num jardim e elas tiveram tamanhos diferentes. Cristina: Se fosse adaptada, por exemplo, colocar um aluno que vem de uma região assim mais, mais desprovida de bens econômicos ou de uma condição inferior, de um aluno que tem uma condição econômica mais elevada, e for fazer um comparativo de crescimento da criança mediante a alimentação, também poderia explorar um pouco a questão sócio cultural né?

Ao analisarmos a *adequação epistêmica*, observamos que Vicente mencionou um possível *erro* do solucionador, como se este tivesse utilizado a ordem em relação à unidade de medida. Entretanto, o próprio Vicente cometeu o equívoco de não considerar as medidas dadas inicialmente, apenas as unidades. Caso o solucionador não tivesse certeza da ordem, uma possível solução seria escolher uma das unidades, converter as outras medidas em relação a essa unidade escolhida e, em seguida, fazer a comparação. Rosa entrou no debate e enfatizou que a resposta é em relação à medida, e que, por isso, era necessário fazer a conversão de unidades para se ter certeza da ordem decrescente. Tal fato também foi mencionado por Andréia.

Para entender as relações entre unidades, é importante trabalhar tanto com atividades aritméticas quanto geométricas. No entanto, é importante destacar que trabalhar com o sistema métrico decimal sem antes abordar a conversão de unidades não convencionais pode dificultar a compreensão de suas regularidades (CHAMORRO, 2003).

A *adequação cognitiva* foi considerada tanto antes como depois do ciclo, com destaque para o componente de *conhecimentos prévios*. Moisés destacou a importância do conhecimento da relação entre unidades de medida, enquanto Gilberto enfatizou que a falta desse conhecimento pode dificultar a resolução da tarefa. Em relação à ordenação dos objetos, Lima e Bellemain (2010) nos lembram que ela é realizada comparando dois a dois para mais objetos, considerando uma grandeza nos objetos de tal modo que se forme uma sequência em relação à grandeza escolhida.

A adequação afetiva teve seu componente *Interesses e necessidades* destacado antes e depois do ciclo, pois esta tarefa não é tão simples como as anteriores, porém, isso não necessariamente será um obstáculo, ao contrário, pode ser um ponto de partida para cativar mais os alunos pelo nível de desafio que ela possui.

O *critério interacional* foi destacado apenas após o ciclo com os componentes *interação entre discentes* e *interação entre discente e docente* com possibilidade de discutir os conceitos envolvidos com ajuda dos recursos materiais. Essa interação entre alunos, mencionada pelos professores, vai permitir "que o aluno fale sobre suas descobertas, mostre o seu trabalho e entenda algum conceito através da explicação, da leitura ou observação do trabalho de outro colega da classe" e, em grupo, ainda pode desenvolver o raciocínio, argumentação e a investigação (CÂNDIDO, 2001, p. 27).

Para preparar as atividades da sala de aula, é importante considerar as interações entre alunos e professor, bem como os métodos de avaliação (GODINO; BATANERO; ROA, 2002). É fundamental que o professor esteja capacitado para lidar com conflitos de significado e dificuldades que podem surgir dessas interações, para que possa desenvolver sua competência na comunicação do conteúdo e realizar avaliações formativas dos alunos (GODINO et al., 2013).

Em relação ao critério *mediacional*, o componente *Recursos materiais* foi bem discutido depois do ciclo, ainda que antes não tenha sido mencionado. Debateram que colocar imagens ou material didático na tarefa pode diminuir o nível de exigência cognitiva, retirar a abstração e facilitar demais a resolução, tirando o entusiasmo do aluno e diminuindo o grau de adequação do critério afetivo. De modo geral, as discussões geraram entorno de os recursos materiais favorecer ou prejudicar a aprendizagem, ressaltada pela comunidade educativa. Nesse contexto, vale ressaltar a fala de Gusmão (2016; 2019) de que um dos critérios no desenho de tarefas é ser desafiante, mas não em excesso.

Dependendo do nível do aluno, a ordenação seria facilitada requerendo uma adaptação na questão, como foi o caso desta que além do trabalho com percepção, apresenta também cálculo matemático. Por isso, os professores devem ser levados a conhecerem as potencialidades e limitações dos recursos manipulativos e informativos na aprendizagem de determinado conteúdo, desenvolver competências para gerir o tempo e a integração das tecnologias e recursos manipulativos (GODINO et al., 2013).

Nesta tarefa foi destaque a *Inovação didática*, componente do *critério ecológico*, pois o comum é ordenar os números adimensionais e não medidas de comprimento, conforme professor Vicente destacou, antes do ciclo, como experiência própria. Depois do ciclo, foi mencionada a utilização da tarefa, contextualizando-a com a realidade do aluno, de modo a trabalhar também as desigualdades sociais e outras áreas do conhecimento, o que condiz com o que solicita a BNCC (2018), ao indicar o uso do bloco de conteúdos Medidas e Grandezas como fundamental para compreender a realidade. Realçamos que o conhecimento do currículo, do entorno do ensino, deve fazer parte da formação do professor, o qual deve ainda desenvolver a competência para selecionar e desenhar práticas que que reflitam na inovação baseada na investigação (GODINO et al., 2013).

4. Conclusões

Este estudo, buscou analisar o desenvolvimento de competências no professor da Educação Básica para análise de tarefas matemáticas antes e após um ciclo formativo, utilizando o método Ciclo de Estudos e Desenho de Tarefas (CEDT). A análise dos dados à luz do referencial nos permite apontar que a partir da formação realizada professores passaram a perceber e discutir critérios antes não percebidos, conforme Quadro 3.

Quadro 3- Resumo dos critérios manifestados

TAREFAS	CRITÉRIOS / ANTES DO ESTUDO	CRITÉRIOS/ APÓS ESTUDO
02	Epistêmico, Cognitivo, Afetivo, Mediacional e Ecológico	Epistêmico, Cognitivo, Afetivo Interacional, Mediacional, Ecológico
11	Epistêmico, Interacional e Ecológico	Epistêmico, Cognitivo, Afetivo Interacional, Mediacional, Ecológico
15	Epistêmico, Cognitivo, Afetivo e Ecológico	Epistêmico, Cognitivo, Afetivo Interacional, Mediacional, Ecológico

Fonte: Elaboração nossa

Diante dos critérios constatados, implícitos e explicitamente, também foi possível perceber a partir da formação realizada que houve avanços no nível de competência dos professores em análise de tarefas matemáticas, conforme Quadro 4.

Quadro 4- Avanço do nível de competência em análise

NÍVEL 1	NÍVEL 2
1-Os professores analisam as tarefas identificando fatores como conceitos, procedimentos, representações, contextualização etc. 2-Os professores levam em consideração o nível cognitivo dos alunos, identificando os conhecimentos prévios necessários para inserção do conteúdo. 3-Os professores pouco levam em conta o uso de recursos materiais para melhoria da aprendizagem e o tempo destinado a aplicação da tarefa. 4-Os professores descrevem superficialmente possíveis interações que podem ocasionar em sala de aula devido ao conteúdo. 5-Os professores reconhecem a importância do conteúdo medidas de comprimento ao valorizar as tarefas com aplicação em situações cotidianas. 6-Os professores percebem a inovação no tipo de tarefa proposta uma vez que as tarefas fogem do padrão das que são comumente apresentadas.	1-Se faz uma reflexão mais detalhada das tarefas usando os critérios de adequação didática de modo a vigorar o equilíbrio entre eles. 2-Os professores refletem sobre a necessidade de se aplicar tarefas com intuito de ampliar ou retroagir no conteúdo de acordo o nível de conhecimento dos alunos. 3-Os professores refletem sobre um ambiente de aprendizagem com uso de recursos materiais para ampliar ou reforçar os conhecimentos dos alunos ainda que o tempo não seja um fator refletido intensamente. 4-Os professores analisam cuidadosamente as possíveis interações que podem ocorrer em sala de aula entre discentes e entre docente e discente prevalecendo o diálogo em sala de aula. 5-Os professores refletem a aplicação do conteúdo em outras áreas do conhecimento como possibilidade de facilitar o desejo em estudar o conteúdo mediadas de comprimento. 6-Os professores discutem, argumentam e propõe melhorias nas tarefas com base nos diálogos gerados sem desconsiderar a inovação didática nem o currículo matemático.

Fonte: Elaboração nossa

Os professores estavam no nível de desenvolvimento 1, pois não contemplaram, ainda que implicitamente, todas as facetas do conhecimento didático-matemático do professor, porém, percebemos os avanços do nível 1 ao nível 2. Se antes as análises se restringiam a uma descrição da resolução e, em algumas ocasiões, uma breve explicação, após a inserção dos CAD as análises tiveram mais um caráter explicativo e avaliativo numa tentativa de equilibrar as facetas do conhecimento didático-matemático.

Alguns critérios tiveram sua importância elevada em intensas discussões como, por exemplo, o critério epistêmico que apareceu antes e após o estudo nas três tarefas; o critério afetivo, quando professores conseguem relacionar sentimento e conhecimentos dos alunos diante do conteúdo matemático; o critério cognitivo quando da percepção da diferença entre o que foi solicitado e o que foi respondido, da maneira como os solucionadores interpretam a tarefa e quando conseguiram prever e explicar os erros.

Os participantes destacaram a importância de conhecer tanto o conteúdo a ser ensinado quanto os recursos necessários para aprimorar o ensino. Isso inclui entender o currículo e as demandas externas que influenciam a prática do professor. Durante as discussões, os professores demonstraram conhecimento das medidas de comprimento, justificaram seus argumentos e compreenderam as estratégias dos solucionadores. Além disso, eles desenvolveram o pensamento crítico ao discutir as limitações e superações deles próprios e de seus alunos, e reconheceram a importância de conhecer o nível educativo que contempla o conteúdo matemático, bem como sua relação com outros currículos e temas sociais e políticos.

Da análise, percebemos que os professores têm conhecimentos implícito ou explicito de critérios para análise de tarefas matemáticas e para propor melhorias nas mesmas. A vasta experiência dos professores pode ser um fator que ajudaria a explicar a avaliação que eles fizeram das tarefas antes de conhecer os CAD, pois as formações ao longo da vida profissional vão indicando o que considerar como adequado no ensino de matemática. Nesse contexto, as avaliações positivas são provenientes do consenso da comunidade científica sobre como deve ser o ensino de matemática ou de experiências profissionais (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017; RAMOS; FONT, 2008).

Pensamos que professores desenvolveram competências para análise de tarefas à medida que avançaram nos níveis de análises, incorporando elementos da formação durante os seus discursos. Inicialmente, os professores se preocuparam em adequar a linguagem, estabelecer relação entre os objetos matemáticos e as possíveis dificuldades conceituais que os alunos poderiam apresentar. Após a formação, passaram a enxergar pontos favoráveis e desfavoráveis no uso de recursos materiais, refletir sobre a dinâmica da sala de aula, da participação do aluno da gestão do professor.

Passaram ainda a ter maior apreço por tarefas contextualizadas com diferentes modos de expressão, atentaram-se para os conhecimentos prévios e com possibilidades de aplicação de tarefas de reforço ou ampliação dos conhecimentos, consideraram fazer revisões de conteúdos antes de entrarem em determinada pauta, sugeriram modificações nos enunciados de tarefas, atentando-se ao nível cognitivo de seus respectivos alunos.

Os professores avançaram no sentido de superação das dificuldades, dos métodos de ensino e na forma como concebem a elaboração de tarefas com destaque para a necessidade de se estudar os documentos curriculares e analisar as individualidades dos alunos. Assim, a nova forma de analisar e avaliar o conteúdo por meio das tarefas trouxe novas interpretações ao processo de ensino.

Os avanços obtidos no nível de conhecimento dos professores desta pesquisa demonstram a validade de um ciclo formativo tendo os CAD como ferramentas de análise das tarefas. As discussões geradas mostram ainda a importância de se ter momentos de discussões em grupo a partir de estudo, análise e avaliação de tarefas em que a opinião do outro é validada ou refutada, permitindo com isso aprendizagens e dando lugar ao desenvolvimento de competências.

Consideramos os resultados condizentes com o estudo, uma vez que se espera que os CAD ajudem os professores na reflexão de sua prática e de outras, analisando os pós e contra de determinado processo e a possibilidade de melhorias para futuras implementações.

Em suma, este artigo contribui para a discussão sobre a importância da análise de tarefas no desenvolvimento de competências didático-matemáticas no professor da Educação Básica. Além disso, destaca a relevância da adequação didática como uma ferramenta fundamental para a análise didática, apresenta o método CEDT como uma estratégia formativa para aprimorar a competência em análise de tarefas matemáticas e a análise de tarefas matemáticas como um caminho para aprimorar a prática de ensino e promover a formação de professores mais capacitados.

Agradecimentos

Este artigo está vinculado aos projetos de pesquisas: A perspectiva do desenho de tarefas para o desenvolvimento de competências no professor de Matemática em análise e intervenção didática de processos de ensino (CNPq/2020); A perspectiva do desenho de tarefas para o desenvolvimento de competências no futuro professor de Matemática para analisar processos de ensino e intervir didaticamente sobre os mesmos (UESB/2022); *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas para una educación inclusiva: Prácticas/enseñanza/formación para desarrollar/favorecer el dominio afectivo* (CCDMEI-PDA. PID2021-122326OB-I00, *Plan Estatal de Investigación Científica, Técnica y de Innovación*, 2021-2023, Espanha). Aos órgãos de financiamento, nosso agradecimento.

Referências

AGUIAR, K. F.; ROCHA, M. L. Práticas Universitárias e a Formação Sócio-política. **Anuário do Laboratório de Subjetividade e Política**, 1997. Disponível em: https://www.acheronta.org/acheronta11/socio-politica.htm. Acesso em: 14 jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC), Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 07 jun.2019.

BREDA, A. et al. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. **Transformación,** Camagüey, v.14, n.2, p. 162-176, maio/ago. 2018. Disponível em: http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S2077-29552018000200003&script=sci_arttext&tlng=en. Acesso em: 10 jan. 2020.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidad didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v.8, n.2, p.01-41, jul., 2015. DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2015v8n2p%25p

BREDA, A.; PINO-FAN, L.R.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,** London, v. 13, n.6, p.1893-1918, 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

CÂNDIDO, P.T. Comunicação em matemática. In K.S. Smole, & M. I. Diniz (Orgs.*).* **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001. Cap. 01. p.15-28.

CASTRO, W.; PINO-FAN, L.; FONT, V. El conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la derivada de profesores colombianos activos. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 28, p. 1590-1597, jul. 2015. Disponível em: https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2028.pdf. Acesso em: 18 jun. 2021.

CHAMORRO, C.; BELMONTE, J. M. **El Problema de La Medida** - Didactica de las Magnitudes Lineales. Madrid: Ed. Sintesis, 2000.

CHAMORRO, M. C. (org). **Didactica de las Matemáticas para Primaria**. Madrid: Ed. Pearson Educación, 2003. (Colección Didáctica Primaria).

CONCEIÇÃO, M. A.; FERNANDES, J. A. Implementação de tarefas matemáticas na sala de aula por uma futura professora. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais do Seminário de Investigação em Educação**

Matemática. [S.l], p.190-201, 2009. Disponível em: https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/10340. Acesso em: 21 jun. 2021.

FONT, V. Competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. Un modelo basado en el enfoque ontosemiótico. **Revista Acta Latino-americana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 31, n. 1, p. 749-756, fev. 2018. Disponível em: https://clame.org.mx/documentos/alme31_1.pdf.Acesso em: 18 jun. 2021.

FONT, V.; BREDA, A.; SALA, G. Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. **Praxis Educacional**, Vitória da Conquista, v.11, n.19, p.17-34, mai/ago. 2015. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/818. Acesso em: 16 jun. 2021

GODINO et al. Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas Developing mathematics teachers' competences for didactical analysis. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Floriánopolis, 2012. v.7, n. 2, p.1-21. DOI: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1

GODINO, J. et al. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianóplis, v.8, n.1, p. 46-74, 2013. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

GODINO, J. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Costa Rica, v.8, n.11, p. 111-132, 2013. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html. Acesso em: 24 jun. 2021.

GODINO, J. **Matemáticas para maestros**: manual para estudiantes. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, 2004. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm. Acesso em: 06 agos. 2021.

GODINO, J. CONTRERAS, A; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 26, n. 01, p.39-88, 2006. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf. Acesso em: 18 maio 2021

GODINO, J. Enfoque Ontossemiótico de los Conocimientos y competências del Professor de Matemáticas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.31, n.57, p. 90-113, abr. 2017. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

GODINO, J.; BATANERO, C.; ROA, R. **Medida y su didáctica para maestros**. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, 2002. Disponível em: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm. Acesso em: 15 abr. 2021.

GUSMÃO, T. C. R. S. Desenho de tarefas para o desenvolvimento da cognição e metacognição matemática. In: NEVES. A.S. et al. (org.). **Contribuições da didática da matemática para a prática dos professores**. Salvador: EDUFBA, 2016, p.183-193.

GUSMÃO, T.C.R.S. Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA. **Anais Encontro Baiano de Educação em Matemática,** 2019. Disponível em: https://casilhero.com.br/ebem/mini/uploads/periodico/files/2019/PA2.pdf. Acesso em 15 jun. 2020.

GUSMÃO, T. C. R. S.; FONT, V. Ciclo de estudo e desenho de tarefas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo (SP), v. 22, n.3, p. 666-697, 2021. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p666-697

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e medidas. In*:* J. B. P. F. Carvalho (Coord.), **Matemática: Ensino Fundamental,** Brasília: Ministério da Educação, 2010. Cap. 8, p.167-200. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 17 jan. 2021.

MARTIN, M. O.; MULLIS, I. V. S.; FOY, P.; STANCO, G. M. **TIMSS 2015 International Results in Mathematics**. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2016.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 2000.

PEREIRA. L. S. A. **A gestão de tarefas matemáticas por professoras dos anos iniciais do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2019. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/ppgen/wp-content/uploads/2019/09/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Lindomar-Fomatada.pdf. Acesso em: 14 jan. 2021.

PINHEIRO, A. S. **O conhecimento matemático de professores sobre medidas e grandezas**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, Bahia, 2019. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/ppgen/wp-content/uploads/2019/07/AdrianaPinheiro-TrabalhoFinal.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

POCHULU, M.; FONT, V.; RODRIGUEZ, M. Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores. In*:* VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. **Actas del VII CIBEM**. Montevideo: Uruguai, 2013. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/19108/1/Pochulu2013Criterios.pdf. Acesso em: 10 jul. 2021.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1825101/mod_resource/content/2/PONTE%2C%20J.%3B%20SERRAZINA%2C%20M.%20de%20L.%20Did%C3%A1ctica%20da%20Matem%C3%A1tica%20do%201%C2%BA%20Ciclo%20%28cap.%208%29.pdf .Acesso em: 13 jun. 2021.

RAMOS, A. B.; FONT, V. Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de Mexico, v.11, n.2, p. 233-265, maio. 2008. Disponível em http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200004. Acesso em: 10 ago. 2021.

RODRIGUES, G. S. S. **Desenho de tarefas matemáticas na perspectiva da criatividade:** um estudo com professores. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2019. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/ppgen/wp-content/uploads/2020/02/DISSERTACAO-GICELIA-24-01-2020-1.pdf. Acesso em: 14 jan. 2021.

SANTOS, J. L. **A gestão do planejamento de tarefas matemáticas sob o olhar do coordenador pedagógico.** Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2022. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/ppgecfp/wp-content/uploads/2022/04/1-Disserta%C3%A7%C3%A3o-vers%C3%A3o-final.pdf. Acesso em: 10 dez. 2022.

SANTOS, J. L.; GUSMÃO, T. C. R. S.; BREDA, A. Criterios implícitos utilizados por coordinadores pedagógicos cuando reflexionan sobre procesos de planificación de tareas matemáticas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, Sergipe, v. 12, n. 2, p. 55-70, jul. de 2022. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1362. Acesso em: 12 abr. 2023.

SECKEL, M. J.; FONT, V. Efectos del uso del portafolio para desarrollar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 30, p. 1236-1244, ago. 2017. Disponível em: https://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf. Acesso em: 20 jun. 2021.

SERRAZINA, M. L. M. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista de Educação**, [S.l], v.6, n.1, p. 266-283, maio 2012. DOI: https://doi.org/10.14244/19827199355

SOUSA, J. R. **(Re)desenho de tarefas para articular os conhecimentos intra e extramatemáticos do professor**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2018. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/ppgecfp/wp-content/uploads/2019/10/SOUSA-Jorge-Ramos-de.-Mest.-Educ.-UESB_2018.pdf. Acesso em: 18 jan. 2021.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSEN, M. A.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.** Teachers College Press, 2008.

ZABALA, J.M.G. **El desarrollo de la competencia matemática**. Barcelona: Ed. Graó, 2008.

Autores

Magna Mendes Nunes

Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Mestre em Ensino, UESB

Prefeitura de Vitória da Conquista

GDICEM, Metodologia e Didática no Ensino e Aprendizagem das Ciências Naturais e na Educação Matemática

magnamendesn@hotmail.com

https://orCAD.org/0009-0000-1061-2279

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão
Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia UESB
Mestre em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista - UNESP
Doutora em Didática da Matemática, Universidade de Santiago de Compostela - USC
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia -UESB
GDICEM, Metodologia e Didática no Ensino e Aprendizagem das Ciências Naturais e na Educação Matemática
Bolsista produtividade em pesquisa pelo CNPq, PQ-2
professorataniagusmão@gmail.com
https://orCAD.org/0000-0001-6253-0435

Teresa Fernández Blanco
Licenciatura em Matemática, Universidade de Santiago de Compostela – USC
Máster em Professorado de Ciências Experimentais e Matemáticas - USC
Doutora em Didática da Matemática - USC
Universidade de Santiago de Compostela – USC
GIDEM-TESELA, Grupo de Inovação docente em Educação Matemática, Linha Aprendizagem e Ensino de Matemática na Educação Inclusiva e nas Áreas STEAM
teref.blanco@usc.es
https://orCAD.org/0000-0003-4215-8677

Liliane dos Santos Gutierre
Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Mestre em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Doutora em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
liliane.gutierre@ufrn.br
https://orcid.org/0000-0001-6124-7769

NUNES, M. M.; GUSMÃO, T. C. R. S. A.; FERNÁNDEZ, T. B.; GUTIERRE, L. S. competência do professor em análise de tarefas matemáticas sobre medida de comprimento. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 453 – 480 DOI https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p453-480.id1400

Investigação da Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático no contexto do Programa Residência Pedagógica: um olhar para as interações entre Preceptor e Residentes

Alexsandra Braga Horta
alexsandra.horta@aluno.ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3893-877X
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Peçanha, Brasil.

José Fernandes da Silva
jose.fs@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5798-5379
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Guanhães, Brasil.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumo

O objetivo central da investigação relatada neste artigo foi investigar a incidência da Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático a partir do vínculo entre Preceptor e Residentes, no âmbito de um Subprojeto de Matemática do Programa Residência Pedagógica (PRP). Para tal, a investigação é qualitativa utilizando como instrumentos de coleta de dados, observações, questionários e entrevistas. Para compreender as interações que se estabelecem entre Preceptores e Residentes, optou-se pela análise de dados pautada em cinco categorias constituídas a priori: Comunicação; Resolução de Conflitos; Consensos; Engajamento e Inclusão. O aporte teórico foi alicerçado na perspectiva do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) advindo do contexto da Abordagem Ontossemiótica. Observou-se que as proposições da Faceta Interacional se apresentam na conjuntura das ações que estabelecem vínculos entre Preceptor e Residentes por conferir que são constituídos conhecimentos pertinentes à docência a partir das interações entre os participantes. Assim, o PRP torna-se uma política pública importante para a formação do futuro professor, pois fomenta a formação inicial do licenciando a partir da vivência da realidade da profissão.

Palavras-chave: Faceta Interacional, Conhecimento Didático-Matemático, Programa Residência Pedagógica, Formação Docente.

Investigación de la Faceta Interaccional del Conocimiento Didáctico-Matemático en el contexto del Programa Residencia Pedagógica: una mirada a las interacciones entre Preceptor y Residentes

Resumen

El objetivo central de la investigación relatada en este artículo fue investigar la incidencia de la Faceta Interaccional del Conocimiento Didáctico-Matemático a partir del vínculo entre Preceptor y Residentes, en el ámbito de un Subproyecto de Matemática del Programa Residencia Pedagógica (PRP). La investigación realizada es cualitativa y utilizó como instrumentos de

recolección de datos, observaciones, cuestionarios y entrevistas. Para comprender las interacciones que se establecen entre Preceptores y Residentes, se optó por el análisis de datos pautada en cinco categorías constituidas a priori: Comunicación; Resolución de Conflictos; Consensos; Compromiso e Inclusión. El aporte teórico fue fundamentado en la perspectiva del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) proveniente del contexto del Enfoque Ontosemiótico. Se observó que las proposiciones de la Faceta Interaccional se presentan en la coyuntura de las acciones que establecen vínculos entre Preceptor y Residentes por conferir que son constituidos conocimientos pertinentes a la docencia a partir de las interacciones entre los participantes. Así, el PRP se convierte en una política pública importante para la formación del futuro profesor, pues fomenta la formación inicial del licenciando a partir de la vivencia de la realidad de la profesión.
Palabras clave: Faceta Interaccional, Conocimiento Didáctico-Matemático, Programa Residencia Pedagógica, Formación Docente.

Investigation of the Interactional Facet of Didactic-Mathematical Knowledge in the context of the Pedagogical Residency Program: a look at the interactions between Preceptor and Residents

Abstract

The central objective of the research reported in this article was to investigate the Interactional Facet of Didactic-Mathematical Knowledge from the link between Preceptor and Residents, within a Subproject of Mathematics of the Pedagogical Residency Program (PRP). For this, the research is qualitative using as instruments of data collection, observations, questionnaires and interviews. To understand the interactions that are established between Preceptors and Residents, data analysis was chosen based on five categories constituted a priori: Communication; Conflict Resolution; Consensus; Engagement and Inclusion. The theoretical contribution was based on the perspective of Didactic-Mathematical Knowledge (DMK) coming from the context of the Ontosemiotic Approach. It was observed that the propositions of the Interactional Facet are presented in the conjuncture of the actions that establish links between Preceptor and Residents by conferring that are constituted knowledge relevant to teaching from the interactions between the participants. Thus, the PRP becomes an important public policy for the training of the future teacher, as it promotes the initial training of the licensee from the experience of the reality of the profession.
Keywords: Interactional Facet, Didactic-Mathematical Knowledge, Pedagogical Residency Program, Teacher Training.

Introdução

Debates pertinentes ao ensino de Matemática fazem parte do cotidiano das instituições escolares, sociedades e comunidades científicas evidenciando a relevância deste componente curricular. Assim, a formação dos docentes torna-se um tema de relevância diante do atual cenário.

Nesta perspectiva a presente investigação, realizada no âmbito da linha de pesquisa “Formação de Professores que ensinam Matemática” do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática[15] da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP tem o intuito de propor uma discussão e problematização acerca dos conhecimentos necessários à formação docente, delimitando como recorte desta abordagem a Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) no contexto do Programa Residência Pedagógica (PRP), com um olhar voltado para as interações entre Preceptor (Professor/a da Educação Básica) e Residentes (Futuro Professor/a), os quais são os principais atores no âmbito desta política pública.

A relevância deste estudo se alicerça na importância do desenvolvimento de pesquisas que considerem o PRP, uma vez que as mesmas podem contribuir para o fortalecimento do programa enquanto política pública, através da divulgação e análise das ações que o envolvem. Nesse sentido, a investigação referente ao CDM, mobilizado pelas interações[16] entre Preceptores e Residentes do PRP almeja contribuir com os construtos teóricos voltados à formação de professores de Matemática, bem como para a sociedade que se beneficia das políticas públicas em prol da educação.

O tema da pesquisa propicia uma análise, com foco nas interações estabelecidas entre Preceptores, que apresentam o conhecimento matemático relacionado ao conhecimento didático arquitetado por meio de sua prática e os Residentes, com seus conhecimentos teóricos, que emergem da Licenciatura em Matemática.

Diante do exposto, este estudo propõe como questão norteadora a seguinte indagação: Como se constitui a Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático a partir das interações entre Preceptor e Residentes participantes do PRP?

Com o intuito de responder à questão norteadora, delimita-se como objetivo geral da pesquisa: investigar a Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático a partir das interações entre Preceptor e Residentes no âmbito de um Subprojeto de Matemática do PRP. E como objetivos específicos têm-se: compreender quais são os aspectos envolvidos na comunicação entre Preceptor e Residentes; investigar a atuação do Preceptor frente à resolução de conflitos no âmbito do PRP; identificar se as ações do Preceptor almejam construir consensos

---

[15]https://ppgedmat.ufop.br/nepefem

[16]Influência recíproca entre uma coisa e outra, entre uma pessoa e outra: a interação da teoria e da prática. (DICIO, 2022a)

com base em melhores argumentos; analisar o engajamento do Preceptor para envolver e captar a atenção dos Residentes; verificar se as práticas Preceptor oportunizam uma inclusão dos Residentes na dinâmica do programa.

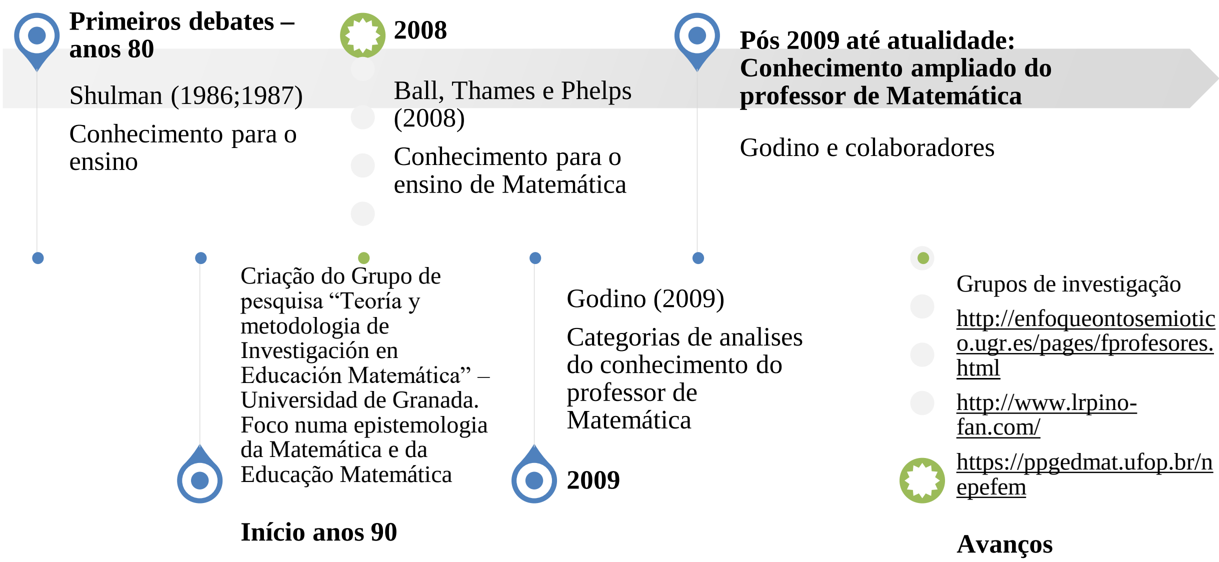
As prerrogativas acima descritas embasam a problemática deste trabalho que é norteada pela necessidade de compreender as interações entre Preceptor e Residentes pautadas no CDM, considerando que essas podem suscitar a construção de novos conhecimentos, bem como uma ressignificação de conhecimentos de ambos os atores.

À luz do trabalho empreendido buscou-se salientar a importância de se investigar as políticas públicas voltadas para a formação docente, considerando o PRP uma destas políticas que se faz presente como instrumento de formação de professores e que propicia a Preceptores e Residentes, uma possível construção de novos conhecimentos, por meio da imersão dos professores já atuantes, a um contexto atual da formação e, aos futuros professores, a vivência do cotidiano da profissão.

1. Aporte Teórico

Os estudos referentes aos conhecimentos dos professores ganharam destaque na década de 80 com os estudos de Shulman (1986, 1987). A partir deste modelo outros surgiram, com destaque para o de Ball et al (2008), com uma perspectiva voltada para o conhecimento do professor de Matemática e Godino (2009), que enfatiza aspectos específicos do Conhecimento Didático-Matemático (CDM), o qual se constitui em um modelo que emerge das teorias difundidas por outros pesquisadores acerca do conhecimento do professor. A Figura 1 apresenta o percurso que culmina nas discussões CDM.

Figura 1 - Um percurso das discussões sobre o conhecimento docente



Fonte: Elaborado pelos autores.

No artigo publicado em 2009 Juan Diaz Godino propõe seis facetas ou dimensões do CDM do professor de Matemática como representado na Figura 2:

Figura 2 – Categorias do Conhecimento Didático-matemático do professor de Matemática

Fonte: Facetas e níveis do conhecimento do professor (Godino, 2009, p. 21)

Para melhor compreensão da perspectiva de Godino (2009), a seguir estão apresentadas cada uma das facetas:

Faceta Epistêmica: compreende os conhecimentos voltados para a Matemática especializada, tendo relação com os argumentos, propriedades e definições utilizadas, bem como a forma com a qual o professor as utiliza corretamente, evitando linguagens inadequadas que podem produzir ambiguidades e confusões junto aos estudantes.

Faceta Mediacional[17]: essa faceta volta-se para as habilidades de selecionar os melhores recursos para o processo de ensino, contemplando os recursos temporais, tecnológicos e materiais que podem mediar o processo de ensino e aprendizagem.

Faceta Afetiva: compreende as atitudes, emoções, crenças e valores as quais os estudantes possuem, sendo esta uma faceta voltada para as subjetividades que permeiam o processo educacional.

Faceta Cognitiva: tem relação direta com o processo pelo qual o estudante aprende, sendo a faceta que engloba o repensar a prática pedagógica quando notado pontos fracos, nos quais os estudantes demonstram dificuldades. Sendo identificados os desafios, buscam-se recursos para saná-los ou ao menos minimizá-los.

Faceta Ecológica: relaciona-se ao currículo em sua pluralidade, pensando no macrossistema em que está compreendido, relacionando os conteúdos matemáticos entre si e com os demais componentes curriculares, o uso das tecnologias e a Matemática com a vida.

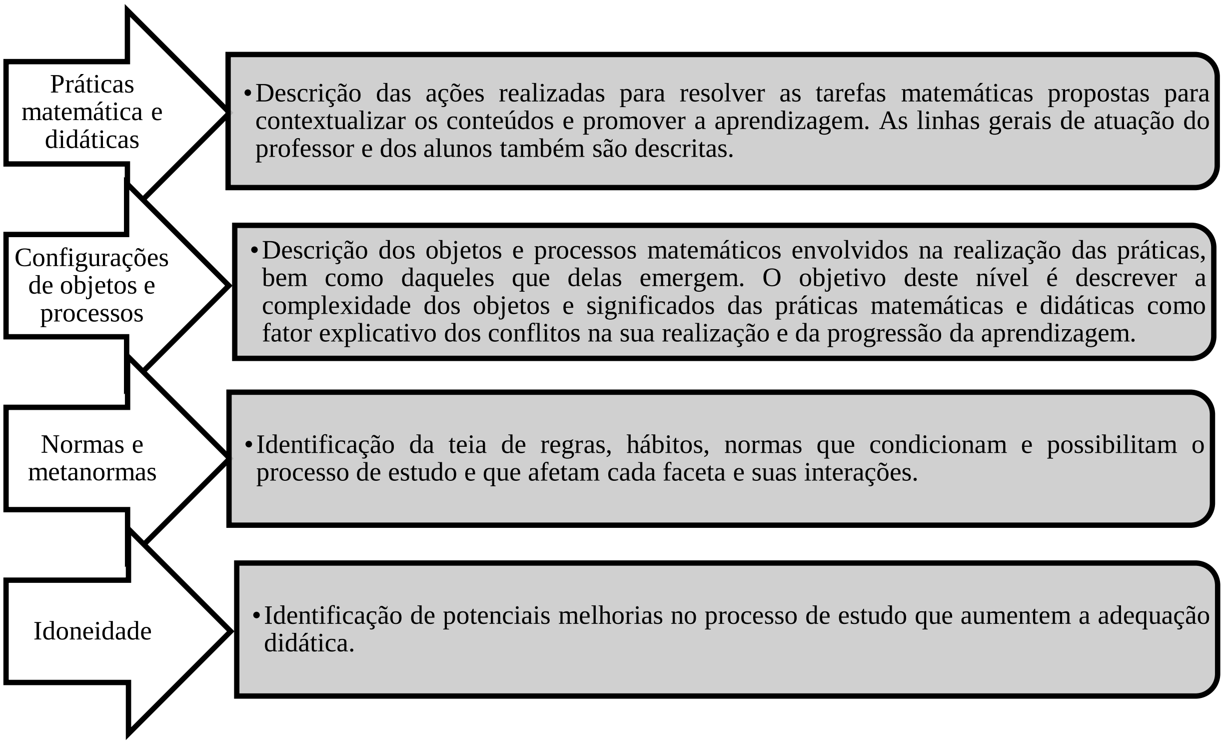
Faceta Interacional: são as relações estabelecidas dentro do processo educacional, podendo ser estudante-estudante, estudante- professor, professor-materiais didáticos, professor-professor, etc. Nessa perspectiva, compreende-se as muitas relações que se dão entre o estudante, professor no ambiente educacional. No contexto da Faceta Interacional o professor tem o papel de perceber possíveis conflitos e buscar formas para mediá-los.

Na presente pesquisa o foco estará voltado para a Faceta Internacional, considerando os conhecimentos didático-matemáticos que emergem das interações estabelecidas entre Preceptores e Residentes no âmbito do subprojeto de Matemática do PRP *campus* IFMG-SJE.

Ainda faz se necessário compreender a perspectiva dos níveis de análise dessas facetas, conforme Figura 3:

[17] A tradução para o Português seria “Faceta de Meios”, porém, adotamos a palavra no original “Mediacional”, deixando-a em itálico conforme a regra de uso de palavras estrangeiras.

Figura 3 – Níveis de análise do CDM



Fonte: Adaptado de Godino (2011; 2012; 2017) e Andrade (2014)

Compreendidos os aspectos voltados para os níveis de análise didática do professor de Matemática, considera-se relevante conhecer a vertente da idoneidade didática haja vista que a mesma irá subsidiar uma análise dos dados do presente estudo.

1.1 Idoneidade didática

Ao adentrar ao escopo da idoneidade didática é possível identificar que para que a análise nessa perspectiva se dê, Godino (2011) apresenta os níveis de análise que podem ser encontrados em baixo, médio ou alto. Assim cada uma das facetas pode ser observada de modo independente, e nesse modo podem ter níveis diferentes entre si. A análise didática por meio da idoneidade didática pode ser empreendida em aulas, propostas curriculares, planejamentos entre outros.

Para subsidiar a análise de cada uma das dimensões Godino (2011) organizou uma descrição que apresenta pontos sobre cada uma das dimensões de análise, conforme está esboçado no Quadro 1:

Quadro 1 – Idoneidade Didática

Dimensões	Descrição
Epistêmica	Refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (pretendido) a respeito de um significado de referência.
Cognitiva	Expressa o grau em que os significados pretendidos/implementados estão na zona de potencial desenvolvimento dos estudantes, bem como a proximidade dos significados pessoais alcançados em relação aos significados pretendidos/implementados.
Internacional	Um processo de ensino-aprendizagem terá maior adequação de um ponto de vista de interação se as configurações e trajetórias didáticas permitem, por um lado, identificar conflitos semióticos potenciais (que podem ser detectados *a priori*), e, por outro lado, permitir resolver conflitos que ocorrem durante o processo de instrução.
Mediacional	Grau de disponibilidade e adequação de recursos materiais e tempo necessários ao desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem.
Afetiva	Grau de envolvimento (interesse, motivação etc.) dos estudantes em processo de estudo. A adequação afetiva está relacionada com fatores que dependem da instituição e com fatores que dependem basicamente do estudante e sua história escolar anterior.
Ecológica	Grau em que o processo de estudo se encaixa no projeto educacional, escola e sociedade e o condicionamento do ambiente em que se desenvolve.

Fonte: Godino (2011, p. 9 - tradução nossa)

Tendo, pois, a pesquisa o foco na faceta interacional, apresentamos a seguir os componentes e indicadores de idoneidade didática desenvolvidos para a análise da dimensão interacional.

1.1.1 Idoneidade interacional

A idoneidade interacional diz respeito às relações/interações que se estabelecem no ambiente educacional, podendo ser entre professor/estudantes, estudante/estudantes, estudante/livro didático, professor/livro didático, currículo/estudantes, estudantes/direção escolar, etc. Para analisar essas interações Godino (2011) apresenta os componentes e indicadores da dimensão interacional, conforme organizado no Quadro 2:

Quadro 2 – Componentes e indicadores de idoneidade interacional

Componentes	Indicadores
Interação docente-discente	-Se o professor faz uma apresentação adequada do tema (apresentação clara e bem organizada, não fala muito rápido, enfatiza os conceitos chave do tema etc.). -Se reconhece e resolve os conflitos dos estudantes (se fazem perguntas e respostas adequadas etc.). -Se busca chegar a consensos com base nos melhores argumentos. -Se usa diversos recursos teóricos e argumentativos para envolver e captar a atenção dos estudantes. -Se facilita a inclusão dos estudantes na dinâmica da classe.
Interação entre discentes	-Se favorece o diálogo e a comunicação entre os estudantes. -Se trata de convencer a si mesmo e aos demais da validez de suas afirmações, conjecturas e respostas, apoiando-se em argumentos matemáticos. -Se favorece a inclusão no grupo e evita a exclusão.
Autonomia	-Se contempla momentos em que os estudantes assumem a responsabilidade do estudo (fazem perguntas e apresentam soluções; exploram exemplos e contraexemplos para investigar e conjecturar; usam uma variedade de ferramentas para raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicá-los).
Avaliação formativa	-Se há observação sistemática do progresso cognitivo dos estudantes.

Fonte: Godino (2011, p. 9 - tradução nossa)

Para que o processo analisado, no viés da dimensão interacional, possa ser aperfeiçoado no sentido de alcançar um nível alto de adequação, há autores que sustentam que possam ser estratégias, conforme apontam Breda, Font e Lima (2015):

> Se o professor realiza uma apresentação adequada do tema, com ênfase nos conceitos-chave; procurando reconhecer e resolver os conflitos de significado dos alunos (interpretando corretamente seus silêncios, expressões faciais, perguntas, etc.); utilizando recursos argumentativos para melhorar a implicação; procurando facilitar sua inclusão na dinâmica da aula; favorecendo a comunicação entre os estudantes; contemplando momentos nos quais os estudantes se responsabilizam pelo estudo (exploração, formulação, validação); etc. (BREDA; FONT; LIMA, 2015, p. 10)

Assim, é possível notar que "o professor necessita conhecer e perceber o estado de ânimo de seus alunos para enfrentar os problemas matemáticos propostos" SILVA (2017, p. 61). Essa perspectiva demanda por parte do docente um olhar atento para os estudantes, identificando as possíveis fragilidades.

No presente estudo, a atenção será voltada para aos aspectos interacionais do Conhecimento Didático-Matemático que emergem no seio do PRP no subprojeto de Matemática no IFMG-SJE, adaptado ao componente interação docente/discente e seus indicadores.

1.2 O Programa Residência Pedagógica

O Programa Residência Pedagógica (PRP) é instituído por meio da portaria normativa n° 38, de 28 de fevereiro de 2018, lançada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em sua edição pioneira, abrangendo todas as instituições de nível superior. Esse programa tem, como finalidade, "apoiar Instituições de Ensino Superior (IES) na implementação de projetos inovadores que estimulem a articulação entre teoria e prática nos cursos de licenciatura, conduzidos em parceria com as redes públicas de educação básica" (CAPES, 2018a).

No que diz respeito à organização do PRP, observa-se que o programa deriva da apresentação do *Projeto Institucional* que é o documento elaborado pela Universidade e submetido a CAPES, no qual consta a proposta da IES para o desenvolvimento do programa dentro dessa proposta, contemplando os subprojetos e núcleos aos quais esse projeto institucional irá abarcar.

Ao tratar dos atores que compõem o PRP, surge, então, a figura do coordenador institucional, docente orientador, preceptor e residente. No entanto, a pesquisa aqui apresentada, é voltada para as discussões que envolvem o *Preceptor*, cujo papel é o de tomar para si a responsabilidade de acompanhar as atividades do programa diretamente na escola-campo, a qual esse é professor, desempenhando um o gerenciamento das atividades dos licenciandos que são recebidos na escola; e o *Residente*, que é o estudante na licenciatura que necessariamente tem de ter cumprido 50% das atividades de seu curso, sendo então inserido na escola-campo sob a supervisão direta do Preceptor.

Em sua proposta o programa fomenta o auxílio no processo formativo dos Residentes, enquanto futuros professores e também promove um espaço onde o Preceptor tenha condições de rever suas práticas, propiciando uma tomada de consciência do seu papel como profissional da educação, que neste ambiente toma forma também de professor formador.

Nesse sentido, Tinti e Silva (2020) destacam que a preparação do futuro professor para a escola da contemporaneidade ocorra, é necessário o investimento no tempo de permanência supervisionada no contexto escolar. Tal fato pode romper com as tradicionais formas de estágios, nas quais o licenciando é mero espectador da prática docente. Diante disso, compreende-se que o componente "tempo" pode ser entendido como um diferencial de programas de indução como o PRP.

3. Metodologia

No movimento reflexão acerca da problemática da pesquisa e das respostas que se almeja alcançar, buscou-se por meio de uma abordagem qualitativa o aprofundamento da investigação relacionada à Faceta Interacional do CDM, no contexto do PRP, tendo o olhar voltado para as interações Preceptores e Residentes.

Assim, os colaboradores da pesquisa foram três licenciandos em Matemática, da referida instituição, que participaram do PRP como Residentes e um professor da Educação Básica, vinculado à escola pública da Rede Estadual que atua no programa como Preceptor vinculados ao Subprojeto de Matemática do PRP do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista (IFMG-SJE). Para caracterizá-los no contexto da entrevista, os participantes foram identificados por nomes fictícios. Intitulou-se a Preceptora, de Mariana. Para os Residentes utilizamos os nomes Davi, Cristina e Kelly

A entrevista foi utilizada, na perspectiva de Marconi e Lakatos (2003), pois, essa se traduz numa conversação efetuada face a face, respeitando os rigores metodológicos. Além do exposto, segundo os citados autores, a entrevista proporciona ao pesquisador, verbalmente, a informação necessária, a averiguação de "fatos", determinação das opiniões sobre os "fatos”, determinação de sentimentos, descoberta de planos de ação, conduta atual ou do passado, motivos conscientes para opiniões e sentimentos.

À luz do referencial teórico foram estruturadas categorias que permitissem alcançar os objetivos da investigação através da análise e discussão dos dados. As categorias emergiram dos indicadores do componente de adequação didática interacional, conforme propostos por Godino (2011), Breda, Font e Pino-Fan (2018), Godino et al. (2013) e Godino e Pino-Fan (2015), os quais descrevem o processo de ensino e aprendizagem baseado nas interações que se estabelecem entre docente e discente, conforme Quadro 3:

Quadro 3 – Componente Interação docente-discente e seus indicadores

Componente	Indicadores
Interação docente – discente	**-** Se o professor propõe uma apresentação adequada do tema (apresentação clara e bem organizada, não fala rápido, enfatiza os conceitos chaves do tema etc.); - Se reconhece e resolve os conflitos dos estudantes (faz perguntas adequadas e respostas adequadas etc.); - Se busca chegar a um consenso com base no melhor argumento; - Se usa diversos recursos retóricos e argumentativos para implicar e captar a atenção dos estudantes; - Se facilita a inclusão dos estudantes na dinâmica da classe.

Fonte: Godino (2011, p.12 - Tradução nossa).

Levando em consideração o exposto, realizou-se a associação entre o componente de interação docente/discente e a interação entre Preceptor/Residente, pois no âmbito do PRP ocorre um processo formativo, no qual assumimos o preceptor como formador.

O Quadro 4 apresenta a adaptação da componente interação docente/discente à interação Preceptor/Residente.

Quadro 4 – Interação Preceptor/Residentes e seus indicadores

Componente	Indicadores
Interação Preceptor/Residente	- Se o Preceptor propõe uma apresentação adequada das ações indicadas aos Residentes (apresentação clara e bem organizada, não fala rápido, enfatiza os conceitos chaves etc.); - Se reconhece e resolve os conflitos dos Residentes (faz perguntas adequadas e respostas adequadas etc.); - Se busca chegar a um consenso com base no melhor argumento; - Se usa diversos recursos retóricos e argumentativos para implicar e captar a atenção dos Residentes; - Se facilita a inclusão dos Residentes na dinâmica do Programa.

Fonte: Adaptado de (GODINO, 2011) - Tradução nossa.

Com base nos indicadores adaptados foram articuladas as seguintes categorias de análise e seus indicadores conforme apresentado na Figura 4:

Figura 4 – Categorias da Interação Preceptor/Residente e seus indicadores

Fonte: Elaborada pela autora

Frente ao exposto, a discussão tratando da Interação Preceptor/Residentes é pautada do componente que integra a Faceta Interacional do CDM, o qual descreve o processo de ensino e aprendizagem baseado nas interações que se estabelecem entre docente e discente e seus indicadores (GODINO, 2011), que são balizadores teóricos para as categorias elencadas discutidas a seguir.

4. Análise e discussão dos dados

Para melhor compreensão e análise dos dados coletados, os mesmos foram categorizados em: i) Comunicação; ii) Resolução de Conflitos; iii) Consensos; iv) Engajamento e vi) Inclusão. Nas subseções seguintes estão descritas as análises categorizadas.

4.1 Comunicação

A comunicação[18] se estabelece como instrumento de troca de informações desde os tempos mais remotos da história da civilização humana. No ambiente escolar ela se faz

[18] "Ação ou efeito de comunicar, de transmitir ou de receber ideias, conhecimento, mensagens etc., buscando compartilhar informações". (DICIO, 2022b).

fundamental em todas as esferas que compõem a Educação, tendo em vista que através da comunicação pode se estabelecer o diálogo, a socialização e as interações entre os indivíduos.

As interações que se estabelecem entre Preceptor/Residentes também são pautadas na comunicação, haja vista que os trabalhos realizados por tais atores na conjuntura do PRP são norteados pelo diálogo entre os mesmos. Conforme Silva (2020), o PRP tende a viabilizar o contato dos licenciandos que dele participam no ambiente escolar, o que tende a favorecer a formação desses futuros professores.

Deste modo, as interações entre Preceptor e Residentes têm potencial para promover situações de conhecimento e de comunicação no contexto educacional inerente à formação docente. Nessa conjuntura, "[…] a educação é comunicação, é diálogo, na medida em que não é a transferência de saber, mas um encontro de sujeitos interlocutores que buscam a significação dos significados." (FREIRE, 1979).

Nesta perspectiva, a Comunicação, enquanto categoria analisada no presente estudo, traz os aspectos da faceta interacional a qual prevê a importância do diálogo e comunicação para a aprendizagem quando da interação docente/discente (GODINO *et al*, 2013), adaptado, aqui, para a interação Preceptor/Residente, colocando lentes na orientação do Preceptor frente aos seus Residentes.

Vale ressaltar que a coleta de dados da pesquisa foi realizada em um momento em que o mundo enfrentava a pandemia provocada pela Covid-19. Deste modo, novas formas de comunicação foram incorporadas ao cotidiano. No ambiente escolar e no PRP, as formas de interação, de comunicação e transmissão de informações foram adaptadas aos recursos que a atual situação exigia de todos.

Logo, os momentos de comunicação e interação se fizeram diferentes nesta edição do PRP, porém, não menos importantes para o andamento das atividades, como aponta a Preceptora Mariana, quando afirma, em entrevista, que:

> *"[...] as reuniões, os diálogos pelo WhatsApp, as contribuições nas atividades, os relatórios... todos eles são muito importantes para o desenvolvimento das ações do programa". (Fragmento da entrevista realizada com Mariana em 28 de março de 2022).*

Compreende-se, então, a partir dessa fala, que a interação se fez presente e importante na comunicação entre Preceptor e Residentes do PRP para a construção do conhecimento do futuro professor de Matemática. Para que se possa alcançar um nível de adequação nessa categoria, Breda, Font e Lima (2015) defendem que podem ser implementadas estratégias, no sentido em que o professor (aqui o Preceptor) "realiza uma apresentação adequada do tema, com ênfase nos conceitos-chave".

Coadunando com os resultados acima descritos, a Residente Kelly relata na entrevista que:

> "*Acho importante a questão da comunicação. Porque como eu estava no modo à distância, a questão da comunicação pelo WhatsApp foi essencial. Tudo que eu precisava ou tinha dúvidas eu mandava mensagem para a minha Preceptora e ela sempre respondia. A Preceptora sempre me atendia com prontidão e ela era bem objetiva em sua orientação. E quando a gente não entendia, ela dava liberdade para que a gente perguntasse de novo. Sabe, a todo momento ela se comunicou e informava tudo pra gente, mesmo que às vezes ela não conseguia organizar uma reunião com todos os Residentes, mas pelo menos, para mim, no privado, ela toda vez que eu mandei mensagem, ela sempre respondia e explicava tudo. Sobre o funcionamento da escola, sobre a questão dos horários, as turmas e tudo mais*". (Fragmento da entrevista realizada com Kelly em 28 de março de 2022).

A fala da entrevistada sinaliza para a potencialidade da comunicação entre Preceptor e Residente para a formação do futuro professor de Matemática, tendo em vista que a comunicação além de fortalecer o vínculo entre ambos, permite ao Residente se sentir seguro em relação à sua inserção no ambiente escolar, endossa o conhecimento do Residente a adentrar no contexto do seu futuro campo profissional, o qual se constitui num cenário real com todos seus contrastes e complexidades. (PONTE, 2002).

Face ao exposto, é possível inferir que a comunicação entre o Preceptor e Residente pode ser entendida como peça fundamental para fomentar, transformar e provocar atitudes e posturas dos licenciandos em relação à sua própria prática, conforme pontua a fala da Residente Kelly:

> "*Quanto mais comunicação você tem com o seu Preceptor ou com o professor, mas eles podem te auxiliar no que você deve prestar atenção no dia-a-dia da escola, no que que você tem que fazer de que forma você deve agir e tudo isso! Então quando você tem uma liberdade de comunicação com o Preceptor, ele vai te indicar, te orientar, você vai ter um ambiente em que possivelmente, vai que futuramente ele seja seu colega de trabalho! Então tem que ter uma relação boa e assim um ajudando o outro. Não pode ser aquela questão individualista*". (Fragmento da entrevista realizada com Kelly em 28 de março de 2022).

Os dados analisados, no que concerne à Categoria 1, permitem apontar que a comunicação no contexto do PRP de fato acontece e que a mesma vai ao encontro da proposta da construção do conhecimento baseada na prática, na qual o Residente tem a possibilidade de interagir com todo o processo da sua formação enquanto futuro professor de Matemática.

4.2 Resolução de Conflitos

Os conflitos fazem parte dos espaços onde a natureza humana está presente, considerando a diversidade e a divergência de crenças, valores e opiniões que personificam cada indivíduo.

Nesse sentido, os estudos de Piaget (1994) apontam que o conflito deve ser considerado como um fator relevante na aquisição de novas formas de conhecimento, tendo em vista que quando o mesmo é desencadeado, pode impelir o indivíduo a refletir sobre a sua perspectiva, de modo a buscar soluções justas e positivas diante de situações conflitantes.

No contexto do PRP, as diferenças também se fazem presentes entre os participantes e cabe ao Preceptor estabelecer uma postura de diálogo, de modo a contribuir para que, de forma colaborativa e positiva e conforme Godino (2009), o processo de ensino-aprendizagem tenha maior adequação de um ponto de vista interacional. Isso acontece se as configurações e trajetórias didáticas permitem, por um lado, identificar conflitos semióticos potenciais (que podem ser detectados *a priori*), e, por outro lado, se permitem resolver conflitos que ocorrem durante o processo de instrução.

Assim sendo, a Categoria 2, que discute sobre a Resolução de Conflitos no bojo da Interação Preceptor/Residente, buscou analisar, a partir dos indicadores propostos por Godino (2011), a presença da interação docente/discente (Preceptor/Residente) quando o professor (Preceptor) reconhece e resolve os conflitos dos estudantes (Residentes), faz perguntas e respostas adequadas aos temas apresentados.

Concomitante ao exposto, a fala da Preceptora Mariana sinaliza a sua conduta diante das problemáticas relacionadas aos conflitos proeminentes do PRP:

> "*Eu acho que primeiro é preciso identificar as situações que são problemas ou que podem trazer problemas. Feito isso, junto com os meninos mesmo (os Residentes) a gente resolve a situação. [...] Eu procurei trabalhar com eles de forma que eles (os Residentes) não se sentissem desmotivados, mas esse é um problema em que eu também preciso de ajuda. Mas volto a falar… a melhor forma de resolver conflitos é através do diálogo, da fala sincera e objetiva*". (Fragmento da entrevista realizada com Mariana em 28 de março de 2022).

Conforme a fala da Preceptora, a Residente Cristina, pontua, na entrevista, que:

> "*O posicionamento da Preceptora foi muito condizente com a sua função. Ela deixa claro para nós, Residentes, como devemos nos portar, como proceder em relação aos professores, direção e estudantes. Ela também está sempre disponível para explicar o que não entendemos*". (Fragmento da entrevista realizada com Cristina em 29 de março de 2022).

Apresentando a mesma conotação, a fala de Davi reforça os resultados sinalizados na observação quando o Residente afirma que:

> "*A Preceptora tem um modo de se expressar muito correto. Ela nos passa segurança. Acho que é pela firmeza com que ela nos transmite as orientações*." (Fragmento da entrevista realizada com Davi, em 23 de março de 2022).

Quando indagado sobre como a Preceptora reage frente a algum problema, seja com estudantes, com colegas, com a escola-campo ou a universidade, o residente Davi relatou que:

> "*Não tivemos problemas com a escola-campo e a universidade… E com os alunos a única questão problemática era a participação deles nas atividades. Nesse sentido, a Preceptora fazia o que podia. Que era dialogar com os alunos para procurar entender o porquê desses alunos estarem ausentes, e depois junto com a gente (os Residentes) ela buscava soluções para esse problema que era a participação deles nas atividades*". (Fragmento da entrevista realizada com Davi, em 23 de março de 2022).

Nesse sentido, destaca-se a importância da mediação do Preceptor, pautada no diálogo e no envolvimento dos próprios Residentes frente à solução de conflitos rotineiros e comuns no espaço do PRP, possibilitando a transformação desses conflitos em oportunidades de crescimento e aprendizado aos licenciandos.

Conforme exposto, verificou-se que em dois encontros a atuação do Preceptor é parcialmente adequada no que diz respeito à Resolução de Conflitos, indicando que o Preceptor reconhece e resolve os conflitos dos Residentes parcialmente. Faz perguntas e respostas adequadas à sua função parcialmente. Esse resultado reflete as problemáticas que envolveram o PRP frente à pandemia e às novas formas de interação que se conceberam. Em alguns encontros foi constatada a dificuldade dos participantes em relação à tecnologia utilizada para realizar os encontros, o que é evidenciado pela Residente Cristina quando alega, na entrevista, que:

> "*Eu vi que a pandemia prejudicou muito a realização das atividades. Tinha dias que não tínhamos sinal bom da internet, ou que às vezes a própria Preceptora também não tinha. Em dias de chuva, por exemplo, era uma luta. A internet não vingou mesmo*". (Fragmento da entrevista realizada com Cristina em 29 de março de 2022).

Frente ao exposto, em relação à Resolução de Conflitos, os dados analisados indicam que a Preceptora se deparou com dificuldades, conflitos e problemas no invólucro das suas ações frente ao PRP. Todavia, a mesma buscou soluções parciais para estes, o que é condizente com as suas funções dentro do Programa, alcançando, desta forma, a adequação possível para aquele ínterim.

Breda, Font e Lima (2015, p.10) defendem que vai haver adequação, "se o professor [...] procura reconhecer e resolver os conflitos de significado dos alunos (interpretando corretamente seus silêncios, expressões faciais, perguntas, etc.) [...]". Sendo assim, os resultados obtidos sugerem que a maioria das ações do Preceptor frente aos conflitos enfrentados no decorrer do PRP vão ao encontro de soluções dialógicas que favorecem a construção do conhecimento didático dos licenciandos, assim como promovem a discussão, a tomada de atitudes e a negociação de regras entre professor e estudantes.

4.3 Consensos

Estabelecer uma relação de Consenso[19]se faz necessário em ambientes nos quais as relações humanas são instituídas, sobretudo onde essas relações buscam promover a formação desses indivíduos. Assim, a pedagogia do consenso se faz pertinente no bojo do PRP, tendo em vista que os seus participantes estão inseridos em um contexto de instrução acadêmica fundamentado na docência.

Nesse sentido, Godino (2011) pontua que a interação docente/discente, adaptada neste estudo para interação Preceptor/Residente pode emergir quando as ações do docente (Preceptor) buscam chegar a consensos com base nos melhores argumentos.

Deste modo, a Categoria 3, referente ao Consenso, discorre sobre a utilização de diferentes estratégias que favorecem a interação e as discussões no âmbito das ações do PRP, nas quais o Preceptor promove a construção de consensos a partir de argumentações e de diálogo, conferindo aos Residentes a oportunidade de participar das tomadas de decisões que demandam do programa. Isso é corroborado pela fala do residente Davi quando descreve, em entrevista, que:

> "*A relação nossa (os Residentes) com a Preceptora é uma relação de troca de conhecimento. A Preceptora com sua experiência e seus argumentos consegue fazer com que a gente pense: mas não é que ela tem razão? Não é que desse*

[19] "Concordância ou unanimidade de opiniões, raciocínios, crenças, sentimentos etc. em um grupo de pessoas; decisão, opinião, deliberação comum à maioria ou a todos os membros de uma comunidade". (DICIO, 2022c).

> *jeito funciona mesmo?*". (Fragmento da entrevista realizada com Davi, em 23 de março de 2022).

E quanto a participar das tomadas de decisões em relação às ações do programa, Davi relata que:

> "*A Preceptora sempre nos envolveu no processo de pensar as atividades propostas. Ela sempre perguntava: Vocês acham que vai dar certo? Qual caminho vocês consideram ser o melhor para a gente alcançar o máximo de alunos possível?*". (Fragmento da entrevista realizada com Davi, em 23 de março de 2022).

Dessa maneira, os dados apresentados evidenciam que as atitudes do Preceptor implicam na busca por consensos através de argumentações plausíveis e coerentes com as demandas do Programa. Coadunando com esses resultados, Kelly afirma que:

> "*Aprendi muito com a preceptora. Aprendi a argumentar com os alunos, aprendi a trazer os alunos para discussões em sala de aula. Ela fazia isso até conosco (os Residentes) quando nos punha para participar da escolha por temas a serem trabalhados nas oficinas*". (Fragmento da entrevista realizada com Kelly em 28 de março de 2022).

Frente ao exposto, acredita-se na importância da argumentação para a construção de consensos na formação dos Residentes, considerando que argumentar, questionar e opinar dentro do espaço do PRP fomentam aprendizados que podem permitir ao um indivíduo ser capaz de tomar decisões, avaliar atitudes, propor soluções em situações adversas em relação à vida pessoal, profissional e social, em espaços nos quais possam e devam coexistir pensamentos e posicionamentos diferentes, mas que através do diálogo e da argumentação se alcance consensos que sejam aceitos e compreendidos pela maioria, como defende Leitão (1999):

> [...] a argumentação é vista como um processo interativo no qual se engajam dois ou mais indivíduos que divergem a respeito de um tema e se esforçam por tornar as suas respectivas posições aceitáveis. Vista deste modo, a argumentação se define, portanto, como um processo de negociação de perspectivas que envolve construção, avaliação e reconstrução de significados e que tem no diálogo o seu *locus* privilegiado e prototípico. (LEITÃO, 1999, p. 94).

Faz-se ainda relevante pontuar que houve encontros nos quais se considerou que o Preceptor buscou parcialmente chegar a consensos com base nos melhores argumentos. Acredita-se que a adequação parcial da categoria se deve ao fato de que nos encontros remotos alguns fatores influenciaram no comportamento dos participantes. Como já explicitado, a realização do PRP no modo *on-line* apresentou aspectos diferentes de interações.

E se em alguns dias os recursos tecnológicos aproximavam os participantes, considerando que estes podem ampliar o acesso ao conhecimento, perpassando barreiras socioculturais e regionais, em outros dias esses mesmos recursos representavam empecilhos para as interações entre os atores investigados, tendo em vista a qualidade, a disponibilidade e o conhecimento das ferramentas tecnológicas utilizadas no âmbito do programa.

Dessa maneira, em um dos encontros do PRP, a dificuldade de se estabelecer o consenso fez com que os diálogos e os argumentos fossem reduzidos a poucas falas, porém, não menos relevantes dentro do contexto do programa como pontua Cristina:

> "*Apesar de perceber a Preceptora distante em alguns momentos dos encontros, falando pouco, se expressando pouco. O que a gente entende, porque no virtual não foi em todos os dias que a tecnologia contribuiu. Então, teve vez da gente se sentir "fora da caixinha", mas sempre a gente podia opinar sobre a atividade realizada. A Preceptora sempre tentava propor algo que era de acordo com todos*". (Fragmento da entrevista realizada com Cristina em 29 de março de 2022).

Nesse sentido, os dados analisados e discutidos certificam que em relação à Categoria Consensos, a interação Preceptor/Residentes apresenta uma adequação positiva quando dos parâmetros utilizados para avaliá-lo. Logo, constata-se que a prática do Preceptor é pautada na convergência de suas ações, no sentido de estabelecer competências fundamentais que vão ao encontro do senso comum.

4.4 Engajamento

Segundo Veiga (2013), o engajamento compreende um conjunto de ações e atitudes associadas ao desenvolvimento comportamental, cognitivo, afetivo e agenciativo de uma pessoa em relação a um objetivo, uma causa, um propósito. Em especial, o desenvolvimento agenciativo diz respeito ao processo em que o indivíduo, dotado de intencionalidade e proatividade, personaliza e enriquece as suas aprendizagens (D´ARRIGO; PRANTZ; MIGLIAVACCA; GIACOMELLO; OLEA, 2015). A discussão sobre o engajamento do Preceptor frente às demandas do PRP e as ações dos Residentes está relacionada com as interações, as práticas e os recursos desenvolvidos e ofertados com intuito de promover um ambiente que favoreça a construção do conhecimento docente aos licenciandos imersos no Programa.

A Categoria 4 discute sobre o Engajamento do Preceptor, pautado nos indicadores atribuídos por Godino (2011), o qual descreve que há a interação docente/discente (Preceptor/Residente) quando o professor (Preceptor) usa diversos recursos teóricos e argumentativos para implicar e captar a atenção dos estudantes (Residentes).

Verificou-se, ainda, através dos dados coletados, que as ações da Preceptora apresentaram o engajamento de acordo com os indicadores supracitados, os quais se afirmam através dos apontamentos de Cristina, quando descreve, no momento da entrevista, sobre "a forma como a Preceptora direciona as atividades do Programa, o modo de falar conosco e apontar os diferentes caminhos para realizarmos as ações e alcançar os estudantes". Compreende-se, com essa fala, que a Preceptora buscou direcionar suas ações com ideais pautados na diversidade de argumentos, no intuito de incentivar os Residentes e proporcionar aos mesmos uma aprendizagem docente ajustada à realidade da profissão. Ao final de sua fala, Cristina ressalva que:

> "[…] *toda a vivência com a Preceptora foi muito importante para o conhecimento da realidade da escola*". (Fragmento da entrevista realizada com Cristina em 29 de março de 2022).

Coadunando com as discussões realizadas, Godino *et al.* (2015) afirmam que no escopo da faceta interacional que corresponde ao conhecimento sobre o ensino da Matemática, as interações que podem ocorrer entre professor (Preceptor) e estudantes (Residentes) são essenciais para os processos de ensino e aprendizagem.

Considerando a adaptação dos indicadores para fins da pesquisa, os quais buscam investigar as ações do Preceptor e dos Residentes, compreende-se a Categoria Engajamento como aquele que emerge das interações entre Preceptor e Residentes, fomentando a aprendizagem do licenciando frente à orientação do Preceptor.

Em conformidade, Davi descreve que a Preceptora apresentou uma postura

> "[…] *sempre atenta em orientar os Residentes de forma diversificada, utilizando meios como WhatsApp, E-mails, Google Meet e até mesmo no presencial, quando foi possível e adequado à realidade pandêmica*". (Fragmento da entrevista realizada com Davi em 23 de março de 2022).

Logo, considerando o contexto de realização das atividades do PRP em sua segunda edição e durante o módulo III, os recursos que naquele momento poderiam ser utilizados foram explorados com êxito pela Preceptora, conforme o relato do Residente Davi quando salienta:

> "*A preceptora se mostrou preocupada com a nossa participação no Programa. O tempo todo ela procurava saber das nossas atividades. Sempre nos enviando modelos de propostas de modo que nós, juntamente com ela, pudéssemos analisar e avaliar o melhor caminho para colocar em ação as atividades junto aos alunos*". (Fragmento da entrevista realizada com Davi em 23 de março de 2022).

Compreendendo, então, que os dados da pesquisa apontam para uma prática do Preceptor na qual a Categoria Engajamento esteve presente de forma parcial em um dos encontros do PRP.

Essa adequação parcial foi considerada diante da ausência da participação do Preceptor em alguns momentos do encontro, por falta de disponibilidade de sinal de internet e da sua dificuldade de se fazer compreender pelos Residentes, vinculados à Preceptora. No entanto, pondera-se sobre os enfrentamentos vivenciados nos encontros virtuais, apontados na fala da Residente Kelly:

> "*Eu me sentia um pouco perdida com as informações dadas pela preceptora em alguns momentos. Muitas vezes a internet falhava e as informações chegavam todas de uma vez no grupo de WhatsApp. Aí, diante de um leque vasto de recursos que poderiam ser utilizados durante as atividades. Eu fiquei desorientada com muitas informações*". (Fragmento da entrevista realizada com Kelly em 28 de março de 2022).

Como exposto, na edição do PRP na qual se realizou a pesquisa, os modos de promover práticas de engajamento no contexto das atividades do PRP foram adequados a uma nova realidade, que precisou ser adaptada aos recursos disponíveis aos participantes. Nessa conjuntura, emergem novas formas de interações sujeitas a recursos externos e a habilidades incorporadas aos processos de ensino e aprendizagem.

Deste modo, compreende-se as muitas relações que se dão no ambiente educacional. E conforme Godino (2009), no contexto da faceta interacional, o professor (Preceptor) tem o papel de estabelecer conexões se valendo de recursos e argumentações para envolver o estudante (Residente) no processo de construção do conhecimento.

Coadunando com o autor, Mariana, enquanto Preceptora do módulo III do PRP, salienta que procura orientar os Residentes, assim como norteia a sua prática docente em sala de aula, mediando e articulando os diferentes caminhos que levam à aprendizagem. Segundo ela:

> "*Eu tento da mesma forma que trabalho com meus alunos direcionar os meus Residentes. Mostrar para eles que existem caminhos diferentes para se alcançar um determinado objetivo em sala de aula. E da mesma forma nas minhas orientações... Eu mostro isso para eles porque o nosso Residente é um*

> *aluno nosso também que está aprendendo a ser professor*". (Fragmento da entrevista realizada com Mariana em 28 de março de 2022).

O relato da Preceptora sinaliza um trabalho junto aos Residentes que reflete o engajamento de suas ações no construto de um processo cujo produto são as interações que promovem o conhecimento resultante da motivação e das experiências vivenciadas no bojo do PRP. Para Mariana,

> "[…] *é preciso incentivar, buscar novas formas de prender a atenção, indicar novos caminhos e novos recursos de aprendizagem diversificar a forma de orientar os Residentes, mostrando que é preciso um novo olhar para a prática pedagógica*". (Fragmento da entrevista realizada com Mariana em 28 de março de 2022).

Isto posto, os dados discutidos e analisados refletem uma prática do Preceptor pautada no Engajamento frente aos seus Residentes e que, apesar das limitações e dificuldades enfrentadas, as interações elencadas na Categoria 4, de fato ocorreram de forma positiva e exitosa, como considerado pelos participantes da pesquisa.

4.5 Inclusão

À luz dos aspectos da inclusão pautados nas interações que se arquitetam no espaço de formação subsidiado pelo PRP, acredita-se na relevância de ações que busquem orientar, valorizar a diversidade em todos os espaços, fazendo valer o verdadeiro sentido da aceitação das diferenças enquanto processo que reconhece a diversidade e o respeito a todos (FREITAS, 2005).

Diante do exposto, a análise da Categoria Inclusão busca compreender as ações do Preceptor em prol da inserção dos Residentes nas dinâmicas propostas no bojo do PRP, se valendo do indicador proposto por Godino (2011). O autor embasa a interação docente/discente quando o docente facilita a inclusão dos estudantes na dinâmica da classe. Na adaptação da categoria, buscou-se analisar a Interação Preceptor/ Residente pautada no indicador que aponta uma prática do Preceptor voltada para a inclusão dos Residentes na dinâmica do Programa.

Nesse sentido, a Categoria Inclusão investiga a interação entre Preceptor e Residentes a partir da prática inclusiva do Preceptor, ao propor as atividades a seus Residentes, considerando os aspectos da inclusão no que estão relacionados ao planejamento das ações junto ao grupo e na articulação dessas junto aos estudantes da escola-campo. Nessa conjuntura, os dados apontam para uma dinâmica inclusiva das ações da Preceptora, conforme salienta o Residente Davi quando afirma que:

> "*A Preceptora tentava nos incluir nas propostas de atividades tanto no espaço pedagógico da Residência quanto no da escola, fazendo que nos sentíssemos pertencentes a esses espaços*". (Fragmento da entrevista realizada com Davi em 23 de março de 2022).

Assim, os dados da pesquisa subsidiam a compreensão de que uma prática inclusiva do Preceptor tende a agregar ao conhecimento que se constrói, no âmbito do PRP, saberes importantes à docência. Segundo a Residente Cristina:

> "*Além do mais a forma como o Preceptor direciona as atividades propostas no programa, o modo de falar conosco e nos apontar os caminhos para realizarmos as ações de nos incluir nas atividades dela junto à escola, de nos motivar e incentivar durantes as atividades do programa, tudo foi muito importante para o nosso conhecimento do que é a escola e do que é ser professor*". (Fragmento da entrevista realizada com Cristina em 29 de março de 2022).

Frente aos dados apresentados, observou-se que a Categoria Inclusão esteve presente nas atividades realizadas junto aos participantes do Programa, o que pode ser corroborado pela Preceptora Mariana, quando enfatiza sobre a importância da inclusão no decorrer do processo. Para ela:

> "*Uma prática inclusiva permite que os Residente criem vínculos com a escola e com os alunos. Ou seja, que eles se sintam professores*". (Fragmento da entrevista realizada com Mariana em 28 de março de 2022).

Corroborando com a Preceptora, a Residente Kelly relata que:

> "*A Preceptora me ensinou a ser professora, a ter um olhar voltado para o coletivo. Até porque numa sala de aula você não pode analisar aluno por aluno. Então você tem que buscar métodos de trabalhar sem excluir ninguém*". (Fragmento da entrevista realizada com Kelly em 28 de março de 2022).

Vale ressaltar que os dados analisados em relação à Categoria Inclusão sinalizam para uma prática do Preceptor tangenciada pela inclusão dos Residentes na dinâmica do PRP, o que favorece a construção do conhecimento e fortalece a identidade profissional dos futuros professores.

Sobre o nível de inclusão parcial, ressalta-se os momentos em que alguns Residentes menos participantes não eram chamados pela Preceptora para compartilhar com o grupo mais efetivamente dos debates e das atividades realizadas. Outra questão apresentada nesse contexto diz respeito, ainda, à própria dificuldade dessa interação *online*, com todos os problemas que o circundam, quer sejam: dificuldade de conexão, da falta de aprimoramento técnico, entre outros, no contexto de pandemia já descrito anteriormente.

5. Considerações finais

Face ao processo de investigação pautado nas interações que se estabelecem entre Preceptor e Residentes do PRP, os resultados obtidos foram apresentados refletindo a formação docente pautada nos conhecimentos do professor constituídos a partir da vivência da prática da profissão.

Em relação ao objetivo geral que focalizou "*investigar a Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático a partir do vínculo entre Preceptor e Residentes, no âmbito de um Subprojeto de Matemática do PRP*", compreendeu-se que os dados obtidos remeteram à uma reflexão acerca das relações que se estabelecem junto ao Programa e a sua importância ao aproximar os licenciandos da prática docente com ações ativas que colaborem para o desenvolvimento da prática profissional.

Quanto à questão de investigação "*como se apresenta a Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático a partir do vínculo entre Preceptor e Residentes, no âmbito de um Subprojeto de Matemática do PPR?*" verificou-se que os pressupostos da Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático se apresentaram na conjuntura das ações que estabeleceram vínculos entre Preceptor e Residentes e entre os Residentes possibilitando o desenvolvimento da autonomia, capacidade de avaliação e reflexão sobre as práticas. Acredita-se que tais repercussões estão diretamente ligadas aos tipos de parcerias que são arquitetadas entre Universidade e escola da Educação Básica. Essa, segundo Tinti e Silva (2020), deve ser centrada na colaboração, no diálogo, no respeito mútuo e na promoção do protagonismo de todos os atores envolvidos.

Ademais, por se tratar de um Programa que incentiva a articulação teoria e prática, acredita-se que o PRP foi instituído com objetivo de colaborar com a formação dos acadêmicos d Licenciatura em Matemática, estimulando-os a atuar ativamente na prática de ensino nas escolas públicas, possibilitando a construção de saberes profissionais. Além disso, o PRP proporciona o fortalecimento das instituições escolares, bem como a implementação de qualidade no ensino. Assim, o PRP promove o aprimoramento da formação docente, por meio da articulação entre o que o licenciando aprende na Universidade e as experiências vivenciadas no futuro campo profissional. Essas vivências e práticas permitem, ainda, aos Residentes, a construção da identidade docente e o fortalecimento das práticas de ensino que podem possibilitar a qualidade nos processos pedagógicos. Nesse cenário destaca-se que essa política pública complementa a formação inicial dos Residentes e fomenta a construção da sua identidade profissional.

Deste modo, no tocante às interações entre Preceptor/Residentes no âmbito do PRP, o estudo aqui apresentado apontou para a efetivação das interações fundamentadas na Comunicação, Resolução de Conflitos, Consenso, Engajamento e Inclusão. Logo, verificou-se a consolidação dos conhecimentos profissionais sinalizando que os momentos de interação aconteceram, mesmo que de forma remota em decorrência da pandemia COVID-19.

É importante destacar que as facetas do CDM não se manifestam isoladamente, pois as fronteiras entre elas são muito tênues. Observou-se ao longo do processo de pesquisa elementos que tangem à Epistêmica, posto que, as interações eram realizadas em prol de planejamentos de aulas e projetos que versaram sobre conteúdos diversos. Da mesma forma, evidenciou-se elementos que tangem à escolha dos recursos e meios para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática a reflexão sobre conhecimentos prévios, aspectos afetivos e os contextos nos quais desenvolveram as práticas. Contudo, não constituíram objeto de reflexão na pesquisa, por hora, empreendida.

O exposto pode contribuir para a implementação de novos estudos relacionados ao PRP, fomentando a importância da consolidação de Políticas Públicas direcionadas à formação inicial dos professores de Matemática.

Referências

ANDRADE, L. S. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas. 2014.

BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education.** [s.l]. n.59, v.5, p.389-407, 2008. DOI: https://doi.org/10.1177/0022487108324554

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática,** São Paulo, n. 8, v. 2, p. 1-41, 2015.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

CAPES. **Portaria n. 38**, de 28 de fevereiro de 2018. Regulamenta o Programa de Residência Pedagógica**,** Brasília, DF, 2018a.

D`ARRIGO, F.; PRANTZ, C.; MIGLIAVACCA, M. J.; GIACOMELLO, C. P.; OLEA, P. M. Envolvimento dos alunos de cursos de graduação em administração: aplicação de escala multidimensional. **Revista Gestão Universitária na América Latina – GUAL.** [s.l], v. 8, p. 204, 2015.

DICIO. Dicionário online de Língua Portuguesa. Verbete: **Interações.** 2022a. Disponível em: https://www.dicio.com.br/comunicacao/. Acesso em: 14 out. 2022.

DICIO. Dicionário online de Língua Portuguesa. Verbete: **Comunicação.** 2022b. Disponível em: https://www.dicio.com.br/comunicacao/. Acesso em: 14 out. 2022.

DICIO. Dicionário online de Língua Portuguesa. Verbete: **Consenso.** 2022c. Disponível em: https://www.dicio.com.br/consenso/. Acesso em: 14 out. 2022.

FREIRE, P. **Educação como prática da liberdade**. 17.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

FREITAS, S. N. (Org.). **Educação inclusiva e necessidades educacionais especiais**. Santa Maria. Ed. UFSM, 2005.

GODINO, J. D.; PINO-FAN, L. Perspectiva Ampliada Del Conocimiento Didáctico - Matemático del Profesor. **Paradigma,** Maracay, n. 1, v. 26, p.87-109, 2015.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, **Revista Iberoamericana de Educación Matemática.** [s.l], n. 20, v.1, p.13-31, 2009.

GODINO, J. D. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – II CIVEOS. Granada: Espanha. **Actas…** Granada, 2017, p. 1-20.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: XIII CIAEM – IACME. **Anais...** Recife, 2011.

GODINO, J. D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In: ESTEPA, A.; CONTRERAS, A.; DEULOFEU, J.; PENALVA, M. C.; GARCÍA, F. J.; ORDÓÑEZ, L. (Eds.). **Investigación en Educación Matemática XVI.** Jaén: SEIEM, 2012, p. 49-68.

GODINO, J. D, BATANERO, C., RIVAS, H., E ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de adequação de programas de formação de professores em educação matemática. **REVEMAT,** Florianópolis, n.8, v.1, p.46-74, 2013. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

LEITÃO, S. Contribuições dos estudos contemporâneos da argumentação a uma análise psicológica de processos de construção de conhecimento em sala de aula. **Arquivos Brasileiros de Psicologia.** Rio de Janeiro, 1, 91-109, 1999.

PIAGET, J. **O juízo moral na criança**. São Paulo: Summus, 1994.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, [s.l], n. 11, p. 3-8, 2002.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: foundations of the reform. **Havard Education Review.** Cambridge**,** v. 57, n.1, 1987. DOI: https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

SHULMAN, L. S. Those Who Understend: Knowledge growth in teaching. **Education Researcher.** [s.l], v.15, n.2, p.4-14, fev., 1986.

SILVA, F. C. **Contribuições do programa residência pedagógica na formação de professores da Educação Básica.** 2020. 120 f. Mestrado em Educação e Ensino (MAIE) Instituição de Ensino: Universidade Estadual do Ceará, Limoeiro do Norte Biblioteca Depositária: Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho, da Universidade Estadual do Ceará.

SILVA, J. F. **Um estudo do programa de consolidação das licenciaturas no contexto da formação inicial de professores de matemática.** 2017. 254 f; Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017.

TINTI, D. S.; SILVA, J. F. Estudo das repercussões do Programa Residência Pedagógica na formação de professores de matemática. **Formação Docente**, Belo Horizonte, v. 13, n. 25, p. 151-172, set./dez. 2020. DOI: https://doi.org/10.31639/rbpfp.v13i25.404

VEIGA, I. P. A. **Projeto político pedagógico da escola, uma construção possíve**l. 29 ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

Autores

Alexsandra Braga Horta
Mestra em Educação Matemática
Especialista em Ensino e Tecnologias Educacionais
Linha de investigação: Formação de Professores de Matemática
alexsandra.horta@aluno.ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3893-877X
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Peçanha, Brasil.

José Fernandes da Silva
Doutor em Educação Matemática
Mestre em Educação
Linha de Investigação: Formação de Professores de Matemática
jose.fs@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5798-5379
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Guanhães, Brasil.

Como citar o artigo:

HORTA, A. B.; SILVA, J. F. Investigação da Faceta Interacional do Conhecimento Didático-Matemático no contexto do Programa Residência Pedagógica: um olhar para as interações entre Preceptor e Residentes. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 481 - 508. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p481-508.id1403

Desafíos experimentados al detallar el análisis de las conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde una visión ontosemiótica

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto
crodrigu79@cuc.edu.co
http://orcid.org/0000-0001-9922-4079
Universidad de la Costa (CUC)
Barranquilla, Colombia.

Vicenç Font Moll
vfont@ub.edu
http://orcid.org/0000-0003-1405-0458
Universidad del Barcelona (UB)
Barcelona, España.

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez
flor.rodriguez@uagro.mx
http://orcid.org/0000-0002-9596-4253
Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro)
Chilpancingo, México.

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

Desde una visión ontosemiótica se analizaron las conexiones matemáticas y etnomatemáticas a partir de tres desafíos. Teóricamente se usó la articulación entre la Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) y el Enfoque Ontosemiótico (EOS). La metodología fue cualitativa donde participaron estudiantes universitarios de licenciatura en matemáticas, un artesano de cometas y un profesor de matemáticas en servicio. Los datos se recolectaron a través de cuestionarios, producciones escritas, entrevistas semiestructuradas y la observación participante. El análisis de datos se entiende a manera de tres desafíos: en el primero se analizaron las conexiones matemáticas de los estudiantes cuando resuelven problemas sobre la recta tangente y derivada; en el segundo desafío se analizaron las conexiones etnomatemáticas evidenciadas en la elaboración de cometas por un artesano que usa unidades de medidas convencionales y no convencionales y nociones geométricas; en el tercer desafío se analizaron las conexiones etnomatemáticas y matemáticas activadas por el profesor en servicio cuando construye la cometa y la usa para explicar la existencia de triángulos isósceles y ángulos opuestos por el vértice. Cabe destacar que las conexiones se detallaron en términos de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas.

Palabras clave: Conexiones matemáticas y etnomatemáticas. Enfoque ontosemiótico. Recta tangente. Cometas.

Desafios vivenciados ao detalhar a análise das conexões matemáticas e etnomatemáticas a partir de uma perspectiva ontossemiótica

Resumo

A partir de uma perspectiva ontossemiótica, as conexões matemáticas e etnomatemáticas foram analisadas a partir de três desafios. Teoricamente, foi utilizada a articulação entre a Teoria Expandida das Conexões (TAC) e a Abordagem Ontossemiótica (OSA). A metodologia foi qualitativa com a participação de universitários formados em matemática, artesão de pipas e um professor de matemática em serviço. Os dados foram coletados por meio de questionários, produções escritas, entrevistas semiestruturadas e observação participante. A análise dos dados é compreendida na forma de três desafios: no primeiro, foram analisadas as conexões matemáticas dos alunos ao resolverem problemas de retas tangentes e derivadas; No segundo desafio, foram analisadas as conexões etnomatemáticas evidenciadas na elaboração de pipas por uma artesã que utiliza unidades de medida convencionais e não convencionais e noções geométricas; no terceiro desafio, foram analisadas as conexões etnomatemáticas e matemáticas ativadas pelo professor em serviço quando constrói a pipa e a utiliza para explicar a existência de triângulos isósceles e ângulos opostos ao vértice. Deve-se notar que as conexões foram detalhadas em termos de práticas, processos, objetos e funções semióticas.

Palavras chave: Conexões matemáticas e etnomatemáticas. Abordagem Ontossemiótica. Reta tangente. Pipa.

Challenges experienced when detailing the analysis of mathematical and ethnomathematical connections from an onto-semiotic perspective

Abstract

From an onto-semiotic perspective, mathematical and ethnomathematical connections were analyzed based on three challenges. Theoretically, the articulation between the Extended Theory of Connections (ETC) and the Onto-semiotic Approach (OSA) was used. The methodology was qualitative with the participation of university students with a degree in mathematics, a kite craftsman and an in-service mathematics teacher. Data was collected through questionnaires, written productions, semi-structured interviews, and participant observation. Data analysis is understood in the form of three challenges: in the first, the students' mathematical connections were analyzed when they solve problems on the tangent and derivative lines; In the second challenge, the ethnomathematical connections evidenced in the elaboration of kites by an artisan who uses conventional and non-conventional units of measurement and geometric notions were analyzed; In the third challenge, the ethnomathematical and mathematical connections activated by the teacher in service when he builds the kite and uses it to explain the existence of isosceles triangles and angles opposite by the vertex were analyzed. It should be noted that the connections were detailed in terms of practices, processes, objects, and semiotic functions.

Keywords: Mathematical and ethnomathematical connections. Onto-semiotic approach. Tangent line. kites.

Introducción

En la investigación en Educación Matemática se vienen desarrollando trabajos relacionados con la articulación de teorías, lo cual permite mejorar los análisis realizados a fenómenos o problemáticas de teorías o bien, de estudiantes y/o profesores en el aula de clases de matemáticas (BIKNER-AHSBAHS, 2022; PREDIGER et al., 2008; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023). Además, se reconoce que debido a las diferentes problemáticas y complejidad de los objetos matemáticos es que han emergido muchos enfoques, modelos y marcos teóricos para analizar y dar respuestas coherentes a dichas problemáticas, asumiendo que, en algunos casos es imprescindible analizar desde dos o más lentes teóricos (FONT, 2016; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a).

Estructurar y desarrollar articulaciones teóricas (*en inglés: networking of theories*) es un gran desafío porque inicialmente el investigador o los investigadores deben comprender las teorías como un primer par de estrategias del proceso, luego, transitar por tres pares de estrategias referidas a comparar y contrastar, coordinar y combinas e integrar y sintetizar (KIDRON; BIKNER-AHSBAHS, 2015). Con estas redes teóricas se han suministrado ejemplos importantes donde se discuten los beneficios, posibles dificultades y limitaciones de un enfoque multiteórico (BIKNER-AHSBAHS; VOHNS, 2019).

En este contexto, en la extensa agenda de investigación se han realizado articulaciones teóricas, entre las que se destacan los aportes de Boero et al. (2002) quienes mencionaron que, el interés por hacer networking of theories se debe a dos complejidades: 1) de los objetos matemáticos y 2) su enseñanza y aprendizaje. Otros investigadores argumentan que, otro interés por articular teorías es que los datos recolectados por algún investigador en algunos casos se vuelven difíciles de analizar con una sola mirada teórica (ARZARELLO; OLIVERO, 2006; FONT, 2016). Por su parte, Radford (2008) manifestó que, antes de articular las teorías es importante saber qué es y cómo se estructura una teoría como una visión tripartita referida a principios teóricos, metodologías y preguntas de investigación.

También, se ha reconocido que varios investigadores han contribuido a la literatura con los pares de estrategias que deben seguirse para hacer networking of theories, el primer par de estrategias se refiere a la comprensión de las teorías y la interpretación y la lectura profunda es muy común cuando los investigadores son principiantes, de lo contrario es más rápido encontrar conexiones. El segundo par de estrategias es la comparación entre teorías desde sus principios hasta las preguntas paradigmáticas. El tercer par de estrategias permite buscar lo más común entre las teorías que conduce a la coordinación o complementariedad. Finalmente, el cuarto par de estrategias (integración (local) y síntesis (local)) se enfoca en el equilibrio entre teorías, reducción de herramientas (partes de la teoría) para consolidar aquellas que se articulan y funcionan consistentemente (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010; 2014; KIDRON; BIKNER-AHSBAHS, 2015). Bosch et al. (2017) vincularon diálogos entre la teoría antropológica de la didáctica y la teoría APOE para analizar la noción de praxeología. Bikner-Ahsbahs (2022) investigó sobre la instrucción adaptativa por medio de una lección para promover le razonamiento covariacional en estudiantes y considerando simultáneamente una estructura de argumentación colectiva.

Específicamente las articulaciones teóricas con el Enfoque Ontosemiótico, se han desarrollado en Font et al. (2011) quienes integraron el EOS, la teoría APOE y la Ciencia Cognitiva de las Matemáticas para usar de forma mejorada la noción de objeto porque la asumen de manera similar. Drijvers et al. (2013) articularon las herramientas teóricas y metodológicas del EOS con la Teoría de la Génesis Instrumental para detallar el análisis de un episodio sobre álgebra computacional para el aprendizaje del concepto de parámetro. Font et al. (2016) articularon la teoría APOE con el EOS para contrastar y refinar la noción de objeto, es decir, primero propusieron una descomposición genética de la derivada y luego, la analizaron por medio de los principios teóricos y metodológicos del EOS. En otra investigación se consideraron importantes las representaciones de los objetos matemáticos y Pino-Fan et al. (2017) articularon la teoría de registros de representación semiótica (TRRS) con el EOS para analizar la actividad matemática asociada a la resolución de problemas la derivada de la función valor absoluto, enfatizando en los procesos de tratamientos y conversiones entre los registros de representación.

Con base en los resultados de Font et al. (2016), otros investigadores como Borji et al. (2018) y Borji et al. (2019) usaron de forma combinada las herramientas del EOS y la teoría APOE para detallar la noción de la gráfica de la derivada y el tratamiento de las coordenadas polares. Godino et al. (2020) exploraron las complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el EOS, las cuales comparten en que es importante destacar los principios teóricos y socioculturales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, trabajaron la noción de gráfico cartesiano. Ledezma et al. (2022) articularon el ciclo de modelación matemática y el EOS donde encontraron que ambos marcos se complementan para analizar en profundidad los procesos de modelado matemático de un sujeto, especificando que con el EOS se evidencian las fases en que se mueve el ciclo de modelación como un conglomerado de prácticas matemáticas, procesos/objetos primarios desencadenados en la actividad matemática. Para mayor profundidad sobre las investigaciones sobre articulaciones teóricas, se invita a consultar la revisión de la literatura sobre dicha temática desde el 2002 hasta el 2022 (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022b).

Es oportuno mencionar que, en esta investigación el interés es el análisis de conexiones matemáticas que en algunas investigaciones se habían trabajado como categorías consideradas en un análisis temático inductivo y deductivo (CAMPO-MENESES; GARCÍA-GARCÍA, 2020; DOLORES-FLORES; GARCÍA-GARCÍA, 2017; GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019; MHLOLO et al., 2012; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2020). Pero, realizando algunas discusiones teóricas entre investigadores especialistas del enfoque ontosemiótico y las conexiones matemáticas se llegó al consenso de que las conexiones matemáticas deberían ser detalladas minuciosamente en cuanto a su conformación, debido a que no solo es mencionar el tipo de conexión sino de dónde provienen y cómo se constituyen de acuerdo con la actividad matemática donde emergen objetos matemáticos que se relacionan. Además, en Rodríguez-Nieto et al. (2020) se identificaron ambigüedades para analizar las conexiones referidas a: 1) en un extracto de la transcripción se pueden visualizar varios tipos de conexiones simultáneamente y 2) en algunos extractos de entrevistas no se identificaba alguna categoría de conexión, sino que se requería de una categoría de conexión. Por ello, surgieron algunas investigaciones de carácter teórico prácticas fundamentadas en el networking of theories para solucionar dicha problemática y conformar la Teoría Ampliada de las Conexiones matemáticas (TAC) (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022b; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023).

A pesar de que se han realizado investigaciones previas para mejorar el análisis de las conexiones matemáticas y etnomatemáticas (RODRÍGUEZ-NIETO; ESCOBAR-RAMÍREZ, 2022; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023), en la presente investigación se reportan los principales desafíos experimentados para analizar conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde la articulación de la TAC y el EOS.

1. Fundamentación teórica

1.1 Teoría Ampliada de las Conexiones

Las conexiones matemáticas no son una temática nueva y se han venido estudiando desde hace varios años para mejorar los procesos de comprensión matemática (HIEBERT;

CARPENTER, 1996; NCTM, 2000). Businskas (2008) en su tesis doctoral las define como “una relación verdadera entre dos ideas matemáticas, A y B” (p. 18). En otras investigaciones se han entendido como “un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real” (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2018, p. 229). Las conexiones matemáticas se clasifican en dos grandes grupos: las conexiones extramatemáticas e intramatemáticas (DOLORES-FLORES; GARCÍA-GARCÍA, 2017, p. 161). En este trabajo solo se describen las conexiones intramatemáticas (Tabla 1).

Tabla 8 - Descripción de las categorías de conexiones matemáticas de la TAC

Categoría de conexión	Descripción
Modelado	Son relaciones entre las matemáticas y la vida real y se evidencian cuando el sujeto resuelve problemas no matemáticos o de aplicación donde tiene que plantear un modelo o expresión matemática (EVITTS, 2004).
Representaciones diferentes	Se identifican cuando el sujeto representa los objetos matemáticos usando representaciones equivalentes y alternas. Las equivalentes son transformaciones de representaciones de un mismo registro y las alternas se refieren a representaciones de un mismo objeto donde se cambia el registro en el cual fueron formadas (BUSINSKAS, 2008).
Procedimental	Se identifican cuando un sujeto usa reglas, algoritmos o fórmulas para o resolver una tarea matemática. Son de la forma: A es un procedimiento para trabajar con un concepto B (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019).
Parte-todo	Se presenta cuando el individuo realiza alguna de las siguientes relaciones lógicas: 1) La relación de generalización es de la forma A y es una generalización de B y B es un caso particular de A (BUSINSKAS, 2008); 2) La relación de inclusión viene dada cuando un concepto matemático está contenido en otro.
Implicación	Se identifica cuando un concepto P conduce a otro concepto Q por medio de una relación lógica ($P \rightarrow Q$) (BUSINSKAS, 2008).
Característica	Se identifica cuando la persona expresa algunas características de los conceptos o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que lo hacen diferentes o similar a los otros.
Reversibilidad	Se presentan cuando un sujeto empieza desde un concepto A para obtener un concepto B e invierte el proceso, es decir, empieza desde B para obtener A (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019).
Significado	Se identifica cuando un sujeto da sentido a un concepto matemático, es decir, el sujeto menciona lo que significa para él el concepto. Incluye aquellos casos en los que un estudiante da una definición que ha construido para un concepto (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019).
Metafórica	Se entienden como la proyección de las propiedades, características, etc. Un dominio conocido para estructurar otro dominio menos conocido o abstracto (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2020).

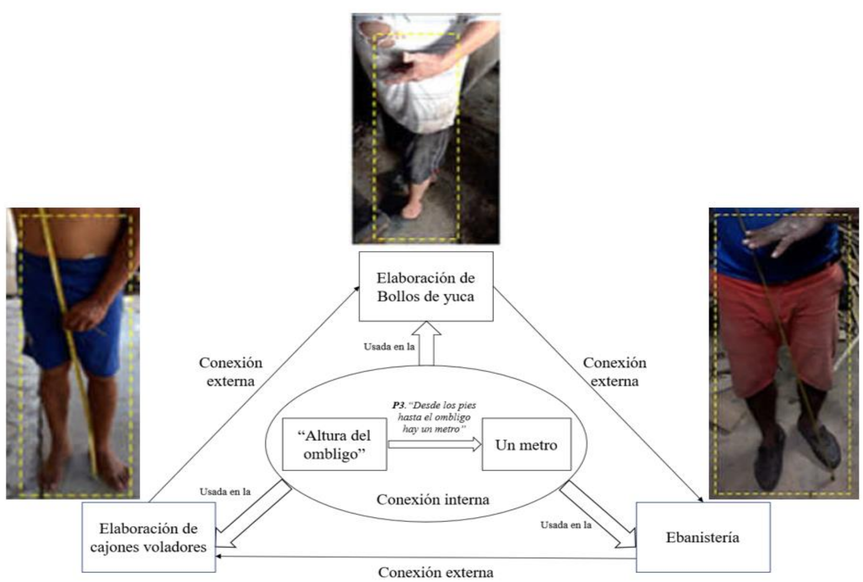
Fuente: Elaboración basada en Evitts (2004), Businskas (2008), García-García; Dolores-Flores (2019) y Rodríguez-Nieto et al. (2020).

1.2 Conexiones etnomatemáticas

La conexión etnomatemática se entiende como la relación entre los conocimientos matemáticos usados por las personas en las prácticas cotidianas y las matemáticas institucionalizadas o públicas que se encuentran en los libros de texto y conocidas científicamente (RODRÍGUEZ-NIETO, 2021). Este tipo de conexiones etnomatemáticas se han clasificado en internas, externas y de significado etnomatemático (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2023). La conexión interna se refiere a “las relaciones que hace un sujeto entre unidades de medidas (convencional o no convencional) de un mismo sistema de medida usado en una práctica cotidiana, considerando equivalencias y conversiones” (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, p. 12), y una conexión externa “se promueve cuando una unidad de medida (convencional o no convencional) es usada de manera similar en diferentes sistemas de medidas de prácticas cotidianas distintas” (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, p. 26).

La conexión de significado etnomatemático se identifica cuando una persona atribuye un sentido a un concepto matemático u objeto haciendo una relación de expresión-contenido, emitiendo lo que significa para él un objeto cultural o artefacto, una medida, un diseño, entre otras actividades universales, en función de la práctica cotidiana (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020). En la Figura 1 se presentan las conexiones internas y externas realizadas por personas que elaboran bollos, muebles y cajones (prácticas diferentes – conexión externa) y usan de manera similar una medida de la altura del ombligo equivalente a un metro (conexión interna).

Figura 1 - Ejemplo de conexiones internas y externas.



Fuente: Tomado de Rodríguez-Nieto (2020, p. 27).

Las conexiones etnomatemáticas favorecen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde tres aspectos:

> 1) Las conexiones etnomatemáticas son relevantes porque primero se valora la matemática en la práctica diaria que realiza una persona y luego el investigador identifica la conexión y la vincula con la matemática institucionalizada. 2) Las conexiones etnomatemáticas pueden favorecer la comprensión de conceptos matemáticos considerando que el estudiante resuelve problemas matemáticos basados en la vida real y, a su vez, se comparten las sugerencias sobre conexiones de los organismos curriculares (…). 3) Las conexiones etnomatemáticas no solo pueden reconocerse en una sola práctica cotidiana, sino en varias, del mismo contexto sociocultural o de diferentes pueblos, regiones o países, evitando el aspecto local de las etnomatemáticas cuando se enfatiza en una sola práctica cotidiana (RODRÍGUEZ – NIETO; ESCOBAR-RAMÍREZ, 2022, p. 998-999).

1.3 Enfoque Ontosemiótico

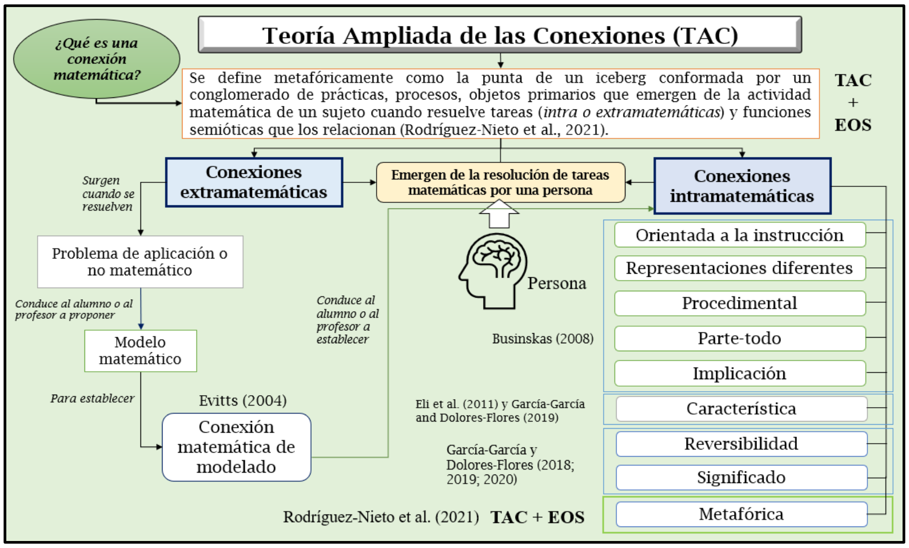
Una de las acciones fundamentales del EOS es describir la *actividad matemática* desde una perspectiva institucional o personal, la cual se modela en términos de prácticas y de configuración de *objetos primarios* y procesos que son activados en dichas prácticas (FONT et al., 2013). Tales prácticas, que en adelante llamaremos *prácticas matemáticas*, son aquellas situaciones o expresiones (verbal, gráfica, simbólica) que un individuo realiza para resolver algún problema matemático, comunicar la solución que obtuvo, así como validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (GODINO; BATANERO, 1994).

En las *prácticas matemáticas* intervienen seis *objetos primarios*: 1) situaciones problemas, 2) elementos lingüísticos, 3) conceptos/definiciones, 4) proposiciones/propiedades, 5) procedimientos y, 6) argumentos. Además, los *objetos primarios* que emergen pueden ser de tipo personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, intensivos o extensivos y de contenido o expresión, es decir, pertenecer a alguna de las cinco dualidades (GODINO et al., 2007). La *configuración de objetos primarios* se conforma de las conexiones entre *objetos primarios* y puede ser institucional (*epistémica*) o personal (*cognitiva*). La *configuración epistémica* es el sistema de objetos primarios que, desde una perspectiva institucional están involucrados en las prácticas matemáticas llevadas a cabo para resolver un problema específico y la *configuración cognitiva* es el sistema de objetos matemáticos primarios que un sujeto moviliza como parte de las prácticas matemáticas desarrollas para resolver un problema específico (GODINO et al., 2019).

A través de la activación de procesos matemáticos primarios como la comunicación, el planteamiento de problemas, la definición, la enunciación, la elaboración de procedimientos (algoritmos, rutinas, ...) y la argumentación, es que emerge el conjunto de objetos primarios. Tales procesos matemáticos se derivan de la aplicación de la perspectiva proceso-producto a dichos objetos primarios, es decir, se derivan al aplicar la dualidad proceso producto a las cinco dualidades, de tal forma que se obtienen las siguientes relaciones: personalización-institucionalización; síntesis-análisis; representación-significado; materialización-idealización; generalización-particularización (FONT et al., 2013; FONT et al., 2016; GODINO et al., 2007). De acuerdo con Godino et al. (2007), la resolución de problemas y el modelado matemático deben considerarse más bien como "hiperprocesos" matemáticos que combinan algunos de los procesos mencionados.

Finalmente, se debe considerar la noción de *función semiótica*, la cual permite asociar las prácticas con los objetos y procesos que se activan y admite construir una noción operativa del conocimiento, significado, comprensión y competencia (GODINO et al., 2007). Font (2007) caracteriza una *función semiótica* como una relación triádica entre un antecedente (expresión/objeto inicial), un consecuente (contenido/objeto final) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Las *funciones semióticas* se infieren cuando se mira la actividad matemática desde la dualidad expresión/contenido. La noción de *función semiótica* (EOS) es más general que la noción de conexión matemática (TAC), dado que las conexiones se consideran casos particulares de *funciones semióticas* de carácter personal o institucional. En la TAC la conexión matemática puede ser verdadera o no, dejando ver desde la perspectiva del EOS que, cuando un sujeto hace una conexión correcta coincide con la institucional y cuando es incorrecta es de tipo personal (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a). En la Figura 2 se presenta la síntesis de la TAC y las aportaciones de las herramientas del EOS.

Figura 2 - Síntesis y funcionamiento de la TAC.



Fuente: Tomado de Rodríguez-Nieto et al. (2022b).

2. Metodología

Esta investigación es cualitativa (COHEN et al., 2018) motivada por mostrar los desafíos afrontados para detallar el análisis de conexiones matemáticas y etnomatemáticas. Además, se desarrolló en tres etapas de la siguiente manera: 1) se seleccionaron tres tipos de participantes para explicar los desafíos, específicamente, futuros profesores de matemáticas que cursaban la asignatura de Didáctica del Cálculo, un artesano que elabora cometas y un profesor de matemáticas. 2) la recolección de datos se desarrolló en tres momentos, uno por cada participante. En el primero se implementó una tarea para que los estudiantes la resolvieran a lápiz y papel o en algún tablero digital; en el segundo se hizo una entrevista semiestructurada al artesano y en el tercer momento se realizó una observación participante al profesor en el aula de clases. En la etapa 3 se analizaron los datos por participante siguiendo el método de análisis propuesto en el networking entre la TAC y el EOS (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a).

2.1 Participantes y contexto

En esta investigación se presentan contextos de reflexión donde participaron veintinueve futuros profesores de matemáticas (quince hombres y catorce mujeres con edad promedio de 20 años) que cursaban la asignatura de Didáctica del Cálculo (correspondiente al octavo semestre de diez en total) en una Universidad pública del norte de Colombia. Estos futuros profesores fueron seleccionados porque en su formación académica habían cursado Cálculo diferencial e integral, geometría analítica y ecuaciones diferenciales, lo cual es evidencia de que ellos podrán resolver la tarea planteada. Además, se seleccionó un artesano que elabora cometas o papalotes con 66 años y 48 años de experiencia laboral. Es una persona que se dedica a la carpintería y es cocinero. Por último, participó un profesor de matemáticas con 28 años quien trabaja las conexiones etnomatemáticas en el aula de clases.

2.2 Recolección de datos

Para recolectar los datos se consideraron tres momentos para cada uno de los participantes: *Momento 1*: el primer autor de la investigación implementó una tarea a los estudiantes que consistió en: a) hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 5x + 2$ en el punto de con abscisa *x=-1*, b) dibujar la gráfica de la función $f(x)$ y de la recta tangente. A los futuros profesores se les sugirió resolver la tarea en papel y lápiz o usando algún tablero digital como *metamoji note lite*, *jamboard* o herramientas como *power point*, *word*, *Excel*, *etc.*, debido a que en esa época (inicios del año 2021) la pandemia generada por la COVID-19 condicionó a que las clases se desarrollaran de manera virtual por meet (Figura 2a). *Momento 2*: Se realizó una entrevista semiestructurada a un artesano del municipio de Baranoa, Atlántico, Colombia que construye cometas para diversión, quien explicó paso a paso para la elaboración de una cometa de tres varillas o cañas donde se evidenció un potencial matemático y geométrico (Figura 2b). *Momento 3*: A través de la observación participante (COHEN ET AL., 2018) se videograbó una parte de la clase de un profesor de matemáticas del municipio de Baranoa, Atlántico, Colombia que implementa las conexiones etnomatemáticas en la elaboración de cometas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación secundaria (Figura 2c).

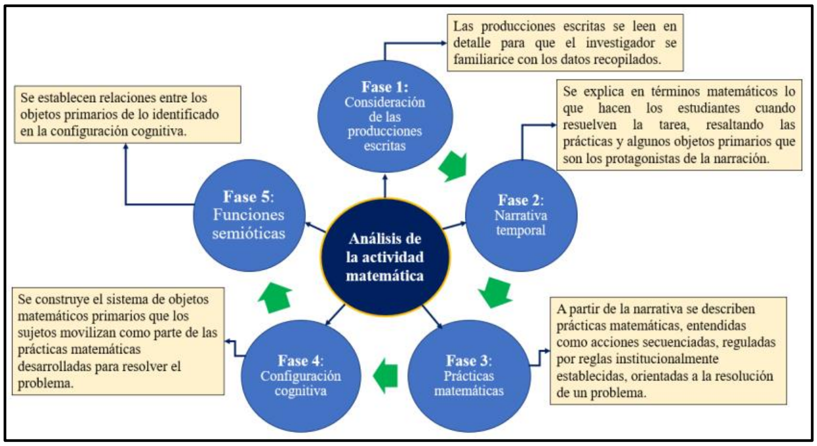
Figura 10 - Evidencia de los participantes de la investigación.

Fuente: Elaboración de los autores.

2.3 Análisis de datos

Los datos obtenidos en los tres momentos de recolección fueron analizados por medio del uso del método de análisis que resultó de la articulación entre la TAC y el EOS (GODINO et al., 2019; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022a), ver Figura 3. Cabe destacar que, cada uno de los análisis que se presentarán en la sección de resultados revelan los desafíos experimentados para analizar conexiones en tres contextos diferentes.

Figura 11 - Fases para analizar la actividad matemática.



Fuente: Elaboración de los autores.

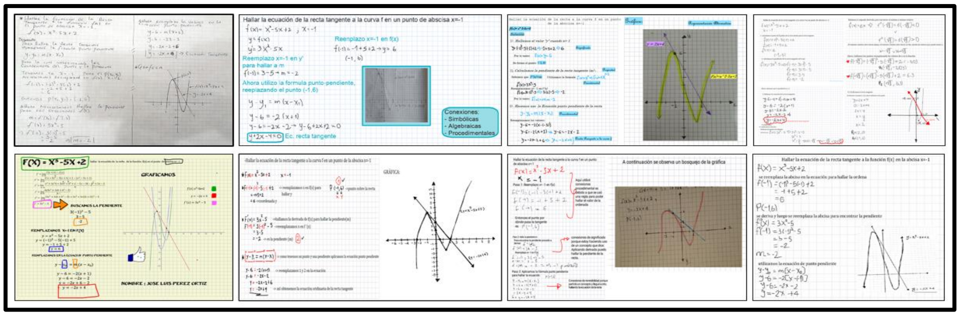
En la Fase 5 del análisis presentado en la Figura 3 se observan las conexiones matemáticas establecidas por los estudiantes, pero después se detallan en términos de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas. De igual manera se analizaron los datos suministrados por el artesano de cometas y el profesor de matemáticas.

4. Resultados

4.1 Primer desafío

En el primer momento se organizaron y leyeron las producciones escritas con el fin de comprender la información o respuestas de los participantes a la tarea propuesta (Figura 4).

Figura 12 - Organización y lectura de algunas respuestas de los futuros profesores.



Fuente: Elaboración de los autores.

A partir de las producciones escritas se construyen las narrativas temporales de los participantes. En este caso, solo se presentará la narrativa de los futuros profesores (E1 y E2) en una sola redacción porque coinciden en la mayor parte del procedimiento implementado y también por limitaciones de espacio y contenido.

Narrativa temporal de E1 y E2

Se le propuso la tarea a E1 y E2 donde se le pidió encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = -1$. E1 y E2 leyeron y comprendieron la tarea y primero escribieron que utilizarán la ecuación punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) como requisito fundamental. Luego, encontraron la ordenada (y) evaluando la función f en $x = -1$ y haciendo operaciones aritméticas y algebraicas equivalentes, obteniendo $y = 6$ y simultáneamente escribió que el punto $P(x_0, y_0)$ "de tangencia" es igual a $P(-1, 6)$. Después E1 y E2 manifestaron que se debe hallar la pendiente m y para ello, derivaron la función f usando implícitamente la fórmula para derivar la función potencia $(x^n)' = nx^{n-1}$ consiguiendo $f'(x) = 3x^2 - 5$ que les fue útil para reemplazar $x = -1$ en f' para hallar $m = -2$. Siguiendo el proceso de resolución, E1 y E2 reemplazaron el valor de la pendiente y las coordenadas del punto $P(-1, 6)$ en la fórmula punto-pendiente $y - 6 = -2(x + 1)$ y aplicando la propiedad distributiva obtuvieron la expresión equivalente $y - 6 = -2x - 2$ a la cual aplicaron el despeje de la variable y (que implícitamente es aplicar el inverso aditivo de -6), para conseguir la ecuación de la recta en su forma explícita: $y = -2x + 4$. Seguidamente, E1 y E2 representaron la función gráficamente con el objetivo de verificar el procedimiento algebraico. En este contexto, E1 y E2 dibujaron un plano de coordenadas cartesianas y construyeron dos tablas de valores una para f y otra para la ecuación de la recta tangente $y = -2x + 4$.

Posteriormente, dibujaron la gráfica de f y de la recta tangente con los puntos obtenidos en la tabla de valores. Por último, concluyeron que encontraron la ecuación de la recta tangente.

Prácticas matemáticas (Pm) de E1 y E2

Se caracterizan por ser las acciones secuenciadas realizadas por la persona (E1 y E2 en este caso), las que se describen a continuación.

Pm1. E1 y E2 leyeron y comprendieron la tarea propuesta.

Pm2. Mencionaron que usan la ecuación punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) para buscar la ecuación de la recta tangente a la curva.

Pm3. Encontraron la ordenada (y) evaluando la función f en $x = -1$ y haciendo operaciones aritméticas y algebraicas equivalentes, obteniendo $y = 10$.

Pm4. Escribieron que el punto (de tangencia) $P(x_0, y_0)$ es igual a $P(-1, 6)$.

Pm5. Derivaron la función f usando implícitamente la fórmula para derivar la función potencia $(x^n)' = nx^{n-1}$ consiguiendo $f'(x) = 3x^2 - 5$.

Pm6. Sustituyeron $x = -1$ en f' para hallar $m = -2$.

Pm7. Utilizaron la fórmula punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) para obtener la ecuación de la recta. Para ello, sustituyeron los valores de $x_0 = -1$, $y_0 = 6$ y la pendiente $m = -2$ en la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Pm8. Realizaron operaciones algebraicas para obtener expresiones equivalentes (aplicación de inversos aditivos) y hallar la ecuación de la recta en su forma explícita: $y = -2x + 4$.

Pm9. Posteriormente, E1 y E2 dibujaron un sistema de coordenadas cartesianas.

Pm10. Construyeron una tabla de valores para hallar los puntos y, para ello, sustituyeron valores de *x* en f para obtener la coordenada en y.

Pm11. Construyeron una tabla de valores para hallar los puntos y, para ello, sustituyó valores de *x* en $y = -2x + 4$ para obtener la coordenada en y.

Pm12. Ubicaron los puntos proporcionados en la tabla de f.

Pm13. Dibujaron la gráfica de f.

Pm14. Ubicaron los puntos proporcionados en la tabla de $y = -2x + 4$.

Pm15. Dibujaron la gráfica de $y = -2x + 4$.

Pm16. Dado que la recta tangente se aproxima mucho a la gráfica de la función o pasa por el punto (-1, 6), concluyeron que han calculado la ecuación de la recta tangente.

Configuración de objetos primarios

Teniendo en cuenta las acciones secuenciadas realizadas por E1 y E2, se construye la configuración cognitiva de objetos primarios (ver Tabla 2).

Tabla 9 - Estructura de la Configuración cognitiva de E1 y E2.

Situación problema/Tarea

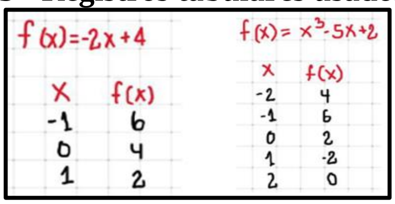
T1: a) hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 5x + 2$ en el punto de con abscisa $x = -1$.
T2: b) dibujar la gráfica de la función $f(x)$ y la recta tangente.

Elementos lingüísticos

***Verbal*: punto, punto de tangencia, función, línea recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, derivada en un punto, ecuación punto-pendiente…**

***Tabular:* con los registros tabulares los estudiantes construyen las gráficas tanto de la función como de la derivada (ver Figura 5).**

Figura 13 - Registros tabulares usados por P2.



$f(x)=-2x+4$

X	f(x)
-1	6
0	4
1	2

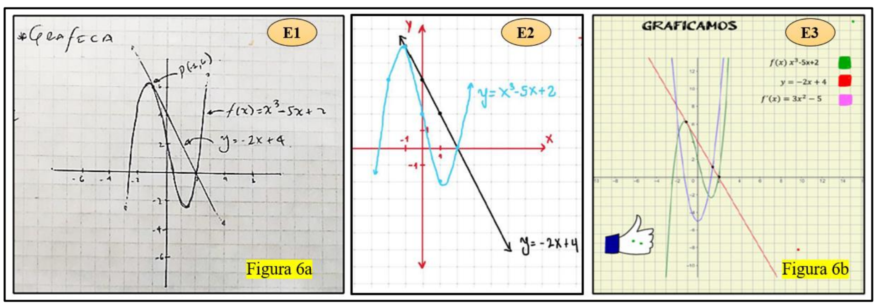
$f(x)=x^3-5x+2$

x	f(x)
-2	4
-1	6
0	2
1	-2
2	0

Fuente: Elaboración de los autores.

***Gráfico*: ver Figura 6a en Figura 6.**

Figura 14 - Representación gráfica de la función y la ecuación de la recta tangente.



Fuente: Elaboración de los autores.

De igual manera, los otros participantes como E3 hicieron representaciones gráficas y simbólicas, pero con el software GeoGebra (Figura 6b en Figura 6).

***Simbólico*: $f(x) = x^3 - 5x + 2, x = -1, f'(x) = 3x^2 - 5, x = -1;\ y = 6, P = (x_0, y_0) = (-1, 6)$, $y - y_0 = m(x - x_0), m = f'(x_0) = f'(-1), f(-1) = 3(-1)^2 - 5, m = -2$, entre otros.**

Conceptos/Definiciones

***Conceptos previos*: punto, recta, gráfica, función, ecuación, recta tangente, derivada, derivada en un punto, punto de tangencia, …**
D1: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.
D2: la recta tangente es la recta que un entorno del punto de tangencia más se aproxima a la gráfica de $f(x)$.

Proposiciones/Propiedades

***Proposiciones previas: afirmaciones sobre el uso de* propiedades asociativa, distributiva y conmutativa del álgebra.**
Pr1: el punto $P = (x_0, y_0) = (-1, 6)$ es el punto de tangencia.
Pr2: la derivada en $x = -1$ es igual a -2.
Pr3: la pendiente de la recta tangente es $m = -2$.
Pr4: la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es $y = -2x + 4$.

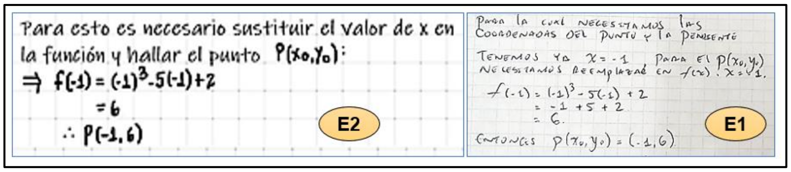
Procedimientos

***Procedimiento principal:* Cálculo de la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 5x + 2$ en un punto.**

Procedimientos auxiliares:

Pc1: Evaluar la función f en $x = -1$ y haciendo operaciones aritméticas y algebraicas equivalentes, para obtener $y = 10$ (ver Figura 7).

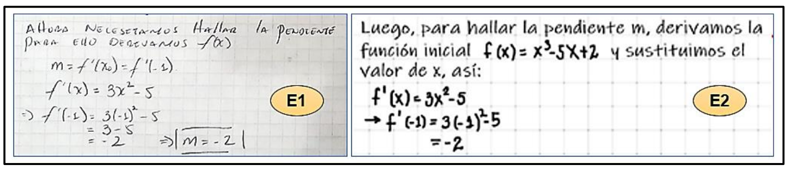
Figura 15 - Evidencia de la evaluación de la función para encontrar el punto de tangencia y la pendiente.



Fuente: Elaboración de los autores.

Pc2: Calcular la derivada de una función de tercer grado (ver Figura 8).

Figura 16 - Evidencia escrita del cálculo de la derivada.

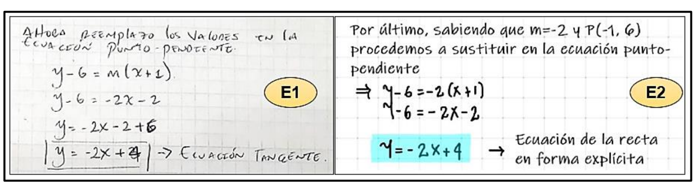


Fuente: Elaboración de los autores.

Después de hallar la derivada se realizan otros procedimientos importantes para encontrar la ecuación de la recta tangente.

Pc3: Encontrar la ecuación de la recta utilizando la fórmula punto pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$) (ver Figura 9).

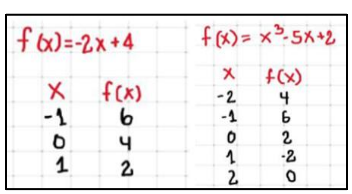
Figura 17 - Evidencia escrita del cálculo de la pendiente usando la ecuación punto pendiente, la pendiente y el punto de tangencia.



Fuente: Elaboración de los autores.

Pc4. Representación de una función a partir de una tabla de valores (ver Figura 10).

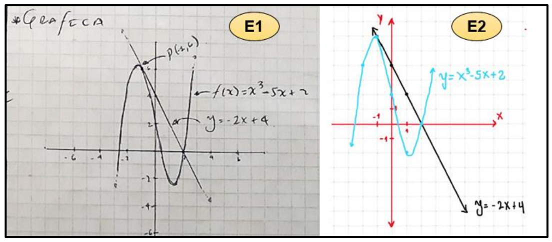
Figura 18 - Representación de la función a través de una tabla de valores y puntos.



Fuente: Elaboración de los autores.

Pc5. Representación gráfica de la función y de la recta tangente (ver Figura 11).

Figura 19 - Representación gráfica de la función y recta tangente.



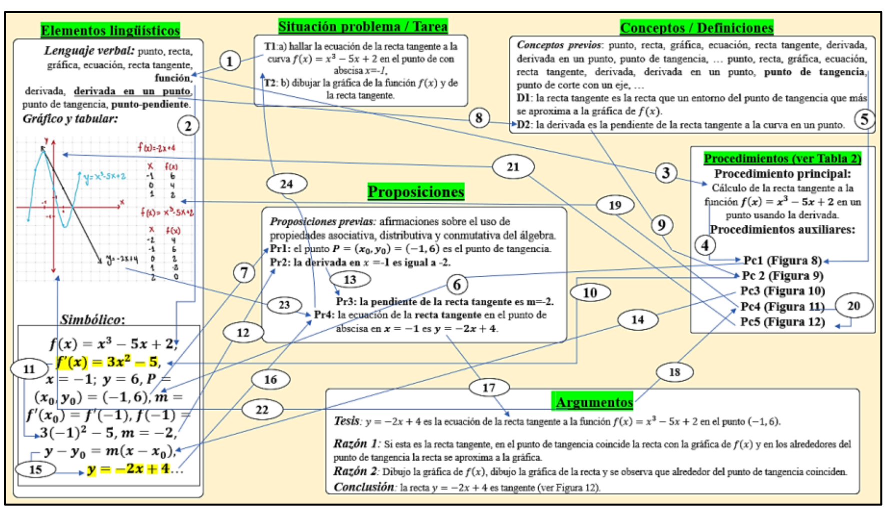
Fuente: Elaboración de los autores.

Cabe destacar que, los estudiantes usan conexiones de representación diferentes alternas (gráfico-simbólica) cuando asumen que $y=-2x+4$ y $f(x)=x^3-5x+2$ tienen sus gráficas asociadas.

Argumentos
Tesis: **$y=-2x+4$ es la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x^3-5x+2$ en el punto $(-1,6)$.**
Razón 1: **Si esta es la recta tangente, en el punto de tangencia coincide la recta con la gráfica de $f(x)$ y en los alrededores de dicho punto la recta se aproxima a la gráfica.**
Razón 2: **Dibujo la gráfica de $f(x)$, dibujo la gráfica de la recta y se observa que alrededor del punto de tangencia coinciden.**
Conclusión: **la recta $y=-2x+4$ es tangente (ver Figura 11).**

Luego de elaborar la configuración cognitiva de E1 y E2, se usa la herramienta de función semiótica (FS) para visualizar las relaciones entre los objetos primarios de dicha configuración (Figura 12).

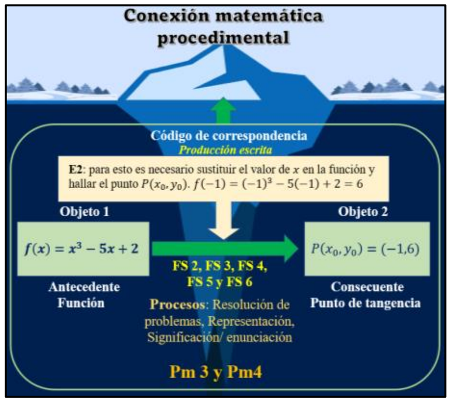
Figura 20 - Funciones semióticas y/o relaciones entre objetos primarios.



Fuente: Elaboración de los autores.

En la Figura 12 se expresan las secuencias las FS enumeradas del 1 al 24 que evidencian las conexiones matemáticas hechas por E2 al resolver la tarea. En este contexto, la Figura 13 se usa como un organizador de los elementos que constituyen a las conexiones matemáticas (en este caso la procedimental) y demostrar la operatividad de la definición de conexión plasmada en el marco teórico donde se dice que una conexión es como la punta de un iceberg.

Figura 21 - Conexión matemática procedimental desde la articulación TAC-EOS.



Fuente: Elaboración de los autores

3.2 Segundo desafío

La TAC fue una motivación sustancial porque permitió dar otra mirada al análisis de los trabajos realizados bajo el programa Etnomatemática (D'AMBROSIO, 2001), porque realmente la etnomatemática es un tipo de conexión entre la cultura y las matemáticas formales o abstractas. Ante esta reflexión (leer con más detalles en RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, 2021), emergió la conceptualización de conexión etnomatemática entendida como la relación entre las matemáticas practicadas por grupos culturales y las matemáticas institucionales o públicas (RODRÍGUEZ-NIETO, 2021). En esta ocasión se muestra una síntesis del análisis ontosemiótico de la práctica cotidiana de una persona que elabora cometas, donde se describen prácticas etnomatemáticas (Pem) como las acciones secuenciadas que realiza el artesano donde involucra sus conocimientos culturales, significados etnomatemáticos relacionados con la matemática institucional. A continuación, se evidencian las Pem seguidas por el artesano.

Pem1: el artesano se propone hacer una cometa de tres varillas.
Pem2: empareja la caña con una cinta y una segueta, teniendo en cuenta la medida a la que se desee hacer la cometa (se mide con un metro o con la cuarta).
Pem3: sacar o cortar las tres cañas (varillas) que conforman una cometa (dos largas o parales), una varilla central. Se miden cinco cuartas para definir el tamaño de la cometa equivalentes a 110 centímetros.
Pem4: enuncia que la cuarta es la medida que uno hace en la cometa, "longitud del dedo pulgar al meñique" abierta la mano.

Pem5: las varillas se redondean y se verifican según su medida. Las dos varillas largas deben tener igual medida, la varilla central debe tener menor medida. Mencionó que después de cortar una varilla larga, esta le sirve para medir la otra y quedan de igual medida (es decir, funciona como patrón de medida).
Pem6: amarra las varillas largas de la cometa ubicando el nudo en la mitad de ellas. Para ellos usó la medida de la pitica o patrón y aseguró que la mitad de la varilla debe medir dos cuartas y media.
Pem7: Para saber para saber cuánto media la cuarta, el artesano tomó la cuarta y la marcó en la varilla, luego tomó la misma medida de la cuarta con la pita y luego, la dobló por la mitad para hallar la media cuarta.
Pem8: ubicó la varilla del centro sobre el nudo de la mitad de las varillas largas y la amarró.
Pem9: Amarró la cometa con pita o nylon verificando que los lados de la cometa tuviesen igual medida, formándose seis triángulos isósceles con dos lados iguales y uno diferente, tres en la parte superior y tres en la parte inferior de la cometa. Para ello usó la medida de la pita.
Pem10: Luego, concluyó que la cometa tiene seis lados y forma un hexágono.
Pem11: Mencionó que para forrar la cometa requiere de papeles, pegante y una tijera.
Pem12: Por último, presentó una comenta haciendo figuras geométricas para adornar el forrado.

Configuración cognitiva basada en la etnomatemática

En esta configuración cognitiva se muestran los objetos primarios que emergieron en las Pem realizadas por el artesano (ver Tabla 3).

Tabla 10 – Configuración cognitiva de objetos primarios emergentes en la elaboración de cometas

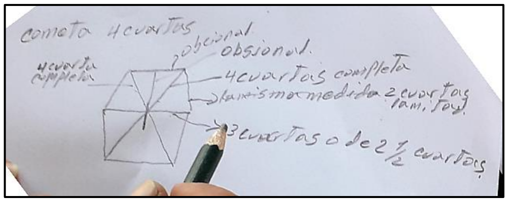
Situación problema/tarea
T: Elaborar una cometa de tres varillas.
Elementos lingüísticos
Verbal: varilla o caña, cuarta, jeme, dedo, metro, pita, cometa, triángulo isósceles, patrón, punto medio, hexágono…
Gráfico: representaciones de la cometa y las medidas (ver Figura 14).

Figura 22 - Representaciones de la cometa y las unidades de medidas.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Simbólico: 5 cuartas, 4 cuartas, 3 cuartas, $2\frac{1}{2}$ cuartas (ver Figura 15).

Figura 23- Representación simbólica de las medidas de las varillas.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Conceptos/Definiciones

Conceptos previos: medir, contar, estimar, figuras geométricas…

D1: Cuarta: es la medida desde el dedo pulgar al dedo meñique

D2: Triángulo isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno diferente

D3: Patrón de medida: unidad de medida que se repite de manera reiterada.

D4: Punto medio: mitad de la varilla donde se ubica el nudo.

D5: Hexágono: figura geométrica plana cerrada conformada por seis lados.

Otros conceptos: pita, cometa, jeme, dedo, metro, …

Proposiciones/propiedades

Proposiciones previas: afirmaciones sobre el uso de unidades de medida y procesos de conteo.

Proposición 1 (Pr1): la medida de las varillas largas de la cometa es de 110 centímetros.

Pr2: el nudo representa la mitad de la varilla larga.

Pr3: En la cometa se evidencian seis triángulos isósceles.

Pr4: la cometa representa un hexágono.

Procedimientos

Procedimiento general: construcción de la comenta con tres varillas.

Procedimiento principal 1 (Pcp1): Encontrar la medida de las varillas.

Procedimiento auxiliar 1 (Pca 1): empareja la caña y luego mide cinco cuartas.

Pcp2: encontrar la mitad de la varilla larga.

Pca2: medir la varilla con una pita y luego, doblarla por la mitad.

Pcp3: estructurar triángulos isósceles en la cometa.

Pca3: al amarrar y unir los extremos de las varillas, simultáneamente se debe verificar que vayan quedando triángulos isósceles (ver Figura 16).

Figura 24 - Conformación de triángulos isósceles medidos con la pitica.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Pcp4: Estructurar la cometa y constituir un hexágono (ver Figura 14).

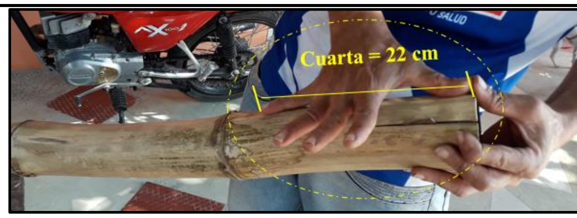
Argumentos

Argumento 1 (A1)

Tesis: las varillas largas de cinco cuartas de la cometa miden 110 centímetros.

Razón 1: Si una cuarta mide 22 centímetros, entonces las varillas de la cometa miden 110 centímetros (ver Figura 17).

Figura 25 - La cuarta es igual a 22 centímetros.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

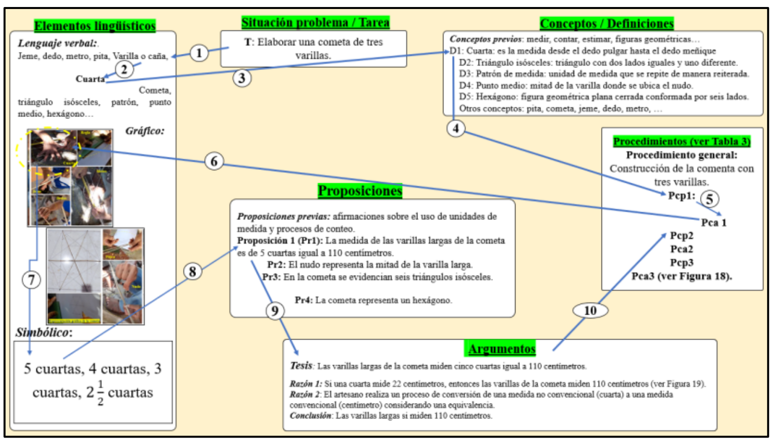
Razón 2: El artesano realiza un proceso de conversión de una medida no convencional (cuarta) a una medida convencional (centímetro) considerando una equivalencia.

Conclusión: Las varillas largas si miden 110 centímetros.

Fuente: Elaboración de los autores

Después de realizar la configuración de objetos primarios del artesano, se procede a relacionar los objetos por medio de funciones semióticas como se presenta en la Figura 18.

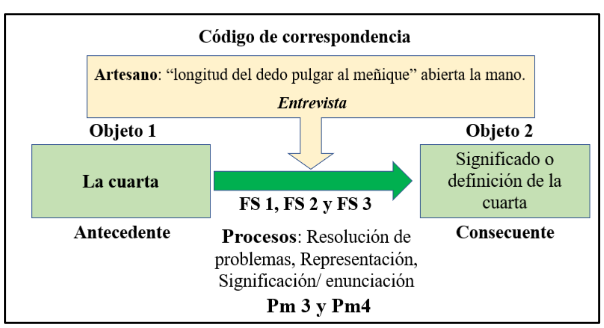
Figura 26 - Funciones semióticas establecidas entre los objetos primarios.



Fuente: Elaboración de los autores

En la Figura 19 solo se consideraron algunas funciones semióticas para evidenciar la relación entre los objetos primarios detallados en la configuración cognitiva. A continuación, se muestra el funcionamiento de la conexión de significado etnomatemático (ver Figura 21).

Figura 27 - Conexión de significado etnomatemático de la cuarta.



Fuente: Elaboración de los autores

3.3 Tercer desafío

Este desafío consiste en el análisis de la práctica de un profesor de matemática que establece conexiones matemáticas y etnomatemáticas en el aula de clases cuando construye cometas con sus estudiantes para trabajar conceptos geométricos. A diferencia de los desafíos anteriores, en el presente desafío se reflexiona en torno a las conexiones matemáticas y etnomatemática simultáneamente porque el profesor participante se ha dedicado a llevar y desarrollar resultados de investigaciones etnomatemáticas con los estudiantes en el aula de clases para obtener una mejor comprensión de los objetos matemáticos a través de artefactos y prácticas cotidianas. Seguidamente se presentan las prácticas etnomatemáticas (Pem) y matemáticas (Pm) del profesor (se omite la narrativa temporal por cuestiones de espacio).

Prácticas etnomatemáticas (Pem)

Pem1: El profesor asume la tarea de explicar la construcción de la cometa.
Pem2: Corta y empareja las varillas (popularmente llamados palitos de chuzo) quintándole las puntas con una tijera.
Pem3: El profesor midió las varillas largas de una cuarta más cuatro dedos y la varilla central una cuarta.
Pem4: Obtiene la varilla central midiendo con los cuatro dedos de la mano, marcó con un lápiz y cortó con la tijera para conseguir la varilla de una cuarta.
Pem5: Mide las varillas largas con una pitica o hilo, lo dobla por la mitad para encontrar el punto medio y nuevamente en la varilla marca con un lápiz.
Pem6: Amarra las varillas largas por la mitad dando veinte vueltas de hilo.
Pem7: Abre las varillas y luego por la mitad amarra la varilla del centro dando diez vueltas de hilo.
Pem8: Amarra las puntas de las varillas y simultáneamente verifica con la pitica que los triángulos formados sean isósceles.
Pem9: el profesor manifiestó a los estudiantes que la cometa representa un hexágono.

Prácticas matemáticas (Pm)

Por medio de la cometa, el profesor de matemáticas explica algunos conceptos geométricos evidenciando las siguientes prácticas matematicas:

Pm1: Explicar que en las cometas existen ángulos opuestos por el vértice.
Pm2: El profesor manifiesta que las cometas son representaciones de hexágonos, es decir, se establece una conexión entre la cometa y el hexágono.
Pm3: Enuncia que en la cometa hay otras figuras geométricas como el triángulo isósceles.
Pm4: Representa la cometa en el tablero y la relaciona con triángulos, por ejemplo, el triángulo AOB con vértices A, O y B y el triángulo EOD con vértices E, O y D.

Pm5: Afirma que la medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales porque son ángulos opuestos por el vértice.
Pm6: Explicó que en la cometa no solo se pueden trabajar ángulos y triángulos sino área, perímetro, entre otros conceptos geométricos.

Una vez se hallan identificado las Pem y Pm, se procede a construir la configuración cognitiva de objetos primarios (ver Tabla 4).

Tabla 11 – Configuración cognitiva de objetos primarios emergentes en la elaboración y explicación de cometas por el profesor

Situación problema/tarea	
T: Elaborar una cometa de tres varillas (prácticas etnomatemáticas).	T: Explicar que en las cometas existen ángulos opuestos por el vértice (prácticas matemáticas).
Elementos lingüísticos	
Verbal: varilla o caña, cuarta, dedo, pita, cometa, triángulo isósceles, punto medio, hexágono…	*Verbal*: varilla o caña, cuarta, dedo, cometa, triángulo isósceles, punto medio, hexágono, vértice, ángulo opuesto por el vértice.
Gráfico: representaciones de la cometa y las medidas (ver Figura 20a).	*Gráfico*: representaciones de las cometas como artefacto y representación del hexágono en la pizarra (ver Figura 20b). *Simbólico*: $m\measuredangle AOB = m\measuredangle EOD$ $\angle AOB \cong \angle EOD$; vértices: A, B, C, E, D y O (ver Figura 20b).

Figura 28 - Representaciones de la cometa.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Simbólico: una cuarta, 4 dedos.	
Conceptos/Definiciones	
Conceptos previos: medir, contar, estimar, figuras geométricas…	Conceptos previos: medir, contar, estimar, figuras geométricas…
D1: Cuarta: es la medida desde el dedo pulgar al dedo meñique.	D1: Cuarta: es la medida desde el dedo pulgar al dedo meñique.
D2: Triángulo isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno diferente	D2: Triángulo isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno diferente
D3: Punto medio: mitad de la varilla donde se ubica el nudo.	D3: Punto medio: mitad de la varilla donde se ubica el nudo.
D4: Hexágono: figura geométrica plana cerrada conformada por seis lados.	D4: Hexágono: figura geométrica plana cerrada conformada por seis lados.

Otros conceptos: pita, cometa, dedo, …	D6: Ángulo opuesto por el vértice: son ángulos opuestos entre sí donde se cruzan dos varillas o líneas rectas. Otros conceptos: pita, cometa, dedo, …
Proposiciones/propiedades	
Proposiciones previas: afirmaciones sobre el uso de unidades de medida y procesos de conteo. Proposición 1 (Pr1): La medida de las varillas largas de la cometa es de una cuarta más cuatro dedos. La varilla central mide una cuarta. Pr2: El nudo representa la mitad de la varilla larga. Pr3: En la cometa se evidencian seis triángulos isósceles. Pr4: La cometa representa un hexágono.	*Proposiciones previas:* afirmaciones sobre el uso de unidades de medida, ángulos, triángulos y procesos de conteo. Pr1: En la cometa se evidencian seis triángulos isósceles. Pr2: La medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales y congruentes. Pr3: La cometa representa un hexágono.
Procedimientos	
Procedimiento general: construcción de la comenta con tres varillas. Procedimiento principal 1 (Pcp1): Encontrar la medida de las varillas. Procedimiento auxiliar 1 (Pca 1): Corta los palillos y luego mide una cuarta y cuatro dedos. Pcp2: Encontrar la mitad de la varilla larga. Pca2: Medir la varilla con un hilo y luego, doblarla por la mitad. Pcp3: Estructurar triángulos isósceles en la cometa. Pca3: Al amarrar y unir los extremos de las varillas, simultáneamente se verifica que vayan quedando triángulos isósceles.	Procedimiento general: Explicar que en las cometas existen ángulos opuestos por el vértice. Pcp1: El profesor manifiesta que las cometas son representaciones de hexágonos. Pca: menciona que la cometa tiene seis lados. Pcp2: Encuentra que en la cometa hay otras figuras geométricas como el triángulo isósceles. Pcp3: Representa la cometa en el tablero y la relaciona con triángulos AOB y EOD. Pcp4: Afirma que la medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales y a su vez son congruentes.
Argumentos	
Argumento 1 (A1) *Tesis*: Las varillas largas de la cometa miden una cuarta más cuatro dedos. *Razón 1*: usa medidas no convencionales como la cuarta y los dedos. *Conclusión*: Las varillas largas si miden cuatro cuartas más cuatro dedos.	Argumento 4 (A4) *Tesis*: La medida del ángulo AOB y la medida del ángulo EOD son iguales y congruentes. Razón 1: Son ángulos opuestos entre sí donde se cruzan dos varillas o líneas rectas. Razón 2: Los ángulos AOB y EOD son opuestos por el vértice. Conclusión: Los ángulos AOB y EOD tienen medidas iguales y son congruentes.

Fuente: Elaboración de los autores

4. Discusión y conclusiones

En el presente artículo se muestra el potencial y desafíos para analizar las conexiones matemáticas y etnomatemáticas en tres contextos de reflexión diferentes con base en el enfoque ontosemiótico. Se resalta que, en el primer análisis o desafío se enfatizó en solo conexiones matemáticas en la resolución de una tarea donde emergieron conexiones intramatemáticas (e.g procedimental, característica, representaciones diferentes, significado, entre otras). En el segundo desafío fue un análisis más centrado en la actividad matemática desencadenada al desarrollar una práctica cotidiana como la elaboración de cometas por un artesano, quien hizo conexiones de significado etnomatemático, luego se visualizaron conexiones de representaciones diferentes, características (de los triángulos y hexágono), procedimental, etc. Por último, se encuentra un contexto de reflexión donde se analizó la práctica de un profesor en el aula de clases, donde enseña contenido de geometría con base en la elaboración de cometas, iniciando con el establecimiento de conexiones etnomatemáticas en la construcción del artefacto y posteriormente, hizo conexiones matemáticas para explicar los ángulos opuestos por el vértice.

A diferencia de otras investigaciones (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019; RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2020), en el presente trabajo se muestra un análisis ontosemiótico de las conexiones no solo matemáticas sino también las etnomatemáticas por separado y simultáneamente cuando el profesor las usa en el aula de clases de matemáticas. Además, en este estudio se proponen las prácticas etnomatemáticas para cuando se analicen las matemáticas en las prácticas cotidianas y las conexiones se expresen en términos de prácticas, objetos, procesos y funciones semióticas.

Referencias

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F. Theories and empirical researches: towards a common framework. **Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**, 2006.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. Networking theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), **Theories of mathematics education. Advances in mathematics education**, pp. 589–592, 2010. New York: Springer.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (Eds). **Networking of theories as a research practice in mathematics education.** Dordrecht: Springer, 2014.

BIKNER-AHSBAHS, A.; VOHNS, A. Theories of and in Mathematics Education. In **Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research**, pp. 171-200, Cham: Springer, 2019.

BIKNER-AHSBAHS, A. Adaptive teaching of covariational reasoning: Networking "the way of being" on two layers. **The Journal of Mathematical Behavior**, London, 67, 2022, p. 1-13, 2022. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100967

BOERO, P.; DREYFUS, T.; GRAVEMEIJER, K.; GRAY, E.; HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B.; SIERPINSKA, A.; TALL, D. Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures. In: A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), **Proceedings of the 26th**

international conference on the psychology of mathematics education, v. 1, pp. 111–138. Norwich: East Anglia University/PME, 2002.

BORJI, V.; FONT, V.; ALAMOLHODAEI, H.; SÁNCHEZ, A. Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v.14, n. 6, p. 2301-2315, 2018. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

BORJI, V.; ERFANI, H.; FONT, V. A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, p. 1-19. 2019, DOI; https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1578904

BOSCH, M.; GASCÓN, J.; TRIGUEROS, M. Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: The case of APOS and the ATD. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 95, n.1, p. 39-52, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3

BUSINSKAS, A. M. **Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections**. 2008. PhD Thesis-Simon Fraser University. Canada.

CAMPO-MENESES, K.; GARCÍA-GARCÍA, J. Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 32, n. 3, p. 209-240, 2020. DOI: https://doi.org/10.24844/em3203.08

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. London and New York: Routledge, 2018.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad. Colección: Tendencias en educación matemática**. Belo Horizonte: Autêtica, 2001.

DOLORES-FLORES, C.; GARCÍA-GARCÍA, J. Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de Cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. **Bolema: Mathematics Education Bulletin**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 158–180, 2017. Available in: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 23–49, 2013. Available in: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8

EVITTS, T. **Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula**. 2004. PhD Thesis-Pennsylvania State University College of Education. EE. UU.

FONT, V. Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: Particular/general, representación, metáfora y contexto. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 19, n. 2, p. 95–128, 2007.

FONT, V.; TRIGUEROS, M.; BADILLO, E.; RUBIO, N. Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 91, n. 1, 107–122, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

FONT, V.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, 2013, v. 82, p. 97-124. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

FONT, V. Coordinación de Teorías en Educación Matemática: el caso del enfoque ontosemiótico. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 9, n. 20, 2016.

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES, C. Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 49, n. 2, p. 227–252, 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994.

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES, C. Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. **Mathematics Education Research Journal**, [s.l], 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM–The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J.; D., BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 37- 42, 2019.

GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P.; BURGOS, M. Concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico. **Revista Colombiana de Matemática Educativa**, Bogotá, v. 5, n. 2, p. 51-66, 2020.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.14, n. 3, p. 325-355, 1994.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research of mathematics teaching and learning**, pp. 65–79, Macmillan, 1992.

KIDRON, I.; BIKNER-AHSBAHS, A. Advancing research by means of the networking of theories. In A. Bikner-Ahsbahs, Ch., Knipping, & N. Presmeg (Eds.), **Approaches to qualitative methods in mathematics education—Examples of methodology and methods**, pp. 221–232. New York: Springer, 2015.

LEDEZMA, C.; FONT, V.; SALA, G. Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. **Mathematics Education Research Journal**, [s.l], p. 1-27, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

MHLOLO, M. K. Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, London, v.16, n. 2, p. 176–191, 2012. DOI: https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PINO-FAN, L.; GUZMÁN, I.; FONT, V.; DUVAL, R. Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. **PNA**, Granada, v. 11, n. 2, p. 97-124, 2017. DOI: https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6076

PREDIGER, S.; BIKNER-AHSBAHS, A.; ARZARELLO, F. Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. **ZDM-The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 40, n. 2, p. 165–178, 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. **ZDM-The International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 40, p. 317–327, 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Explorando las conexiones entre sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas en el municipio de Baranoa. **IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH**, Chihuahua, v. 857, n. 11, p. 1-31, 2020.

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Conexiones etnomatemáticas entre conceptos geométricos en la elaboración de las tortillas de Chilpancingo, México. **Revista de investigación desarrollo e innovación**, Tunja, v. 11, n. 2, p. 273-296, 2021. DOI:

https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n2.2021.12756

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; ALSINA, Á. Networking Between Ethnomathematics, STEAM Education, and the Globalized Approach to Analyze Mathematical Connections in Daily Practices. **Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education**, London, v. 18, n. 3, p. 2-22, 2022. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/11710

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; CERVANTES-BARRAZA, J. A.; FONT, V. Exploring mathematical connections in the context of proof and mathematical argumentation: A new proposal of networking of theories. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 19, n. 5, p. 1-20, 2023. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/13157

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; ESCOBAR-RAMÍREZ, Y. Conexiones Etnomatemáticas en la Elaboración del Sancocho de Guandú y su Comercialización en Sibarco, Colombia. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, p. 971-1002, 2022. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a02

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; FONT, V.; BORJI, V.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M. Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 53, n. 9, p. 2364-2390, 2022a. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; FONT, V.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M. Literature review on networking of theories developed in mathematics education context. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,** London, v. 18, n. 11, p. 1-25, 2022b. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/12513

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F.; FONT, V. A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 53, n. 6, p. 1231-1256, 2020. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Autores

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto

Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa y Maestro en Ciencias Área Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero.

Profesor adscrito a la Universidad de la Costa en Colombia.

Línea de investigación: Conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde el enfoque ontosemiótico.

crodrigu79@cuc.edu.co

http://orcid.org/0000-0001-9922-4079

Universidad de la Costa (CUC)

Barranquilla, Colombia.

Vicenç Font

Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad de Barcelona (UB). Profesor adscrito al Departamento de Educación Lingüística, Literaria y Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemáticas de la Universidad de Barcelona (UB).

vfont@ub.edu

http://orcid.org/0000-0003-1405-0458

Universidad del Barcelona (UB)

Barcelona, España.

Línea de investigación: Análisis de la actividad matemática desde el enfoque ontosemiótico

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez
Doctora en Matemática Educativa por la Universidad de Salamanca, Maestra en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Licenciada en Matemáticas por la Universidad Veracruzana.
Profesora adscrita a la Universidad Autónoma de Guerrero.
Línea de investigación: Didáctica de la Matemática.
flor.rodriguez@uagro.mx
http://orcid.org/0000-0002-9596-4253

Como citar o artigo:

RODRIGUEZ-NIETO, C. A; FONT, V.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M. Desafíos experimentados al detallar el análisis de las conexiones matemáticas y etnomatemáticas desde una visión ontosemiótica. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 509 – 538 DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p509-538.id1405

Didactic-mathematical knowledge of future mathematics teachers in Ecuador when developing tasks based on ethnomathematical practices

Adriana Breda
adriana.breda@ub.edu
https://orcid.org/0000-0002-7764-0511
Universitat de Barcelona (UB)
Barcelona, España.

Eulalia Calle
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-9526-8832
Universidad de Cuenca (UC)
Cuenca, Ecuador.

Danyal Farsani
danyal.farsani@ntnu.no
https://orcid.org/0000-0002-9412-3161
Norwegian University of Science and Technology (NTNU)
Trondheim, Norway.

Sikunder Ali
sikunder.ali@ntnu.no
https://orcid.org/0000-0002-5364-6521
Norwegian University of Science and Technology (NTNU)
Trondheim, Norway.

Solomon A. Tesfamicael
solomon.a.tesfamicael@ntnu.no
https://orcid.org/0000-0002-5159-123X
Norwegian University of Science and Technology (NTNU)
Trondheim, Norway.

Arindam Bose
arindam.bose@tiss.edu
https://orcid.org/0000-0003-2209-2092
Tata Institute of Social Sciences (TISS)
Mumbai, India.

Received: 20/03/2023 **Accepted**: 01/05/2023

Abstract
This paper aims to infer characteristics of the didactic-mathematical knowledge of future mathematics teachers when developing tasks based on local ethnomathematical practices. Ethnomathematical practices and mathematical knowledge of these future teachers of an

Ecuadorian University were identified and later their reflections on bringing these practices to the classroom and their justifications were analyzed. The results indicate positive contemplation by the future teachers on two counts: first, in connecting ethnomathematical practices with local professional activities and second, in presenting fragilities in the characteristics of both mathematical and didactic-mathematical knowledge. As a way forward, the paper suggests that these insights are relevant to be incorporated in future teachers' training in addition to the didactic-mathematical knowledge and perspectives of Ethnomathematics.
Keywords: Didactic-mathematical knowledge. Ontosemiotic approach. Ethnomathematical practices. Teacher training

Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas del Ecuador al desarrollar tareas basadas en prácticas etonomatemáticas

Resumen

Este trabajo pretende inferir características del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas al desarrollar tareas basadas en prácticas etnomatemáticas locales. Se identificaron las prácticas etnomatemáticas y los conocimientos matemáticos de estos futuros profesores, estudiantes de una universidad ecuatoriana y, posteriormente, se analizaron sus reflexiones con relación al llevar estas prácticas al aula de clases. Los resultados indican una contemplación positiva por parte de los futuros profesores en dos aspectos: primero, en conectar las prácticas etnomatemáticas con las actividades profesionales locales y segundo, en presentar fragilidades en las características del conocimiento tanto matemático como didáctico-matemático. Como camino a seguir, el artículo sugiere que estas percepciones deben incorporarse en la formación de los futuros profesores, además de los conocimientos didáctico-matemáticos y las perspectivas de las Etnomatemáticas.
Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático. Enfoque Ontosemiotico. Prácticas etnomatemáticas. Formación de profesores.

Conhecimento didático-matemático de futuros professores de matemática do Equador ao desenvolver tarefas baseadas em práticas etonomatemáticas.

Resumo

Este trabalho visa inferir características do conhecimento didático-matemático de futuros professores de matemática ao desenvolver tarefas baseadas em práticas etnomatemáticas locais. As práticas etnomatemáticas e o conhecimento matemático destes futuros professores, estudantes de uma universidade equatoriana, foram identificados e, posteriormente, suas reflexões para levar estas práticas para a sala de aula foram analisadas. Os resultados indicam uma contemplação positiva por parte dos futuros professores em dois aspectos: primeiro, na conexão das práticas etnomatemáticas com as atividades profissionais locais e, segundo, na apresentação de fragilidades relacionadas às características do conhecimento matemático e didático-matemático. Como um caminho a seguir, o artigo sugere que estas percepções são relevantes para serem incorporados na formação de futuros professores, além dos conhecimentos didático-matemáticos e a perspectiva da Etnomatemática.
Palavras-chave: Conhecimento didático-matemático. Abordagem Ontossemiótica. Práticas etnomatemáticas. Formação de professores.

Introduction

Ethnomathematics can be understood from different perspectives (BREDA; DO ROSÁRIO LIMA, 2011). One of them is to consider it as the set of modes, styles, arts and techniques to explain, learn, and know, the natural, social, cultural and imaginary environments of a certain cultural group, (D'AMBRÓSIO, 2014)

From this conceptualization, Ethnomathematics can be considered as a research program in the search for an educational action, which, according to D'Ambrósio (1998) came to combat the traditional methods of both teaching and production of scientific knowledge, valuing, in this way, the different knowledge and techniques of and in the different sociocultural environments, conceptualizing mathematics as a cultural and social product (GERDES, 1991; KNIJNIK, 1996; ROSA, 2005); that is, it is a program that aims to consider the culture and more specifically, interculturality, as a space for the learning of mathematics, looking for ways to understand the meaning of mathematical objects, immersed in the context. This approach calls into question the importance of research practice in Ethnomathematics by teachers, showing, according to Domite (2004), how this trend in mathematics education influences the transformation of the teacher and the future teacher and their knowledge (BREDA; DO ROSÁRIO LIMA; GUIMARÃES, 2012).

Another theoretical approach interested both in the analysis of mathematical activity, considered as a historical-social and historical-cultural practice, and in the knowledge that the teacher must have in order to teach it, is the Ontosemiotic Approach (OSA, from now on) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, 2019). This approach offers us theoretical-methodological tools that help us describe and explain the teaching and learning processes of mathematics and, also, assess them as suitable or adequate. In particular, in this framework, there is a model of Didactic-Mathematical Knowledge (DMK) which, in Latin terms, refers to teachers' knowledge about mathematical content (MK) and their teaching (DK). This model interprets and characterizes the teacher's knowledge from three dimensions: mathematical dimension, didactic dimension and meta-didactic-mathematical dimension (PINO-FAN; GODINO, 2015). The first two allow the teacher to describe and explain the teaching and learning processes of mathematics, while the didactic-mathematical meta dimension is the one that helps us to assess the processes of instruction from the use of the tool Didactic Suitability

Criteria (DSC, from now on) ―epistemic, cognitive, interactional, affective, mediational and ecological (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; GODINO, 2013).

Oliveras and Godino (2015) carry out a theoretical exercise of comparison and articulation between the Ethnomathematics and the OSA presenting the basic characteristics of both theoretical frameworks, comparing the paradigmatic issues addressed and identifying concordances and complementarities between them. Along similar lines, Garcia and Rodríguez-Nieto (2022), analyze the use of unconventional measures in Mexican textbooks considering the ethnomathematical perspective and OSA, in addition to studies related to mathematical connections (RODRÍGUEZ-NIETO, 2020, 2021). Also, one can observe the studies of Fernández-Oliveras, Blanco-Álvarez and Oliveras (2022), Blanco-Álvarez, Fernandez-Oliveras and Oliveras (2017a, 2017b), which, from an adaptation of the DSC of the OSA for a teaching proposal in the perspective of Ethnomathematics, analyze the design and application of a proposal of the teaching of unconventional measurement patterns with primary school students in Colombia.

In the field of teacher training, Blanco-Álvarez (2017) has identified elements for the design of mathematics teacher training programs from an ethnomathematical perspective. From an articulation amongst Ethnomathematics, Philosophy of Language, the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction, he concludes that there are necessary elements when designing a teacher training program from Ethnomathematics, which are: internal to the classroom and related to the human subjects protagonists of learning and teaching; internal to the classroom and related to discourse mediators, such as resources, institutional norms and curriculum; external to the classroom and related to the education system; and external to the classroom and related to the social system.

Ethnomathematics is perceived as a current trend in the teaching and learning of mathematics, has promoted a curricular reconceptualization in some Latin American countries (e.g. Ecuador) (ROSA, 2005) and has been explicitly considered, as a subject present in some curricula of initial training programs for mathematics teachers (e.g. of Ecuadorian public universities). This perspective combines with the Didactic Suitability Criteria, supports the future teacher in the assessment of didactic proposals for the learning of mathematics.

Although there is research that tries to articulate Ethnomathematics and OSA, there is no research that is concerned with investigating the didactic-mathematical knowledge of future teachers when working or developing tasks from the perspective of ethnomathematical practices. Considering the obligatory curricular nature and the importance of working on Ethnomathematics in the initial training of mathematics teachers, this research aims to infer characteristics of the didactic-mathematical knowledge of future mathematics teachers in Ecuador when developing tasks based on local ethnomathematical practices.

5. Theoretical framework

In this section, we will explain aspects related to Ethnomathematics, teacher training and, also, the DMK model of the OSA.

1.1 Ethnomathematics and teacher training

In a study conducted by Breda (2011) Breda and Do Rosário Lima (2011), a literature review was revealed that relates to the Ethnomathematics program and the training of mathematics teachers. In that subsection, we present this review in summary form.

According to D'Ambrósio (2014), to work from the perspective of Ethnomathematics in the school space is to contribute to the new generations to know and recognize much more cultural mathematics, linked to the daily life of various ethnic groups (D'AMBRÓSIO, 2008). It is a didactic position that seeks an improvement in the teaching-learning process of the discipline with the incorporation into the mathematical curriculum of knowledge derived from the student's life and human values, such as, for example, cooperation, solidarity and ethics. In addition, D'Ambrósio, (1998) affirms that ethnomathematical practices are born of research, which is why it is considered a research program and tends to become a proposal for educational action, where the role of the teacher is fundamental since it is he who is closing the gap between research and education.

According to Gerdes (1996, p.126), teacher training should include preparation for them to "investigate the ideas and practices of their cultural communities, ethnic and linguistic backgrounds and to look for ways to build their teaching around them [...] and contribute to mutual understanding, respect and appreciation of (sub) cultures and activities." Therefore, it is thought that, according to Moreira (2004), the perspective of Ethnomathematics on teacher training and professional development puts as a central theme the importance of acquiring theoretical-methodological tools capable of helping teachers to understand and pedagogically appropriate mathematical diversity, in the communities where they teach, to integrate them into teaching and organize their practice, developing didactic activities that include mathematical elements from different cultural backgrounds.

In that sense, for Domite (2004), Ethnomathematics is integrated as a confluence between the personal and the professional life of the teacher, in which the central point is the group to be investigated. However, the teacher's stance should be hesitant in the sense of leaving some questions open for reflection. After all, who is the group to investigate? What logic does the teacher use to express his knowledge? For this, it is necessary to place as a point of reference the context and the place where one works and also to contemplate the modes of communication present in that particular place. According to the same author (2004), the research professor of ethnomathematical practices lives his research in a process of surprise and some tension, because, in effect, an analysis of certain ways of explaining and knowing in a certain group leads the researcher to a process of elaboration of new meanings that imply a flight of mathematics as a discipline, and thus it allows us to work on the articulation of other areas, such as history and economics, among others.

1.2 Didactic-mathematical knowledge model

In the Didactic-Mathematical Knowledge Model (DMK) of OSA, according to Pino-Fan and Godino (2015), the mathematical dimension of the DMK includes two subcategories of knowledge: *common knowledge* of the content (knowledge, about a specific mathematical object that is considered sufficient to solve problems or tasks proposed in the mathematics curriculum of a given educational level) and *expanded knowledge* of the content (it is further on in the curriculum of the educational level in question, or at a next level).

On the other hand, the didactic dimension of DMK includes the following subcategories of knowledge: specialized knowledge of the mathematical dimension (epistemic facet); knowledge about the cognitive aspects of students (cognitive facet); knowledge about the affective, emotional and attitudinal aspects of students (affective facet); knowledge about the interactions that arise in the classroom (interactional facet); knowledge about resources and means that can enhance student learning (mediational facet); and knowledge about the curricular, contextual, social, political, economic aspects, which influence the management of student learning (ecological facet).

Finally, the meta-didactic-mathematical dimension characterizes the knowledge that teachers need to reflect on their practice, identify and analyze the set of norms and meta-norms that regulate the teaching and learning processes of mathematics, and evaluate the didactic suitability to find possible improvements in the design and implementation of these processes (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2016).

For each of the components of didactic-mathematical knowledge, the OSA has "theoretical and methodological" tools that have been described and used in several investigations (GODINO, 2009, 2012; GODINO; BATANERO; FONT, 2019).

For instance, for the development of instruments that allow to evaluation and systematic analyze the knowledge of teachers regarding the mathematical dimension (common and expanded knowledge) and the epistemic facet of DMK, there is the tool "ontosemiotic configuration". This tool allows to describe and characterize the primary mathematical objects – representations/language (terms, expressions, notations, graphs) in their diverse registers; problem situations (intra- or extra-mathematical applications, exercises); concepts and definitions (introduced through definitions or descriptions); propositions (statements about concepts); procedures (algorithms, operations, calculation techniques); and arguments/justifications (statements used to validate or explain propositions or procedures) - that are produced through the respective mathematical processes of communication, problematization, definition, enunciation, elaboration of procedures (creation of algorithms and routines) and argumentation that are activated in the mathematical practices that teachers develop in solving a problem (MALASPINA; FONT, 2010), or as part of a problem planning (or problem sequence) for the classroom (MALASPINA, 2017; MALASPINA; TORRES; RUBIO, 2019; TORRES, 2020). In addition, mathematical knowledge includes the description of errors and ambiguities committed by teachers from a mathematical point of view (SÁNCHEZ et al., 2021).

For the development of instruments that allow to systematically evaluate and analyze the knowledge of teachers regarding the meta-didactic-mathematical dimension, the Didactic Suitability Criteria (DSC) tool is operational (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018). According to Font, Planas and Godino (2010), the DSC is characterized as follows: *Epistemic Suitability*, to assess if the mathematics being taught is "good mathematics"; *Cognitive Suitability*, to assess, before starting the instructional process, if what one wants to teach is at a reasonable distance from what students know, and after the process, if the acquired learning is close to what was intended to be taught; *Interactional Suitability*, to assess if interactions resolve students' doubts and difficulties; *Mediational Suitability*, to assess the adequacy of the material and temporal resources used in the instructional process; *Affective Suitability*, to assess the involvement (interests and motivations) of students during the instructional process; *Ecological Suitability*, to assess the adequacy of the instructional process to the educational project of the school or institution, the curricular guidelines, the conditions of the social and professional environment. These criteria are split into components and indicators to become operational in the exercise of analysis and assessment of instructional processes. The criteria and components of didactic suitability are detailed in Table 1. The full table with the indicators can be found in Breda, Pino-Fan and Font (2017).

Table 1 – Didactic suitability criteria and components

Didactic Suitability Criteria (DSC)	**Components**
Epistemic	✓ Errors, ambiguities, richness of processes, representativeness of the complexity of the mathematical object (problem-situations, representations, procedures, arguments, etc.)
Cognitive	✓ Prior knowledge, curricular adaptation to individual differences, learning, high cognitive demand
Interactional	✓ Teacher–student interaction, students’ interaction, autonomy, formative assessment
Mediational	✓ Material resources, number of students, class schedule and conditions, time
Affective	✓ Interests and needs, attitudes, emotions
Ecological	✓ Curriculum adaptation, intra- and interdisciplinary connections, social and labor usefulness, didactic innovation

Source: Morales-López and Font (2019).

Both the components and the indicators of the DSC have been made from a consensus present in the field of the educational community, considering the current trends in the teaching of mathematics, the principles and standards for the teaching of mathematics and the results of research in the area of Didactics of Mathematics. (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM], 2000, 2014).

In particular, for epistemic suitability, a fundamental principle of OSA has been considered which, with the nuances of each approach, is (or can be) assumed by other theoretical approaches in the area. We refer to the principle that can be formulated as follows: mathematical objects emerge from practices, which entails their complexity. From this principle derives a component (representativeness of the complexity of the notion to be taught) whose objective is to consider, as far as possible, this complexity in the design and redesign of the didactic sequences (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013; FONT; PINO-FAN; BREDA, 2020; RONDERO; FONT, 2015; PINO-FAN et al., 2013).

The mathematical, didactic-mathematical and mathematical meta-didactic knowledge of the teacher, from the perspective of ethnomathematics, allows contemplating an extension of the epistemic suitability of the DMK, in particular, of the component "Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught". Fernández-Oliveras, Blanco-Álvarez and Oliveras (2022), propose an adaptation when working from the perspective of Ethnomathematics, see Table 2):

Table 2 – Epistemic suitability from the perspective of Ethnomathematics.

Epistemic suitability component	**Categories**	**Indicators**
Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught	Philosophical nature or stance	✓ Mathematics is referred to as a cultural product;
	Problem Situations	✓ Extracurricular or ethnomathematical mathematical objects (contents) are made explicit in problem situations; problem situations are solved using different procedures, school and extracurricular algorithms;
	Definitions, propositions procedures, arguments	✓ Procedures, definitions, representations of extracurricular mathematical objects are presented; Arguments based on logics other than Western ones are valued and respected.
	Relationships	✓ Comparisons, relationships between procedures, definitions, representations of school and extracurricular mathematical objects are established.

Source: (FERNÁNDEZ-OLIVERAS; BLANCO-ÁLVAREZ; OLIVERAS, 2022).

The notion of Didactic Suitability has had a relevant impact on teacher training in several countries, such impact evidence of the use of DSC in several investigations on teacher training who teach mathematics (BREDA; FONT; DO ROSÁRIO LIMA, 2015). But it is not used within the framework of a training device expressly designed to teach didactic suitability as a tool to organize reflection of teachers (BREDA, 2020; MORALES-LÓPEZ; FONT, 2019; MOREIRA; GUSMÃO; FONT, 2018; SALA-SEBASTIÀ et al., 2023; SALA-SEBASTIÀ; BREDA; FARSANI, 2022). However, there are already investigations in which it has been tried to promote the meta-didactic-mathematical knowledge of the teacher. In particular, some investigations were concerned with developing said knowledge in Ecuadorian mathematics teachers from the point of view of the "Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught" of epistemic suitability (CALLE, 2023; CALLE; BREDA; FONT, 2021, 2023).

2. Methodology

In this section we explain the context in which the study was developed, the data collection process and its respective analysis.

2.1 Background

The participants of this study were 48 future professors of Mathematics who study at a state university in southern Ecuador, who have studied the subject of Ethnomathematics ─that corresponds to the fifth year of the Ordinary Academic Program (OAP)─ in the second half of the year of 2019 and the beginning of the year of 2020 (before the Covid-19 pandemic).

The subject of Ethnomathematics, corresponding to the field of training integration of knowledge and contexts, is presented as a substantial contribution to the initial training of teachers of the Grade of Pedagogy of Experimental Sciences, once the design, planning, execution and evaluation of learning proposals are carried out, considering interculturality.

Through this subject, it is intended that the student manages to recognize and identify mathematics in the cultural activities of their environment, where they will demonstrate that mathematical knowledge, even if it is not school, is present in our cultural identity. Methodological strategies such as bibliographic review, concept maps, and proposals for collaborative work, have the possibility of making visible the characteristics of ethnomathematics and proposing, in a creative way, ways of understanding the meaning of mathematical objects, immersed in this context, with the support of formative research and through assisted teaching, experimentation and autonomous work as components of learning.

The subject begins with the historical review of what the Ethnomathematics program represents and its importance in culture of people, to continue with the analysis of the Ethnomathematics program in the Ecuadorian curriculum and complete with proposals for learning mathematics, through culture, through integrative projects coordinated by the Integrative Chair that guide the activities proposed by students. In particular, the subject aims to develop the ability to identify the mathematics present in the different expressions of our culture, in order to design innovative educational proposals that support the solution to problems of the context. In this sense, the task that the 48 future teachers, organized into 11 working groups (WG1, WG2, WG3, WG4, WG5, WG 6, WG7, WG8, WG9, WG10, WG11), should carry out had the following objective: to investigate ethnomathematical practices of different social groups: jewelers, carpenters, cooks, tinsmiths, sculptors, etc. Explain how these practices would work in educational institutions. To do this, students should follow the following itinerary:

1. Choose a topic based on their cultural reality and that serves as a stage to promote students' interest in mathematics;
2. Attend and see the work of these social or cultural groups and the development of the work they do;
3. Identify mathematical processes in this practice;
4. Film or photograph the process, asking pertinent and necessary questions to prepare the corresponding report;
5. Expose the reflection on the experience, indicating if they would take it to the classrooms.

After following this pathway, the working groups should submit a final report (FR), which consisted of the following steps:

1. Description of the work performed;
2. Problem situations that arise and how to solve;
3. The procedures used by cultural groups, in their daily practices;
4. The language used by cultural groups;
5. Reflection on the practices and ethnomathematics, looking for connections with other areas such as history, anthropology, etc., considering the community;
6. Conclusions on the importance of these works and suggestions for application in teaching practice;
7. Presentation of the final report for the large class group.

2.2 Data collection and analysis

First, to identify and classify the ethnomathematical practices considered in the final reports made by the 11 WGs, we have worked with content analysis with emerging categories.

That is, since the emergence of the data, a classification of the ethnomathematical practices contemplated in the final reports made by the WGs has been made.

Secondly, in order to identify aspects of mathematical knowledge presented by future teachers, the final report (FR) described in the previous subsection has been considered, in particular stages 1, 2, 3 and 4 of the FR, in which some primary mathematical objects could emerge. To detect characteristics of mathematical knowledge, the notion of ontosemiotic configuration is present in the DMK model of the OSA (PINO-FAN; GODINO, 2015). Specifically, we sought to identify which primary mathematical objects - representations/languages, concepts and definitions, propositions, procedures and arguments/justifications - emerged in the mathematical practices contemplated in the works from a perspective of Ethnomathematics, in particular, has taken into account the competent “Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught” of the epistemic suitability proposed in Fernández-Oliveras, Blanco-Álvarez and Oliveras (2022). To this end, specifically, those present in Table 2 have been used as previous categories of analysis.

Thirdly, to identify characteristics of didactic knowledge, stages 5 and 6 of the final report have been considered, and for this purpose, the categories present in the Didactic Suitability Criteria tool present in Table 1 were used.

Finally, from a triangulation of the analyses among the most expert authors in the use of the instruments, it was possible to infer aspects of the didactic-mathematical knowledge of future teachers when working on tasks based on ethnomathematical practices. That inference was triangulated with the opinion of an expert in the theoretical framework of EOS.

3. Results

In this section, we present the results of the study. First, we show the emerging categories of classification of ethnomathematical practices considered in the work carried out by the 11 WGs formed by the 48 future teachers. Secondly, we show characteristics of the mathematical knowledge of these future teachers, having as a basis the primary objects of the OSA and the component "Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught" of the Epistemic Suitability. Finally, we infer characteristics of didactic-mathematical knowledge from the analysis of didactic suitability.

3.1 Classification of ethnomathematical practices

As a first result, two major categories of ethnomathematical practices considered by the WGs have been identified. The first is related to professional activities based on craft practices, which are upholstery, basket making, blacksmithing, the elaboration of toquilla straw hats, carpentry, haberdashery, pottery and poultry. The second category is the activity of games with pyrotechnics, see Table 3.

Table 3 – Categories and types of ethnomathematical activities raised by the WGs

Category	Types of ethnomathematical practices	Working Groups (WGs)
Professional activity based on Crafts	Upholstery	WG2
	Preparation of baskets	WG3
	Smithy	WG8
	Manufacture of straw hats *toquilla*	WG9
	Carpentry	WG4
	Haberdashery	WG5
	Pottery	WG6 WG7 WG11
	Poultry	WG10
Games Activity	Pyrotechnics	WG1

Source: authors.

3.2 Mathematical knowledge from epistemic suitability

To identify the characteristics of the mathematical knowledge of future the teachers when investigating ethnomathematical practices, as a second result, from steps 1 to 4 of the FR carried out by the WGs —description of the work done; problem situations that arise and how to solve; the procedures used by cultural groups, in their daily practices and the language used by cultural groups—, the emergence of some primary objects has been identified (Table 4). For this, it has been based on the ontosemiotic configuration of the primary objects of the EOS conjugated with the adaptation made by Fernández-Oliveras, Blanco-Álvarez and Oliveras (2022) for the component " Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught" of the epistemic suitability from the perspective of the Ethnomathematics.

Table 4– Primary objects from the perspective of emerging mathematics in the final reports of the working groups

Epistemic suitability (Primary objects)	**Characterization**	**Working Groups (WGs)**
Philosophical nature or stance	Mathematics is a socio-cultural product	WG1, WG2, WG3, WG4, WG5, WG6, WG7, WG8, WG9, WG10, WG11
Situation-problem	How to model the movement of a fireworks when turned on?	WG1
	How to make a rug in the shape of a six-pointed star?	WG2
	How to build a model in wood?	WG4
	How do you know how much money you have to give in exchange, and how much to charge for your products?	WG5
	How to make an iron lantern?	WG8
	What are the measures to consider for a *toquilla* straw hat? What are the most common mistakes made in the preparation of toquilla straw hats?	WG9
	How to optimize the number of ceramic parts in the kiln?	WG11
Procedure	Direct measurement	WG1, WG2, WG4, WG7, WG8, WG9
	Indirect measurement	WG4
	Arithmetic calculation	WG1, WG3, WG5
	Counting	WG2, WG7
	Sorting/comparing	WG2
	Establishing sequences and patterns	WG2, WG3
	Applying proportions	WG6
	Modelling geometric shapes	WG11
Rules	Graphic	WG1

	Representation/Language	Analytic	WG1, WG2
		Verbal-written	WG1, WG2, WG4, WG10
		Iconic	WG2, WG8
	Argument/ Justification	Arguments are used to justify the procedures used	WG2, WG6, WG9
		Arguments are used to justify measuring instruments used	WG1, WG2, WG4, WG7, WG8, WG9
		Arguments are used to justify geometric properties	WG7
Relations		Process of making a star-shaped mat related to arithmetic progression	WG2
		Manufacture and sale of clay objects related to simple rule of three, ratios and proportions and system of equations	WG6
		Production of pottery related to design and geometric properties	WG7
		Manufacture of *toquilla* straw hats related to the calculation of dimensions, straw drying time, amount of straw	WG9
		Preparation of skirts related to the formulation of series, sequences and geometry	WG10

Source: the authors.

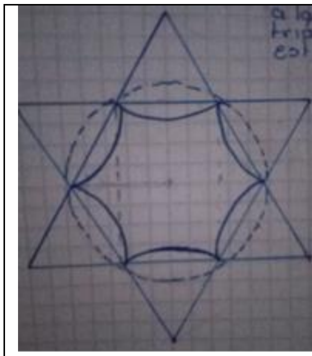
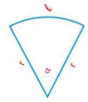
Concerning the objects that emerge from ethnomathematical practices, there are the nature of mathematics, problem situations, processes, representations/languages, arguments/justifications and relationships. No definitions or propositions were identified. All WGs assume a philosophical position that mathematics is a socio-cultural product. Seven groups have expressed problem situations from the perspective of ethnomathematical practices (see Table 4). However, four of them have expressed problem situations that are related to problems of another nature, such as, for example, the health of the person working in the blacksmithing activity.

> *As a first problem situation, we have the noise made when moulding the material with which you work (such as metal, copper, aluminium, among others), because the way in which they mould these materials is by means of the determined blow in certain areas and cause noise pollution for both workers and people who live near the place*. (WG8).

The procedures that have emerged were direct measurement, indirect measurement, arithmetic calculation, counting, ordering and comparing, establishing sequences and patterns, applying proportions, and modelling geometric shapes. Although different procedures have emerged present in the ethnomathematical practices studied by the WGs, few groups manage to present representativeness of procedures, for example, the WG2 is the only one that presents more than three procedures used in the professional activity of carpentry.

About the languages and representations have emerged the graphic, analytical, verbal-written and iconic types. However, few WGs use a diversity of languages to explain a given ethnomathematical practice. For example, WG1 considers graphical, analytical, and verbal-written languages and representations. The WG2 group, when studying the practice of making mats, has used verbal-written, iconic and analytical language, see to Figure 1.

Figure 1 – Different languages/representations in mat making

	$Circular\ sector;$  $S = r.\alpha; S = \frac{20\pi}{3}$ $We\ raise\ the\ arithmetic\ progression;$ $\mathrm{a} = \mathrm{u} + (\mathrm{n} - 1).\mathrm{d};$ $\frac{20\pi}{3} = 1 + 20.x;\ \left(\frac{20\pi}{3}\right) - 1 = 20.x;\ x = 1$	*The line corresponding to each point will decrease to one cm respectively on both sides of the circular sector until it reaches the tip of each end of the star. This procedure should be repeated on the other five ends of the mat, including the center.*

Source: Done by WG2.

On the other hand, some WGs proposed as a language the nomenclature given to objects, utensils and procedures that are used in the different ethnomathematical practices, but without this language referring to an ethnomathematical representation of the respective activity. For example, WG5 proposed as the language used in the market:

> *Our friend Maria, in her day to day, uses several ways to call her customers, this for her is a way to gain customers and demonstrate her good treatment towards other people, in addition to her education and as advertising, among some of the ways to treat her customers, are: "my little juice", "My sweetheart", "who sought heart", "Come to my king/queen". With these expressions, Doña María has won the affection of her customers, because we can see that many people exclusively frequent her sales position.* (WG5).

In relation to the arguments and justifications, arguments are observed to justify the procedures used, arguments to justify measuring instruments used (most of the WGs) and arguments to justify geometric properties. No other types of arguments have been observed, for example, an argument that justifies the types of representations used.

Concerning the relationships, it is observed that six WGs made relationships between the ethnomathematical activity investigated, and procedures used in mathematics. For example, the relationships that have emerged were: the process of making a star-shaped mat related to arithmetic progression; the manufacture and sale of clay objects related to a simple rule of three, ratios and proportions and system of equations; the production of pottery related to design and geometric properties; the manufacture of *toquilla* straw hats related to the calculation of dimensions, straw drying time, amount of straw; and the preparation of skirts related to the formulation of series, sequences and geometry. Although the aforementioned relationships have been identified, no relationships have been observed, for example, amongst definitions, relationships amongst languages, or amongst concepts.

3.3 Analysis of Didactic Suitability

To identify the characteristics of the didactic-mathematical knowledge of future teachers when investigating ethnomathematical practices, stages 5 and 6 of the IF - reflection on ethnomathematics ─have been taken into account, looking for connections with other areas such as history, anthropology, etc., taking into account the community; conclusions on the importance of these works and suggestions for application in teaching practice─ and DSC has been used as an analysis tool (Table 2).

Epistemic suitability

In addition to the analysis presented in the previous subsection, which has considered the knowledge of future teachers concerning the component "Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught" from the perspective of Ethnomathematics, about, to the epistemic suitability, it is observed that most of the WGs consider the importance of working different mathematical processes present in ethnomathematical practices in the school environment. For example, the process of extra mathematical connections, algorithmization, visualization/identification, estimation, trial and error, formulation of conjunctures, problem-solving process, experimentation and modelling. The following evidence shows the reflection of WG1 about the importance of working on the processes of visualization/identification and estimation. Next, evidence from WG2 is presented that reaffirms the importance of the process of extra-mathematical connection between cultural activity and mathematics worked on in school. Finally, one of the WP6 reflects on the processes of experimentation and modelling.

> *In the problems studied on the way and procedure of making castles and fireworks, we have observed their great importance and influence on cultural and religious traditions that in addition to the visual delight of the people who observe it serve as a sample to identify geometric shapes and figures, as well as the estimation of the space and volume required to develop these beautiful acts.* (WG1)

> *We suggest that the fabrics, ceramics, etc. of our people be used in teaching practice to be worked from the mathematical point of view so that students relate to their environment the different ways of doing*

> *mathematics, guided by these clear examples that are found in our beloved city and even more in our country that is megadiverse.* (WG2).
>
> *I believe that it would be very helpful to implement workspaces in educational institutions where students can learn to carry out activities that promote the growth of cultural identity, activities such as: the manipulation and modelling of objects with mud or clay* (WG6)

Apart from the components "Representativeness of the complexity of the mathematical object to be taught" and "Richness of processes", future teachers do not comment in their work on errors or ambiguities that may be committed during the process of instruction of a task or sequence of tasks based on a certain ethnomathematical practice.

Cognitive Suitability

It was possible to identify the comment of a group on the importance of considering the previous knowledge of the students. Also, there was a comment on the constructivist and social learning of the students from a perspective of Ethnomathematics:

> *The teacher needs to review his teaching practice daily and develop a pedagogical project that always values the knowledge and history of each student* (WG4)
>
> *It is important to implement these assignments in class, as this way students can have a socio-constructivist perspective.* (WG10)

However, there are no comments related to the form of evaluation or to the curricular adaptation to individual differences. Perhaps, one of the reasons for the latter is that by assuming that the class will work on tasks based on the different ethnomathematical practices present in the Ecuadorian context, this diversity would already be contemplated.

Interactional suitability

No reflections have been made on the interaction between teacher and student, nor on the interaction amongst students, nor on autonomy and formative evaluation.

Mediational suitability

Concerning to the media, a group commented about different types of manipulative materials that can be worked from the perspective of ethnomathematical practices. Comments on classroom conditions and teaching time were not contemplated.

> *Our students would learn from their contextual culture, from other ways of teaching mathematics, quipus and taptana, as teaching materials would help a better understanding of the student* (WG11)

Affective suitability

Only two working groups made explicit comments regarding the interests and needs of the students when working on tasks from the cultural perspective.

> *Formulate learning proposals based on daily living activities which involving the use of mathematics, generates the interest of children and young people and even better if they respond to the needs of the community such as the elaboration of baskets or vessels, which have a cultural value, legacy of the ancestors and that maintain their usefulness.* (WG3)

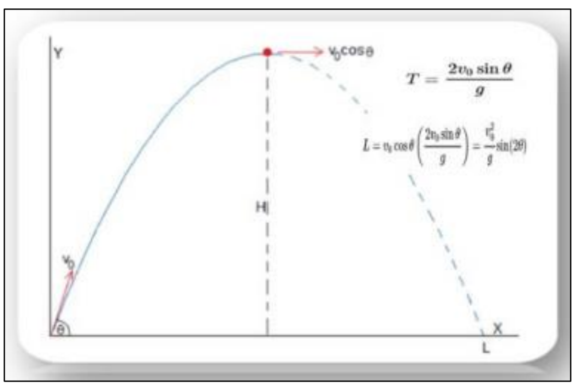
> *As future teachers, we encourage ourselves to keep present these projects within the classroom where each of the features that identify us with the desire to generate greater interest from future generations is highlighted, keeping our cultural identity alive.* (WG8)

Ecological suitability

On the one hand, all the WGs have considered that working in mathematics classes from the perspective of Ethnomathematics is a way of contemplating the Ecuadorian educational curriculum. On the other hand, there were no comments on intramathematical connections work. However, some groups argued that it is possible to establish interdisciplinary connections by working under this perspective. For example, WG1 reflects that a connection between ethnomathematical practice and physics can be established, and a second group (WG7) reflects on the connection between microeconomics and accounting.

> *When lighting a firework (cartridges filled with gunpowder, used as fireworks pyrotechnics), it describes a series of movements that are taught through physics within the classroom; That is why the importance of the calculations and location of the dust that will explode.* (WG1)

Figure 2 – graphical representation of thrown fireworks.



Source: WG1

> *In addition, other disciplines such as accounting, microeconomics and production are evidenced in the trade and daily practices of Don José Encalada, concepts of profitability, costs (raw material, labour and CIF), utility and price, etc. They intervene in the practice of pottery as a business.* (WG7)

Finally, only two groups commented that working on school mathematics from the perspective of Ethnomathematics leads to didactic innovation.

> *Creativity and innovation based on crafts are to be presented as projects in the different educational institutions* (WG2).
>
> *To develop in the classroom an educational proposal that encourages students and teachers in the development of creativity, giving rise to both new and rich forms of learning* (WG4).

4. Discussion and considerations

This study aimed at drawing didactic-mathematical knowledge of Ecuador's prospective mathematics teachers by analyzing their tasks development from an ethnomathematical lens. As a first result, it is observed that, in terms of ethnomathematical practices, the WGs considered professional activities, some based on handicraft practices, and some games. However, no ethnomathematical practices have been observed outside these two categories, such as, for example, the ways of life of indigenous peoples who have their languages, customs, traditions and forms of social and political organization, such as the *Kichwa, Shuar, Achuar, Waorani, Tsáchila*, an aspect considered in the following research (TUMIALÁN BONILLA et al., 2018).

As a second result, fragility has been observed in the mathematical knowledge of the future teachers when performing tasks based on ethnomathematical practices. For example, although all WGs have as their philosophical position that mathematics is a socio-cultural product, none of them has considered the concepts or definitions present in the ethnomathematical practices investigated. In addition, few WGs present a representative sample of both the languages and representations, as well as the procedures present in these practices. The problem situations contemplated are limited and the arguments refer only to the procedures used by professionals of a certain professional activity investigated. This result corroborates what was found in Sala-Sebastià et al. (2023) when analyzing the didactic-mathematical knowledge of future teachers of Early Childhood Education when solving and designing robotic problems.

As a third result, it is inferred that the future teachers show fragility when it comes to didactic-mathematical knowledge, since, when relating the ethnomathematical practices studies, they face difficulties to articulate and contemplate crucial aspects of didactic knowledge required to work in the context of schools.

Most of the WGs have considered the mathematical processes that could be worked on based on ethnomathematical practices in the school, an aspect of epistemic suitability and compliance with the Ecuadorian curriculum when working from an intercultural perspective (an aspect present in ecological suitability). However, they didn't consider other aspects of classroom management. Furthermore, few WGs have considered appropriate material resources that relate to the different local socio-cultural activities, almost no WGs referred to the issue of student learning, nor the issue of affectivity or the issue of extra or intra mathematical connections, the latter aspect being explored in RODRÍGUEZ-NIETO (2020, 2021).

The reasons for these results can be related to two main aspects. The first is that, although Ethnomathematics is inserted as a curricular component in the initial training of teachers in Ecuador, it still needs to be better worked in such training. Teacher training in this perspective involves acquiring theoretical-methodological tools to understand mathematical diversity in the communities where it is taught and developing didactic activities that integrate mathematical elements from various social and cultural backgrounds (MOREIRA, 2004). The second aspect is that in teacher training programs it is essential to train future teachers to acquire mathematical and didactic mathematical knowledge for the teaching of mathematics, as has been done in Calle (2023).

Finally, it is evident to design and implement mathematics teacher training programs from the perspective of Ethnomathematics, as proposed by authors such as Oliveras and Gavarrete (2012), but which consider the elements internal to the classroom (human subjects involved in the teaching and learning processes, institutional rules and the curriculum) and also the elements external to the classroom (relating to the education system and the social and cultural system). (BLANCO-ÁLVAREZ., 2017).

Acknowledgements

Work carried out within the framework of the PID2021-127104NB-I00 project financed by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ and by and by "ERDF A way of making Europe"; Research Group on Didactics of Mathematics and Teacher Training in STEM and

Interdisciplinarity (2021 SGR 00360) and Research Group Inclusive Mathematics Education and Democracy (IMED) at Norwegian University of Science and Technology (NTNU).

References

BLANCO-ÁLVAREZ, H. **Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática.** Doctorado—Granada: Universidad de Granada, 25 abr. 2017.

BLANCO-ÁLVAREZ, H.; FERNÁNDEZ-OLIVERAS, A.; OLIVERAS, M. L. **Evaluación de una clase de matemáticas diseñada desde la etnomatemática**. (J. M. Contreras et al., Eds.). Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico. **Anais**...Granada: Universidad de Granada, 2017a.

BLANCO-ÁLVAREZ, H.; FERNÁNDEZ-OLIVERAS, A.; OLIVERAS, M. L. Medidas de capacidad volumétrica no convencionales: aportes a la Educación Primaria. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, Barcelona, v. 10, n. Extra, p. 2071–2078, abr. 2017b.

BREDA, A. **A utilização da Etnomatemática nos cursos de formação continuada de professores: um ensaio analítico sobre a produção de subjetividades**. Mestrado—Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul., mar. 2011.

BREDA, A. Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 34, n. 66, p. 69–88, 2020. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

BREDA, A.; DO ROSÁRIO LIMA, V. M.; GUIMARÃES, G. T. D. A Etnomatemática nos cursos de formação continuada de professores: implicações das regularidades discursivas e das relações de poder na produção de subjetividades. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática**, Pasto, v. 5, n. 1, p. 116–148, 1 fev. 2012.

BREDA, A.; FONT, V.; DO ROSÁRIO LIMA, V. M. A noção de Idoneidade Didática e seu uso na formação de professores de Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 1–41, 2015.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

BREDA, A.; LIMA, M. DO R. V. Etnomatemática sob dois pontos de vista: a visão "D'Ambrosiana" e a visão Pós-Estruturalista. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática**, Pasto, v. 4, n. 2, p. 4–31, 5 set. 2011.

BREDA, A.; PINO-FAN, L. R.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 13, n. 6, p. 1893–1918, 2017. DOI: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

CALLE, E. **Reflexión en la formación de profesores de matemáticas de Ecuador sobre la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar**. Doctorado—Barcelona: Universitat de Barcelona, 3 mar. 2023.

CALLE, E.; BREDA, A.; FONT, V. Reflection on the Complexity of Mathematical Objects in the Initial Training of Teachers. **Journal of Higher Education Theory and Practice**, [s.l], v. 21, n. 13, p. 197–214, 2021. DOI: https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801

CALLE, E.; BREDA, A.; FONT, V. Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por docentes en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. **Uniciencia**, Heredia, v. 37, n. 1, p. 1–23, 2023. DOI: https://doi.org/10.15359/ru.37-1.1

D'AMBOSIO, U. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Ática, 1998.

D'AMBROSIO, U. O Programa Etnomatemática: uma síntese. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 1, p. 7–16, 2008.

D'AMBROSIO, U. Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática**, Pasto, v. 7, n. 2, p. 100–107, 2014.

DOMITE, M. DO C. S. Da compreensão sobre formação de professores e professoras numa perspectiva etnomatemática. Em: KNIJINIK, G.; WANDERER, F. O. C. J. (Eds.). **Etnomatemática: currículo e formação de professores**. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004. p. 419–431.

FERNÁNDEZ-OLIVERAS, A.; BLANCO-ÁLVAREZ, H.; OLIVERAS, M. L. Aplicación de un Instrumento para Valorar la Idoneidad Didáctica Etnomatemática a una Propuesta de Enseñanza-Aprendizaje sobre Patrones de Medida No Convencionales. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1845–1875, 5 jan. 2022. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a28

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97–124, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

FONT, V.; PINO-FAN, L. R.; BREDA, A. Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. **Paradigma**, Maracay, v. XLI, p. 107–129, 2020. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p107-129.id846

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y aprendizaje**, [s.l], v. 33, n. 1, p. 89–105, 2010. DOI: https://doi.org/10.1174/021037010790317243

GERDES, P. **Etnomatemática: Cultura, matemática, educação: colectânea de textos**. [s.l.] Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GERDES, P. Etnomatemática e educação matemática: uma panorâmica geral. **Quadrante**, Lisboa, v. 5, n. 2, p. 105–138, 1996.

GODINO, J. D. Categories for analyzing the knowledge of mathematics teachers. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s.l], v. 20, p. 13–31, 2009.

GODINO, J. D. **Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática**. (A. Estepa et al., Eds.) Investigación en Educación Matemática XVI. **Anais**...Universidad de Granada, 2012.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San Pedro, v. 8, n. 11, p. 111–132, 2013. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, Hamburg, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 37–42, 2019.

KNIJNIK, G. **Exclusão resistência: educação matemática e legitimidade cultural**. [s.l.] Artes Médicas, 1996.

MALASPINA, U. **The creation of problems as a means to enhance the articulation of skills and knowledge of the mathematics teacher**. (J. M. Contreras et al., Eds.). Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. **Anais**...Granada: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html, 2017.

MALASPINA, U.; FONT, V. The role of intuition in the solving of optimization problems. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 75, n. 1, p. 107–130, 2010. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-010-9243-8

MALASPINA, U.; TORRES, C.; RUBIO, N. How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. In: **Mathematical Problem Solving**. [s.l.] Springer, 2019. p. 133–151.

MORALES-GARCIA, L.; RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Medidas no convencionales en libros de texto mexicanos. Un análisis desde la Etnomatemática y el enfoque Ontosemiótico. **Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, v. 11, n. 1, p. 33–70, 24 fev. 2022. DOI: https://doi.org/10.17583/redimat.8646

MORALES-LÓPEZ, Y.; FONT, V. Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 45, p. 1–19, 1 abr. 2019. DOI: https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

MOREIRA, C. B.; GUSMÃO, T. C. R. S.; FONT, V. Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento da Percepção de Espaço na Educação Infantil: potencialidades e limites. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 231–254, 1 jan. 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a12

MOREIRA, D. **A Etnomatemática e a formação de professores**. [s.l.] Universidade Aberta, 2004.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Principles and Standards**. [s.l.] Reston, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Principles to action: Ensuring mathematical success for all**. [s.l.] Reston. National Council of Teachers of Mathematics., 2014.

OLIVERAS, M. L.; GAVARRETE, M. E. Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, v. 15, n. 3, p. 339–372, 2012.

OLIVERAS, M. L.; GODINO, J. D. Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática**, Pasto, v. 8, n. 2, p. 432–449, 2015.

PINO-FAN, L. R. et al. Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **Paradigma**, Maracay, v. 34, n. 2, p. 129–150, 2013.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87–109, 2015.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 21, n. 1, p. 63–94, 12 mayo 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Explorando las conexiones entre sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas en el municipio de Baranoa. **IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH**, Chihuahua, n. 11, p. 857, 2020. DOI: https://doi.org/10.33010/ierierediech.v11i0.857

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A. Conexiones etnomatemáticas entre conceptos geométricos en la elaboración de las tortillas de Chilpancingo, México. **Revista de investigación, desarrollo e innovación**, Tunja, v. 11, n. 2, p. 273–296, set. 2021. DOI: https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n2.2021.12756

RONDERO, C.; FONT, V. Articulation of the mathematical complexity of the arithmetic mean. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 33, n. 2, p. 29–49, 2015. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

ROSA, M. Currículo e matemática: algumas considerações na perspectiva etnomatemática. **Plures Humanidades**, Ribeirão Preto, v. 6, n. 6, p. 81–96, 2005.

SALA-SEBASTIÀ, G. et al. Didactic–Mathematical–Computational Knowledge of Future Teachers When Solving and Designing Robotics Problems. **Axioms**, Basel, v. 12, n. 2, p. 119, 2023. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms12020119

SALA-SEBASTIÀ, G.; BREDA, A.; FARSANI, D. Future early childhood teachers designing problem-solving activities. **Journal on Mathematics Education**, Bukit Besar, v. 13, n. 2, p. 239–256, 2022. DOI: https://doi.org/10.22342/jme.v13i2.pp239-256

SÁNCHEZ, A. et al. ¿Qué errores detectan los futuros profesores en las clases de matemáticas que imparten? **Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI)**, Barcelona, n. 5, p. 1–13, 2021.

TORRES, C. **Developing Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of a Problem-Posing Strategy and the Quality of Posed Mathematical Problems**. (K. O. Villalba-Condori et al., Eds.). Education and Technology in Sciences: First International Congress. **Anais**...Arequipa: Springer, 10 dez. 2020.

TUMIALÁN BONILLA, M. DEL C. et al. Un estudio de la educación matemática, intercultural y bilingüe en Sudamérica: una perspectiva etnomatemática. **Journal of Mathematics and Culture**, [s.l], v. 12, p. 1–27, 2018.

Authors
Adriana Breda
Bachelor's degree in Mathematics and Actuarial Sciences from the Federal University of Rio Grande do Sul
Master's degree in Science and Mathematics Education from the Pontifical Catholic University of Rio Grande do Sul
PhD in Science and Mathematics Education from the Pontifical Catholic University of Rio Grande do Sul
Professor and researcher at the University of Barcelona
Didactics of mathematics and teacher training in STEM and interdisciplinarity (2021 SGR 00360). Line of research in teacher training.
adriana.breda@ub.edu
https://orcid.org/ 0000-0002-7764-0511

Eulalia Calle
Degree in Mathematics and Physics from the University of Cuenca.
Master's Degree in Didactics and Curriculum for Higher Education from the Technical University of Ambato.
Master's Degree in Didactics of Mathematics from the University of Cuenca.
PhD in Didactics of Sciences, Languages, Arts and Humanities from the University of Barcelona
Professor and researcher at the University of Cuenca
Line of research in teacher training.
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-9526-8832

Danyal Farsani
Bachelor's degree in Mathematics a from Coventry University
PhD in Education (focusing in Mathematics Education) from the University of Birmingham
Associate Professor at the Norwegian University of Science and Technology
danyal.farsani@ntnu.no
https://orcid.org/0000-0002-9412-3161

Sikunder Ali
Bachelor’s degree in Applied Mathematics with Philosophy from University of Karachi, Sindh Pakistan
Master’s degree in Applied Mathematics from University of Karachi, Sindh Pakistan
PhD in Mathematics Education from Aalborg University, Denmark
Associate Professor, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Norway
Research Group: Inclusive Mathematics Education and Democracy (IMED)
IMED – Research – Department of Teacher Education - NTNU (Cristin)
sikunder.ali@ntnu.no
https://orcid.org/0000-0002-5364-6521

Solomon A. Tesfamicael
Bachelor's degree in Education, Mathematics, and Physics, Bahir Dar University in Ethiopia
Master's degree in Mathematics and Ph.D. in Signal Processing at the Norwegian University of Science and Technology (NTNU)
Attended Practice Pedagogics Education at NTNU and engaged in Mathematics Education research.
solomon.a.tesfamicael@ntnu.no
https://orcid.org/0000-0002-5159-123X

Arindam Bose
Bachelor's degree in Mathematics from Patna University with a specialization in Numerical analysis
Master's degree is in Mathematics from University of Madras
PhD is in Mathematics Education from Tata Institute of Fundamental Research (TIFR), Mumbai, India
Post-Doctoral Research in Language diversity and mathematics learning from University of South Africa (UNISA), Pretoria, SA
Associate Professor, Centre of Excellence in Teacher Education, Tata Institute of Social Sciences (TISS), Mumbai, India
arindam.bose@tiss.edu
https://orcid.org/0000-0003-2209-2092

How to cite the article:

BREDA, A.; CALLE, E.; FARSANI, D.; ALI, S.; TESFAMICAEL, S. A.; BOSE, A. Didactic-mathematical knowledge of future mathematics teachers of Ecuador when developing a task based on ethnomathematical practices. **Revista Paradigma, Vol. XLIV, Edição Temática: EOS. Cuestiones y Métodos;** junio de 2023 / 539 - 567. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p539-567.id1406

Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma
Depósito Legal AR2019000054

10.37618 ISSN 1011-2251 E - ISSN 2665-0126

Volumen XLIV
Edición Temática N⁰ 2
***Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS)*: Cuestiones y Métodos**
Junio de 2023